Dirac特征值问题的特征展开
定理的一个证明

李梦如  乔志军
(郑州大学)  (辽宁大学)

摘 要 本文用留数方法讨论了有限区间上Dirac特征值问题的一些基本问题，证明了函数向量按特征函数向量展开为广义富氏级数的定理。

关键词 Dirac特征值问题；留数方法；特征展开。

Dirac方程组是量子力学的基本方程之一，研究它的特征值问题具有重要意义。文献(1)对它的一种形式在有限区间上的特征函数展开定理给出了两种证明。一种用的是差分方程的方法，一种用的是积分方程的方法。本文对Dirac另一种形式在有限区间上的特征函数展开定理给出一个证明，用的是留数方法。这种方法的优点在于便于进一步讨论非自伴情形下的特征函数展开定理和获得特征值的迹公式，我们将另文讨论此二问题。

下述方程组称为Dirac方程组：
\[ \begin{align*}
 y_1' + p(x) y_1 + q(x) y_2 &= \lambda y_1, \\
 -y_1' + q(x) y_1 - p(x) y_2 &= \lambda y_2
\end{align*} \] (1)

本文始终假设p(x)，q(x) ∈ C([0, π])，并研究(1)在以下自伴条件下的特征值问题
\[ \begin{align*}
 y_1(0) \sin \alpha + y_2(0) \cos \alpha &= 0, \\
 y_1(\pi) \sin \beta + y_2(\pi) \cos \beta &= 0.
\end{align*} \] (2)

其中 \(\alpha, \beta\) 为常数。为简便计，引入以下记号：
\[ L = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} + ( q/p ) \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \]

\( t_1 Y = y_1(0) \sin \alpha + y_2(0) \cos \alpha, \quad t_2 Y = y_1(\pi) \sin \beta + y_2(\pi) \cos \beta, \)

问题(1) + (2) 可简写为
(\(E\)): \( L Y = \lambda Y, \quad t_1 Y = 0, \quad t_2 Y = 0. \)

再记 \( F = \{ f = (f_1(x), f_2(x)) | f_1(x), f_2(x) \in C([0, \pi]), t_1 f = 0, t_2 f = 0 \} \).

本文证明(\(E\))有可列个特征值，\( F \) 中的元素都可按(\(E\))的特征函数展开为广义富氏级数。

本文1992年10月19日收到
1 Cauchy问题解的估计

考虑Cauchy问题:

\[(C_0): \quad \dot{\varphi} = \lambda \varphi, \quad \varphi_1(0) = \cos \alpha, \quad \varphi_2(0) = -\sin \alpha; \quad (1.1)\]

\[(C_\times): \quad \dot{\chi} = \lambda \chi, \quad \chi_1(\pi) = \cos \beta, \quad \chi_2(\pi) = -\sin \beta. \quad (1.2)\]

其中 \( \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T, \quad \chi = (\chi_1, \chi_2)^T. \)

命题1.1 \((C_0)\)和\((C_\times)\)的解\(\varphi\)和\(\chi\)的分量为\(\lambda\)的整函数.

证明 以\(\varphi\)为例，关于\(\chi\)的证明可类似进行.

\[\varphi_1(x, \lambda) = \cos(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-i}{|\lambda|}} \quad (1.3)\]

\[\varphi_2(x, \lambda) = -\sin(\lambda x - \alpha) + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{i}{|\lambda|}}. \quad (1.4)\]

其中 \(\lambda = \sigma + i\tau.\)

证明 以\(\varphi\)为例.

（1.1）与下面积分方程等价:

\[\varphi_1(x, \lambda) = \cos(\lambda x - \alpha) + \int_0^x \{ \cos(q(t)\varphi_1(t, \lambda) - \rho(t)\varphi_2(t, \lambda)) \cos(\lambda x - t) + \sin(\lambda x - t) \} dt, \quad (1.5)\]

\[\varphi_2(x, \lambda) = -\sin(\lambda x - \alpha) + \int_0^x \{ \cos(q(t)\varphi_1(t, \lambda) - \rho(t)\varphi_2(t, \lambda)) \sin(\lambda x - t) - \sin(q(t)\varphi_1(t, \lambda) + \rho(t)\varphi_1(t, \lambda)) \cos(\lambda x - t) \} dt. \quad (1.6)\]

令 \(\varphi_1 = \psi_1 e^{-\frac{i}{\lambda}t}, \quad \varphi_2 = \psi_2 e^{-\frac{i}{\lambda}t}\)，则上述方程化为:

\[\psi_1 = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{i\alpha}{\lambda x - t}} + e^{\frac{i\alpha}{\lambda x + t}} \right) + \frac{1}{2} \int_0^x (q + ip)\psi_1 + ip\psi_2 dt + \frac{1}{2} \int_0^x (q - ip)\psi_1 - ip\psi_2 dt. \]
\[\phi(t) = \frac{1}{2} \left( e^{i\lambda(t-x)} - e^{-i\lambda(t-x)} \right) - \frac{1}{2} \int_0^t (q + ip') \phi(t) + i \left( \phi(t) + i \phi(t) \right) \, dt + \left( \frac{i}{2} \right) \int_0^t (q - ip') \phi(t) \, dt \]

再令 \( \phi_1 = \phi_1 - i \phi_2 \), \( \phi_2 = \phi_1 + i \phi_2 \), 则有

\[\phi_1 = e^{\lambda t} + \int_0^t (q + i p') \phi_2 \, dt\]

\[\phi_2 = e^{i\lambda(t-x)} + \int_0^t (q - i p') \phi_1 \, dt\]

先设 \( \lambda = \sigma + i \tau \), \( \tau \geq 0 \), 则有 \(|e^{\lambda t}| \leq |e^{-2\pi t}| \leq 1 \). 故

\[|\phi_1| \leq 1 + \int_0^t M |\phi_2| \, dt\]

\[|\phi_2| \leq 1 + \int_0^t M |\phi_1| \, dt\]

这里，\( M = \max |q + ip| \).

从而，\(|\phi_1| + |\phi_2| \leq 2 + M \int_0^t (|\phi_1| + |\phi_2|) \, dt\). 由Bellman引理2.

\[|\phi_1| + |\phi_2| \] 有界，\( |\phi_1| \), \( |\phi_2| \) 也都有界. 由此，\( \phi_1 = 0 \left( e^{\sigma t} \right), \phi_2 = 0 \left( e^{\sigma t} \right) \).

对 (1.5), (1.6) 进行分部积分使得所要证明的 (1.3). 对于 \( \tau < 0 \), \( \phi \) 的共轭 \( \phi^* \) 必满足

\[\phi_1^* + \rho \phi_2^* + q \phi_2^* = \lambda^* \phi_1^*, \quad \phi_2^*(0) = \cos \alpha, \]

\[-\phi_1^* + q \phi_2^* + \rho \phi_2^* = \lambda^* \phi_2^*, \quad \phi_2^*(0) = -\sin \alpha.\]

此时 \( \lambda^* = \sigma + i(-\tau), \quad -\tau > 0 \). 对 \( \phi_1^* \) 有

\[\phi_1^* = \cos(\lambda^* t - \alpha) + \frac{1}{|\lambda^*|} e^{i\tau t} \]

从而

\[\phi_1 = \cos(\lambda^* t - \alpha) + \frac{1}{|\lambda^*|} e^{i\tau t} \]

总之无论 \( \tau \) 如何一定有

\[\phi_1 = \cos(\lambda^* t - \alpha) + 0\left( \frac{1}{|\lambda^*|} e^{i\tau t} \right) \]

其它三式证明类似.

**命题1.3** 记 \( \varphi \) 与 \( \chi \) 的Wronski行列式 \( W(\varphi, \chi) = \varphi_1 \chi_2 - \varphi_2 \chi_1 = \omega(\lambda) \). \( \lambda \) 是 (E) 的特征值的充要条件是 \( \lambda = \omega(\lambda) \) 的零点.

**证明** 由于 \( L \) 的第二项矩阵的迹为零，故 \( W(\varphi, \chi) \) 与 \( \chi \) 无关，只与 \( \lambda \) 有关，可记为 \( \omega(\lambda) \). 若 \( \lambda_0 \) 是 \( \omega(\lambda) \) 的零点，则 \( \varphi(x, \lambda_0) \) 与 \( \chi(x, \lambda_0) \) 线性相关，因而
命题 1.4 当 $\lambda \to \infty$ 时，$\omega(\lambda)$ 有以下渐近估计：

$$\omega(\lambda) = -\sin(\lambda \pi + \beta - \alpha) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

2. 特征值与特征函数的性质

引理 2.1 设 $f = (f_1, f_2)^T$, $g = (g_1, g_2)^T$, $f, g \in C^1$，则

$$\int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(x, \lambda) d\lambda \right] dt = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \phi(x, \lambda) d\lambda \right] dt$$

证明 直接计算即可验证。

引理 2.2 设 $\varphi(x, \lambda)$ 和 $\varphi(x, \lambda')$ 分别是 $(C_0)$ 对应于 $\lambda$ 和 $\lambda'$ 的解，即

$$(\lambda - \lambda') \int_0^\infty \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x, \lambda) \chi(x, \lambda') dx = -\frac{1}{\cos \beta} \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(\pi, \lambda) & \varphi_1(\pi, \lambda') \\ \varphi_2(\pi, \lambda) & \varphi_2(\pi, \lambda') \end{array} \right|$$

证明 在 (2.1) 中令 $f = \varphi(x, \lambda), g = \varphi(x, \lambda')$，注意到 $W \varphi(x, \lambda), W \varphi(x, \lambda') = \lambda \varphi(x, \lambda), \lambda' \varphi(x, \lambda')$。不妨设 $\cos \beta \neq 0$，如果 $\cos \beta = 0$，则 $\sin \beta = 0$，可证 (2.2) 的第二个等式成立，即

$$(\lambda - \lambda') \int_0^\infty \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x, \lambda) \chi(x, \lambda') dx = -\frac{1}{\cos \beta} \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(\pi, \lambda) & \varphi_1(\pi, \lambda') \\ \varphi_2(\pi, \lambda) & \varphi_2(\pi, \lambda') \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{\cos \beta} \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(\pi, \lambda) & \varphi_1(\pi, \lambda') \\ \varphi_2(\pi, \lambda) \sin \beta + \varphi_2(\pi, \lambda) \cos \beta & \varphi_2(\pi, \lambda') \sin \beta + \varphi_2(\pi, \lambda') \cos \beta \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{\cos \beta} \left| \begin{array}{cc} \varphi_1(\pi, \lambda) \\ \varphi_2(\pi, \lambda) \chi(x, \lambda) + \varphi_2(\pi, \lambda) \chi_1(\pi, \lambda) \end{array} \right|$$
作 者 : 李 梦 如 等

Dirac特征值问题的

一

伊 1 ( )  + 伊 2 ( )  = 1

后一等式可类似进行证明.

命题 2.1 (E)只有实特征值．相应于不同特征值的特征函数彼此正交，即：若λ，与
λ 1 为不同特征值，ψ(x, λ)和ψ(x, λ 1 )为相应的特征函数，则

\[ \int_0^\pi \psi^*(x, \lambda) \psi(x, \lambda_1) \, dx = 0. \]

证明 L 可视为定义域是F的算子，由引理 2.1，L 是对称的，即：若定义内积：

\[ (f, g) = \int_0^\pi f^* \, g \, dx, \]

则 (Lf, g) = (f, Lg).

由泛函知识知L的特征值必为实数，且对应于不同特征值的特征函数正交.

引理 2.3 设 \( \gamma = \pm \pi \), \( \alpha \in \mathbb{Z} \), \( \lambda = (\pi - \alpha)/\pi \), 则

\[ e^{i\pi \tau}/|\sin(\lambda \pi + \beta - \alpha)| \leq 2, \quad \text{当} \quad \tau = R_n. \]

\[ e^{i\pi \tau}/|\sin(\lambda \pi + \beta - \alpha)| \leq 2/(1 - e^{-\tau}), \quad \text{当} \quad \tau \geq 1/2. \]

证明 \( |\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \). 当 \( \sigma = R_n \) 时，

\[ |\sin(\lambda \pi + \beta - \alpha)|^2 = 1 + \sinh^2 x, \quad \text{当} \quad \sigma = R_n, \]

则

\[ |\sin(\lambda \pi + \beta - \alpha)| = 1 + \sinh^2 x. \]

当 \( |\tau| \geq 1/2 \) 时，

\[ |\sin(\lambda \pi + \beta - \alpha)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 x, \quad \text{当} \quad |\tau| \geq 1/2. \]

命题 2.2 (E) 有可列个离散的特征值．

证明 记 \( \Omega(\lambda) = -\sin(\lambda \pi + \beta - \alpha), \) 由 (1.7) 对大 \( |\lambda| \) 有

\[ \frac{\omega(\lambda)}{\Omega(\lambda)} = 1 + 0 \left( \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{e^{i\pi \tau}}{|\sin(\lambda \pi + \beta - \alpha)|} \right). \]

记 \( l_n \) 为一矩形，其四个顶点为：\( R_n(1 \pm i), R_{-n}(1 \pm i), n \in \mathbb{Z} \). 由引理 2.3 在 \( l_n \) 上

\[ \omega(\lambda)/\Omega(\lambda) = 1 + 0 \left( \frac{1}{n} \right) \quad (2.3) \]
由复变函数中的 Rouche 定理，在 \( f \) 内 \( \omega(\lambda) \) 与 \( \Omega(\lambda) \) 有相同个数的零点。如果 \( \omega(\lambda) \) 仅有单重零点，则 \( \omega(\lambda) \) 在 \( f \) 内有 \( 2n + 1 \) 个零点。如果 \( \omega(\lambda) \) 在 \( f \) 内有 \( n \) 个零点，且 \( n \) 是正整数，则 \( \omega(\lambda) \) 有可列个零点。又因 \( \omega(\lambda) \) 为整函数，不恒等于零，故 \( \omega(\lambda) \) 的零点没有有限极限点。否则由解析函数唯一性定理 \( \omega(x) \equiv 0 \)。下面证明 \( \omega(\lambda) \) 仅有单重零点。事实上，由引理 2.2

\[
\int_0^\infty \frac{\varphi^T(x, \lambda) \varphi(x, \lambda') dx}{\cos \beta} = \begin{vmatrix}
\frac{\varphi_1(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} & \frac{\varphi_1(x, \lambda') - \varphi_1(x, \lambda)}{\lambda' - \lambda} \\
\frac{\varphi_1(x, \lambda') - \varphi_1(x, \lambda)}{\lambda' - \lambda} & \frac{\omega(\lambda') - \omega(\lambda)}{\lambda' - \lambda}
\end{vmatrix}
\]

令 \( \lambda' \to \lambda \) 得

\[
\int_0^\infty \frac{\varphi^T(x, \lambda) \varphi(x, \lambda') dx}{\cos \beta} = \begin{vmatrix}
\frac{\varphi_1(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} & \frac{\varphi_1(x, \lambda') - \varphi_1(x, \lambda)}{\lambda' - \lambda} \\
\frac{\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda')}{\lambda' - \lambda} & \frac{\omega(\lambda') - \omega(\lambda)}{\lambda' - \lambda}
\end{vmatrix}
\]

此处 \( \varphi_1(x, \lambda) = \frac{\partial \varphi_1(x, \lambda)}{\partial \lambda} \)，\( \omega'(\lambda) = \frac{d\omega(\lambda)}{d\lambda} \)。若 \( \lambda_0 \) 是 \( \omega(\lambda) \) 的 \( k \) 重零点，

\( k \geq 2 \)，则 \( \omega(\lambda_0) = \omega'(\lambda_0) = 0 \)，故左端大于零，右端等于零，矛盾。综上所述，即知命题成立。

命题 2.3 设 \( \lambda \) 是 \( E \) 的特征值，则存在 \( K_n \)，使

\[
\chi(x, \lambda_n) = K_n \chi(x, \lambda_n)
\]

将 \( \lambda = \lambda_n \) 代入（2.4）中，注意

\[
\varphi_1(x, \lambda) = K_n^{-1} \chi_1(x, \lambda_n) = K_n^{-1} \cos \beta
\]

即得（2.5）。

3 特征展开定理

定义 \( E \) 的 Green 矩阵如下：

\[
G(x, y, \lambda) = \begin{cases}
\frac{1}{\omega(\lambda)} \left( \begin{array}{cc}
\varphi_1(y, \lambda) \chi_1(x, \lambda) & \varphi_2(y, \lambda) \chi_1(x, \lambda) \\
\varphi_1(y, \lambda) \chi_2(x, \lambda) & \varphi_2(y, \lambda) \chi_2(x, \lambda)
\end{array} \right), & y < x, \\
\frac{1}{\omega(\lambda)} \left( \begin{array}{cc}
\varphi_1(x, \lambda) \chi_1(y, \lambda) & \varphi_2(x, \lambda) \chi_1(y, \lambda) \\
\varphi_1(x, \lambda) \chi_2(y, \lambda) & \varphi_2(x, \lambda) \chi_2(y, \lambda)
\end{array} \right), & y > x.
\end{cases}
\]

定理 3.1 设 \( \lambda \) 不是 \( E \) 的特征值，则对任一 \( f \in C(0, \pi) \)，问题
在 $F$ 中有唯一解

$$f ( x, \lambda, f ) = \int_{x}^{\infty} G ( x, y, \lambda ) f ( y ) dy$$  \quad (3.3)$$

证明 可直接验证 $\Phi$ 满足 (3.2)。实际上,

$$\Phi ( x, \lambda, f ) = \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{1} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy + \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{2} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy$$

记 $\Phi = ( \Phi _{1}, \Phi _{2} )$, $\varphi _{1} = ( \sin \alpha + \Phi _{0} ( 0 ) \cos \alpha ) = \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{2} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy$.

$$\Phi _{1} = \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \lambda x_{1} - \rho x_{1} - \lambda x_{2} \right) f ( y ) dy + \varphi _{2} \left( x, \lambda \right) = \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{2} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy$$

即 $\Phi _{1} + q \varphi _{2} = \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{2} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy$.

同样可得另一等式.

假设 (3.2) 有两个解 $\varphi _{1}$ 和 $\varphi _{2}$, 则 $\varphi = \varphi _{1} \text{ 满足 (E)}$, 因 $\varphi$ 不是特征值, 故 $\varphi = \varphi _{1} = 0$. 即 $\Phi = \varphi$, 唯一性成立.

命題 3.2 当 $f \in F$ 时, 若 $\lambda \neq 0$, 则有

$$\Phi ( x, \lambda, f ) = \frac{1}{\lambda} f + \frac{1}{\lambda} \Phi ( \lambda, f )$$  \quad (3.4)$$

证明 注意到引理 2.1. $L \varphi = \lambda \varphi$, $L x = \lambda x, f \in F$.

$$\Phi ( x, \lambda, f ) = \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{1} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy + \varphi _{1} ( x, \lambda ) \left( x, \lambda \right) L f ( y ) dy$$

$$= \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{2} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy + \varphi _{2} ( x, \lambda ) \left( x, \lambda \right) L f ( y ) dy$$

$$= \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{1} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy + \varphi _{1} ( x, \lambda ) \left( x, \lambda \right) L f ( y ) dy$$

$$+ \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{2} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy + \varphi _{2} ( x, \lambda ) \left( x, \lambda \right) L f ( y ) dy$$

$$= \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{1} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy + \varphi _{1} ( x, \lambda ) \left( x, \lambda \right) L f ( y ) dy$$

$$+ \frac{1}{\omega ( \lambda )} \int_{0}^{\infty} \left( \varphi _{2} ( x, \lambda ) f ( y ) \right) dy + \varphi _{2} ( x, \lambda ) \left( x, \lambda \right) L f ( y ) dy$$
\[ \frac{\lambda}{\omega(\lambda)} \left( \chi_1(x, \lambda) \frac{1}{2} \int_0^r (\varphi^T f_1(y)dy + \varphi_1(x, \lambda) \int_0^r (x^T f(y)dy) \right) \\
+ \frac{1}{\omega(\lambda)} \left( \chi_1(x, \lambda) \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(x, \lambda) \chi_2(x, \lambda) f_1(x) \right) \\
= \lambda \Phi(x, \lambda, \theta) - (f_1(x), f_2(x))^T. \]

从而 (3.4) 成立。

命题3.3 \( \Phi(x, \lambda, f) \) 是 \( \lambda \) 的亚纯函数，其极点 \( \lambda_n \) 唯为 \( (E) \) 的特征值，都是单重的。在 \( \lambda_n \) 处的留数为

\[ \text{Res} \Phi(x, \lambda, f) = f_n \psi_n(x), \] (3.5)

其中，\( f_n = (f_n \psi_n) = \int_0^r f^T(x) \psi_n(x)dx \).

\( \psi_n(x) = \frac{\sqrt{K_n}}{\omega(\lambda_n)} \varphi(x, \lambda_n), K_n \) 意义如命题2.2所述。

证明 由 \( \Phi \) 的定义式，\( \varphi, \chi \) 和 \( \omega \) 都是 \( \lambda \) 的整函数，故 \( \Phi \) 为 \( \lambda \) 的亚纯函数，其极点与 \( \omega(\lambda) \) 的零点重合，恰为 \( (E) \) 的特征值。\( \omega(\lambda) \) 的零点均是单重，故 \( \Phi \) 的极点也为单重。注意到 \( \omega(\lambda_n) = 0 \).

\[ \text{Res} \Phi_1(x, \lambda, f) = \lim_{\lambda \to \lambda_n} \frac{\lambda - \lambda_n}{\omega(\lambda) - \omega(\lambda_n)} \left( \chi_1(x, \lambda) \frac{1}{2} \left[ \varphi^T \left( x, \lambda \right) f_1(y)dy \right) \right) \]

\[ + \varphi_1(x, \lambda) \int_0^r x^T(y, \lambda) f(y)dy \right) \]

\[ = (K_n \varphi_2(x, \lambda_n)/\omega(\lambda_n)) \int_0^r \varphi(y, \lambda_n)dy \]

\[ = \psi_n(x) \int_0^r \varphi_n(y)dy = f_n \psi_n(x). \]

同样可证 \( \text{Res} \Phi_2(x, \lambda, f) = f_n \psi_2(x). \) 总之 (3.5) 成立。

命题3.4 设 \( f(x) \in C(0, \pi) \)，对于 \( \lambda \in I_n \) 当 \( |\lambda| \to \infty \) 时，\( \Phi(x, \lambda, f) = 0 \frac{1}{f_n} \).

证明 注意到 \( \sin(\lambda x - \alpha) \leq e^{-\delta x}, \cos(\lambda x - \alpha) \leq e^{-\delta x}, \)

\[ \cos(\lambda(\pi - x) + \beta) \leq e^{-|\pi - x|}, \sin(\lambda(\pi - x) + \beta) \leq e^{-|\pi - x|}. \]

可知

\[ \int_0^r \varphi_1(y, \lambda) f_1(y)dy \leq M_1 \int_0^r \varphi_1(y, \lambda)dy, \]

再由 (1.3) 式知 \( \int_0^r \varphi_1(y, \lambda) f_1(y)dy = 0 \left( \frac{1}{|x|} - e^{-\delta|x|} \right) \) 同样可知
作 者 : 李 梦 如 等  

Dirac 特 征 值 问 题 的 … 证 明  

\[ \int_0^\infty \varphi_2(y, \lambda) f_2(y) dy = 0 \left( \frac{1}{\pi} e^{i\lambda y} \right), \]

\[ \int_0^\infty x_1(y, \lambda) f_1(y) dy = 0 \left( \frac{1}{\pi} e^{i(y-\lambda)} \right), \]

\[ \int_0^\infty x_2(y, \lambda) f_2(y) dy = 0 \left( \frac{1}{\pi} e^{i(y-\lambda)} \right). \]

将 上 面 估 计 式 及 \( \omega(\lambda) \) 在 \( I_\lambda \) 上 的 估 计 式（参 见 命 题 2.2 的 证 明）

\[ \frac{1}{\omega(\lambda)} = \frac{1}{\Omega(\lambda) + 1 + 0 \left( \frac{1}{\lambda} \right)} = e^{i\lambda} \left( \frac{e^{-i\lambda}}{-\sin(\lambda\pi + \beta - \alpha)} \right). \]

\[ \cdot \left( 1 + 0 \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right) = 0 \left( e^{-i\lambda} \right) \]

起 代 入 \( \Phi_1(x, \lambda, f) \) 的 定 义 式 可 得:

\[ \Phi_1(x, \lambda, f) = 0 \left( e^{i\lambda} \cdot \frac{1}{\pi} e^{i\lambda} \right) = 0 \left( \frac{1}{\lambda} \right). \]

在 \( I_\lambda \) 上，0 \left( \frac{1}{\lambda} \right) = 0 \left( \frac{1}{\pi} \right)。同 样 可 证 \( \Phi_2(x, \lambda, f) = 0 \left( \frac{1}{\pi} \right) \).

定 理 3.5 设 \( f \in F \)，则 \( f \) 可 按 \( \varphi_n \) 展 开 为 一 致 收 敛 的 级 数:

\[ f = \sum_{n=1}^{\lambda} f_n \varphi_n(x), \quad f_n = \int_\varphi \varphi^T(y) \varphi(x) dy. \tag{3.6} \]

证 明 当 \( \lambda \in I_\lambda \) 时，对于 大 \( n \)，有

\[ \Phi(x, \lambda, Lf) = 0 \left( \frac{1}{\pi} \right) \]

\[ \Phi \frac{1}{\lambda} \Phi(x, \lambda, Lf) d\lambda = 0 \left( \frac{1}{\pi} \right). \]

对 于 (3.4) 式 两 边 沿 \( I_\lambda \) 积 分。对 于 大 \( n \)，有

\[ \sum_{k=1}^{2n+1} \text{Res} \Phi(x, \lambda, Lf) = f(x) + 0 \left( \frac{1}{\pi} \right) \]

再 由 命 题 3.3 \[ \sum_{k=1}^{2n+1} f_k \varphi_k(x) = f(x) + 0 \left( \frac{1}{\pi} \right) \]

取 \( n \to \infty \) 即 得 所 证。

注：可 按 通 常 方 法 证 明 \( f \in L_2 \) 时 的 \( L_2 \) 展 开。由 于 篇 幅 所 限，不 再 讨 论。
A Proof of Eigenexpansion Theorem for Dirac Eigenvalue Problem

Li Mengru
Department of Mathematics, Zhengzhou University

Qiao Zhijun
Department of Mathematics, Liaoning University

Abstract Some essential properties of Dirac eigenvalue problem on a finite interval are discussed with residue method. The theorem which function vector is expanded to become a generalized fourier series is proved according to eigenfunction vector.

Keywords Dirac eigenvalue problem, Residue method, eigenexpansion.