ΓΕΟΜΕΤΡΙΑ.

1) ΤΡΙΓΩΝΟ.

2) ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ — ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ.
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

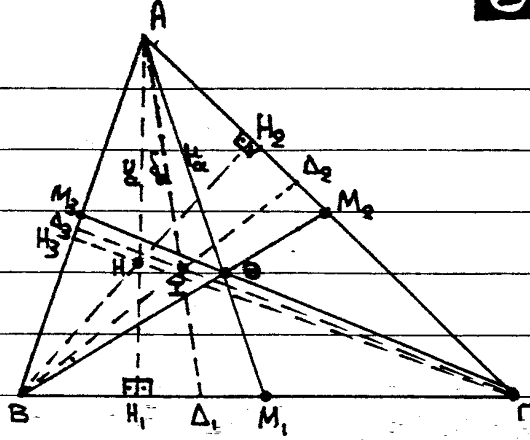
3) ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΑ.

4) ΚΥΚΛΟΣ

ΤΡΙΓΩΝΟ.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΚΥΡΙΑ		ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ		
ΠΛΕΥΡΕΣ	ΓΩΝΙΕΣ	ΔΙΧΟΤΟΜΟΙ	ΥΨΗ	ΔΙΑΜΕΣΟΙ
$ΒΓ = α$	$\hat{Α}$	$ΑΔ_1 = δ_α$	$ΑΗ_1 = υ_α$	$ΑΜ_1 = μ_α$
$ΓΑ = β$	$\hat{Β}$	$ΒΔ_2 = δ_β$	$ΒΗ_2 = υ_β$	$ΒΜ_2 = μ_β$
$ΑΒ = γ$	$\hat{Γ}$	$ΓΔ_3 = δ_γ$	$ΓΗ_3 = υ_γ$	$ΓΜ_3 = μ_γ$



ΣΧΕΣΗ ΠΛΕΥΡΩΝ $\leftrightarrow |β-γ| < α < β+γ$.

ΣΧΕΣΗ ΓΩΝΙΩΝ $\leftrightarrow \hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ} = 180^\circ$.

ΣΧΕΣΗ ΠΛΕΥΡΩΝ-ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΓΩΝΙΩΝ $\leftrightarrow β>γ \Leftrightarrow \hat{Β}>\hat{Γ}$.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

$\hat{Α}_{εξ} = 180^\circ - \hat{Α} = \hat{Β}+\hat{Γ}$.

$\hat{Β}_{εξ} = 180^\circ - \hat{Β} = \hat{Α}+\hat{Γ}$.

$\hat{Γ}_{εξ} = 180^\circ - \hat{Γ} = \hat{Α}+\hat{Β}$.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

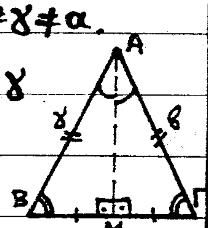
- $δ_α \cap δ_β \cap δ_γ = Ι \leftrightarrow$ Εγκεντρο.
- $υ_α \cap υ_β \cap υ_γ = Η \leftrightarrow$ Ορθόκεντρο.
- $μ_α \cap μ_β \cap μ_γ = Θ \leftrightarrow$ Βαρύκεντρο.

ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ.

1) ΣΚΑΛΗΝΟ $\Leftrightarrow α \neq β \neq γ \neq α$.

2) ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ $\Leftrightarrow β = γ$



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

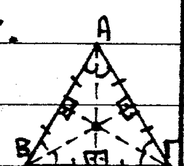
$\hat{Β} = \hat{Γ}$, $υ_α \equiv δ_α \equiv μ_α$.

$\hat{Α}_{εξ} = 2\hat{Β} = 2\hat{Γ}$, $\hat{Β}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ}$.

Ισχύουν και αντίστροφα.

Ειδικά στη 2η, αρκεί δύο μόνο από τα $υ_α, δ_α, μ_α$ να συμπίπτουν $\Rightarrow$ Ισοσκελές

3) ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ $\Leftrightarrow α = β = γ$.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

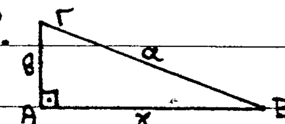
$\hat{Α} = \hat{Β} = \hat{Γ} = 60^\circ$, $\hat{Α}_{εξ} = \hat{Β}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ} = 120^\circ$,

$υ \equiv δ \equiv μ$ από κάθε κορυφή, $Η \equiv Ι \equiv Θ$.

ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ.

1) ΟΞΥΓΩΝΙΟ $\Leftrightarrow \hat{Α} < 90^\circ \wedge \hat{Β} < 90^\circ \wedge \hat{Γ} < 90^\circ$.

2) ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ $\Leftrightarrow \hat{Α} = 90^\circ$.



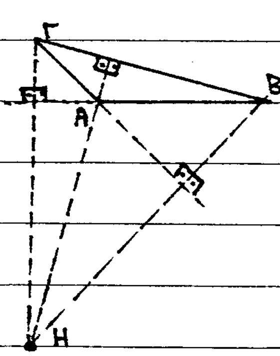
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$\hat{Β} < 90^\circ \wedge \hat{Γ} < 90^\circ$, $\hat{Β}+\hat{Γ} = 90^\circ$

$α > β \wedge α > γ$, $υ_β \equiv γ \wedge υ_γ \equiv β$, $Η \equiv Α$.

Άλλες ιδιότητες του ορθογωνίου βλέπε Φ.

3) ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ $\Leftrightarrow \hat{Α} > 90^\circ$.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$\hat{Β} < 90^\circ \wedge \hat{Γ} < 90^\circ$,

το Η είναι εκτός του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$.

ΙΣΟΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

$$\overset{\triangle}{ΑΒΓ} = \overset{\triangle}{Α'Β'Γ'} \Leftrightarrow \begin{cases} α = α', & β = β', & γ = γ'. \\ \hat{Α} = \hat{Α}', & \hat{Β} = \hat{Β}', & \hat{Γ} = \hat{Γ}'. \end{cases}$$

(Το αντίστροφο δεν χρησιμοποιείται, αφού έχουμε τα κριτήρια ισότητας Φυλ. 2)

Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΟΣ.

▼ Σε τυχαία τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$

1) Τρείς πλευρές ίσες ($\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$)

2) Δύο πλευρές ίσες και τη περιεχόμενη γωνία ίση. (π.χ. $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$).

3) Μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες. (π.χ. $\alpha=\alpha'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$).

4) Μια πλευρά ίση, την απέναντι γωνία ίση και μια προσκείμενη γωνία ίση. (π.χ. $\alpha=\alpha'$, $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$).

▼ Σε ορθογώνια τρίγωνα ($\hat{A}=\hat{A}'=90^\circ$).

1) Υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίσες. (π.χ. $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$)

2) Τις κάθετες πλευρές ίσες ($\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$).

3) Υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες. (π.χ. $\alpha=\alpha'$, $\hat{B}=\hat{B}'$).

4) Μια κάθετη πλευρά και την απέναντι οξεία γωνία. (π.χ. $\beta=\beta'$, $\hat{B}=\hat{B}'$)

5) Μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη οξεία γωνία. (π.χ. $\beta=\beta'$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$)

→ **Γενικά:** Αρκεί να έχουν (εκτός απο την ορθή) **δύο ακόμη στοιχεία ίσα απο τα οποία το ένα τουλάχιστον να είναι πλευρά.**

▼ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΤΡΙΓΩΝΑ.

1) $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, $\hat{A}>\hat{A}' \Longleftrightarrow \beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, $\alpha>\alpha'$

2) $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}' \Longrightarrow \hat{B}=\hat{B}' \vee \hat{B}+\hat{B}'=180^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

→ **Ρομβοειδές** λέγεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει **$AB=A\Delta \wedge \Gamma B=\Gamma\Delta$.** (δηλαδή δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ με την ίδια βάση ΒΓ)

① Σε Ρομβοειδές ΑΒΓΔ, δείξτε ότι:

1) Η διαγώνιος ΑΓ είναι και διχοτόμος των $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$.

2) » » » » » μεσοκάθετος στη ΒΔ.

② Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ).
Στις προεκτάσεις των ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α) παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα ΑΔ=ΑΕ. Αν $BE \cap \Gamma\Delta = \Sigma$ δείξτε ότι:

1) ΒΕ=ΓΔ. 2) ΣΕ=ΣΔ 3) Το Σ βρίσκεται στη διχοτόμο της $\hat{A}$.

③ Δίνεται γωνία $x\hat{O}\psi$ και στις πλευρές της Οx, Οψ τα σημεία Α,Β ώστε ΟΑ=ΟΒ. Αν η κάθετος στην Οx στο Α τέμνει την Οψ στο Γ και η κάθετος στην Οψ στο Β τέμνει την Οx στο Δ και $\Sigma = A\Gamma \cap B\Delta$, δείξτε ότι:

1) ΟΓ=ΟΔ, ΣΓ=ΣΔ, ΣΑ=ΣΒ. 2) Το Σ ανήκει στη διχοτόμο της $x\hat{O}\psi$.

3) Η ΟΣ είναι μεσοκάθετος των ΓΔ και ΑΒ.

(4) Πάνω στη διχοτόμο ΑΔ τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ παίρνουμε δύο σημεία Ε, Ζ ώστε $AE=AB$ και $AZ=A\Gamma$. Δείξτε ότι $BZ=\Gamma E$.

(5) Δύο τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ έχουν $\hat{A}+\hat{A}'=2^{L}$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$.
Δείξτε ότι: $\upsilon_\beta=\upsilon_{\beta'}$ και $\upsilon_\gamma=\upsilon_{\gamma'}$.

(6) Αν $A=A'$, $\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}$, $\delta_\alpha=\delta_{\alpha'}$, δείξτε ότι $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

(7) Τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχει: $\alpha=8\,cm$, $\hat{\Gamma}=2\hat{B}$, $\hat{B}+\hat{\Gamma}=120^\circ$
" $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ " : $\alpha'=8\,cm$, $\hat{\Gamma}'=2\hat{B}'$, $\hat{\Gamma}'-\hat{B}'=40^\circ$ $\rightarrow$ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

(8) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και σημείο Ρ εντός αυτού.
Στις προεκτάσεις των ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ παίρνουμε σημεία Α′, Β′, Γ′ αντίστοιχα ώστε $PA'=PA$, $PB'=PB$, $P\Gamma'=P\Gamma$. Δείξτε ότι $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

(9) Δείξτε ότι: τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του τριγώνου.

(10) Δύο ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ έχουν $\beta=\beta'$, $\mu_\beta=\mu_{\beta'}$.
Δείξτε ότι $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

(11) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και το μέσο Μ της ΒΓ.
Αν το Μ ισαπέχει από τις δύο άλλες πλευρές, δείξτε ότι το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

(12) Δείξτε ότι: δύο κορυφές τριγώνου ισαπέχουν από τη διάμεσο που αντιστοιχεί στη τρίτη κορυφή.

(13) Δίνονται τρεις ημιευθείες Οx, Οψ, Οz τέτοιες ώστε $x\hat{O}\psi=\psi\hat{O}z=z\hat{O}x$.
Πάνω στις Οx, Οψ, Οz παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα ώστε $OA=OB=O\Gamma$. Δείξτε ότι:
1) το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο
2) οι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ είναι συγχρόνως διχοτόμοι, ύψη και διάμεσοι του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, όταν προεκταθούν μέχρι τις πλευρές του.

(14) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και δύο σημεία Δ, Ε στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.
Αν $\Sigma=BE\cap\Gamma\Delta$ και $\Sigma B=\Sigma\Gamma$, $\Sigma\Delta=\Sigma E$, δείξτε ότι:
το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

(15) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και το μέσο Μ της ΒΓ.
Στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα ώστε $B\Delta=\Gamma E$. Αν $N=\Delta E\cap AM$, δείξτε ότι: $\Delta N=NE$ και $AN\perp\Delta E$.

(16) Δύο ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ έχουν $\hat{A}=\hat{A}'=1^L$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\delta_B=\delta_{B'}$. Δείξτε ότι $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

(17) Δύο ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ έχουν $\hat{A}=\hat{A}'=1^L$, $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$, $\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}$. Δείξτε ότι $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

(18) Δίνεται το κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ.
Δείξτε ότι: όλες οι διαγώνιές του είναι ίσες.

↳ **Κανονικό, λέγεται το πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του, ίσες.**

(19) Δίνονται δύο ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(AB=A\Gamma)$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ $(A'B'=A'\Gamma')$.
1) Αν $\hat{A}=\hat{A}'$, $\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha'}$ $\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.
2) Αν $\alpha=\alpha'$, $\upsilon_\alpha=\upsilon_\alpha'$ $\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

(20) Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=BE=\Gamma Z$. Δείξτε ότι:
1) $AE=BZ=\Gamma\Delta$ και $A\hat{Z}B=B\hat{\Delta}\Gamma=\Gamma\hat{E}A$
2) Αν $\Pi=AE\cap BZ$, $P=BZ\cap\Gamma\Delta$, $\Sigma=\Gamma\Delta\cap AE$, τότε το $\overset{\triangle}{\Pi P\Sigma}$ είναι ισόπλευρο.

(21) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και σημείο Σ της διχοτόμου ΑΔ. Αν οι ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα Β′, Γ′ αντίστοιχα δείξτε ότι: $BB'=\Gamma\Gamma'$.

(22) Αν $\hat{A}=\hat{A}'=1^L$, $\gamma=\gamma'$, $2\tau=2\tau'$ $\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

↳ Με 2τ συμβολίζεται η περίμετρος του τριγώνου. Δηλαδή $\boldsymbol{2\tau=\alpha+\beta+\gamma}$.

(23) Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}\psi$ και στις πλευρές της Οx, Οψ τα σημεία Α, Β αντίστοιχα, ώστε $OA=OB$. Αν $AK\perp OB$, $B\Lambda\perp OA$ και $\Sigma=AK\cap B\Lambda$, δείξτε ότι:
1) $AK=B\Lambda$. 2) $OK=O\Lambda$. 3) $\overset{\triangle}{B\Sigma K}=\overset{\triangle}{A\Sigma\Lambda}$. 4) $\Sigma\in\delta_{x\hat{O}y}$. 5) $O\Sigma \underset{\text{μέσο}}{\perp} AB$.

(24) Οι βάσεις ΒΓ και ΕΔ δύο ισοσκελών τριγώνων $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία (ε) και έχουν το ίδιο μέσο. Δείξτε ότι $AZ \underset{\text{μέσο}}{\perp} B\Gamma$.

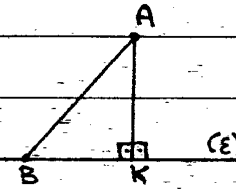
(25) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(AB=A\Gamma)$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$, $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$, $\overset{\triangle}{B\Gamma Z}$. Δείξτε ότι: $\Delta Z=ZE$.

(26) Δίνεται γωνία $x\hat{O}\psi$. Φέρνουμε την $OZ\perp Ox$ και προς το μέρος της Οψ και την $O\omega\perp O\psi$ και προς το μέρος της Οx. Στις Οx και ΟΖ παίρνουμε δύο ίσα τμήματα $OM=ON$ και στις Οψ και Οω δύο άλλα ίσα τμήματα $OP=O\Sigma$. Δείξτε ότι: $O\hat{P}N=O\hat{\Sigma}M$.

▼ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

▼ $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow (\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = 90^\circ$.

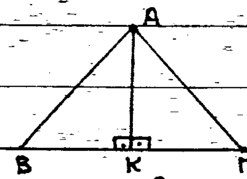
- Αν $A \in (\varepsilon)$, τότε μια μόνο κάθετη υπάρχει στο A προς την (ε).
- Αν $A \notin (\varepsilon)$, ,, ,, ,, ,, ,, από το A ,, ,, ,, .
- **Απόσταση** σημείου A από ευθεία (ε), είναι το κάθετο τμήμα AK από το σημείο προς την ευθεία.



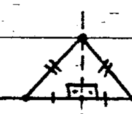
Είναι: $AK < AB$, $\forall B \in (\varepsilon)$.

$KB = K\Gamma \Leftrightarrow AB = A\Gamma$

$KB > K\Gamma \Leftrightarrow AB > A\Gamma$



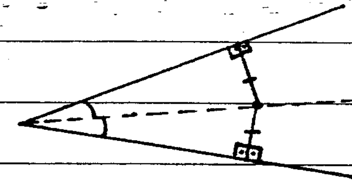
→ Χαρακτηριστική ιδιότητα μεσοκαθέτου ευθ. τμήματος.



Ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος, αν και μόνο αν, ανήκει στην ευθεία που είναι κάθετη στο τμήμα και περνάει από το μέσο του.

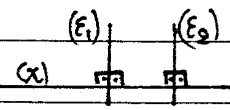
→ Χαρακτηριστική ιδιότητα διχοτόμου γωνίας.

Ένα σημείο ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας, αν και μόνο αν, ανήκει στη διχοτόμο της.

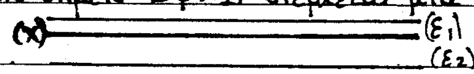


▼ $\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$.

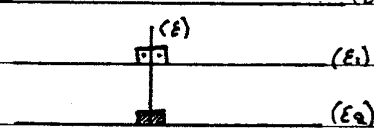
- $\varepsilon_1 \perp x \wedge \varepsilon_2 \perp x \Longrightarrow \varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2$



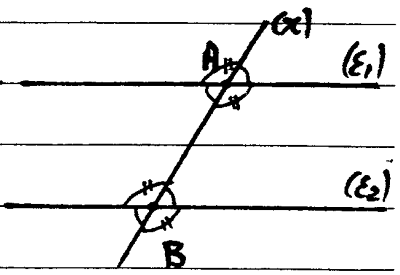
- **Ευκλείδιο αίτημα:** Από σημείο $B \notin (\varepsilon_1)$ διέρχεται μια και μόνο μια ευθεία $(\varepsilon_2) /\!/ (\varepsilon_1)$.
- $\varepsilon_1 /\!/ x \wedge \varepsilon_2 /\!/ x \Longrightarrow \varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2$



- $\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2 \wedge \varepsilon \perp \varepsilon_1 \Longrightarrow \varepsilon \perp \varepsilon_2$



-
- $\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2 \Longleftrightarrow$
  - Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
  - Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.
  - Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.



▼ Γωνίες με πλευρές

1) Παράλληλες: αν είναι
- → και οι δύο οξείες ή αμβλείες, τότε είναι ίσες.
- → η μια οξεία και η άλλη αμβλεία, τότε είναι παραπληρωματικές.

2) Κάθετες: όμοια (ισχύουν τα ίδια...).

Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου → $\Sigma = 2\nu - 4$ ορθές.

π.χ. για $\nu = 3$ (τρίγωνο) $\Rightarrow \Sigma = 2\cdot 3 - 4 = 2$ ορθές, για $\nu = 4$ (τετράπλευρο) $\Rightarrow \Sigma = 2\cdot 4 - 4 = 4$ ορθές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(27) Δίνεται ισοσκελές $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(AB=A\Gamma)$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE.
Δείξτε ότι: $E\Delta /\!/ B\Gamma$.

(28) Αν $A\Delta$ διχοτόμος τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, δείξτε ότι: $|B\hat{\Delta}A - \Gamma\hat{\Delta}A| = |\hat{B}-\hat{\Gamma}|$.

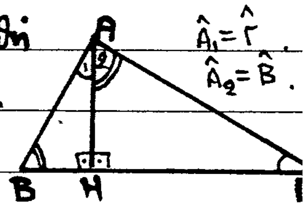
(29) Σε ευθεία (ε) παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ, Δ, ώστε $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta$.
Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Sigma B\Gamma}$ και φέρνουμε ευθεία $(\varepsilon) \perp A\Delta$ στο Δ που τέμνει την προέκταση της $A\Sigma$ στο P. Δείξτε ότι $P\Gamma /\!/ \Sigma B$.

(30) Δίνεται τμήμα $AB=3\alpha$ και σημείο M εντός αυτού ώστε $AM=2\alpha$.
Προς το ίδιο μέρος του AB κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{MB\Delta}$.
Αν $\Gamma H \perp AB$, δείξτε ότι $\Gamma H = \Gamma\Delta$.

?(31) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και στην προέκταση της βάσης του $B\Gamma$ τμήμα $\Gamma\Delta = \Gamma A$. Αν Ax είναι η προέκταση της ΔA, δείξτε ότι $x\hat{A}B = 3\cdot A\hat{\Delta}B$.

(32) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A}=90^\circ)$ και το ύψος του AH.
Στην $H\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $HB' = HB$. Δείξτε ότι $A\hat{B'}\Gamma - \hat{\Gamma} = 90^\circ$.

Το ύψος ΑΗ ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, χωρίζει την ορθή γωνία σε δύο γωνίες εκατέρωθεν ίσες με τις $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Διότι έχουν πλευρές κάθετες και είναι οξείες...)



$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$.
$\hat{A}_2 = \hat{B}$.

(33) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{B}-\hat{\Gamma} = 90^\circ$.
Δείξτε ότι η διχοτόμος $A\Delta$ σχηματίζει με τη $B\Gamma$ γωνία 45°.

(34) Δίνονται $\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2$, $A \in (\varepsilon_1)$, $B \in (\varepsilon_2)$. Στην (ε_1) παίρνουμε τμήματα $AM=AN=AB$.
Δείξτε ότι: 1) Οι BM, BN είναι διχοτόμοι των γωνιών της AB με την (ε_2).
2) Το $\overset{\triangle}{MBN}$ είναι ορθογώνιο.

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες, ενώ ,, ,, ,, κατά κορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες.

(35) Σε τυχόν σημείο M της προέκτασης της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ φέρνουμε ευθεία $x \perp B\Gamma$ που τέμνει τις προεκτάσεις των BA και $A\Gamma$ στα Δ και E.
Δείξτε ότι $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ ισοσκελές.

(36) Σε ισοσκελές $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{A} = \frac{2}{5}$ ορθής. Αν $B\Delta$ διχοτόμος, δείξτε ότι: $A\Delta = \Delta B = B\Gamma$.

(37) Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ τέμνονται στο I (έγκεντρο).
Από το I φέρνουμε ευθεία παρ/λη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα Δ, E αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $\Delta E = B\Delta + E\Gamma$.

(38) Απο τα άκρα ευθ. τμήματος ΑΒ φέρνουμε προς το ίδιο μέρος του ΑΒ δύο παρ/λες ημιευθείες Αx και Βy. Αν Σ τυχαίο σημείο του ΑΒ και παίρουμε στις Αx και Βy σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ=ΑΣ και ΒΕ=ΒΣ, δείξτε ότι: $\Delta\hat{\Sigma}E = 1^{L}$.

(39) Δίνεται ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ($\hat{A}=90^\circ$), το ύψος του ΑΗ και η διχοτόμος ΑΕ της $H\hat{A}\Gamma$. Δείξτε ότι το $\overset{\triangle}{ABE}$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Β.

(40) Απο τυχαίο σημείο Γ ευθ. τμήματος ΑΒ φέρνουμε τυχούσα ημιευθεία Γx και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τμήματα ΓΕ=ΓΑ και ΓΖ=ΓΒ. Δείξτε ότι $AE \perp BZ$.

(41) Απο τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ φέρνουμε $\Delta E \perp A\Gamma$. Δείξτε ότι: $\hat{A} = 2\cdot E\hat{\Delta}\Gamma$.

(42) Σε ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ($\hat{A}=90^\circ$) με $\beta>\gamma$, φέρνουμε το ύψος ΑΗ και πάνω στην ΗΓ παίρνουμε τμήμα ΗΕ=ΗΒ. Αν $\Gamma Z \perp AE$, δείξτε ότι η ΒΓ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}Z$.

(43) Τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ οι διχοτόμοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Ι.
Αν $IH \perp B\Gamma$, δείξτε ότι: $B\hat{I}\Delta = H\hat{I}\Gamma$.

(44) Δίνεται ισοσκελές $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\hat{A}>90^\circ$. Στη προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος του Α) παίρνουμε τμήμα ΑΔ=ΓΔ. Δείξτε ότι: $B\hat{\Gamma}\Delta = 3\hat{B}$.

(45) Δίνεται ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ($\hat{A}=90^\circ$) και η διχοτόμος του ΓΔ.
Στο Β φέρνουμε κάθετο προς τη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Ε.
Δείξτε ότι το $\overset{\triangle}{B\Delta E}$ είναι ισοσκελές.

(46) Αν $\hat{A}=60^\circ$ και ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, δείξτε ότι: $B\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{E}\Gamma$.

(47) Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ ισοπλεύρου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ παίρνουμε τμήματα ΑΗ=ΒΛ.
Αν $P = A\Lambda \cap \Gamma H$, δείξτε ότι $A\hat{P}\Gamma = 120^\circ$.

(48) Απο τη κορυφή Α ισοπλεύρου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ φέρνουμε ευθεία $(\varepsilon) \perp AB$ και πάνω σ' αυτήν και εκατέρωθεν του Α παίρνουμε τμήματα ΑΔ=ΑΕ=ΑΒ.
Να υπολογιστούν οι γωνίες $\Delta\hat{\Gamma}B$ και $E\hat{\Gamma}B$.

(49) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ φέρνουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Στις προεκτάσεις των ΔΒ, ΕΓ παίρνουμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε ΒΖ=ΑΓ και ΓΗ=ΑΒ.
Δείξτε ότι: το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ZAH}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(50) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι $\beta>\gamma$. Στην ΑΓ παίρνουμε τμήμα ΑΔ=ΑΒ, στη προέκταση της ΓΑ τμήμα ΑΕ=ΑΒ, πάνω στην ΑΒ τμήμα ΑΖ=ΑΓ και στη προέκταση της ΒΑ τμήμα ΑΗ=ΑΓ. Δείξτε ότι:
1) $\Gamma\hat{B}\Delta = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$. 2) $\Gamma\hat{B}E = 90^\circ + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$ 3) $B\hat{\Gamma}Z = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$ 4) $B\hat{\Gamma}H = 90^\circ - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$. 5) $E\hat{B}\Delta = H\hat{\Gamma}Z = 1^{L}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Θ1 Σε ευθεία (ε) δίνονται στη σειρά τα σημεία M, A, K, B ώστε $\frac{KB}{KA} = \frac{3}{7}$
Δείξτε ότι : $MK = \frac{3MA + 7MB}{10}$.

Θ2 Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και σημείο $M \in B\Gamma$. Δείξτε ότι :
1) $\frac{AB + A\Gamma - B\Gamma}{2} < AM < \tau$. 2) $AM < AB + A\Gamma$.

Θ3 Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και σημείο M του επιπέδου του.
Δείξτε ότι $MA + MB + M\Gamma > \tau$.

Θ4 Αν A, B, Γ σημεία κύκλου (K, R) και το K είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, δείξτε ότι: $3R < AB + B\Gamma + \Gamma A < 6R$.

Θ5 Μια οξεία γωνία $\hat{\omega}$ ισούται με το άθροισμα της συμπληρωματικής της και του μισού της παραπληρωματικής της. Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$.

Θ6 Δίνονται οι διαδοχικές κυρτές γωνίες $(A\hat{O}B) = 30^\circ$ και $B\hat{O}\Gamma$.
Αν OM η διχοτόμος της $A\hat{O}\Gamma$ και ON η διχοτόμος της $B\hat{O}\Gamma$, να βρεθεί η $(M\hat{O}N)$.

Θ7 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και το ύψος του υ_α.
Δείξτε ότι: 1) $\upsilon_\alpha > \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$. 2) $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma > \tau$.

Θ8 Δίνεται σημείο M στη διχοτόμο $O\Delta$ κυρτής γωνίας $x\hat{O}\psi$.
Στις Ox και $O\psi$ παίρνουμε τα σημεία A, B αντίστοιχα ώστε $M\hat{A}x = M\hat{B}\psi$.
Δείξτε ότι η $O\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AB.

Θ9 Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και τα μέσα Δ, E των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα.
Η μεσοκάθετος της AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και η μεσοκάθετος της $A\Gamma$ τέμνει την AB στο H. Να δείξετε την ισοδυναμία : $\Delta Z = EH \Leftrightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές.

Θ10 Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ οι διχοτόμοι των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο I.
Απο το I φέρνουμε παράλληλες προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα που τέμνουν τη $B\Gamma$ στα Δ, E. Δείξτε ότι η περίμετρος του $\overset{\triangle}{\Delta I E}$ είναι ίση με τη $B\Gamma$.

Θ11 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A} = 90^\circ)$ η $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Με πλευρά την υποτείνουσα και έξω απο το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$.
Αν $E = A\Gamma \cap B\Delta$ δείξτε ότι : 1) $AB \parallel \Gamma\Delta$. 2) το A είναι μέσο του $E\Gamma$.

Θ12 Δίνεται ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A} = 90^\circ)$. Στο Γ και προς το μέρος του A φέρνουμε τη $\Gamma x \perp B\Gamma$ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα $\Gamma E = \Gamma A$ και στην προέκταση της ΓB τμήμα $B\Delta = BA$.
Δείξτε ότι : τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

Θ13 Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\beta<\gamma$ και η διχοτόμος του ΑΔ.
Δείξτε ότι: 1) $A\hat{\Delta}B = 1^{\llcorner} - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$ 2) $A\hat{\Delta}\Gamma = 1^{\llcorner} + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

Θ14 Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{\Gamma}=3\hat{B}$, και η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Δ. Δείξτε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta B\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$ είναι ισοσκελή.

Θ15 Δίνεται ισοσκελές $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(AB=A\Gamma)$ και το μέσο Η της ΒΓ.
Στη προέκταση της ΒΓ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta=A\Gamma$ και στην προέκταση της ΑΒ τμήμα $BE=BH$. Αν $Z=EH\cap A\Delta$ δείξτε ότι:
1) $A\hat{\Delta}B=\frac{1}{2}A\hat{B}\Gamma$. 2) το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ZH\Delta}$ είναι ισοσκελές.

Θ16 Δίνεται ισοσκελές $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(AB=A\Gamma)$ και σημείο Δ στη ΒΓ ώστε $B\hat{A}\Delta=30^\circ$.
Στην ΑΓ παίρνουμε τμήμα $AE=A\Delta$. Να βρείτε το μέτρο της $E\hat{\Delta}\Gamma$.

Θ17 Οι γωνίες τετραπλεύρου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 1, 4, 6, 7.
Να υπολογισθούν οι γωνίες του.

Θ18 Δίνεται κύκλος (O,ρ) και διάμετρός του ΑΒ.
Μια χορδή ΓΔ τέμνει την ΑΟ σε σημείο Ε, ώστε $\Gamma\hat{E}A=45^\circ$.
Φέρνουμε τις ΓΜ και ΔΝ κάθετες στην ΑΒ.
Δείξτε ότι: $ME=ON$.

Θ19 Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $AB<A\Gamma$.
Αν ΑΗ το ύψος και ΑΔ η διχοτόμος της $\hat{A}$, δείξτε ότι: $\Delta\hat{A}H=\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

Θ20 Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. Από το Α φέρνουμε ευθεία $(\varepsilon)\parallel B\Gamma$.
Αν οι διχοτόμοι των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνουν την (ε) στα Δ, Ε αντίστοιχα, δείξτε ότι: $\Delta E=AB+A\Gamma$.

Θ21 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A}=90^\circ)$. Στο σημείο Β φέρνουμε ευθεία $(\varepsilon)\perp B\Gamma$. Αν η διχοτόμος ΓΔ της $\hat{\Gamma}$ τέμνει την (ε) στο Κ, δείξτε ότι το $\overset{\triangle}{B\Delta K}$ είναι ισοσκελές.

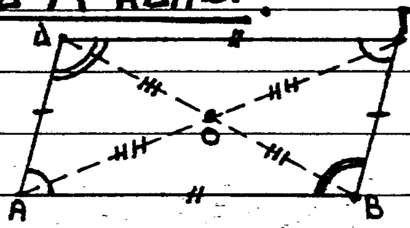
Θ22 Δύο τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ έχουν $\alpha=\alpha'$, $\delta_\beta=\delta_{\beta'}$, $\hat{B}=\hat{B}'$.
Δείξτε ότι: $\overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

Θ23 Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $AB<A\Gamma$. Στην ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ ώστε $A\Delta=AB$ και στη προέκταση της ΑΒ σημείο Ε ώστε $AE=A\Gamma$.
Αν $M=B\Gamma\cap E\Delta$, δείξτε ότι το Μ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Θ24 Στις πλευρές Οx, Οψ γωνίας $x\hat{O}\psi$ παίρνουμε τα σημεία Α, Β και Α', Β' αντίστοιχα ώστε $OA=OA'$ και $OB=OB'$. Αν Μ τυχαίο σημείο της διχοτόμου ΟΔ της $x\hat{O}\psi$, δείξτε ότι: $A\hat{M}B=A'\hat{M}B'$.

ΕΙΔΙΚΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

▼ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ▶ ΑΒΓΔ # ⟺ ΑΒ//ΓΔ ∧ ΑΔ//ΒΓ.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: **Αν το ΑΒΓΔ είναι παρ/μο, τότε:**

1) $AB=\Gamma\Delta \wedge A\Delta=B\Gamma$. **2)** $\hat{A}=\hat{\Gamma} \wedge \hat{B}=\hat{\Delta}$.

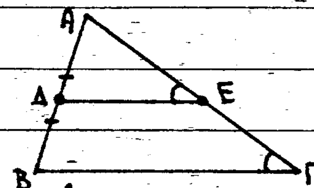
3) $AO=O\Gamma \wedge BO=O\Delta$. **4)** $AB=//\Gamma\Delta \vee A\Delta=//B\Gamma$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ: Αν ισχύει "ένα" από τα παραπάνω, τότε το ΑΒΓΔ είναι παρ/μο.

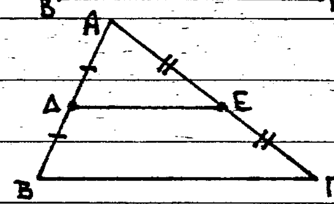
- Το Ο είναι "κέντρο συμμετρίας" του παρ/μου. (Εφαρμογή 1.Β)

▼ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡ/ΜΩΝ.

1) Στο τρίγωνο:

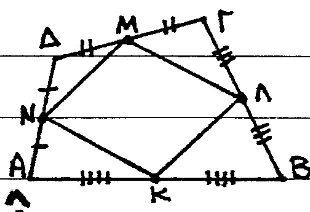


i) $\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο } AB\\ \Delta E//B\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow E \text{ μέσο } A\Gamma \wedge \Delta E=\frac{B\Gamma}{2}$



ii) $\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο } AB\\ E \text{ » } A\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E//B\Gamma \wedge \Delta E=\frac{B\Gamma}{2}$

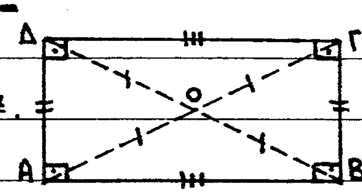
2) Στο τετράπλευρο:



Κ,Λ,Μ,Ν **μέσα** των πλευρών του ΑΒΓΔ ⟹ ΚΛΜΝ #.

- Πότε το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο, ρόμβος ή τετράγωνο (Βλέπε Ασκ. 12.Β)

▼ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ▶ ΑΒΓΔ ορθογώνιο ⟺ $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: **Αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε:**

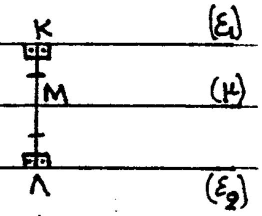
1) Είναι και **παρ/μο**, άρα ισχύουν όλες οι ιδιότητες του #.

2) $A\Gamma=B\Delta$. **3)** $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}=90^\circ$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ: Ενα **παρ/μο** ΑΒΓΔ που έχει: **μια γωνία ορθή** ή **τις διαγώνιες ίσες**, είναι ορθογώνιο.

- Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$:

  είναι το κάθετο τμήμα προς αυτές (ΚΛ).

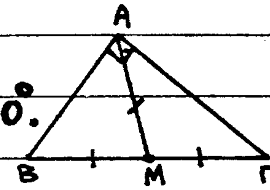


- Μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$:

  είναι η παράλληλος (μ) προς τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που διέρχεται από το μέσο της απόστασής τους.

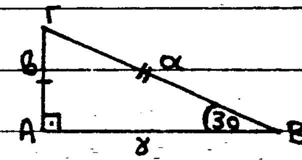
- **Ιδιότητα μεσοπαραλλήλου:** Κάθε σημείο της ισαπέχει από τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και αντίστροφα.

▼ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.



1) $\left.\begin{matrix}\hat{A}=90^\circ \\ AM \text{ διάμεσος}\end{matrix}\right\} \Rightarrow AM=\frac{ΒΓ}{2}$. 2) $\left.\begin{matrix}AM \text{ διάμεσος} \\ AM=\frac{ΒΓ}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}=90^\circ$.

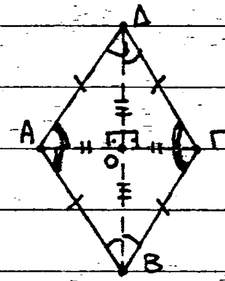
• $\overset{\triangle}{ΜΑΒ}$, $\overset{\triangle}{ΜΑΓ}$ ισοσκελή με κορυφή το Μ.



3) $\left.\begin{matrix}\hat{A}=90^\circ \\ \hat{B}=30^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow β=\frac{α}{2}$ 4) $\left.\begin{matrix}\hat{A}=90^\circ \\ β=\frac{α}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B}=30^\circ$.

• $\hat{A}=90^\circ$, $\hat{B}=30^\circ$, ΑΜ διάμεσος $\Longrightarrow$ $\overset{\triangle}{ΑΜΓ}$ ισόπλευρο.

▼ ΡΟΜΒΟΣ. ► ΑΒΓΔ Ρόμβος ⟺ ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ.



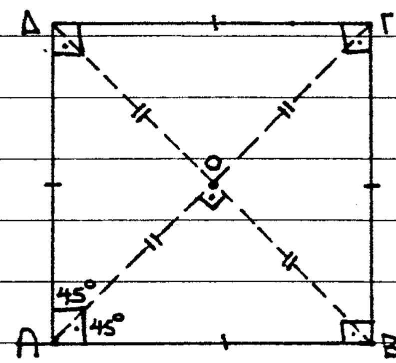
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: Αν το ΑΒΓΔ είναι **ρόμβος, τότε:**

1) Είναι και **παρ/μο**, άρα ισχύουν όλες οι ιδιότητες του #.

2) $ΑΓ \perp ΒΔ$. 3) **ΑΓ, ΒΔ διχοτόμοι** των γωνιών του.

↳ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ: Ενα **παρ/μο** ΑΒΓΔ που έχει:
δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες ή διαγώνιες κάθετες ή
μια διαγώνιο και διχοτόμο μιας γωνίας του, είναι ρόμβος.

▼ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ. ► ΑΒΓΔ τετράγωνο ⟺ $\hat{A}=\hat{B}=\hat{Γ}=\hat{Δ} \wedge ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ$.



• Τετράγωνο = Ορθογώνιο και Ρόμβος.

↳ Ενα **παρ/μο** ΑΒΓΔ που έχει:
μια γωνία ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες,
ή » » » » διαγώνιες κάθετες,
ή » » » » μια διαγώνιο διχοτόμο μιας γωνίας του,
ή διαγώνιες ίσες και κάθετες, είναι **τετράγωνο**.

↳ Ενα **ορθογώνιο** ΑΒΓΔ που έχει:
δύο διαδοχικές πλευρές ίσες,
ή διαγώνιες κάθετες,
ή μια διαγώνιο διχοτόμο μιας γωνίας του, είναι **τετράγωνο**.

↳ Ενας **ρόμβος** ΑΒΓΔ που έχει:
μια γωνία ορθή,
ή διαγώνιες ίσες, είναι **τετράγωνο**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(51) Δίνεται παρ/μο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε τις ΑΕ και ΓΖ κάθετες στη ΒΔ. Δείξτε ότι: 1) ΑΕ=ΓΖ. 2) το ΑΕΓΖ είναι παρ/μο.

(52) Δίνεται παρ/μο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΣ=ΑΔ, και στην προέκταση της ΑΔ τμήμα ΔΡ=ΑΒ.
1) Να συγκριθούν οι γωνίες των τριγώνων $\overset{\triangle}{\Sigma B\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta P}$.
2) Δείξτε ότι τα σημεία Σ, Γ, Ρ είναι συνευθειακά.

(53) Δίνεται παρ/μο ΑΒΓΔ. Εκατέρωθεν του ΑΒ παίρνουμε τμήματα ΑΕ=ΒΖ=ΑΔ. Δείξτε ότι οι ευθείες ΕΔ και ΖΓ είναι κάθετες.

(54) Απο τη κορυφή Α τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ φέρνουμε ευθεία (ε)//ΒΓ. Απο τυχόν σημείο Δ της ΒΓ φέρνουμε παρ/λες προς τις ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν την (ε) στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι $\overset{\triangle}{E\Delta Z}=\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

(55) Αν ΑΔ και ΑΔ′ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και Μ το μέσο της ΔΔ′, δείξτε ότι: $AM=\frac{\Delta\Delta'}{2}$.

(56) Με βάσεις τις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ κατασκευάζουμε εκτός του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ δύο ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, δείξτε ότι: $\Delta\hat{M}E=90^\circ$.

(57) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι Δ, Ε, Κ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Απο το Κ φέρνω παράλληλη στη ΒΕ που τέμνει τη ΔΕ στο Ρ. Δείξτε ότι: ΑΡ=ΔΓ.

(58) Απο το μέσο Μ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ φέρνουμε τις ΜΔ//ΑΒ και ΜΕ//ΑΓ. Δείξτε ότι το ΑΕΜΔ είναι ρόμβος.

(59) Σε παρ/μο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=2·ΒΓ και Ε το μέσο της ΓΔ. Δείξτε ότι: $A\hat{E}B=1^{L}$

(60) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του. Αν ΟΜ⊥ΑΒ και $OM=\frac{\alpha}{4}$ όπου α η πλευρά του ρόμβου, να υπολογιστούν οι γωνίες του.

(61) Στις πλευρές ΑΒ, ΑΔ ρόμβου ΑΒΓΔ παίρνουμε τμήματα ΑΘ=ΑΕ και στις πλευρές ΓΒ και ΓΔ τμήματα ΓΗ=ΓΖ και ίσα με τα προηγούμενα. Δείξτε ότι το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο.

(62) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Μ της ΑΓ. Πρός το μέρος του Α φέρνουμε τη Βx⊥ΒΜ και εκτός του ΑΒΓΔ. Παίρνω στη Βx παίρνουμε τμήμα ΒΣ=ΒΜ. Δείξτε ότι: 1) ΑΣ=ΓΜ. 2) $\Sigma\hat{A}\Gamma=90^\circ$.

(63) Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τμήματα ΒΕ=ΓΖ=ΔΗ=ΑΘ=α, όπου α η πλευρά του τετραγώνου. Δείξτε ότι ΕΗ=ΖΘ.

(64) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Εκτός αυτού κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$, $\overset{\triangle}{ΒΓΖ}$, $\overset{\triangle}{ΓΔΗ}$, $\overset{\triangle}{ΔΑΘ}$. Δείξτε ότι το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο.

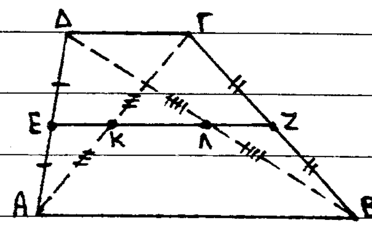
(65) Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΒΓ κατά τμήματα ΒΣ τη πρώτη και ΓΡ=ΑΣ τη δεύτερη. Κατασκευάζουμε το παρ/μο ΔΣΕΡ. Δείξτε ότι αυτό είναι τετράγωνο.

(66) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Με πλευρά την ΑΒ και εντός του ΑΒΓΔ κάνουμε το ισόπλευρο $\overset{\triangle}{ΑΒΕ}$ και με πλευρά τη ΒΓ και εκτός του ΑΒΓΔ το ισόπλευρο $\overset{\triangle}{ΒΓΖ}$. Δείξτε ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

(67) Δίνεται ισοσκελές $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και σημείο Δ της ΑΓ. Στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΓΔ. Αν Ζ=ΕΔ∩ΒΓ, δείξτε ότι το Ζ είναι μέσο της ΕΔ.

▼ ΤΡΑΠΕΖΙΟ. ► ΑΒΓΔ τραπέζιο ⟺ ΑΒ//ΓΔ $\veebar$ ΑΔ//ΒΓ.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: Αν το ΑΒΓΔ είναι **τραπέζιο**, και



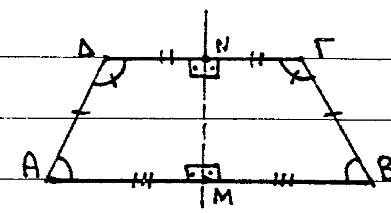
1) Ε,Ζ μέσα ΑΔ, ΒΓ ⟹ ΕΖ//ΑΒ,ΓΔ ∧ $ΕΖ=\dfrac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$

2) Κ,Λ » ΑΓ,ΒΔ ⟹ ΚΛ//ΑΒ,ΓΔ ∧ $ΚΛ=\dfrac{|ΑΒ-ΓΔ|}{2}$

• Η ΕΖ → διάμεσος του τραπεζίου. • Ε,Κ,Λ,Ζ συνευθειακά.

▼ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ ⟺ ΑΒ//ΓΔ ∧ ΑΔ=ΒΓ.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ Αν το ΑΒΓΔ είναι **ισοσκελές τραπέζιο, τότε:**



1) $\hat{Α}=\hat{Β}$ ∧ $\hat{Γ}=\hat{Δ}$. 2) ΑΓ=ΒΔ

3) Μ,Ν μέσα ΑΒ,ΓΔ ⟹ ΜΝ $\underset{μεσο}{\perp}$ ΑΒ,ΓΔ.

↕ Αν ισχύει "ένα" από τα παραπάνω, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

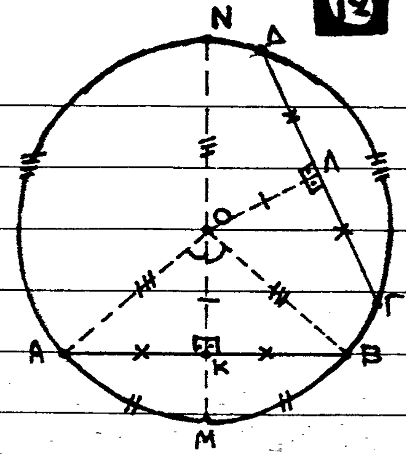
ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(68) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, Ε=ΑΔ∩ΒΓ, Ζ και Η τα μέσα των ΑΓ,ΒΔ και Θ, Ι τα μέσα των ΑΕ,ΒΕ. Δείξτε ότι το ΖΗΙΘ είναι τραπέζιο. Πότε αυτό είναι ισοσκελές;

(69) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΔΓ=2·ΑΒ, τα μέσα των διαγωνίων του ΒΔ και ΑΓ είναι τα Κ,Λ. Αν Ο=ΔΑ∩ΓΒ και Μ,Ν τα μέσα των ΟΑ,ΟΒ, δείξτε ότι το ΜΝΛΚ είναι παρ/μο.

(70) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $ΔΓ=\frac{4}{3}ΑΒ$. Στην ΑΒ παίρνουμε σημείο Ε ώστε $ΑΕ=\frac{1}{3}ΑΒ$. Αν Ζ,Η τα μέσα των ΒΓ,ΔΕ, δείξτε ότι το ΗΖΒΑ είναι παρ/μο.

(71) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΔ=ΑΒ+ΔΓ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, Ε=ΑΜ∩ΔΓ, Ζ=ΔΜ∩ΑΒ, δείξτε ότι το ΑΔΕΖ είναι ρόμβος.



ΚΥΚΛΟΣ.

▼ **Απόστημα χορδής** λέγεται η απόσταση του κέντρου Ο ενός κύκλου (O,ρ) από τη χορδή.

- Αν **$OK \perp AB$**, τότε **Κ μέσο** της χορδής ΑΒ και **Μ,Ν μέσα** των τόξων $\widehat{AB}$.
- Τα Ν, Ο, Κ, Μ είναι συνευθειακά.

▼ **Σύγκριση χορδών και αποστημάτων**

1) $AB=\Gamma\Delta \Leftrightarrow OK=O\Lambda$ όπου ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματα
2) $AB>\Gamma\Delta \Leftrightarrow OK<O\Lambda$ των χορδών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα.

▼ **ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ**

1) Ευθείας (ε) και κύκλου (O,ρ). → Εξαρτάται από την απόσταση **$d=OK$** του κύκλου από την ευθεία και από την ακτίνα **ρ** του κύκλου.

i) $(\varepsilon)\cap(O,\rho)=\{A,B\} \Leftrightarrow d<\rho$ → Η (ε) λέγεται τέμνουσα του κύκλου.

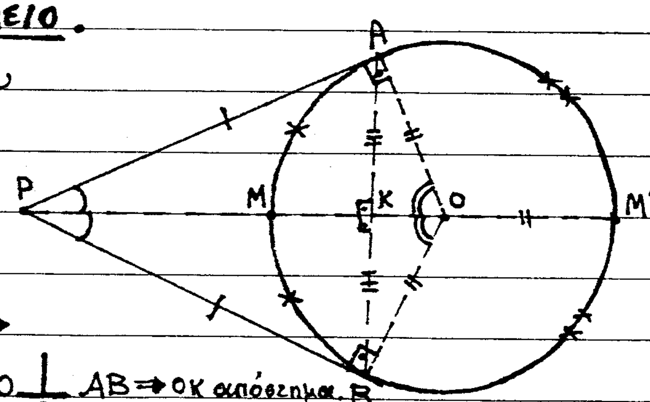
ii) $(\varepsilon)\cap(O,\rho)=\{A\} \Leftrightarrow d=\rho$ → » » » **εφαπτομένη** » ».

- Η εφαπτομένη ενός κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής.

iii) $(\varepsilon)\cap(O,\rho)=\varnothing \Leftrightarrow d>\rho$ → Η (ε) είναι εκτός του κύκλου.

▼ **Εφαπτόμενες κύκλου από σημείο.**

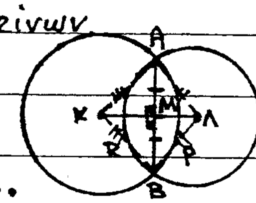
- Τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου από ένα σημείο Ρ είναι ίσα και σχηματίζουν ίσες γωνίες με τη διακεντρική ευθεία ΡΟ.



- $\left.\begin{matrix}PA=PB\\ OA=OB=\rho\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ **ΡΑΟΒ Ρομβοειδές** $\Rightarrow$ ΡΟ διχοτ. των $\hat{P},\hat{O}$ και $PO \underset{\text{μέσο}}{\perp} AB \Rightarrow OK$ απόστημα.

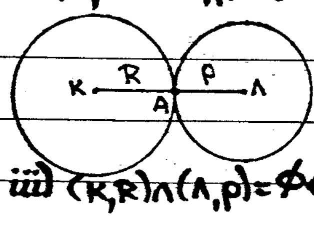
2) Δύο κύκλων (K,R), (Λ,ρ). → Εξαρτάται από τη διάκεντρο **$d=K\Lambda$**, και από το άθροισμα **$R+\rho$** ή τη διαφορά **$R-\rho$** των ακτίνων.

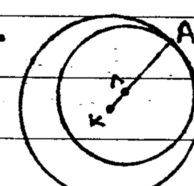
i) $(K,R)\cap(\Lambda,\rho)=\{A,B\} \Leftrightarrow R-\rho<d<R+\rho$ → Τεμνόμενοι κύκλοι.



- ΑΚΒΛ Ρομβοειδές. Αν $R=\rho \Leftrightarrow$ ΑΚΒΛ Ρόμβος

ii) $(K,R)\cap(\Lambda,\rho)=\{A\} \Leftrightarrow \begin{cases} d=R+\rho \to \text{Εφαπτόμενοι εξωτερικά.} \\ \text{ή} \\ d=R-\rho \to \text{» εσωτερικά.} \end{cases}$



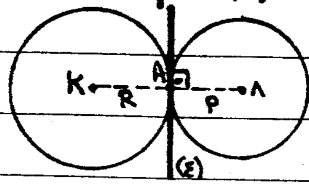


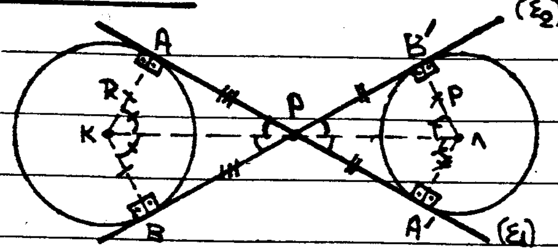
→ Το σημείο επαφής $A\in K\Lambda$. →

iii) $(K,R)\cap(\Lambda,\rho)=\varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} d>R+\rho \to \text{Μη τεμνόμενοι κύκλοι} \\ \text{ή} \\ d<R-\rho \to \text{» » » (ο ένας εντός του άλλου).} \end{cases}$

▼ Κοινή Εφαπτομένη δύο κύκλων

1) Εσωτερική.

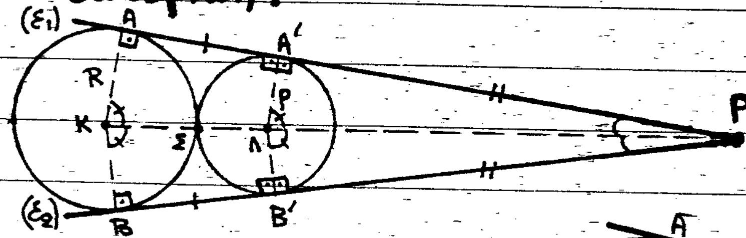


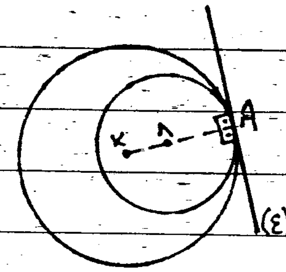


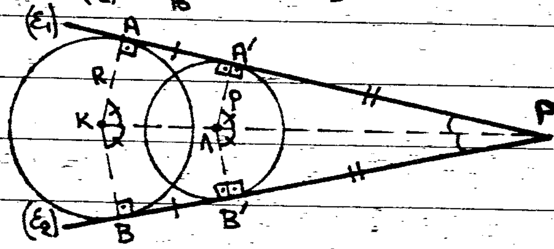
• $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = P \in K\Lambda$.

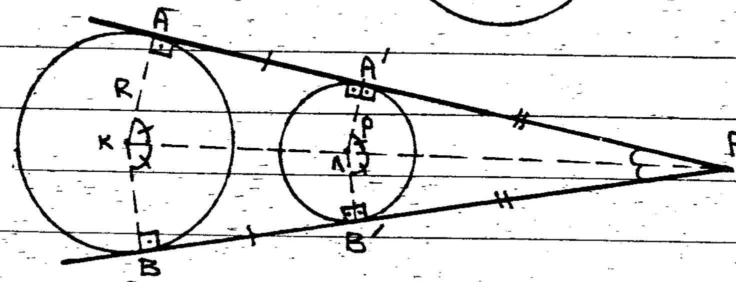
• $AA' = BB'$.

2) Εξωτερική.





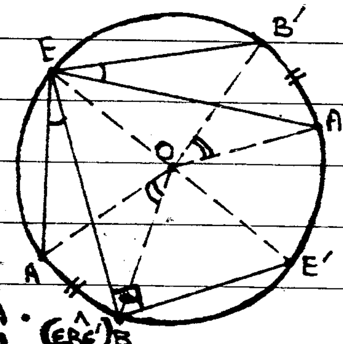




▼ Εγγεγραμμένες – Επίκεντρες γωνίες.

Εγγεγραμμένη $A\hat{E}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ κατά μέτρο.

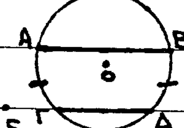
Επίκεντρη $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$,, ,,



• $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} A\hat{E}B = A'\hat{E}'B' \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{cases}$ (στον ίδιο κύκλο ή σε δύο ίσους κύκλους)

• Κάθε εγγεγρ. γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, είναι ορθή.
  » » » » είναι ορθή, βαίνει σε ημικύκλιο.

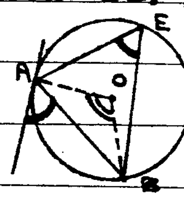
• Κάθε εγγεγρ. γωνία είναι το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο (ή σε ίσο τόξο) → $A\hat{E}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$



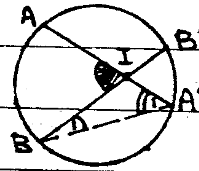
• Τόξα μεταξύ παρ/λων χορδών είναι ίσα → $AB \parallel \Gamma\Delta \Leftrightarrow \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta}$.

▼ Γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης.

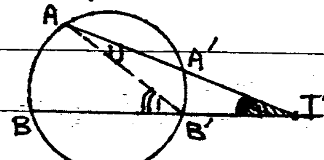
AB χορδή και Ax εφαπτομένη $\Rightarrow B\hat{A}x = A\hat{E}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$.



▼ Γωνία δύο τεμνομένων χορδών. (Εφαρμ. 3Β)



$\leftrightarrow \hat{I} = \hat{B}_1 + \hat{A}'_1 = \frac{\overset{\frown}{A'B'} + \overset{\frown}{AB}}{2}$. (κατά μέτρο)



$\leftrightarrow \hat{I}' = \hat{B}'_1 - \hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{2}$ (κατά μέτρο)

Γωνία δύο κύκλων ► Βλέπε εφαρμ. 5Β ◄ Ορθογώνιοι κύκλοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(72) Πάνω στην εφαπτομένη (ε) κύκλου (K,R), παίρνουμε δύο σημεία Β, Γ συμμετρικά ως προς το σημείο επαφής Α.
Αν οι ΒΚ και ΓΚ τέμνουν τον κύκλο στα Δ, Ε, δείξτε ότι: ΒΔ=ΓΕ.

(73) Δίνεται κύκλος (Κ) διαμέτρου ΑΒ. Απο σημείο Γ του κύκλου φέρνουμε κύκλο που εφάπτεται στην ΑΒ (Το Γ κέντρο). Απο τα Α,Β φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΑΔ και ΒΕ του κύκλου (Γ). Δείξτε ότι:
1) ΑΔ//ΒΕ και 2) τα Δ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

(74) Δύο κύκλοι (K,R), (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α.
Φέρνουμε την κοινή εξωτερική εφαπτομένη ΒΒ′. Δείξτε ότι:
1) Ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΒ′ εφάπτεται στη διάκεντρο ΚΛ στο Α.
2) ,, ,, ,, ,, ,, ΚΛ ,, ,, ΒΒ′ στο μέσο της Μ.

(75) Τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ).
Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΔ και το ύψος ΓΗ. Δείξτε ότι: ΔΒ//ΓΗ

(76) Τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ). Δείξτε ότι:
η γωνία που σχηματίζει το ύψος ΑΗ με την ΑΒ είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει η ΑΓ με την ακτίνα ΑΚ.

(77) Τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ).
Απο το Β φέρνουμε τη χορδή ΒΔ⊥ΒΓ.
Αν τα ύψη του τριγώνου τέμνονται στο Η, δείξτε ότι: ΑΗ=ΒΔ.

(78) Δείξτε ότι οι κύκλοι με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ τέμνονται σε σημείο που ανήκει στη ΒΓ.

(79) Δύο κύκλοι (Κ), (Λ) τέμνονται στα Α,Β. Απο το Α φέρνουμε τρείς τέμνουσες ΣΣ′, ΡΡ′, ΤΤ′ των δύο κύκλων.
Δείξτε ότι: τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{P\Sigma T}$, $\overset{\triangle}{P'\Sigma'T'}$ έχουν ίσες γωνίες (μία προς μία)

(80) Δύο κύκλοι (Κ), (Λ) τέμνονται στα Α,Β. Απο το Α φέρνουμε τέμνουσα ΔΓ//ΚΛ.
Δείξτε ότι τα Δ,Κ,Β όπως και τα Γ,Λ,Β είναι συνευθειακά.

(81) Δύο κύκλοι (Κ),(Λ) εφάπτονται εσωτερικά στο Α και ο ένας κύκλος διέρχεται απο το κέντρο του άλλου. Δείξτε ότι: ο εσωτερικός κύκλος διχοτομεί τις χορδές του εξωτερικού που φέρνονται απο το Α.

82) Τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ). Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΔ. Αν τα ύψη BB' και $\Gamma\Gamma'$ τέμνονται στο Η, δείξτε ότι: $B\hat{\Delta}\Gamma = B'\hat{H}\Gamma'$.

83) Δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ κύκλου (Κ) είναι κάθετες μεταξύ τους. Φέρνουμε τη διάμετρο ΓΕ. Δείξτε ότι: $B\Delta = AE$.

84) Τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ). Φέρνουμε την $AE \perp B\Delta$ και την $BZ \perp A\Gamma$. Δείξτε ότι: $\Delta\hat{A}E = \Gamma\hat{B}Z$.

85) Ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ) και Δ είναι τυχαίο σημείο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Φέρνω τη ΔΓ και παίρνω τμήμα $\Delta M = \Delta A$. Δείξτε ότι: 1) το $\overset{\triangle}{\Delta AM}$ είναι ισόπλευρο 2) $\Delta B = M\Gamma$. 3) $\Delta\Gamma = \Delta A + \Delta B$.

86) Σε κύκλο (Κ) παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Αν Ρ, Σ, Τ, Λ είναι τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{B\Gamma}, \overset{\frown}{\Gamma\Delta}, \overset{\frown}{\Delta A}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι: $TP \perp \Lambda\Sigma$.

87) Ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ) και Δ, Ε είναι τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{A\Gamma}$. Αν η ΔΕ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Σ, Ρ αντίστοιχα, δείξτε ότι: $\Delta\Sigma = \Sigma P = PE$.

88) Από σημείο Α φέρνουμε εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ προς κύκλο (Κ). Φέρνουμε τη διάμετρο ΓΔ. Δείξτε ότι: $AK \parallel B\Delta$.

89) Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΑΓ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της $B\hat{A}\Gamma$ που τέμνει τη ΒΓ στο Ζ, το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ στο Η και την εφαπτομένη του κύκλου (στο Β) στο Δ. Δείξτε ότι:
1) $BZ = B\Delta$. 2) $ZH = H\Delta$.

90) Τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ). Φέρνουμε την εσωτερική και την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$ που τέμνουν τον κύκλο στα Δ, Δ' αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $\Delta\Delta' \perp B\Gamma$.

91) Τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ). Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ι και τέμνουν τον κύκλο στα Β', Γ', δείξτε ότι: $B'\Gamma' \underset{\text{μεσο}}{\perp} AI$.

92) Δίνεται κύκλος (Κ) διαμέτρου ΑΒ. Φέρνουμε στο Α την εφαπτομένη Αx. Αν $\Delta \in Ax$, Γ μέσο της ΑΔ και φέρουμε την εφαπτομένη ΓΕ του κύκλου, δείξτε ότι τα Β, Ε, Δ είναι συνευθειακά.

93) Σε εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ) δύο ζεύγη απέναντι πλευρών είναι παράλληλα. Δείξτε ότι: και το τρίτο ζεύγος είναι παράλληλα.

<u>ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ.</u>

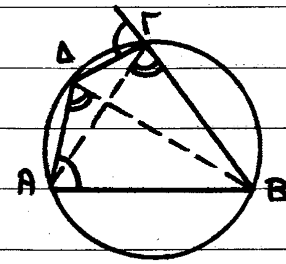
<u>Ορισμός</u>: ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O,\rho) \Leftrightarrow A,B,\Gamma,\Delta \in (O,\rho)$.

<u>Ιδιότητες</u>: Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο, τότε:

I. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

II. Κάθε εξωτερική γωνία του, ισούται με την απέναντι της εσωτερική.

III. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις δύο απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες.

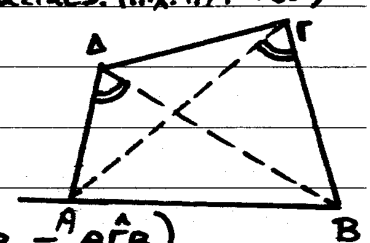


<u>Κριτήρια</u>: Το ΑΒΓΔ είναι "εγγράψιμο" σε κύκλο, αν ισχύει μια από τις προτάσεις:

I. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. (π.χ. $\hat{A}+\hat{\Gamma}=180^\circ$)

II. Μια εξωτερική γωνία του είναι ίση με την απέναντί της εσωτερική. (π.χ. $\hat{A}_{\varepsilon\xi}=\hat{\Gamma}$)

III. Μια πλευρά του φαίνεται από τις δύο απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες. (π.χ. $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B$)



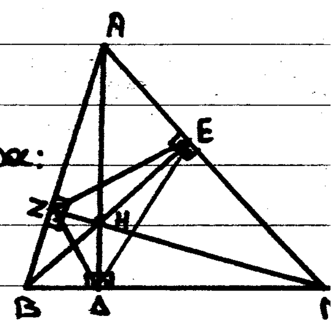
↕ Με το ίδιο θεώρημα δουλεύουμε συνήθως και όταν θέλουμε να δείξουμε ότι 4 σημεία είναι ομοκυκλικά.

▼ <u>ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ</u>

Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, τότε τα τετράπλευρα:

1) ΑΖΗΕ, ΒΔΗΖ, ΓΔΗΕ είναι εγγράψιμα. (γιατί;)

2) ΑΒΔΕ, ΒΓΕΖ, ΓΑΖΔ " " (")



↕ <u>ΟΡΘΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟ</u>: λέγεται το $\overset{\triangle}{\Delta E Z}$, που έχει κορυφές τα ίχνη των υψών του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

<u>Ιδιότητες</u>: 1) Τα ύψη του αρχικού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εσωτ. διχοτόμοι του ορθικού.

2) Οι πλευρές του αρχικού $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι εξωτ. διχοτόμοι του ορθικού.

Άρα: το ορθόκεντρο Η του αρχικού είναι έγκεντρο του ορθικού, και οι κορυφές του αρχικού είναι παράκεντρα του ορθικού.

3) Οι πλευρές του ορθικού είναι // προς τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου στις κορυφές του αρχικού.

• 1 Κάθε τραπέζιο εγγεγραμμένο είναι ισοσκελές.
• 2 Κάθε # εγγεγραμμένο είναι ορθογώνιο
• 3 Κάθε ρόμβος εγγεγραμμένο είναι τετράγωνο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{ABΔ} = 32°$, $\hat{AΔB} = 40°$ και $\hat{Γ} = 72°$. Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{AΓB}$.

2) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της διαγωνίου του ΒΔ. Με πλευρά την ΕΓ και προς το μέρος του Β κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΕΓΖΗ. Δείξτε ότι $ZB \perp BΔ$.

3) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABΓ}$ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{BΔE}$, $\overset{\triangle}{ΓΔZ}$ τέμνονται στο Μ, δείξτε ότι το ΑΕΜΖ είναι εγγράψιμο.

4) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABΓ}$ και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε $MP \perp AB$ $(P \in AΓ)$ και $NΔ \perp NP$ $(Δ \in AB)$.
Δείξτε ότι: $\hat{NPΔ} = \hat{A}$.

5) Δίνεται τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο).
Η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ρ.
Δείξτε ότι τα Β, Γ, Ρ, Ο είναι ομοκυκλικά.

6) Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, δύο ίσες χορδές του ΒΓ, ΓΔ και εσωτερικό σημείο Ε του τόξου $\overset{\frown}{AΔ}$.
Αν $AΓ \cap BE = Z$ και $AΔ \cap ΓE = Θ$, δείξτε ότι: $ZΘ \perp AΔ$, και ότι το Θ ανήκει στη διχοτόμο της $\hat{BAΔ}$.

7) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABΓ}$, το ύψος του ΑΔ και το μέσο Μ της ΒΓ. Αν Κ, Λ οι προβολές των Β, Γ στη διχοτόμο της $\hat{A}$, δείξτε ότι το ΔΚΜΛ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

8) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABΓ}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο), φέρνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Δείξτε ότι: $OA \perp EΔ$ (Βλέπε ιδιότητα 3 ορθικού τριγώνου)

9) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο). Αν οι διαγώνιοί του τέμνονται στο Ε, δείξτε ότι τα σημεία Α, Δ, Ε και Ο είναι ομοκυκλικά.

10) Δίνεται ευθ. τμήμα ΑΒ και πρός το ίδιο μέρος του δύο ημιευθείες Αx, By κάθετες στην ΑΒ. Με κορυφή το μέσο Ο του ΑΒ φέρνουμε ορθή γωνία $\hat{ΓΟΔ}$: Γ∈Αx, Δ∈By. Δείξτε ότι η ΓΔ είναι εφαπτομένη στον κύκλο διαμέτρου ΑΒ.

11) Ενας κύκλος διέρχεται απο τις κορυφές Β, Γ τριγώνου $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και τέμνει την ΑΓ στο Δ. Ενας άλλος κύκλος διέρχεται απο τα Α, Β και τέμνει τον προηγούμενο κύκλο στο Ε.
Η εφαπτομένη στο Α του περιγεγραμμένου κύκλου στο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ τέμνει το δεύτερο κύκλο στο Ζ. Δείξτε ότι: Ζ, Ε, Δ συνευθειακά.

12) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ($\hat{Α}=90^\circ$) εγγράφουμε τετράγωνο ΔΕΖΗ έτσι ώστε η πλευρά ΔΕ να βρίσκεται πάνω στη ΒΓ. Δείξτε ότι: αν Ο είναι το κέντρο του τετραγώνου, τότε η ΑΟ είναι διχοτόμος της $\hat{Α}$.

13) Δίνεται κύκλος (Ο), χορδή ΑΒ αυτού και τυχούσα ακτίνα του ΟΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ. Φέρνουμε στο Δ κάθετη στην ΟΓ που τέμνει τις εφαπτόμενες του κύκλου στα Α, Β, στα σημεία Ε και Ζ. Δείξτε ότι : ΔΕ=ΔΖ

14) Δείξτε ότι: σε κάθε τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ τα συμμετρικά του ορθόκεντρου Η ως προς τις πλευρές του τριγώνου, είναι σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

15) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ($\hat{Α}=90^\circ$, ΑΒ<ΑΓ) φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Πάνω στην ΗΓ παίρνουμε ΗΔ=ΗΒ και φέρνουμε την ΓΕ⊥ΑΔ. Δείξτε ότι: α) $\hat{ΗΓΕ}=\hat{ΗΓΑ}$. β) ΗΑ=ΗΕ.

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ.

• Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}_+$ λέγεται **λόγος** δύο τμημάτων α και $\beta \neq 0$ όταν $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda \Leftrightarrow \alpha = \lambda \cdot \beta$.

Ιδιότητες: 1) Είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\alpha)}{(\beta)}$, δηλαδή ο λόγος δύο τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μέτρων τους.

2) Δύο τμήματα α, β λέγονται σύμμετρα, όταν $\lambda \in \mathbb{Q}_+$ (ρητός).

» » » » ασύμμετρα, » $\lambda \notin \mathbb{Q}_+$ (άρρητος)

3) Αν A, B, M συνευθειακά και $\frac{MA}{MB} = \lambda$, λέμε ότι το M χωρίζει το τμήμα AB εσωτερικά (όταν $M \in AB$) ή εξωτερικά (όταν $M \notin AB$) σε λόγο λ. $\Rightarrow$ Αν M μέσο του $AB \Leftrightarrow \lambda = 1$.

• **ΑΝΑΛΟΓΙΑ** τμημάτων είναι κάθε ισότητα της μορφής: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Τα $\alpha, \delta \to$ Άκροι όροι. Τα $\beta, \gamma \to$ Μέσοι όροι

Το $\delta \to$ Τετάρτη ανάλογος των α, β, γ.

Αν $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\beta} \Leftrightarrow x^2 = \alpha\beta$, τότε το $x \to$ Μέσος ανάλογος των α, β.

Ιδιότητες:

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\delta = \beta\gamma \\ \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha}{\beta \pm \alpha} = \frac{\gamma}{\delta \pm \gamma} \\ \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta}. \end{cases}$$

Είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$ και γενικά: $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ δείξτε ότι: 1) $\frac{3\alpha + 2\beta}{\beta} = \frac{3\gamma + 2\delta}{\delta}$. 2) $\frac{3\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{3\gamma - \delta}{\gamma + \delta}$. 3) $\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha\beta + \gamma\delta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

2) Αν οι α, β, γ είναι ανάλογοι με τους $1, 2, 4$, δείξτε ότι: $\alpha + \beta + \gamma =$ πολ/σιο του 7.

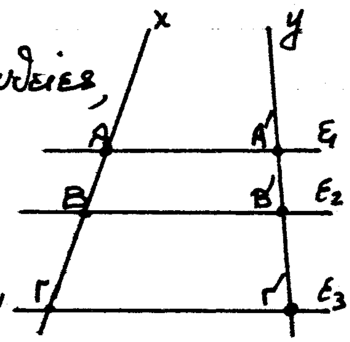
3) Οι πλευρές α, β, γ τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ανάλογες με τους αριθμούς $3, 4, 5$ και ο λόγος $\lambda = \frac{\alpha}{3} \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι η περίμετρος του τριγώνου είναι πολ/σιο του 12.

4) Αν $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, δείξτε ότι: 1) $\frac{5\alpha_1 - 7\beta_1 + 3\gamma_1}{5\alpha_2 - 7\beta_2 + 3\gamma_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 2) $\frac{\alpha_1 + 3\beta_1 - 5\gamma_1}{\alpha_2 + 3\beta_2 - 5\gamma_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

5) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\delta} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$.

6) Αν Δ, E είναι σημεία των πλευρών $AB, A\Gamma$ τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ δείξτε ότι: 1) $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma}$. 2) $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE}$.

▼ ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ



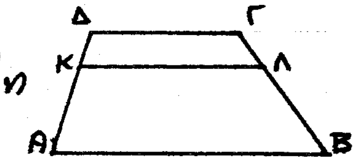
Αν τρεις παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

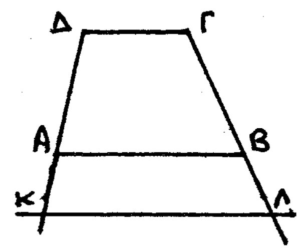
Δηλαδή: $\boxed{\text{Αν } \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}}$

- Άρα, είναι και $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$, $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A'B'}{A'\Gamma'}$, $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{A'\Gamma'}$, ...

Γενίκευση: Οι παράλληλες ευθείες μιας δέσμης ορίζουν σε δύο άλλες ευθείες τμήματα ανάλογα.

Τέμνουσα τραπεζίου – τριγώνου.

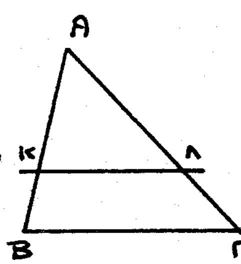


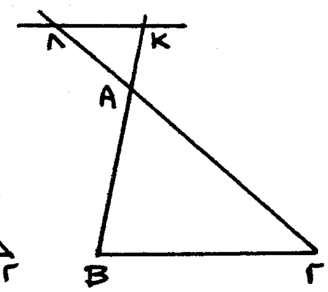


- Αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς τις βάσεις ενός τραπεζίου, χωρίζει τις μη παράλληλες πλευρές του εσωτερικά ή εξωτερικά στον ίδιο λόγο και αντιστρόφως.

Δηλαδή: $K\Lambda // AB // \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{KA}{K\Delta} = \frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma}$.

- Αν μια ευθεία είναι παρ/λη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές εσωτερικά ή εξωτερικά στον ίδιο λόγο και αντιστρόφως.





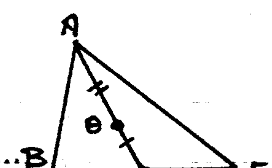
Δηλαδή: $K\Lambda // B\Gamma \Leftrightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{\Lambda A}{\Lambda\Gamma}$.

- Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου ΑΒΓ και μια παρ/λη προς την τρίτη πλευρά, έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

Δηλαδή: $K\Lambda // B\Gamma \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{A\Lambda}{A\Gamma} = \frac{K\Lambda}{B\Gamma}$.

Απαραίτητες γνώσεις:

1) Αν K, Λ μέσα $AB, A\Gamma \Rightarrow K\Lambda = // \frac{B\Gamma}{2}$
2) Αν K μέσο AB και $K\Lambda // B\Gamma \Rightarrow \Lambda$ μέσο $A\Gamma$ και $K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$.
3) Αν Θ βαρύκεντρο $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Rightarrow A\Theta = \frac{2}{3}\mu_\alpha$, $\Theta M = \frac{1}{3}\mu_\alpha$, $A\Theta = 2\Theta M$, ...



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(7) Τρεις // ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ απέχουν μεταξύ τους οι δύο πρώτες 9α και οι (ε_2) και (ε_3), 5α. Μια άλλη ευθεία τις τέμνει στα σημεία Α, Β, Γ.

1) Αν $AB = 3\alpha$, να υπολογιστεί το ΒΓ.

2) Αν $A\Gamma = 21$, ,, ,, ,, ,,.

(8) Ένα τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχει $AB = 9\lambda$, $A\Gamma = 15\lambda$. Από το βαρύκεντρο Θ φέρνουμε ευθεία // προς τη ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Δ, Ε αντίστοιχα. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΑΔ και ΓΕ.

(9) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι $A\Delta = 6\alpha$, $B\Gamma = 4\alpha$. Στις ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ ώστε $AE = \frac{3\alpha}{2}$, $BZ = \alpha$. Δείξτε ότι ΕΖ//ΑΒ//ΓΔ.

(10) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η διάμεσος ΑΔ και το μέσο της Ε. Αν η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, δείξτε ότι: $\frac{ZA}{Z\Gamma} = \frac{1}{2}$.

(11) Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $\frac{EA}{EB} = \frac{ZA}{Z\Gamma}$.

(12) Από σημείο Δ της πλευράς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΔΕ//ΒΓ ($E \in A\Gamma$). Από το Ε φέρνουμε ΕΖ//ΑΒ ($Z \in B\Gamma$), και από το Ζ τη ΖΗ//ΓΑ ($H \in AB$). Δείξτε ότι: $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}$.

(13) Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ η παρ/λη προς τη ΒΓ από το Α τέμνει τη ΒΔ στο Ε και η // προς τη ΔΓ από το Ε τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Δείξτε ότι: ΒΖ//ΑΔ.

(14) Από τυχαίο σημείο Ν της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παρ/λες προς τις ΑΒ, ΑΓ που τέμνουν την ΒΓ στα Δ, Ε. Δείξτε ότι: ΔΜ=ΕΜ.

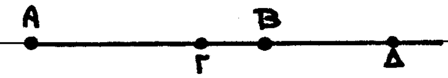
(15) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της ΒΓ. Πάνω στην ΒΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε ώστε ΜΔ=ΜΕ. Φέρνουμε ΔΖ//ΑΓ ($Z \in AB$) και ΕΗ//ΑΒ ($H \in A\Gamma$). Δείξτε ότι ΖΗ//ΒΓ.

(16) Από σημείο Σ της διαγωνίου ΑΓ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε παρ/λες προς τις ΒΓ και ΓΔ, που τέμνουν τις ΑΒ, ΑΔ στα Ε, Ζ. Δείξτε ότι: ΖΕ//ΒΔ.

(17) Από την τομή Ο των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρνουμε παρ/λες προς τις ΑΔ, ΒΓ που τέμνουν την ΑΒ στα Ε, Ζ. Δείξτε ότι: ΑΕ=ΖΒ.

(18) Μια ευθεία (ε) διέρχεται από τη κορυφή Α παρ/μου ΑΒΓΔ και τέμνει την ΒΔ στο Ε, την ΒΓ στο Ζ και την ΔΓ στο Η. Δείξτε ότι: 1) $AE^2 = EZ \cdot EH$.

2) $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AZ} + \frac{1}{AH}$ $\Longleftrightarrow$ Αρκεί: $\frac{AE}{AZ} + \frac{AE}{AH} = 1$.

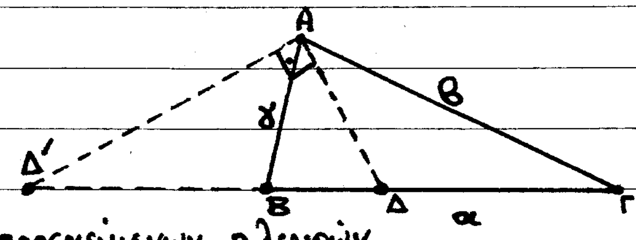


Συζυγή Αρμονικά. Δύο σημεία Γ,Δ που χωρίζουν εσωτερικά και εξωτερικά ένα τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται συζυγή αρμονικά των Α,Β

Δηλαδή: (Γ,Δ) συζυγή αρμονικά των (Α,Β) $\Longleftrightarrow \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}$ και Α,Γ,Β,Δ συνευθειακά.

Η σειρά Α,Γ,Β,Δ, λέγεται αρμονική σημειοσειρά.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ



Η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου, χωρίζουν την απέναντι πλευρά εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Δηλαδή: $\boxed{\begin{array}{l} ΑΔ \text{ εσωτ. διχ.} \Longleftrightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \\ ΑΔ' \text{ εξωτ. διχ.} \Longleftrightarrow \frac{Δ'Β}{Δ'Γ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \end{array}}$ $\Longleftrightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{Δ'Β}{Δ'Γ} \Rightarrow (Δ,Δ')$ συζυγή αρμονικά των (Β,Γ).

● Είναι: $ΔΒ = \frac{α\cdot γ}{β+γ}$, $ΔΓ = \frac{α\cdot β}{β+γ}$ και $Δ'Β = \frac{α\cdot γ}{|β-γ|}$, $Δ'Γ = \frac{αβ}{|β-γ|}$.

→ Υπολογισμός της θέσης του εγκέντρου Ι. $\boxed{\frac{ΑΙ}{ΙΔ} = \frac{β+γ}{α}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(19) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ και οι διχοτόμοι ΜΕ και ΜΖ των γωνιών $\hat{ΑΜΒ}$ και $\hat{ΑΜΓ}$. Δείξτε ότι: ΕΖ//ΒΓ.

(20) Τρίγωνο έχει πλευρές 3α, 4α, 5α. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων στα οποία τέμνουν τη μικρότερη πλευρά η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της απέναντι γωνίας.

(21) Τέσσερις ημιευθείες με κοινή αρχή Ο σχηματίζουν διαδοχικές γωνίες 45° η καθεμιά. Φέρνουμε ευθεία που τις τέμνει στα σημεία Α,Β,Γ,Δ ώστε ΟΑ=ΟΔ. Δείξτε ότι: $ΑΒ^2 = ΑΔ\cdot ΒΓ$.

(22) Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι:

$$ΒΔ\cdot ΓΕ\cdot ΖΑ = ΓΔ\cdot ΒΖ\cdot ΑΕ$$

(23) Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ≠ΑΓ), έστω Ι το έγκεντρο, Θ το βαρύκεντρο και ΑΔ η διχοτόμος της $\hat{Α}$.

1) Να βρεθεί ο λόγος $\frac{ΑΙ}{ΙΔ}$ συναρτήσει των πλευρών α,β,γ του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$.

2) Αν β+γ = 2α, δείξτε ότι: ΙΘ//ΒΓ.

(24) Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τη διάμεσο ΑΜ στα Κ, Λ αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $\frac{AK}{KM}+\frac{A\Lambda}{\Lambda M}>2$.

(25) Δίνεται κύκλος (O,R), διάμετρος ΑΒ αυτού και χορδή $\Gamma\Delta \perp AB$. Αν Ρ τυχαίο σημείο του ΓΔ και Ε, Ζ τα σημεία τομής των ΑΡ, ΒΡ με τον κύκλο, δείξτε ότι: $\frac{Z\Gamma}{E\Gamma}=\frac{\Delta Z}{E\Delta}$.

(26) Δίνεται κύκλος (O,R) και δύο κάθετες διάμετροι ΑΒ και ΓΔ. Αν Μ το μέσο της ΟΔ και η ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο Ε, δείξτε ότι $E\Gamma = 3\cdot E\Delta$

(27) Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ διαδοχικά πάνω σε μια ευθεία και Κ το μέσο του ΑΓ. Να δείξτε την ισοδυναμία:
(A,Γ) συζυγή αρμονικά των $(B,\Delta) \Leftrightarrow KA^2 = KB\cdot K\Delta$.

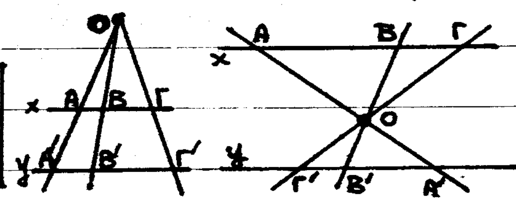
(28) Δίνεται τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν $BE\perp A\Delta$ και $\Gamma Z \perp A\Delta$, δείξτε ότι: τα Α, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Ε, Ζ.

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΕΣΜΗ.

Το σύνολο των ευθειών του επιπέδου που διέρχονται από ένα σημείο Ο, λέγεται δέσμη ευθειών κέντρου Ο (κεντρική δέσμη) ή σύντομα Ο-δέσμη.

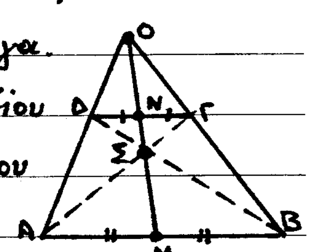
ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΣΜΗΣ: Οι ευθείες μιας κεντρικής δέσμης ορίζουν σε δύο παρ/λες ευθείες, τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_1),(\varepsilon_2),(\varepsilon_3)\ \text{O-δέσμη}\\ \text{και}\quad x/\!/y\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}}$



Ευθείες συντρέχουσες

- Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να συντρέχουν τρεις μη παρ/λες ευθείες είναι να ορίζουν σε δύο παρ/λες ευθείες τμήματα ανάλογα.
- Η ευθεία που συνδέει τα μέσα των βάσεων ενός τραπεζίου διέρχεται από το σημείο τομής των μη παρ/λων πλευρών του και από το σημείο τομής των διαγωνίων του.



- Αν τρεις ευθείες μιας κεντρικής δέσμης ορίζουν σε δύο άλλες ευθείες ε, ε' τμήματα ανάλογα, τότε οι ε και ε' είναι παράλληλες.

Δηλαδή: Αν $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}\left(=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}\right) \Longrightarrow \varepsilon /\!/ \varepsilon'$ (Βλέπε το 1º σχήμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(29) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) ενώνουμε το τυχαίο σημείο Ε της ΒΓ με τις κορυφές Α, Δ. Από το Β φέρνουμε // προς την ΔΕ που τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Η, και από το Γ // προς την ΑΕ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Δείξτε ότι: οι ΒΗ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΔ.

(30) Δίνεται κύκλος (Ο,R) και διάμετρος ΑΒ αυτού. Φέρνουμε την εφαπτομένη στο Α και από τυχαίο σημείο Γ αυτής την εφαπτομένη ΓΔ. Αν $ΔΕ \perp ΑΒ$, δείξτε ότι η ΒΓ διχοτομεί το τμήμα ΔΕ.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ.

($Θ_1$) Οι μη παρ/λες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ε. Αν η διχοτόμος της $\hat{Ε}$ τέμνει τις βάσεις ΑΒ, ΓΔ στα Ζ, Η αντίστοιχα δείξτε ότι: $\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΔΗ}{ΗΓ} = \frac{ΑΔ}{ΒΓ}$.

($Θ_2$) Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Δείξτε ότι:

$$ΑΕ \cdot ΖΓ = ΒΕ \cdot ΖΑ.$$

($Θ_3$) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Στο τρίγωνο ΑΔΕ φέρνουμε τα ύψη ΔΖ και ΕΘ. Δείξτε ότι: ΖΘ//ΒΓ.

($Θ_4$) Σε παρ/μο ΑΒΓΔ φέρνουμε τυχαία ευθεία από το Β που τέμνει τις προεκτάσεις των ΔΑ και ΔΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι:
1) $\frac{ΔΑ}{ΔΕ} + \frac{ΔΓ}{ΔΖ} = 1$. 2) Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α, τότε: $\frac{1}{ΔΕ} + \frac{1}{ΔΖ} = \frac{1}{α}$.

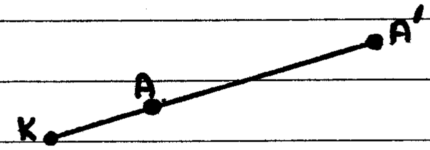
($Θ_5$) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε παρ/λη προς την διχοτόμο ΑΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ρ και την ΑΓ στο Κ. Δείξτε ότι: $ΓΚ = ΒΡ = \frac{1}{2}(β+γ)$.

($Θ_6$) Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις εσωτερικές διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται στο Ι. Δείξτε ότι: $ΙΑ \cdot ΙΒ \cdot ΙΓ > ΙΔ \cdot ΙΕ \cdot ΙΖ$.

($Θ_7$) Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ και Κ, Θ, Λ τα σημεία όπου οι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνουν τις ΖΕ, ΔΖ, ΕΔ αντίστοιχα, δείξτε ότι: 1) $\frac{ΖΘ}{ΘΔ} = \frac{β+γ}{α+β}$ (α, β, γ οι πλευρές του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$).

2) $ΖΘ \cdot ΔΛ \cdot ΕΚ = ΘΔ \cdot ΛΕ \cdot ΚΖ$.

ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ



ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ.

Έστω Κ σημείο του επιπέδου Ε και $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Ορίζουμε μια απεικόνιση του Ε στο Ε κατά την οποία σε $\forall A \in E \longrightarrow A' \in E \; : \; KA' = \lambda \cdot KA$. Την απεικόνιση αυτή τη λέμε ομοιοθεσία με κέντρο Κ και λόγο λ και γράφουμε Ομθ(Κ,λ).

Το Α' → Ομοιόθετο του Α στην Ομθ(Κ,λ)

Επειδή $KA = \frac{1}{\lambda} KA'$ ⇒ το Α είναι ομοιόθετο του Α' στην Ομθ$(K, \frac{1}{\lambda})$.

Τα Α, Α' → Ομοιόθετα.

- Το ομοιόθετο σχήματος (σ) σε μια Ομθ(Κ,λ) είναι ένα σχήμα (σ'). Το (σ) είναι ομοιόθετο του (σ') στην Ομθ$(K, \frac{1}{\lambda})$. Τα (σ)(σ') → Ομοιόθετα σχήματα.

Ομοιόθετα ευθύγραμμων σχημάτων.

- Το ομοιόθετο ευθείας ε που δεν διέρχεται από το Κ είναι ευθεία $\varepsilon' // \varepsilon$.
  Το ομοιόθετο τμήματος ΑΒ στην Ομθ(Κ,λ) είναι τμήμα $A'B' // AB$ και $A'B' = \lambda AB$.
  Το ομοιόθετο γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι γωνία $B'\hat{A'}\Gamma' = B\hat{A}\Gamma$.
  Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες ίσες και τις πλευρές ανάλογες.
  Το ομοιόθετο κύκλου (Ο,ρ) είναι κύκλος (Ο',λρ).

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ.

Έστω πολύγωνο Π. Κάθε πολύγωνο Π', ίσο προς ένα ομοιόθετο Π, του Π λέγεται όμοιο προς το Π. Συμβολισμός: $\Pi' \approx \Pi$.

- Δύο πολύγωνα είναι όμοια, αν και μόνο αν έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις πλευρές τους ανάλογες.
- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας των πολυγώνων.

Δηλαδή: Αν $\Pi = AB\Gamma \ldots \Theta$ και $\Pi' = A'B'\Gamma' \ldots \Theta'$, τότε:

$$\Pi \approx \Pi' \Leftrightarrow \begin{cases} A = A', \; B = B', \; \Gamma = \Gamma', \; \ldots, \; \Theta = \Theta' \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \ldots = \dfrac{\Theta'A'}{\Theta A} = \lambda \leftarrow \text{λόγος ομοιότητας} \end{cases}$$

$$\Pi \approx \Pi' \Rightarrow \frac{P'}{P} = \lambda \quad (\text{όπου } P', P \text{ οι περίμετροι των } \Pi', \Pi).$$

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ.

Αν $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \approx \overset{\triangle}{Α'Β'Γ'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{Α}=\hat{Α}', \ \hat{Β}=\hat{Β}', \ \hat{Γ}=\hat{Γ}'. \\ \dfrac{Α'Β'}{ΑΒ}=\dfrac{Β'Γ'}{ΒΓ}=\dfrac{Γ'Α'}{ΓΑ}. \end{cases}$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

Δύο τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν:

1) Δύο γωνίες τους μια προς μια ίσες.
2) Μια γωνία ίση και τις πλευρές που την περιέχουν ανάλογες.
3) Τις πλευρές τους ανάλογες.

- Οι διαγώνιες δύο όμοιων πολυγώνων που διέρχονται από δύο αντίστοιχες κορυφές τους, χωρίζουν τα πολύγωνα σε τρίγωνα ένα προς ένα όμοια και με λόγο ομοιότητας ίσο προς το λόγο ομοιότητας των πολυγώνων.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

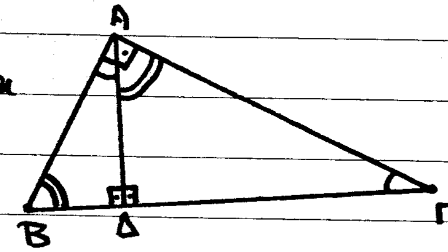
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν: (εκτός από την ορθή)

1) Μια οξεία γωνία ίση
2) Τις κάθετες πλευρές τους ανάλογες
3) Την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά τους ανάλογες.

- Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μια γωνία ίση.
- Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.
- Σε δύο όμοια τρίγωνα ο λόγος δύο αντίστοιχων στοιχείων τους (υψών, διχοτόμων, διαμέσων) είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας των τριγώνων.

Δηλαδή: $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \approx \overset{\triangle}{Α'Β'Γ'} \Rightarrow \lambda=\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}=\dfrac{\gamma}{\gamma'}=\dfrac{υ_\alpha}{υ_\alpha'}=\dfrac{\delta_\alpha}{\delta_\alpha'}=\dfrac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha'}=\ldots$

- Σε κάθε τρίγωνο είναι: $\alpha υ_\alpha=\beta υ_\beta=\gamma υ_\gamma$
- » » » » : $\beta\gamma=2Rυ_\alpha$ (R η ακτίνα του περιγεγρ. κύκλου)
- Το ύψος ορθογωνίου τριγώνου, χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ορθογώνια τρίγωνα όμοια μεταξύ τους και με το αρχικό.



Δηλαδή:

$$\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \approx \overset{\triangle}{ΔΒΑ} \approx \overset{\triangle}{ΔΑΓ}$$

Προσοχή: τα γράμματα στη σειρά ώστε να φαίνονται οι ίσες γωνίες, και οι ανάλογες πλευρές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Απο την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ και έστι ώστε $\widehat{\Gamma B \Delta} = \hat{A}$. Δείξτε ότι: $B\Delta^2 = \Delta A \cdot \Delta \Gamma$.

② Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ που τέμνονται στο ορθόκεντρο Η. Δείξτε ότι:
α) $HA \cdot H\Delta = HB \cdot HE$ και β) $\Gamma A \cdot \Gamma E = \Gamma B \cdot \Gamma \Delta$.

③ Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ και φέρνουμε $\Delta E \perp AB$. Δείξτε ότι: $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$.

④ Οι βάσεις ΑΒ και ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ έχουν μήκη 3α και α αντίστοιχα. Αν $A\Delta = \beta$ και $B\Gamma = 2\beta$ και $A\Delta \cap B\Gamma = O$, να υπολογιστούν οι πλευρές του τριγώνου ΟΑΒ.

⑤ Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια χορδή του ΑΒ.
Αν (ε) εφαπτομένη στο Β και $A\Gamma \perp (\varepsilon)$, δείξτε ότι: η ΑΒ είναι μέση ανάλογος της διαμέτρου του κύκλου και της ΑΓ.

⑥ Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και η διαγώνιος ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα κέντρα βάρους των $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, δείξτε ότι: $EZ = /\!/ \frac{B\Delta}{3}$.

⑦ Δείξτε ότι: σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ τα μέσα των πλευρών του ορίζουν τρίγωνο όμοιο προς το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

⑧ Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε. Δείξτε ότι:
α) $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$ β) $EB^2 = EA \cdot E\Delta$.

⑨ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.
Δείξτε ότι: $\overset{\triangle}{A\Delta E} \sim \overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

⑩ Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και απο το σημείο Ο τομής των διαγωνίων του φέρνουμε ΜΝ//ΑΒ, ΓΔ. ($M \in A\Delta$, $N \in B\Gamma$).
Δείξτε ότι: ΜΟ = ΟΝ.

⑪ Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) απο το σημείο τομής Σ των ΑΔ, ΒΓ φέρνουμε ευθεία παρ/λη προς τις βάσεις του που τέμνει τις προεκτάσεις των διαγωνίων στα σημεία Μ και Ν.
Δείξτε ότι: ΜΣ = ΣΝ.

(12) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι $\hat{Β}-\hat{Γ}=90^\circ$. Αν ΑΔ είναι το ύψος του δείξτε ότι: $ΑΔ^2=ΔΒ\cdot ΔΓ$.

(13) Από σημείο Σ που βρίσκεται έξω από ένα κύκλο φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ, ΣΒ και μια τέμνουσα ΣΓΔ. Δείξτε ότι: $ΑΓ\cdot ΒΔ=ΑΔ\cdot ΒΓ$.

(14) Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Δείξτε ότι: $ΔΒ\cdot ΔΓ=ΔΕ\cdot ΔΖ$.

(15) Δείξτε ότι: η απόσταση οποιουδήποτε σημείου ενός κύκλου από μια χορδή του είναι μέση ανάλογος μεταξύ των αποστάσεων του σημείου αυτού από τις εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της χορδής.

(16) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και δύο ημιευθείες Αx, Αy εσωτερικές της γωνίας Α και τέτοιες ώστε $Β\hat{Α}x=Γ\hat{Α}y$. Αν η Αx τέμνει τη ΒΓ στο Δ και τον κύκλο στο Ζ και η Αy τέμνει την ΒΓ στο Η και τον κύκλο στο Ε, δείξτε ότι:
α) $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}\approx\overset{\triangle}{ΑΕΓ}$. β) $ΑΒ\cdot ΑΓ=ΑΔ\cdot ΑΕ$. γ) $ΑΖ\cdot ΑΗ=ΑΔ\cdot ΑΕ$.

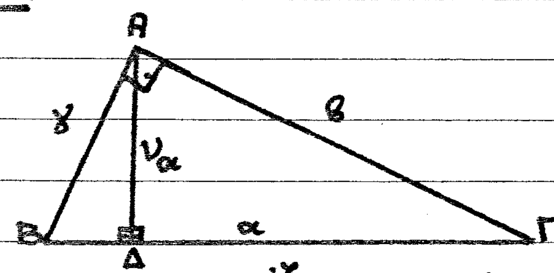
(17) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Από τα Β, Γ φέρνουμε παρ/λες προς την ΑΔ που τέμνουν τις προεκτάσεις των ΓΑ και ΒΑ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $\frac{ΑΔ}{ΒΕ}+\frac{ΑΔ}{ΓΖ}=1$.

(18) Μια ευθεία παρ/λη προς τη διάμεσο ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε, την προέκταση της ΓΑ στο Η και την ΒΓ στο Ζ. Δείξτε ότι: α) $\frac{ΑΕ}{ΑΗ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$. β) $ΖΕ+ΖΗ=2μ_α$.

(19) Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και τα σημεία Κ, Λ στις ΑΔ και ΒΓ, ώστε $\frac{ΚΑ}{ΚΔ}=\frac{ΛΒ}{ΛΓ}=\frac{μ}{ν}$. Δείξτε ότι:
α) $ΚΛ=\frac{μ\cdot ΓΔ+ν\cdot ΑΒ}{μ+ν}$
β) Αν $Σ=ΚΛ\cap ΑΓ$ και $Ρ=ΚΛ\cap ΒΔ$, τότε $ΚΡ=ΣΛ$ και $ΣΡ=\frac{|μΓΔ-νΑΒ|}{μ+ν}$
→ Τι παρατηρείτε αν μ=ν.

(20) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι εφαπτόμενες στα Β, Γ. Οι παρ/λες από το Α προς τις εφαπτόμενες αυτές τέμνουν την ΒΓ στα Δ, Ε αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2}=\frac{ΒΔ}{ΓΕ}$.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.



Σε ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ. ($\hat{A}=90^\circ$).

1) Το ύψος προς την υποτείνουσα είναι μέσο ανάλογο των τμημάτων στα οποία χωρίζει την υποτείνουσα. Δηλαδή: $\boxed{\upsilon_\alpha^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma}$

2) <u>Θεώρημα Ευκλείδη</u>: Καθεμιά από τις κάθετες πλευρές είναι μέση ανάλογος της υποτείνουσας και της προβολής της κάθετης στην υποτείνουσα. Δηλαδή: $\boxed{\beta^2 = \alpha \cdot \Delta\Gamma}$, $\boxed{\gamma^2 = \alpha \cdot \Delta B}$

3) Ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσα.
Δηλαδή: $\boxed{\dfrac{\beta^2}{\gamma^2} = \dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta B}}$.

4) <u>Πυθαγόρειο Θεώρημα</u>: Το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.
Δηλαδή: $\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2} \longleftrightarrow \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

Το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α, είναι: $\upsilon = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$
Η διαγώνιος τετραγώνου πλευράς α, είναι: $\delta = \alpha\sqrt{2}$.
Τα ύψη $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$ τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ είναι:

$$\begin{cases} \upsilon_\alpha = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}, \quad \upsilon_\beta = \dfrac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \\ \upsilon_\gamma = \dfrac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \end{cases}$$

, όπου $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ η ημιπερίμετρος.

Επειδή, το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $E = \dfrac{\alpha\upsilon_\alpha}{2} = \dfrac{\beta\upsilon_\beta}{2} = \dfrac{\gamma\upsilon_\gamma}{2}$, άρα

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \longleftrightarrow$ Τύπος του Ηρωνα.

5) Αν $\hat{A} = 90^\circ \Longrightarrow \dfrac{1}{\upsilon_\alpha^2} = \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Σε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) είναι $AB=15$, $A\Gamma=20$. Να βρεθούν: η υποτείνουσα $B\Gamma$, οι προβολές $B\Delta$, $\Gamma\Delta$ των AB, $A\Gamma$ και το ύψος $A\Delta$.

② Σε ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με ύψος $A\Delta$, είναι $B\Delta=2$, $\Gamma\Delta=8$. Να βρεθούν: οι κάθετες πλευρές του AB, $A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$.

③ Η περίμετρος ορθογωνίου τριγώνου είναι 84 και η υποτείνουσα 37. Να βρεθούν οι πλευρές και το ύψος του.

④ Δίνεται γωνία $x\hat{O}y=45^\circ$ και σημείο M στο εσωτερικό της. Η κάθετη από το M στην Ox τέμνει την Ox στο A και την Oy στο B. Δείξτε ότι: $AB^2+AM^2=OM^2$.

⑤ Δίνεται τεταρτοκύκλιο AOB. Από σημείο Γ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ φέρνουμε $\Gamma E \perp OA$ που τέμνει τη διχοτόμο της $A\hat{O}B$ στο Δ. Δείξτε ότι: $\Gamma E^2+\Delta E^2=OA^2$.

⑥ Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου AB και κέντρου O. Με διάμετρο την AO γράφουμε δεύτερο ημικύκλιο μέσα στο πρώτο και σε τυχαίο σημείο Γ της OA φέρνουμε $\Gamma\Delta E \perp OA$. (Δ, E τα σημεία τομής με τον εσωτερικό και τον εξωτερικό κύκλο, αντίστοιχα). Δείξτε ότι: $AE^2=2\cdot A\Delta^2$.

⑦ Δίνεται ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ($\hat{A}=90^\circ$) και τυχαίο σημείο Δ στην AB. Δείξτε ότι: $B\Gamma^2+A\Delta^2=\Gamma\Delta^2+AB^2$.

⑧ Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε μια ακτίνα OA και φέρνουμε χορδή $B\Gamma /\!/ OA$. Δείξτε ότι: $AB^2+A\Gamma^2=4R^2$.

⑨ Σε κύκλο (O,R) δίνεται διάμετρος AB και δύο κάθετες μεταξύ τους ακτίνες $O\Gamma$ και $O\Delta$. Αν OE, OZ οι προβολές των ακτίνων αυτών στη διάμετρο AB, δείξτε ότι: $OE^2+OZ^2=R^2$.

⑩ Δίνεται ορθή γωνία xOy, στην Ox τμήμα $OA=\alpha$ και στην Oy τμήμα $OB=2\alpha$. Αν A', B' οι προβολές των A, B στη διχοτόμο της $x\hat{O}y$, τότε:

1) Να υπολογιστούν τα τμήματα AA', OA', BB', OB', $A'B'$.
2) Δείξτε ότι ο κύκλος που ορίζεται από τα σημεία A, A', B' εφάπτεται στην Ox στο A και βρείτε την ακτίνα του.

(11) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευαστούν τα τμήματα x, y, ω από τις σχέσεις:
1) $x = \alpha\sqrt{3} + \beta\sqrt{5}$. 2) $y = \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\gamma\delta}$. 3) $\omega = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma\delta}$.

(12) Δείξτε ότι: το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά είναι μέσο ανάλογο μεταξύ των διαμέτρων των δύο κύκλων.

(13) Δύο κύκλοι με ακτίνες α και 4α έχουν διάκεντρο 6α. Να υπολογιστούν τα μήκη του κοινού εξωτερικού και εσωτερικού εφαπτόμενου τμήματος.

(14) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α. Με βάσεις τις πλευρές και έξω από το τετράγωνο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα $\overset{\triangle}{ABE}$, $\overset{\triangle}{B\Gamma Z}$, $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta H}$, $\overset{\triangle}{\Delta A\Theta}$. Δείξτε ότι: το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο και υπολογίστε την πλευρά του.

(15) Δίνεται κύκλος (O,R) διάμετρος ΑΒ και χορδή ΓΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ε υπό γωνία $45°$. Αν Ζ, Η είναι οι προβολές των Γ, Δ αντίστοιχα, στην ΑΒ, δείξτε ότι:
1) $\overset{\triangle}{OZ\Gamma} = \overset{\triangle}{OH\Delta}$. 2) $E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2R^2$.

(16) Δίνεται κύκλος (O,R) και δύο κάθετες χορδές του ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται στο Μ. Δείξτε ότι:
1) $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 4R^2$. 2) $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + B\Delta^2 + \Delta A^2 = 8R^2$.

(17) Δίνεται κύκλος (O,R) και στο εσωτερικό του σταθερό σημείο Σ. Δύο μεταβλητές χορδές ΑΣΒ και ΓΣΔ διέρχονται από το Σ και τέμνονται κάθετα. Δείξτε ότι το $AB^2 + \Gamma\Delta^2$ είναι σταθερό.

(18) Σε ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A} = 90°)$ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Δείξτε ότι: $\beta^2 = 3\gamma^2$.

(19) Σε ισοσκελές $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(AB = A\Gamma)$ δίνεται το ύψος ΒΔ.
Δείξτε ότι: $AB^2 + B\Gamma^2 + A\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 + 2A\Delta^2 + 3B\Delta^2$.

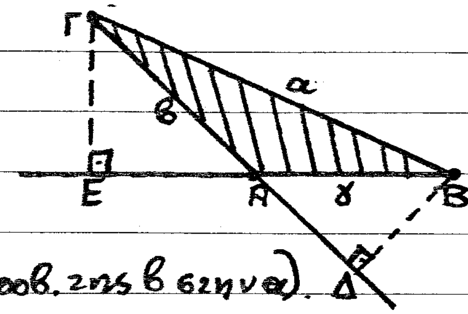
(20) Σε ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A} = 90°)$ φέρνουμε το ύψος ΑΔ και τις $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$. Δείξτε ότι: $\dfrac{\beta^3}{\gamma^3} = \dfrac{\Gamma Z}{BE}$.

(21) Δίνεται ισόπλευρο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ πλευράς α και η διχοτόμος Γx της εξωτερικής γωνίας Γ.
Αν $BE \perp \Gamma x$ να υπολογιστεί το ΑΕ συναρτήσει του α.

ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ.

Γενίκευση πυθαγόρειου θεωρήματος.

1) Θεώρημα αμβλείας γωνίας: Αν μια πλευρά τριγώνου βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, το τετράγωνό της είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή σε αυτήν της άλλης.



Δηλαδή: $\boxed{\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta}$

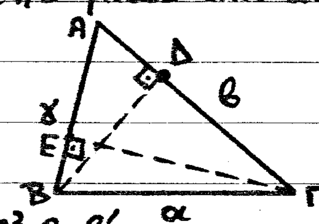
ή $\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot AE$.

Όμοια: αν $\hat{B} > 90^\circ \Rightarrow \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \gamma'_\alpha$

και αν $\hat{\Gamma} > 90^\circ \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \beta'_\alpha$.

(όπου γ'_α = προβ. της γ στην α και β'_α = προβ. της β στην α).

2) Θεώρημα οξείας γωνίας: Αν μια πλευρά τριγώνου βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, το τετράγωνό της είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή σε αυτήν της άλλης.



Δηλαδή: $\boxed{\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta}$

ή $\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot AE$

Όμοια: $\hat{B} < 90^\circ \Rightarrow \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma'_\alpha$. $\hat{\Gamma} < 90^\circ \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta'_\alpha$.

Κριτήριο για το είδος των γωνιών τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

Αν α είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και

$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$ (οπότε $\hat{B} < 90^\circ$, $\hat{\Gamma} < 90^\circ$).

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$ (,, ,, ,,).

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$ και $B < 90^\circ$, $\hat{\Gamma} < 90^\circ$ διότι $\alpha > \beta > \gamma \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Εφαρμογή: Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, όταν:

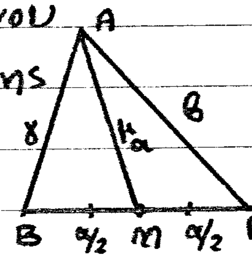
1) $\alpha = 13$, $\beta = 12$, $\gamma = 5$ 2) $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $\gamma = 7$.

3) $\alpha = 3$, $\beta = 8$, $\gamma = 6$. 4) $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = 6\lambda$.

5) $\alpha = \lambda$, $\beta = \frac{\lambda}{2}$, $\gamma = \frac{2\lambda}{3}$. 5) $\alpha = \sqrt{2}\lambda$, $\beta = \sqrt{3}\lambda$, $\gamma = \sqrt{5}\lambda$.

Θεωρήματα διαμέσων.

1) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου είναι ίσο με το διπλάσιο τετράγωνο της περιεχόμενης διαμέσου, αυξημένο κατά το διπλάσιο τετράγωνο του μισού της τρίτης πλευράς.



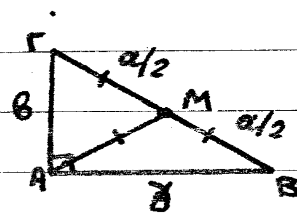
Δηλαδή: $β^2+γ^2=2AM^2+2BM^2$ ή $\boxed{β^2+γ^2=2μ_α^2+\frac{α^2}{2}}$

Όμοια: $α^2+β^2=2μ_γ^2+\frac{γ^2}{2}$ και $α^2+γ^2=2μ_β^2+\frac{β^2}{2}$.

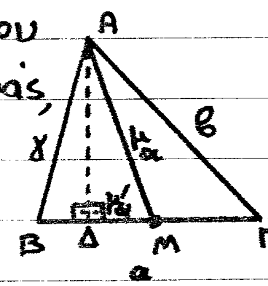
Τύποι ΔΙΑΜΕΣΩΝ. (συναρτήσει των πλευρών $α, β, γ$ του $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$).

$$μ_α^2=\frac{2β^2+2γ^2-α^2}{4}, \quad μ_β^2=\frac{2α^2+2γ^2-β^2}{4}, \quad μ_γ^2=\frac{2α^2+2β^2-γ^2}{4}.$$

- Αν $\hat{A}=90^\circ \Leftrightarrow μ_α=\frac{α}{2}$.
- Αν $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B}=30^\circ \Rightarrow μ_α=\frac{α}{2}=β$



2) Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου είναι ίση με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή σε αυτήν της αντίστοιχης διαμέσου.



Δηλαδή: $|β^2-γ^2|=2α\cdot MΔ$

Έτσι: αν $β>γ$ και $μ'_α$ η προβολή της $μ_α$ στην $α$ είναι $\boxed{β^2-γ^2=2α\cdot μ'_α}$

Όμοια: $|α^2-β^2|=2γ\cdot μ'_γ$ και $|α^2-γ^2|=2β\cdot μ'_β$.

Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και σε ισοσκελές τρίγωνο (διότι, αν π.χ. $β=γ \Rightarrow β^2-γ^2=0$ και $μ'_α=0$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(22) Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB/\!/\Gamma\Delta)$, δείξτε ότι: $A\Gamma^2+B\Delta^2=A\Delta^2+B\Gamma^2+2AB\cdot\Gamma\Delta$.

(23) Σε ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(AB=A\Gamma)$, ενώνουμε το A με τυχαίο σημείο Δ της $B\Gamma$. Δείξτε ότι: $AB^2=A\Delta^2+\Delta B\cdot\Delta\Gamma$.

(24) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι $\hat{A}=120^\circ$. Δείξτε ότι: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$.

(25) Να υπολογιστούν οι πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$ από τις διαμέσους του.

(26) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $A\Gamma>AB$, δείξτε ότι:

$H\Gamma^2-HB^2=A\Gamma^2-AB^2$, όπου H το ορθόκεντρο.

(27) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ οι διάμεσοι $B\Delta$ και ΓE είναι κάθετες. Δείξτε ότι: 1) $\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2=\mu_\alpha^2$ 2) $\beta^2+\gamma^2=5\alpha^2$

(28) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος $A\Delta$. Φέρνουμε $\Delta E\perp AB$. Δείξτε ότι: $2AB\cdot AE=AB^2+AE^2-EB^2$.

(29) Σε ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A}=90^\circ)$, είναι $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Δείξτε ότι: $\beta^2-\gamma^2=2\beta\gamma$.

(30) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\beta>\gamma$ και $\mu_\alpha^2=\beta\gamma$. Δείξτε ότι: $\alpha=(\beta-\gamma)\sqrt{2}$.

(31) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=8\mu_\alpha^2$. Δείξτε ότι: $\hat{A}=90^\circ$.

(32) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$. Δείξτε ότι: $\mu_\alpha^2+\mu_\gamma^2=2\mu_\alpha^2$.

(33) Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, δείξτε ότι: $\mu_\alpha^2<2(\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2)$.

(34) Με πλευρά την $AB=\gamma$ κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$, ABE εκατέρωθεν αυτής. Δείξτε ότι για οποιοδήποτε σημείο Γ ισχύει $\Gamma\Delta^2+\Gamma E^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ όπου α,β,γ οι πλευρές του $AB\Gamma$.

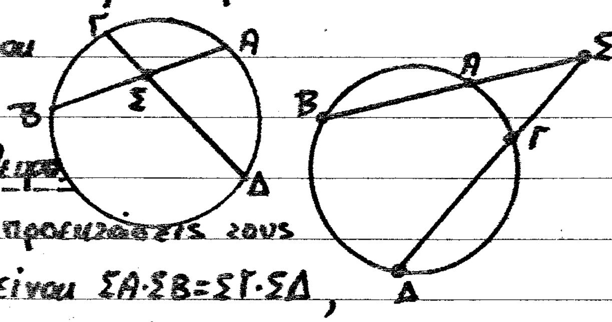
(35) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$. Με βάση την $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εκατέρωθεν αυτής δύο ισόπλευρα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$. Δείξτε ότι: $\Delta\hat{A}E=90^\circ$.

Στον Κυκλο.

Τέμνουσες κύκλου απο σημείο.

1) Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε σημείο Σ, τότε είναι

$$ΣΑ\cdot ΣΒ = ΣΓ\cdot ΣΔ$$



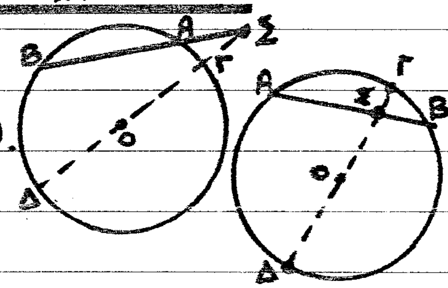
2) Κριτήριο για εγγράψιμο τετράπλευρο.
Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Σ και είναι $ΣΑ\cdot ΣΒ=ΣΓ\cdot ΣΔ$, τότε τα σημεία Α,Β,Γ,Δ είναι ομοκυκλικά.

Δύναμη σημείου Σ ως προς κύκλο (O,ρ). $\rightarrow \mathcal{A}_{(O,\rho)}(Σ)=\delta^2-\rho^2$: $\delta=ΣO$.

$\mathcal{A}(Σ)>0 \Leftrightarrow$ το Σ είναι εξωτερικό του (O,ρ).

$\mathcal{A}(Σ)<0 \Leftrightarrow$ " " " εσωτερικό " ".

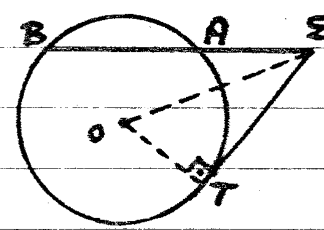
$\mathcal{A}(Σ)=0 \Leftrightarrow$ το Σ ανήκει στον κύκλο (O,ρ).



Τέμνουσα και εφαπτομένη.

1) Αν απο ένα σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε μια εφαπτομένη και μια τέμνουσα του κύκλου, τότε η απόσταση του Σ απο το σημείο επαφής είναι μέση ανάλογος των αποστάσεων του Σ απο τα σημεία επαφής.

Δηλαδή: $ΣΤ^2=ΣΑ\cdot ΣΒ$.



2) Αν η απόσταση της κορυφής Σ μιας γωνίας απο ένα σημείο Τ μιας πλευράς είναι μέση ανάλογος των αποστάσεων του Σ απο δύο σημεία Α,Β της άλλης πλευράς, τότε τα σημεία Τ,Α,Β ορίζουν κύκλο εφαπτόμενο της πλευράς ΣΤ στο σημείο Τ.

Αν $ΑΒ\cap ΓΔ=Σ$ και Σ εξωτερικό του (O,ρ) $\Rightarrow \mathcal{A}_{(O,\rho)}(Σ)=\delta^2-\rho^2=ΣΑ\cdot ΣΒ=ΣΓ\cdot ΣΔ=ΣΤ^2$.

Αν $ΑΒ\cap ΓΔ=Σ$ και Σ εσωτερικό του (O,ρ) $\Rightarrow$ $\rho^2-\delta^2=ΣΑ\cdot ΣΒ=ΣΓ\cdot ΣΔ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(36) Δίνεται κύκλος (O,ρ) με $\rho=8$ και σημείο Δ ώστε $O\Delta=10$. Φέρνουμε τέμνουσα ΔΑΒ του κύκλου ώστε η χορδή $AB=6$. Να βρεθεί η ΔΒ και η ΔΑ.

(37) Δίνεται κύκλος (O,ρ) με $\rho=12$ και σημείο Ε ώστε $OE=6$. Φέρνουμε τη χορδή $AEB=21$. Να βρεθούν τα ΑΕ, ΕΒ.

(38) Δύο κύκλοι τέμνονται στα Α, Β. Από σημείο Σ της προέκτασης της ΒΑ φέρνουμε δύο τέμνουσες ΣΓΔ και ΣΕΖ των δύο κύκλων. Δείξτε ότι το ΓΔΖΕ είναι εγγράψιμο.

(39) Από σημείο Μ που βρίσκεται έξω από ένα κύκλο φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΑ και μία τέμνουσα ΜΒΓ. Δείξτε ότι: $\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2}=\dfrac{MB}{M\Gamma}$

(40) Από σημείο Μ που βρίσκεται έξω από ένα κύκλο φέρνουμε τη διακεντρική ευθεία ΜΒΑ και το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ. Η κάθετη στη ΜΑ στο Μ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Δείξτε ότι: $A\Gamma\cdot A\Delta=MA^2-M\Gamma^2$.

(41) Δείξτε ότι: η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί τις κοινές εφαπτόμενες των κύκλων αυτών.

(42) Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, που τέμνονται στο Η. Δείξτε ότι:

1) $HA\cdot H\Delta=HB\cdot HE=H\Gamma\cdot HZ$.
2) $AB\cdot AZ=A\Gamma\cdot AE$, $BA\cdot BZ=B\Gamma\cdot B\Delta$, $\Gamma A\cdot \Gamma E=\Gamma B\cdot \Gamma\Delta$.
3) $\Delta\Gamma\cdot EA\cdot ZB=\Delta B\cdot E\Gamma\cdot ZA$.

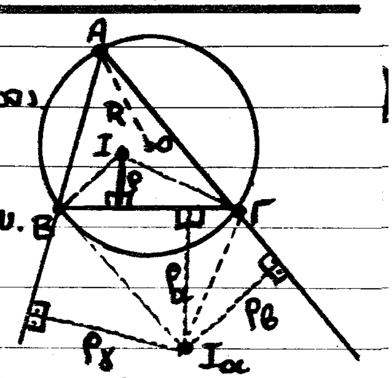
(43) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος ΑΔ και η διάμεσος ΑΜ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΑΔΜ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Β′, Γ′ αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $BB'=\Gamma\Gamma'$.

(44) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, εγγεγραμμένο σε κύκλο και το μέσο Ε της χορδής ΒΓ. Αν η ΑΕ τέμνει τον κύκλο στο Μ δείξτε ότι: $AE=5\cdot EM$.

ΕΜΒΑΔΑ

▼ **ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.** → $E = \frac{\text{βάση} \times \text{ύψος}}{2}$ ↔ $E = \frac{\alpha \upsilon_\alpha}{2} = \frac{\beta \upsilon_\beta}{2} = \frac{\gamma \upsilon_\gamma}{2}$.

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$: $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ η ημιπερίμετρος



$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$: R = ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου.

$E = \tau \cdot \rho$: ρ = » εγγεγραμμένου »

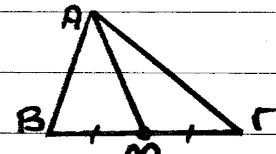
Γενικεύεται για κάθε ν-γωνο περιγεγραμμένο → $E = \frac{1}{2} S\rho$: S = περίμετρος.

$E = \rho_\alpha(\tau-\alpha) = \rho_\beta(\tau-\beta) = \rho_\gamma(\tau-\gamma)$: $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ ακτίνες παρεγγεγραμμένων κύκλων.

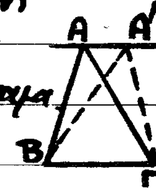
→ Σε ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) → $E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2} = \frac{\alpha \upsilon_\alpha}{2}$

→ Σε ισόπλευρο τρίγωνο ($\alpha = \beta = \gamma$) → $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. ($\upsilon_{ισοπλ.} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$).

→ Κάθε διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. $(\overset{\triangle}{AMB}) = (\overset{\triangle}{AM\Gamma})$.



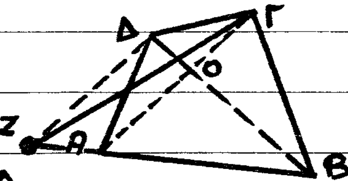
→ Αν δύο τρίγωνα έχουν κοινή βάση ΒΓ και τις κορυφές τους Α, Α′ σε ευθεία παρ/λη προς τη βάση, τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα.
Δηλαδή: $AA' \parallel B\Gamma \Rightarrow (\overset{\triangle}{AB\Gamma}) = (\overset{\triangle}{A'B\Gamma})$.



• **Λόγος Εμβαδών:** Αν μια πλευρά (ένα ύψος) τριγώνου είναι ίση (ίσο) προς μια πλευρά (ένα ύψος) άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των αντίστοιχων υψών (πλευρών).

• **Θεώρημα Εμβαδών:** Αν μια γωνία τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική μιας γωνίας άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις δύο αυτές γωνίες. Δηλαδή $\hat{A} = \hat{A}'$ ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \Rightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A'B' \cdot A'\Gamma'}$

▼ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ



• **ΑΒΓΔ τυχαίο** → $E = (\overset{\triangle}{AB\Gamma}) + (\overset{\triangle}{AB\Gamma})$

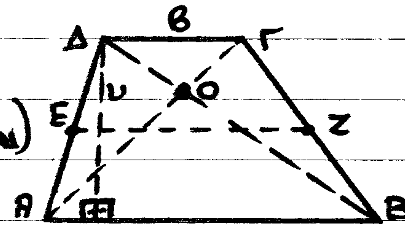
ή $E = (\overset{\triangle}{AOB}) + (\overset{\triangle}{BO\Gamma}) + (\overset{\triangle}{\Gamma O\Delta}) + (\overset{\triangle}{\Delta OA})$

ή το μετασχηματίζω σε ισοδύναμο τρίγωνο → Αν $\Delta Z \parallel A\Gamma \Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = (\overset{\triangle}{ZB\Gamma})$

• Αν $A\Gamma \perp B\Delta \Rightarrow E = \dfrac{\delta_1 \delta_2}{2}$, όπου $\delta_1 = A\Gamma$, $\delta_2 = B\Delta$.

(π.χ. το ρομβοειδές → $E = \dfrac{\delta_1 \delta_2}{2}$)

• **ΑΒΓΔ ΤΡΑΠΕΖΙΟ.** ($AB = \alpha \parallel \Gamma\Delta = \beta$)

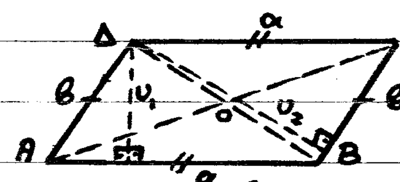


$E = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \upsilon$ ή $E = \mu \cdot \upsilon$ ($\mu = EZ$ διάμεσος)

→ $(\overset{\triangle}{A\Delta B}) = (\overset{\triangle}{A\Gamma B})$, $(\overset{\triangle}{\Gamma A\Delta}) = (\overset{\triangle}{\Gamma B\Delta})$ ← (κοινή βάση, ίσα ύψη).

$(\overset{\triangle}{AO\Delta}) = (\overset{\triangle}{BO\Gamma})$ (διότι $(\overset{\triangle}{AO\Delta}) = (\overset{\triangle}{A\Delta B}) - (\overset{\triangle}{AOB}) = (\overset{\triangle}{A\Gamma B}) - (\overset{\triangle}{AOB}) = (\overset{\triangle}{BO\Gamma})$)

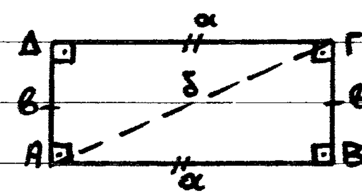
• **ΑΒΓΔ ΠΑΡ/ΜΟ**



Ε = βάση × ύψος ↔ $E = \alpha \cdot \upsilon_1$, $E = \beta \cdot \upsilon_2$.

→ $E = 2 \cdot (\overset{\triangle}{A\Delta B}) = 2(\overset{\triangle}{A\Gamma B}) = \dots$, $(\overset{\triangle}{AOB}) = (\overset{\triangle}{\Gamma O\Delta})$, $(\overset{\triangle}{AO\Delta}) = (\overset{\triangle}{BO\Gamma})$ (αφού είναι ίσα).

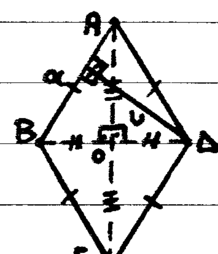
• **ΑΒΓΔ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ**



$E = \alpha \cdot \beta.$

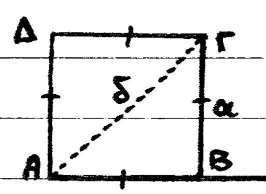
($\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$)

• **ΑΒΓΔ ΡΟΜΒΟΣ**



$E = \dfrac{\delta_1 \delta_2}{2}$ ή $E = \alpha \cdot \upsilon.$

• **ΑΒΓΔ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ**



$E = \alpha^2$

($\delta = \alpha\sqrt{2}$)

• Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους. Δηλαδή: $\Pi \approx \Pi' \Rightarrow \dfrac{E}{E'} = \lambda^2.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Δείξτε ότι: οι διάμεσοι τριγώνου χωρίζουν το τρίγωνο σε 6 ισοδύναμα τρίγωνα.

② Απο τις κορυφές ενός τετραπλεύρου φέρνουμε παράλληλες προς τις διαγώνιες του. Δείξτε ότι: το περιγεγραμμένο στο τετράπλευρο παρ/μο που σχηματίζεται, έχει εμβαδό διπλάσιο του τετραπλεύρου.

③ Με υποτείνουσες τις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του ΑΒΓ, ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα.

α) Να καθορισθεί το είδος του σχήματος που προκύπτει.

β) Να βρεθεί το εμβαδό του, αν $AB=\gamma$ και $A\Gamma=\beta$.

④ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.

α) Δείξτε ότι: $EH=2AM$, όπου Μ το μέσο της ΒΓ.

β) Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδό του εξαγώνου ΔΒΓΖΗΕ απο τις πλευρές α, β, γ του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

⑤ Σε παρ/μο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε κυκλικά τις πλευρές του και παίρνουμε τμήματα $BA'=BA$, $\Gamma B'=\Gamma B$, $\Delta\Gamma'=\Delta\Gamma$ και $A\Delta'=A\Delta$.
Δείξτε ότι: α) Το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι παρ/μο. β) $(A'B'\Gamma'\Delta')=5\cdot(AB\Gamma\Delta)$.

⑥ Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε κυκλικά τις πλευρές του και παίρνουμε τμήματα $A\Gamma'=A\Gamma$, $BA'=BA$, $\Gamma B'=\Gamma B$.
Δείξτε ότι: $(A'B'\Gamma')=7\cdot(AB\Gamma)$

⑦ Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{A}=\hat{\Delta}$ και $\hat{B}+\hat{E}=180^\circ$.
Δείξτε ότι: $\dfrac{B\Gamma}{EZ}=\dfrac{A\Gamma}{\Delta Z}$.

⑧ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Απο εσωτερικό του σημείο Μ φέρνουμε κάθετες στις ΑΒ, ΑΓ και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τμήματα $M\Delta=AB$ και $ME=A\Gamma$. Δείξτε ότι: $(AB\Gamma)=(M\Delta E)$.

⑨ Απο εσωτερικό σημείο Ο τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε κάθετες στις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τμήματα $O\Delta=AB$, $OE=B\Gamma$, $OZ=\Gamma A$ αντίστοιχα.
Δείξτε ότι: $(\Delta EZ)=3\cdot(AB\Gamma)$.

(10) Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις α και β.
Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων και Μ το μέσο της ΔΓ, να υπολογιστούν:
α) Οι πλευρές του τριγώνου ΟΜΒ,
β) Το εμβαδό του , γ) τα ύψη του.

(11) Απο την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τυχούσα ευθεία που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Β'. Απο το Γ φέρνουμε ευθεία παρ/λο στη ΒΒ' που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Γ'. Δείξτε ότι: $(AB\Gamma) = (AB'\Gamma')$.

(12) Απο τις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθείες παρ/λες προς μια ευθεία (ε), που τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα. Δείξτε ότι: $(A_1B_1\Gamma_1) = 2(AB\Gamma)$

(13) Δίνεται παρ/μο ΑΒΓΔ και σημείο Ο που δε βρίσκεται μέσα στη γωνία Α ούτε μέσα στην κατακορυφή της.
Δείξτε ότι: $(OA\Gamma) = (OAB) + (OA\Delta)$.

(14) τετράπλευρο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ).
Δείξτε ότι: $(OAB) + (O\Gamma\Delta) = (OA\Delta) + (OAB)$. (Α,Β,Γ,Δ οι κορυφές)

(15) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Σ της ΒΓ.
Απο το Α φέρνουμε ευθεία $(\varepsilon) \perp A\Sigma$ και απο τα Β, Γ τις ΒΒ', ΓΓ' κάθετες στην (ε). Δείξτε ότι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Sigma \cdot B'\Gamma'$.

(16) Πάνω στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήματα ΜΔ=ΜΕ, όπου Μ το μέσο της ΒΓ. Απο το Δ φέρνουμε παρ/λο προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν η ΒΖ τέμνει την ΑΕ στο Η, δείξτε ότι: $(ABH) = (HZ\Gamma E)$.

(17) Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ τέμνει το ύψος του ΑΔ στο Ε. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, δείξτε ότι: 1) $\Delta E^2 = \Delta A \cdot \Delta H$ 2) $(EB\Gamma)^2 = (AB\Gamma) \cdot (HB\Gamma)$.

(18) Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $\hat{A} = 30^\circ$.
Πάνω στις πλευρές του ΑΒ, ΑΓ και έξω απο το τρίγωνο κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ και φέρνουμε την ΕΗ. Να υπολογιστεί η περίμετρος και το εμβαδό του (ΒΓΖΗΕΔΒ).

19) Με βάσεις τις πλευρές τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΙΘ, ΒΓΖΗ.
Δείξτε ότι: (ΒΔΗ) = (ΑΕΘ) = (ΙΓΖ).

20) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ), έστω Ε = ΑΔ∩ΒΓ και Κ = ΑΓ∩ΒΔ. Δείξτε ότι: (ΕΔΒ) = (ΕΓΑ)

21) Από το ίχνος Δ του ύψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παρ/λες προς τις ΑΒ, ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ, ΑΒ στα Ζ, Ε αντίστοιχα. Αν Κ, Λ τα μέσα των ΔΒ, ΔΓ, δείξτε ότι: (ΑΒΓ) = 2(ΕΖΛΚ).

22) Δίνεται εσωτερικό σημείο Ο τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.
Φέρνουμε $OA' \perp AB$, $OB' \perp B\Gamma$, $O\Gamma' \perp \Gamma\Delta$, $O\Delta' \perp A\Delta$, ώστε $OA' = AB$, $OB' = B\Gamma$, $O\Gamma' = \Gamma\Delta$, $O\Delta' = A\Delta$.
Δείξτε ότι: $(A'B'\Gamma'\Delta') = 2(AB\Gamma\Delta)$.

23) Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των βάσεων ΑΒ, ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ και Μ τυχαίο σημείο της ΕΖ, δείξτε ότι: (ΜΑΔ) = (ΜΒΓ)

SOS 24) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Μ.
Δείξτε ότι: $(AM\Delta)^2 = (AMB)\cdot(\Delta M\Gamma)$.

25) Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και τη διχοτόμο ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα σημεία τομής του περιγεγραμμένου κύκλου στο $\overset{\triangle}{A\Delta M}$ με τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, δείξτε ότι:
1) ΒΕ = ΓΖ.   2) $(\overset{\triangle}{BE\Delta}) = (\overset{\triangle}{\Delta Z\Gamma})$

26) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ, δείξτε ότι:

1) $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\upsilon_\alpha} + \dfrac{1}{\upsilon_\beta} + \dfrac{1}{\upsilon_\gamma}$ (ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου)

2) $(\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma)\left(\dfrac{1}{\upsilon_\alpha} + \dfrac{1}{\upsilon_\beta} + \dfrac{1}{\upsilon_\gamma}\right) = (\alpha+\beta+\gamma)\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\right)$.

3) $\dfrac{1}{\rho_\alpha} + \dfrac{1}{\rho_\beta} + \dfrac{1}{\rho_\gamma} = \dfrac{1}{\rho}$ ($\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ ακτίνες παρεγγεγραμμένων κύκλων).

4) $(\rho_\alpha - \rho)(\rho_\beta - \rho)(\rho_\gamma - \rho) = 4R\rho^2$. (R ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου)

27) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\rho\cdot\rho_\alpha = \rho_\beta\cdot\rho_\gamma$. Δείξτε ότι το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ορισμός: $A_1A_2\cdots A_\nu$ κανονικό $\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_2=\cdots=\hat{A}_\nu \\ A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_{\nu-1}A_\nu. \end{cases}$

- Επειδή σε κάθε πολύγωνο το άθροισμα των γωνιών του, είναι $\Sigma_\nu = 2\nu-4$ ορθές, άρα στο κανονικό είναι: $\hat{A}_1=\hat{A}_2=\cdots=\hat{A}_\nu=\frac{2\nu-4}{\nu}$ ορθές

Θ. Αν ν σημεία χωρίζουν ένα κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε το πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ που ορίζεται απο τα σημεία αυτά είναι κανονικό και οι εφαπτόμενες του κύκλου στις κορυφές του σχηματίζουν επίσης κανονικό πολύγωνο.

Θ. Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και περιγράψιμο σε άλλον ομόκεντρο κύκλο.

▼ Συμβολισμοί - ονομασίες:

Κέντρο O, λέμε το κοινό κέντρο των δύο κύκλων.

Ακτίνα R, λέμε την απόσταση του O, απο κάθε κορυφή του (ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου).

Δηλαδή: $OA_1=OA_2=\cdots=OA_\nu=R$.

Απόστημα α_ν, λέμε την απόσταση του O απο κάθε πλευρά του (ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου).

Δηλαδή: $\alpha_\nu = OM_1=OM_2=\ldots=OM_\nu=\rho$.

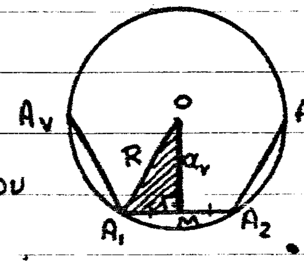
Κεντρική γωνία ω, λέμε την επίκεντρη γωνία που ορίζεται απο δύο διαδοχικές ακτίνες του. Είναι: $\hat{\omega}=\frac{360^\circ}{\nu}$.

Θ. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων ή το λόγο των αποστημάτων τους.

Δηλαδή: $OA_1A_2\ldots A_\nu \approx O'A_1'A_2'\ldots A_\nu'$ και $\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu'}=\frac{R}{R'}=\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu'}$.

- Η πλευρά λ_ν' κ.π. περιγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) δίνεται απο τον τύπο $\lambda_\nu'=\frac{R\lambda_\nu}{\alpha_\nu}$ (λ_ν η πλευρά του εγγεγρ. κ.π.)

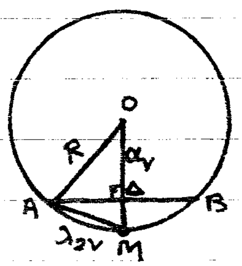
▼ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ



$\overset{\triangle}{OMA_1}$ ορθογώνιο $\Longrightarrow$ $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$.

Το Εμβαδόν κάθε πολυγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο, είναι (ως γνωστόν) $E = \frac{1}{2} S \cdot \rho$.

Άρα στο Κ.Π. είναι $E_\nu = \frac{\nu}{2} \lambda_\nu \cdot \alpha_\nu$



Αν πάρουμε τα μέσα των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές ενός κανονικού ν-γώνου, βρίσκουμε ένα εγγεγραμμένο Κ.Π. με 2ν πλευρές, του οποίου η πλευρά δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R-\alpha_\nu)$$ ⟵ τύπος Αρχιμήδη.

▼ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ν-ΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ.

Έκφραση πλευράς λ_ν και αποστήματος α_ν, συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου.

Κ.Π.	λ_ν	α_ν	$\omega = \frac{360}{\nu}$	$\hat{A}_\nu = 180^\circ - \hat{\omega}$
$\nu = 3$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$	120°	60°
$\nu = 4$	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	90°	90°
$\nu = 5$	$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\alpha_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$	72°	108°
$\nu = 6$	$\lambda_6 = R$.	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	60°	120°
$\nu = 10$	$\lambda_{10} = R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	36°	144°.

Από το τύπο του Αρχιμήδη, βρίσκω ακόμη
το λ_8 από το λ_4 ⟶ $\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$,
το λ_{12} ,, ,, λ_6 ⟶ $\lambda_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, το λ_{20} από το λ_{10} κ.λ.π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Να υπολογισθεί σε μοίρες και σε μέρη ορθής η γωνία και η κεντρική γωνία των εξής κανονικών πολυγώνων:
1) Οκταγώνου. 2) Δωδεκαγώνου. 3) Δεκαπενταγώνου.
4) Εικοσαγώνου.

② Ποιού κανονικού πολυγώνου η κεντρική γωνία είναι $30^\circ, 24^\circ, 18^\circ$.

③ Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 140°, 160° και ποιό είναι αυτό;

④ Ενός Κ.Π. η ακτίνα είναι 8 cm και το απόστημα $4\sqrt{3}$ cm. Να βρεθεί η πλευρά του.

⑤ Ο λόγος των αποστημάτων δύο κανονικών οκταγώνων είναι $\frac{3}{4}$. Να βρεθεί ο λόγος των περιμέτρων και ο λόγος των εμβαδών τους.

⑥ Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου, δείξτε ότι: $A\Gamma^2 - AB^2 = B\Gamma \cdot A\Delta$.

⑦ Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Φέρνουμε τις διαγώνιές του ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ, ΒΔ, ΔΖ, ΖΒ που τέμνονται ανά δύο στα διαδοχικά σημεία Θ, Ι, Κ, Λ, Μ, Ν.
1) Δείξτε ότι το εξάγωνο ΘΙΚΛΜΝ είναι κανονικό.
2) Να υπολογισθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του.

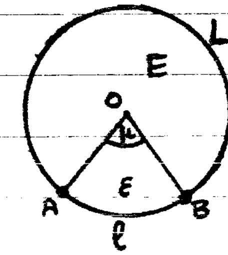
⑧ Να υπολογισθεί η πλευρά ενός κανονικού εξαγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R).

⑨ Σε ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ με πλευρά α συνδέουμε την κορυφή Α με το μέσο Η της πλευράς ΓΔ.
Να βρεθεί το εμβαδό καθενός από τα δύο μέρη στα οποία διαιρείται το εξάγωνο.

⑩ Με πλευρές τις πλευρές ενός κανονικού εξαγώνου και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνα. Δείξτε ότι οι κορυφές των τετραγώνων που δεν είναι κορυφές του εξαγώνου, είναι κορυφές κανονικού δωδεκαγώνου, του οποίου ζητείται το εμβαδό.

⑪ Σε κύκλο (Ο,R) δίνονται οι κάθετες διάμετροι ΑΒ, ΓΔ. Αν Μ το μέσο της ΟΑ και ο κύκλος (Μ, ΜΓ) τέμνει την ΟΒ στο Ε, δείξτε ότι $OE = \lambda_{10}$ και $E\Gamma = \lambda_5$.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ.



- Μήκος κύκλου → $L = 2\pi R$.
- Μήκος τόξου → $\ell = 2\pi R \cdot \frac{\mu}{360} = \frac{\pi R \mu}{180}$
- Εμβαδό κυκλικού δίσκου → $E = \pi R^2$.
- Εμβαδό κυκλικού τομέα → $\varepsilon = \frac{1}{2}\ell R \Rightarrow \varepsilon = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(12) Κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε κανονικό εξάγωνο πλευράς 5 cm. Να βρεθεί το μήκος του και το εμβαδό του κυκλικού δίσκου.

(13) Σε κύκλο με ακτίνα 6 cm εγγράφουμε τετράγωνο και σ' αυτό εγγράφουμε νέο κύκλο. Να βρεθεί το μήκος και το εμβαδό του νέου κύκλου.

(14) Τετράγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 10 m. Να βρεθεί το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί σε μια πλευρά του και το εμβαδό του αντίστοιχου κυκλικού τομέα.

(15) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Με κέντρα τα Α,Β,Γ και ακτίνα α γράφουμε τρία τόξα που έχουν τα άκρα τους στις κορυφές του τριγώνου. Δείξτε ότι: το άθροισμα των μηκών τους είναι ίσο με το μήκος κύκλου που έχει ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$.

(16) Δείξτε ότι: το εμβαδό **κυκλικού δακτυλίου** (δηλαδή του μέρους που περιέχεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων) είναι ίσο με το εμβαδό κύκλου που έχει διάμετρο τη χορδή του μεγαλύτερου κύκλου, η οποία είναι εφαπτομένη του μικρότερου.

(17) Να βρεθεί το εμβαδό καθενός από τα δύο μέρη, στα οποία διαιρείται ένας κύκλος (O,R) από τη πλευρά
α) ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σ' αυτόν.
β) τετραγώνου " " .

(18) Δύο ίσοι κύκλοι με ακτίνα R, έχουν διάκεντρο $R\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδό του κοινού μέρους τους.

(19) Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $2m$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου και το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ του κύκλου και της περιμέτρου του τριγώνου.

(20) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ τριών ίσων κύκλων που εφάπτονται ανά δύο.

(21) Με διάμετρο την ακτίνα OA κύκλου (O,R), γράφουμε κύκλο κέντρου K. Από το O φέρνουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (O) στο B και τον (K) στο Γ. Δείξτε ότι τα τόξα $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{A\Gamma}$ έχουν ίδιο μήκος.

(22) Δύο κύκλοι (O_1, R) και $(O_2, 2R)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Γ. Αν AB είναι η κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους (A, B σημεία επαφής), να βρεθεί το εμβαδό του κύκλου που είναι περιγεγραμμένος στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

(23) Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 2\alpha$. Γράφουμε κύκλο με κέντρο A και ακτίνα το μισό του ύψους $A\Delta$. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου και το εμβαδό του μέρους του, που είναι έξω από το τρίγωνο.

(24) Δίνεται κύκλος (K,R) και δύο διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ κάθετοι μεταξύ τους. Γράφουμε τον κύκλο $(\Gamma, \Gamma A)$. Να βρεθεί:
α) το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΓAB. β) το εμβαδό του μηνίσκου $A\Delta B$.

25) Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB=2\rho$. Με διαμέτρους OA και OB γράφουμε δυο ημικύκλια μέσα στο πρώτο. Να βρεθεί το εμβαδό και το μήκος του κύκλου, που εφάπτεται στα τρία αυτά ημικύκλια.

26) Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,R) και $(O,2R)$. Απο τυχαίο σημείο A του κύκλου $(O,2R)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες AM και AN του κύκλου (O,R) που τέμνουν τον κύκλο $(O,2R)$ στα B, Γ αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται απο τα τμήματα AM, AN και το κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{MN}$ του κύκλου (O,R).

27) Δίνεται κύκλος (O,R) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Γράφουμε τον κύκλο (A, AB). Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που περιέχεται μεταξύ των δύο κύκλων και στην οποία βρίσκεται το τρίγωνο.

28) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Γράφουμε μέσα στο τετράγωνο τα τεταρτοκύκλια (A,α) και (Γ,α). Να βρεθεί το εμβαδό του μέρους που περιέχεται ανάμεσά τους.

29) Δίνεται τετράγωνο πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του και ακτίνα α γράφουμε τεταρτοκύκλια μέσα σ' αυτό. Να βρεθεί το εμβαδό του καμπυλόγραμμου σταυρού που σχηματίζεται.

30) Δίνεται κύκλος (O,R) και διάμετρος AB αυτού. Γράφουμε κύκλο με κέντρο A και ακτίνα την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον (O,R). Να βρεθεί το εμβαδό του κοινού μέρους των δύο κύκλων.

31) Στη προέκταση μιας ακτίνας OA κύκλου (O,R) παίρνουμε τμήμα $AB=R$, και φέρνουμε την εφαπτομένη ΒΓ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΓ.