Α΄ ΔΕΣΜΗ

ΘΕΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΙΑ

ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΕ

ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥΣ.

ΘΕΜΑΤΑ

ΠΟΥ ΔΟΘΗΚΑΝ ΣΤΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΕΙ

ΑΠΟ ΤΟ 1980 ΚΑΙ ΜΕΤΑ...

Θεσ/νίκη '91

ΘΕΜΑΤΑ

«ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ»

Η μελέτη των θεμάτων αυτών, προϋποθέτει ότι: ο μαθητής θα έχει κάνει την επανάληψη όλης της ύλης...

Θ1. Να βρεθεί σημείο M του επιπέδου του τριγώνου $AB\Gamma$ αν ισχύει:

1) $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{\alpha}$, όπου $\vec{\alpha}$ γνωστό διάνυσμα.

2) $\vec{HM}=\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{H\Gamma}$, όπου H το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Θ2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, Λ, M των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A, AB$ αντίστοιχα, έτσι ώστε: $\frac{\vec{BK}}{\vec{K\Gamma}}=\frac{\vec{\Gamma\Lambda}}{\vec{\Lambda A}}=\frac{\vec{AM}}{\vec{MB}}=\lambda>0$.

Δείξτε ότι:

1) $\vec{AK}=\dfrac{\vec{AB}+\lambda\cdot\vec{A\Gamma}}{1+\lambda}$ 2) $\vec{AK}+\vec{B\Lambda}+\vec{\Gamma M}=\vec{0}$.

Θ3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ, E, Z των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A, AB$ αντίστοιχα, έτσι ώστε: $\frac{\vec{B\Delta}}{\vec{\Delta\Gamma}}=\frac{\vec{\Gamma E}}{\vec{EA}}=\frac{\vec{AZ}}{\vec{ZB}}=\lambda>0$.

Δείξτε ότι:

τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

Θ4. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\dfrac{5x^2+4\alpha x-\beta}{x^2+1}$.

Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να έχει μέγιστο το 7 και ελάχιστο το -3.

Θ5. Θεωρούμε τους πίνακες A, B, Γ του Π_2 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $D(A)\neq D(B)$ και $A\Gamma=\Gamma B$. Δείξτε ότι:

1) $D(A)\cdot D(B)=D(A\cdot B)$, $\forall A,B\in\Pi_2$. 2) ο πίνακας Γ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θ6. Δίνονται οι $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και το σύστημα (Σ): $\begin{cases}\alpha x+y=\beta\\ -x+\alpha y=\gamma\\ x^2+y^2=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+1}\end{cases}$

Δείξτε ότι το (Σ) είναι συμβιβαστό, αν και μόνο αν, $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$.

Θ7. Να λυθούν (και να διερευνηθούν) τα συστήματα:

(Σ_1): $\begin{cases}\lambda x+y=2\lambda\\ 2x+(\lambda+1)y=10\\ 4x+\lambda y=11\end{cases}$ $: \lambda\in\mathbb{R}$, (Σ_2): $\begin{cases}2\alpha x+y+\alpha z=1\\ x+\alpha y+z=\alpha\\ \alpha x+y+\alpha z=-\alpha\end{cases}$ $: \alpha\in\mathbb{R}$.

Θ8. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν:
$|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=3$, $\vec{\beta}\perp\vec{\gamma}$, $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})=\frac{\pi}{3}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$,
δείξτε ότι το σύνολο $\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.

Θ9. Δίνεται παρ/μο ΑΒΓΔ με $\vec{A\Delta}=\vec{\alpha}$ και $\vec{AB}=\vec{\beta}$.
Αν το $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$,
δείξτε ότι το εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)\leq|\vec{\beta}|$. ΘΕΜΑ 79.

Θ10. 1) Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{2\cdot3^{2\nu}+3\cdot5^{2\nu+1}}{4^{2\nu+3}-12\cdot6^{2\nu-1}}$.
Δείξτε ότι $\lim\alpha_\nu=0$.
2) Όμοια, για την ακολουθία $\beta_\nu=\dfrac{5+\eta\mu\frac{\nu\pi}{5}}{4\nu^2+\nu+3}$.

Θ11. Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:
1) $\alpha_\nu=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^\nu}$
2) $\alpha_\nu=\dfrac{1}{1+2^{\nu+1}}+\dfrac{1}{2+2^{\nu+1}}+\dfrac{1}{2^2+2^{\nu+1}}+\dots+\dfrac{1}{2^\nu+2^{\nu+1}}$

Θ12. Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν): με $\alpha_1=3$ και $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{3+\alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu}$ και
$\alpha_\nu\neq0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$, συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Θ13. Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία
$\alpha_\nu=\dfrac{x^\nu}{(\nu+3)(\nu+4)}$, $x\in\mathbb{R}$.

Θ14. Δίνονται οι πίνακες $A,B\in\Pi_\nu$: $A^2=A$, $B^2=B$, $AB=BA=\mathbb{O}$.
Δείξτε ότι το σύνολο $S=\{(\kappa A+\lambda B)\in\Pi_\nu : \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}$
είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης
και του πολ/μού στο Π_ν.

Θ15. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ δίνονται οι πράξεις $*$ και $\circ$ με τύπους:
$x*y=2x-y$ και $x\circ y=\kappa x+\lambda y$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ σταθεροί.
Δείξτε ότι οι πράξεις αυτές είναι η καθε μια επιμεριστική
ως προς την άλλη, αν και μόνο αν, $\kappa+\lambda=1$.

Θ16. Θεωρούμε το σύνολο $S=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$. Αν $z_1,z_2\in S$ με $z_1^2\neq z_2^2$,
δείξτε ότι το σύνολο $\{z_1,z_2\}$ είναι μια βάση του χώρου $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$.

Θ17. Θεωρούμε το σύνολο $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-4y+5z=0\}$.
Δείξτε ότι το A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και
βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.

Θ18. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x+\mu y+1=0$ και $\varepsilon_2: 2\mu x+2y+\lambda=0$ όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Να προσδιοριστούν τα ζεύγη των τιμών των λ,μ, ώστε οι δύο ευθείες να είναι
παρ/λες και να έχουν απόσταση μεταξύ τους ίση με $2\sqrt{2}$. ΘΕΜΑ 85.

Θ19. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,-3)$, $\Gamma(3,2)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του
συμμετρικού του Γ ως προς την ευθεία που ορίζουν τα A,B. ΘΕΜΑ 78.

Θ20. Δίνονται τα σύνολα B_1, B_2 του χώρου $\mathbb{R}^2$: $B_1=\{(\sigma\upsilon\nu\vartheta, \eta\mu\vartheta), (\eta\mu\vartheta, -\sigma\upsilon\nu\vartheta)\}$
$B_2=\{(\sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta, -\sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta), (\sigma\upsilon\nu\vartheta+\eta\mu\vartheta, \sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta)\}$ με $\vartheta\in\mathbb{R}$.
1) Δείξτε ότι το καθένα από τα σύνολα B_1, B_2 είναι μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^2$.
2) Έστω $\vartheta=\frac{\pi}{4}$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο διάνυσμα (x,y) του δ.χ. $\mathbb{R}^2$ τέτοιο
ώστε τα διατεταγμένα ζεύγη των συντεταγμένων να είναι $(\lambda,\mu-1)$, $(\lambda-1,\mu)$
ως προς τις βάσεις B_1, B_2 αντίστοιχα. ΘΕΜΑ 84.

Θ21. Θεωρούμε το σύνολο $G=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & x\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\in\Pi_2 : \alpha,\beta,x\in\mathbb{R} \text{ και } \alpha\cdot\beta\neq 0\right\}$.
Δείξτε ότι το G είναι πολ/κή ομάδα

Θ22. Αν για τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $\vec{x}+2\vec{\alpha}=4\vec{y}+6\vec{\beta}$ και
$8\vec{y}+33\vec{\beta}=11\vec{\alpha}-5\vec{x}$, δείξτε ότι τα $\vec{x}, \vec{y}$ είναι ομόρροπα.

Θ23. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A=[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)=0$.
Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε σημείο του $[\alpha,\beta]$ και
ισχύει $f''(x)<0, \forall x\in(\alpha,\beta)$, δείξτε ότι: $f(x)>0, \forall x\in(\alpha,\beta)$.

Θ24. Αν ο $\rho=\alpha+\beta i$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}^*$, είναι ρίζα του $f(x)=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\dots+x+1$
δείξτε ότι ο αριθμός $\rho+\frac{1}{\rho}$ είναι πραγματικός.

Θ25. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 έχουν μέτρο τη μονάδα, δείξτε ότι:
ο αριθμός $(z_1+z_2)^\nu : (z_1^\nu+z_2^\nu)$ είναι πραγματικός.

Θ26. Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη πράξη $*$ ως εξής: $x*y=(x+\alpha)(y+\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
Να βρεθεί ο α ώστε η δομή $(\mathbb{R},*)$ να είναι ημιομάδα.

Θ27. ? Αν $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ είναι μια βάση του δ.χ. V, τα $x, y, z \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και κάθε στοιχείο της βάσης B είναι γραμμικός συνδυασμός των x, y, z, δείξτε ότι και το $\{x, y, z\}$ είναι βάση του V.

Θ28. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το $\mathbb{C}$ είναι δ.χ. πάνω στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι:
1) Το σύνολο $\{1, i\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{C}$.
2) Το $\{\alpha+\beta i, \gamma+\delta i\}$ είναι βάση του $\mathbb{C}$, αν και μόνο αν, $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$.

Θ29. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\dfrac{x^2+2\alpha x+\beta}{x^2+1}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$.
1) Δείξτε ότι υπάρχουν δύο μόνο σημεία του διαγράμματος C_f της f, στα οποία οι εφαπτόμενες αυτού είναι παρ/λες προς τον άξονα $x'x$.
2) Αν x_1, x_2 οι τετμημένες των σημείων αυτών, δείξτε ότι $x_1 \cdot x_2 = -1$
3) Υπολογίστε τα α, β αν $x_1 = 2$ και $f(1)=2$.
4) Για τις τιμές των α, β που θα βρείτε, δείξτε ότι τα σημεία του C_f με τετμημένες x_1, x_2 είναι ολικά ακρότατα.

Θ30. Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν): $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \dfrac{\nu+3}{2\nu}$ δεν συγκλίνει.

Θ31. 1) Δείξτε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών E_1, E_2 της υπερβολής $(c): \dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ από μια εφαπτομένη της είναι σταθερό.
2) Αν η ευθεία $(\delta): 2x-y-4=0$ είναι εφαπτομένη της υπερβολής που έχει εστίες $E_1(-3,0)$, $E_2(3,0)$, δείξτε ότι η εξίσωση της υπερβολής είναι: $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

Θ32. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα (Σ): $\begin{cases} \alpha x+y+z=0 \\ x+\alpha y+z=0 \\ x+y+\alpha z=0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Στη συνέχεια, να δείξτε ότι το σύνολο των λύσεων (x, y, z) του (Σ) είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μια βάση του και τη διάστασή του.

Θ33. Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων στη παραβολή $y^2=4x$ και στην έλλειψη $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

Θ34. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\lambda$ δείξτε ότι:
$$|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1| = \lambda \cdot |z_1+z_2+z_3|.$$

Θ35. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ και M_1, M_2, M_3 οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η ισότης $\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \lambda \in \mathbb{R}$ είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τα σημεία M_1, M_2, M_3 συνευθειακά.

Θ36. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1$

1) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα πραγματική, απλή.

3) Αν ρ η ρίζα της $f(x) = 0$, τότε $0 < \rho < 1$.

Θ37. 1) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος C_f της συνάρτησης $f: f(x) = x^2 - x - 6$ στο σημείο τομής του με το θετικό ημιάξονα Ox.

2) Να βρεθούν οι θέσεις της καμπύλης που παριστάνει η συνάρτηση $\varphi: \varphi(x) = (x-3)^2 \cdot (x-2)$, όπου η εφαπτομένη της καμπύλης είναι οριζόντια.

Θ38. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος C_f της συνάρτησης $f: f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, που διέρχεται από το σημείο $A(6,0)$.

Θ39. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x^2 - x + 1 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$

1) Να βρεθεί η παράγωγός της.

2) Δείξτε ότι δεν ισχύει το Θ. Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

3) Δείξτε ότι $\exists x_0 \in (0,1) : f'(x_0) = 0$.

Θ40. Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή υποτείνουσα α, εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν είναι το ισοσκελές.

Θ41. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $M(1,2)$ να είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $f: f(x) = \alpha x^3 - \beta x^2$.

Θ42. Δείξτε ότι το διάγραμμα της συνάρτησης $\varphi: \varphi(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ έχει τρία σημεία καμπής που είναι συνευθειακά.

Θ43. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3 |x|}{x^2} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 0$.

Θ44. Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι: για τη συνάρτηση $g: g(x)=(x^2+1)f(x)+4x, \forall x\in\mathbb{R}$, ισχύει $g'(0)=4$.

Θ45. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$.

1) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια και ως προς τη μονοτονία.

Θ46. Δίνεται ο πίνακας $A\in\Pi_\nu$ και το σύνολο $S=\{X\in\Pi_\nu : AX=X\cdot A\}$.

1) Αν $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $X,\Psi\in S$ δείξτε ότι $(\kappa X^2+\lambda X\cdot\Psi+\mu\cdot\Psi^2)\in S$.

2) Δείξτε ότι το S είναι υπόχωρος του δ.χ. Π_ν.

Θ47. Δίνεται ο πίνακας $A\in\Pi_\mu$: $A^2=\lambda\cdot A$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

1) Δείξτε ότι: $A^\nu=\lambda^{\nu-1}\cdot A$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

2) Αν $A=\begin{bmatrix}4&6\\6&9\end{bmatrix}$ να βρεθεί ο A^ν, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Θ48. Δίνεται η ακολουθία (α_ν): $\alpha_{\nu+1}=2\alpha_\nu^2-5\alpha_\nu+7$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$ και $\alpha_1\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η (α_ν) είναι: 1) Γνησίως αύξουσα. 2) Μη φραγμένη.

Θ49. Δίνονται τα διανύσματα $\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$ του χώρου $\mathcal{E}$.
Αν τα διανύσματα $\vec x=3\vec\alpha+\vec\beta-4\vec\gamma$, $\vec y=2\vec\alpha-5\vec\beta+\vec\gamma$, $\vec z=5\vec\alpha+13\vec\beta-14\vec\gamma$ έχουν κοινή αρχή O, δείξτε ότι τα πέρατά τους A,B,Γ είναι συνευθειακά.

Θ50. Δίνονται τα διανύσματα $\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$ ώστε: $(\sqrt3+1)\vec\alpha=\sqrt3\,\vec\beta+\vec\gamma$ και $|\vec\beta|=|\vec\gamma|=\frac{|\vec\alpha|}{\sqrt3-1}\neq 0$. Να βρεθούν οι γωνίες $(\widehat{\vec\alpha,\vec\beta})$ και $(\widehat{\vec\beta,\vec\gamma})$.

Θ51. Αν G πολ/κή ομάδα και $\alpha,\beta,\gamma\in G$, δείξτε ότι:

1) $\alpha\beta=1 \Leftrightarrow \beta\cdot\alpha=1$

2) Αν $\exists\kappa\in\mathbb{N}^*: (\alpha\beta)^\kappa=1 \Rightarrow (\beta\alpha)^\kappa=1$.

3) Αν $\gamma=\alpha^{-1}\cdot\beta\cdot\alpha \Rightarrow \gamma^\nu=\alpha^{-1}\cdot\beta^\nu\cdot\alpha$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

Θ52. Δύο κύκλοι $(C_1),(C_2)$ με κέντρα $K_1(x_1,y_1)$, $K_2(x_2,y_2)$ αντίστοιχα, διέρχονται από την αρχή των αξόνων και εφάπτονται στην ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$. Δείξτε ότι: $\left(\frac{Ax_1+By_1+\Gamma}{Ax_2+By_2+\Gamma}\right)^2=\frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}$.

Θ53. Δίνεται ο μιγαδικός $z=3\sqrt{3}-3i$.

1) Να βρεθεί ο z^{1985}.

2) Να υπολογιστούν οι πέμπτες ρίζες του z.

Θ54. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ και $\nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ και ισχύει $(z_1+z_2)^\nu = (z_1-z_2)^\nu$, δείξτε ότι οι z_1, z_2 αποτελούν μια βάση του δ.χ. $\mathbb{C}$.

Θ55. Δίνεται η συνάρτηση f: $f(x)=3x^5-10x^3+15x$, $x\in\mathbb{R}$.

1) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

2) Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της C_f είναι συνευθειακά.

Θ56. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η παράγωγος f' της f είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T>0$ και τέτοια ώστε $f(T)=f(0)$, δείξτε ότι και η f είναι περιοδική.

Θ57. Δίνεται η παραβολή (c): $y^2=2Px$.

Αν $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ είναι διαφορετικά σημεία της (c), δείξτε ότι: η χορδή AB διέρχεται από την εστία E, αν και μόνο αν, $y_1 y_2 = -P^2$.

Θ58. Δίνεται η έλλειψη (c): $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ και το σημείο $P(3,\sqrt{5})$.

Δείξτε ότι από το σημείο P φέρονται δυο εφαπτόμενες ευθείες προς τη (c), έστω οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, και ότι $|\varepsilon\varphi(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2})| = \frac{10}{9}$.

Θ59. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\in\Pi_2$. Δείξτε ότι:

1) $A^3=-I_2$. 2) $A^2-A+I_2=0$. 3) $(A-I_2)^{19}=A^{19}-I_2$.

4) Το σύνολο $S=\{X\in\Pi_2 : A\cdot X = X\cdot A\}$ είναι υπόχωρος του Π_2, και να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του.

Θ60. Δίνεται η συνάρτηση f: $f(x)=\sqrt{x-x^2}$.

1) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A και το πεδίο τιμών της $f(A)$.

2) Να παρασταθεί η f γραφικά.

Θ61. Δίνονται τα μοναδιαία και κάθετα διανύσματα $\vec{\delta_1}(x_1,y_1)$, $\vec{\delta_2}(x_2,y_2)$.

Δείξτε ότι: $|x_1y_2-x_2y_1|=1$.

Θ62. Δίνεται ο μιγαδικός $a \in \mathbb{C}^*$ και ο φυσικός $\nu \in \mathbb{N}^*$.
Δείξτε ότι: δύο διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης $z^{2\nu+1} = a$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχείου του δ.χ. $\mathbb{C}$.

Θ63. Δίνεται το σύνολο $A = \{z \in \mathbb{C} : (zi + \bar{z}\sqrt{3}) \in \mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι:
1) Το A είναι υπόχωρος του δ.χ. $\mathbb{C}$ και βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.
2) Αν $w \in A$ με $|w| = 1$, τότε $w^{22} + \frac{1}{w^{22}} = 1$.

Θ64. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(0) < 1$ και $f(1) > 3$,
δείξτε ότι $\exists x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = e^{x_0}$.

Θ65. Αν $A, B \in \Pi_2$ δείξτε ότι:
1) $D(A \cdot B) = D(A) \cdot D(B)$
2) Το σύνολο $S = \{A \in \Pi_2 : D(A) = 1\}$ είναι ομάδα μη αντιμεταθετική με πράξη τον πολ/μό στο Π_2.

Θ66. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\delta}, \vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}$ ενός διανυσματικού επιπέδου $\mathcal{P}$, ώστε $|\vec{\delta} - \vec{\delta_1}| = |\vec{\delta} - \vec{\delta_2}|$. Δείξτε ότι:
τα διανύσματα $\vec{a} = 2\vec{\delta} - \vec{\delta_1} - \vec{\delta_2}$ και $\vec{b} = \vec{\delta_1} - \vec{\delta_2}$ είναι κάθετα.

Θ67. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ώστε $\left|\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1}\right| = 2$, δείξτε ότι: $\big||z_1+z_2| - |z_1-z_2|\big| = \sqrt{2} \cdot \big||z_1| - |z_2|\big|$.

Θ68. Δίνεται η συνάρτηση $f : f(x) = (x^2 + 2x - 7) \cdot e^x$. Να μελετηθεί:
1) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
2) ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Θ69. Δίνεται η συνάρτηση $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - 1}{\eta\mu^2 x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$.
Αν η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$.

Θ70. Δίνεται ο δακτύλιος $(A, +, \cdot)$ ώστε $x^2 = x, \forall x \in A$. (Δακτύλιος Boole).
Δείξτε ότι:
1) $x = -x, \forall x \in A$.
2) Ο δακτύλιος είναι αντιμεταθετικός.
3) $xy(x+y) = 0, \forall x, y \in A$.

Θ71. Στό σύνολο Ε θεωρούμε τη προσεταιριστική πράξη $*$ ώστε να ισχύει $\forall \alpha, \beta, \gamma \in E : \alpha * \beta = \gamma * \alpha \Rightarrow \beta = \gamma$. Δείξτε ότι:
1) Η πράξη $*$ είναι αντιμεταθετική.
2) Αν η εξίσωση $x * x = x$ έχει λύση στο Ε, τότε υπάρχει στο Ε ουδέτερο στοιχείο ως προς τη πράξη $*$.

Θ72. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, Δ, Ε και Ζ τα μέσα των ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα και Ο εσωτερικό σημείο του τριγώνου που δεν ανήκει στη ΔΕ. Αν ΑΚ//ΟΔ, ΒΛ//ΟΕ, (Κ∈ΒΓ, Λ∈ΑΓ), Η η τομή των ΑΚ, ΒΛ και G το βαρύκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, δείξτε ότι:
1) $\vec{O\Delta} = \frac{1}{2}\vec{AH}$ 2) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = \vec{OH}$. 3) $\vec{OH} = 3 \cdot \vec{OG}$.
4) $\vec{OZ} // \vec{\Gamma H}$ 5) O, H, G συνευθειακά.

Θ73. Δίνεται η υπερβολή $(c): \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$ και η ευθεία $(\varepsilon): \frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 1$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της (c) που είναι παρ/λες στην (ε).

Θ74. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι άρτια, αν και μόνο αν η f' είναι περιττή.

Θ75. Δίνονται οι μxμ πίνακες Α, Β, Γ. Αν ο Β έχει αντίστροφο τον B^{-1} και ισχύει $A = B^{-1} \cdot \Gamma \cdot B$, δείξτε ότι $A^\nu = B^{-1} \cdot \Gamma^\nu \cdot B$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.
Στη συνέχεια αν $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ και $S = \{X \in \Pi_2 : X \cdot A = B \cdot X\}$, δείξτε ότι το S είναι υπόχωρος του Π_2 και βρείτε μια βάση και τη διάσταση του.

Θ76. Αν $z \in \mathbb{C}^*$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ και $z + \frac{1}{z} = 2\sigma\upsilon\nu\vartheta$ δείξτε ότι: $z^\nu + \frac{1}{z^\nu} = 2\sigma\upsilon\nu(\nu\vartheta)$.

Θ77. Δίνονται οι καμπύλες $(c_1): x^2 + y^2 = 20$, $(c_2): x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$
Δείξτε ότι οι $(c_1), (c_2)$ παριστάνουν κύκλους και βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες τους. Δείξτε ακόμη ότι οι $(c_1), (c_2)$ τέμνονται σε δύο σημεία Α, Β και ότι η κοινή χορδή ΑΒ είναι διάμετρος του (c_2).
Υπολογίστε την οξεία γωνία των εφαπτομένων ευθειών των $(c_1), (c_2)$, στο σημείο Α. (Γωνία δύο κύκλων).

Θ78. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f: f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$.

Θ79. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν η f έχει τύπο:

1) $f(x)=x^{x}$. 2) $f(x)=\left(\frac{\lambda e}{x}\right)^{x}$, $\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.

Θ80. Να υπολογιστούν τα όρια των ακολουθιών (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ όπου:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^2+\nu+2}{7^\nu+4^\nu}$. 2) $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\nu)}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+\nu)}}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$

3) $\alpha_\nu:\begin{cases}\alpha_1=\alpha\\ \alpha_{\nu+1}=\alpha+\alpha_\nu^2\end{cases}$, $0<\alpha\leq\frac{1}{4}$. 4) $\alpha_\nu=(1-x)^\nu$, $x\in\mathbb{R}$.

5) $\alpha_\nu=\nu\cdot\eta\mu\frac{1}{\nu^2}$. 6) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^2-\nu\,\eta\mu^3\nu+1}{3\nu^2-6\sigma\upsilon\nu(\nu\pi)}$. 7) $\alpha_\nu=\dfrac{2\cdot3^\nu+5^{\nu+1}}{4\cdot3^\nu+5^{\nu+2}}$

8) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu}{\nu^2+1}+\dfrac{\nu}{\nu^2+2}+\dots+\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu}$. 9) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^2\cdot(1+2+\dots+\nu)}{1^3+2^3+\dots+\nu^3}$.

Θ81. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια: (αν υπάρχουν)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\eta\mu\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)\right]$. 2) $\lim\limits_{x\to1^-}\left[(x-1)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x+3^x-2}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\eta\mu x\right)}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}-x+1\right]$. 5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+4}$

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$ 7) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\eta\mu x}$.

Θ82. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=(x+\rho_0)^3+(x+\rho_1)^3+(x+\rho_2)^3$ όπου ρ_0,ρ_1,ρ_2 οι κυβικές ρίζες του 1.
Δείξτε ότι: $3\cdot f(x)-x\cdot f'(x)=9$.

Θ83. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu=\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}$.

1) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.
2) Δείξτε ότι: $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$.
3) Να βρείτε το γενικό όρο της ακολουθίας (β_ν) με $\beta_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa$ και να υπολογίσετε το $\lim\beta_\nu$.

Θ84. Θεωρούμε το πίνακα $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&-2&-1\\2&3&2\end{bmatrix}$.

1) Δείξτε ότι: $A^3-A=A^2-I$.
2) Δείξτε ότι: $\forall\nu\in\mathbb{N}, \nu\geq3$ είναι $A^\nu-A^{\nu-2}=A^2-I$.
3) Να υπολογίσετε τον A^{200}.

Θ85. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\alpha_0=2$ και $\alpha_\nu=\dfrac{\alpha_{\nu-1}+5}{2}$ και την ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu=\alpha_\nu-5$

1) Δείξτε ότι $\beta_\nu=\frac{1}{2}\beta_{\nu-1}$.
2) Βρείτε το γενικό όρο της (β_ν).
3) Βρείτε το $\lim\beta_\nu$ και το $\lim\alpha_\nu$.

Θ86. Έστω ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι "1-1 και επί" με $f(-1)=2$. Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη πράξη $*$ με $x*y=f^{-1}\left(f(x)+f(y)-2\right)$. Δείξτε ότι το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την $*$ είναι αβελιανή ομάδα.

Θ87. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{4}e^{-2x}$ και μια αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega\neq 0$.

1) Δείξτε ότι η ακολουθία $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_\nu), \ldots$ είναι γεωμετρική πρόοδος και βρείτε το $\lim f(\alpha_\nu)$.
2) Υπολογίστε το $\Sigma_\nu=f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_\nu)$ και το $\lim\Sigma_\nu$.
3) Αν $\gamma_\nu=\int_0^\nu f(x)dx$, να υπολογίστε το $\lim\gamma_\nu$.

Θ88. Έστω $F_{\mathbb{R}}$ ο δ.χ. των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

1) Δείξτε ότι είναι υπόχωροι του $F_{\mathbb{R}}$ τα σύνολα:
   i) $A=\{f\in F_{\mathbb{R}} : f(0)=0\}$.
   ii) $B=\{f\in F_{\mathbb{R}} : f(3)=f(1)\}$.
   iii) $\Gamma=\{f\in F_{\mathbb{R}} : f(2x)=f(x)\}$.
2) Δείξτε ότι τα στοιχεία f_1, f_2, f_3 του A με $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=x^2-x$, $f_3(x)=2x^3-3x^2+3x$ είναι γραμ. εξαρτημένα.

Θ89. Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu=\dfrac{x^{2\nu+3}-x\cdot 4^\nu}{x^{2\nu+2}+(x^2+1)\cdot 2^{2\nu}}$, $x\in\mathbb{R}$.

1) Να βρείτε το $\lim\alpha_\nu$.
2) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f με $f(x)=\lim\alpha_\nu$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Θ90. 1) Δείξτε ότι ο δ.χ. Π_2 παράγεται από τα στοιχεία του
$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$, $A_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$.
2) Δείξτε ότι το σύνολο $M=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ είναι μια βάση του Π_2.
3) Να εκφράσετε τον πίνακα $B=\begin{bmatrix}-3&1\\4&-2\end{bmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του M.

Θ91. 1) Δείξτε ότι $\forall x \in (0,+\infty)$ είναι $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

2) Αν $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu}{\nu^2}\right)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι: $\lim \alpha_\nu = \sqrt{e}$.

Θ92. Θεωρούμε το σύνολο $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} i,\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z},\ \gamma \in \mathbb{Z}^* \text{ με } \alpha^2+\beta^2=\gamma^2 \right\}$.
Δείξτε ότι το A είναι αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα.

Θ93. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

1) Δείξτε ότι η f έχει ελάχιστο.
2) Δείξτε ότι $\forall x > 0$ είναι $f(x) > 0$.
3) Δείξτε ότι $\forall x > 1$ είναι $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$
4) Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Θ94. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $w_1 = \frac{z-4i}{z+2}$ και $w_2 = \frac{z+2-3i}{z+i}$, $z \in \mathbb{C} - \{-2,-i\}$.

1) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο, όταν: α) $w_1 \in \mathbb{R}$. β) $w_2 \in I$
2) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων τομής των δύο γεωμετρικών τόπων.

Θ95. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\ln(x-\alpha)}{x-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
2) Να προσδιορίσετε το α, ώστε να είναι $f(2)=0$.
3) Να βρείτε τα ακρότατα της f.
4) Να μελετήσετε την f όταν $\alpha = 1$.
5) Να βρείτε τη παράγωγο της συνάρτησης g με $g(x) = [\ln(x-\alpha)]^2$
6) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της γραφικής παράστασης C της f, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = \alpha+1$ και $x = \alpha+4$.
7) Να προσδιορίσετε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\int_{\alpha+1}^{\alpha+\mu} f(x)\,dx = 2$, $\mu > 1$.

Θ96. Αν A, B είναι οι εικόνες των $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο και O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R} \iff OA = OB \text{ ή } O, A, B \text{ συνευθειακά.}$$

Θ97. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2+\mu x+1}{x^2-2x-3}$, $\mu\in\mathbb{R}$.

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2) Για ποιές τιμές του μ η f έχει δύο, ένα, κανένα ακρότατο. Να βρείτε το είδος των ακροτάτων στις δύο πρώτες περιπτώσεις.
3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση που προκύπτει από την f για $\mu=-2$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση C.
4) Να αποδείξετε ότι η C έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$.
5) Δείξτε ότι για $\mu=-2$ είναι $f(x)=1-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}$.
6) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της C και των ευθειών $x=4$, $x=6$, $y=0$.

Θ98. Στο $\mathbb{C}$ ορίζουμε τη πράξη $*$ με $x*y=x+y-xy$.

1) Να υπολογίσετε το $(1-i)*(1+i)$.
2) Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $(z-1)*(z+1)=2i\sqrt{3}$.
3) Να εξετάσετε αν η $*$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.
4) Να αποδείξετε ότι το $\mathbb{C}$ έχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την $*$.
5) Ποιοι μιγαδικοί έχουν συμμετρικό ως προς την $*$;

Θ99. Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&5\\-2&1&4\\2&1&1\end{bmatrix}\quad \text{και}\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\\alpha&1&0\\\beta&\gamma&1\end{bmatrix},\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

1) Να βρείτε τα α,β,γ ώστε ο BA να είναι κλιμακωτός κάτω.
2) Να λύσετε την εξίσωση $AX=\Gamma$, όπου $\Gamma=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

Θ100. Θεωρούμε την εξίσωση (1): $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και το σύστημα (2): $\begin{cases}\beta x+2\alpha y=0\\2\gamma x+\beta y=0\end{cases}$

1) Αν η (1) έχει δύο λύσεις, να αποδείξετε ότι το (2) έχει μια λύση. μόνο (ΜΜΛ)
2) Ισχύει το αντίστροφο της 1);
3) Αν η (1) έχει μια λύση, πόσες λύσεις έχει το (2);

Θ101. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}3x^2+\beta, & x\leq 1\\ 2\alpha x+1, & x\geq 1\end{cases}$.
Να βρεθούν οι πραγματικοί α,β έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο 1 και $\int_0^2 f(x)dx=15$.

Θ102. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}3x^2+\beta x-2, & x<1\\ \alpha x+\gamma, & x\geq 1\end{cases}$.
Να βρεθούν οι πραγματικοί α,β,γ έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $\int_0^2 f(x)dx=5$.

Θ103. Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x+1}$.
Να βρεθεί ο $\alpha\in(1,+\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει: $\int_0^\alpha f(x)dx=5$.

Θ104. Αν $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^{2\nu+2}+x}{x^{2\nu}+1}$, να βρεθεί το $I=\int_0^2 f(x)dx$.

Θ105. Αν $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{e^{\nu x}\cdot x^2-x}{e^{\nu x}+1}$, να βρεθεί το $I=\int_{-1}^1 f(x)dx$.

Θ106. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}3x-[x+1], & x\geq 1\\ (-1)^{[x]}\cdot(x-[x]), & x<1\end{cases}$.
Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:
$$I=\int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx$$

Θ107. Να υπολογισθεί το εμβαδόν E_λ της επιφάνειας πού περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=\ln x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda>0$.
Στη συνέχεια να υπολογισθούν τα όρια:
1) $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E_\lambda$. 2) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E_\lambda$. 3) $\lim\limits_{\lambda\to 1}E_\lambda$.

Θ108. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από το διάγραμμα της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=-\int_0^x 4t\,dt$, τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη της f στο σημείο $A(1,-2)$.

Θ109. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: f(x)=1+\eta\mu x$, $x\in[0,3\pi]$ και τις εφαπτόμενες της f στα σημεία $A(0,1)$ και $B(3\pi,1)$.

Θ110. Να υπολογισθεί το εμβαδόν E_λ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ και τις ευθείες $y=1$, $x=0$ και $x=\lambda$, όπου $\lambda>-1$. Μετά να βρεθούν τα όρια: 1) $\lim\limits_{\lambda\to-1^+}E_\lambda$. 2) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E_\lambda$.

Θ111. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i) είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο Δ

ii) $f''=g''$ και iii) $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$.

Να δείξετε ότι: α) Για κάθε $x\in\Delta$, $f(x)-g(x)=cx$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1, ρ_2 τότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

ΘΕΜΑ' 89.

Θ112. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την γραφική παράσταση της f και από τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy.

ΘΕΜΑ' 89.

Θ113. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\frac{\alpha x^3}{3}+\left(\frac{\beta}{2}+\delta\right)x^2+(\gamma-\delta)x+\delta$ όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ' 90

Θ114. Δίνεται η ευθεία (ε): $5x+3y+2=0$ και ο κύκλος (c): $x^2+y^2-x-2=0$, που τέμνονται στα Μ και Ν. Δείξτε ότι:

i) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2+y^2-x-2+\lambda\cdot(5x+3y+2)=0$ παριστάνει κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα Μ, Ν. Για ποιά τιμή του λ ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την αρχή των αξόνων.

ii) Τα κέντρα των κύκλων της i) ερώτησης ανήκουν σε ευθεία (ε_1) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΘΕΜΑ' 90

Θ115. Αν $f: f(x)=3x+\frac{1}{2x^2}$ α) να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

β) να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας $y=3x$ και των ευθειών $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha>1$.

γ) να υπολογίσετε το $\lim E(\alpha)$ όταν το α τείνει στο άπειρο.

ΘΕΜΑ' 90

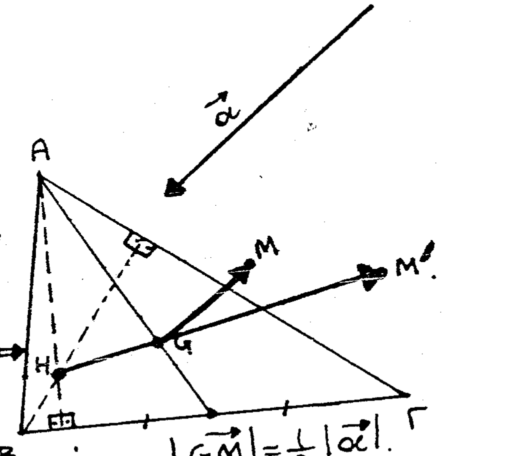
Θ116. Α. Έστω (α_ν) ακολουθία συγκλίνουσα με $\lim \alpha_\nu \neq 0$.
Δείξτε ότι: α) υπάρχει φυσικός κ τέτοιος ώστε $\alpha_{\nu+\kappa} \neq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.
β) για το παραπάνω κ η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}}$ είναι φραγμένη.
Β. Έστω $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$. Θεωρούμε την ακολουθία
(α_ν) με $\alpha_1 = \beta^{1/\beta}$ και $\alpha_{\nu+1} = \left(\beta^{1/\beta}\right)^{\alpha_\nu}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.
Δείξτε ότι: α) Η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα.
β) Η (α_ν) είναι φραγμένη άνω από το β. (ΘΕΜΑ '91)

Θ117. Α. Αν $I_\nu = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^\nu x\, dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε
α) Δείξτε ότι για κάθε $\nu > 2$, ισχύει: $I_\nu = \dfrac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$.
β) Υπολογίστε το I_5
Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.
α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=4$.
(ΘΕΜΑ '91)

Θ118. Α. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.
Να βρείτε την εξίσωση
της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $x - y + 1 = 0$.
Β. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$ και στην παραβολή $y^2 = 3x$. (ΘΕΜΑ '91)

Θ119. Α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με
$=\eta\mu^2 x - \sqrt{2}\,\eta\mu x + 2$ Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$
Δείξτε ότι η f είναι συνεχής και
υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφ. παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=e$. (ΘΕΜΑ '91 Δ')

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ.



1. 1) Απο την Π7. Φ.6, κεφ. 1ο ισχύει:

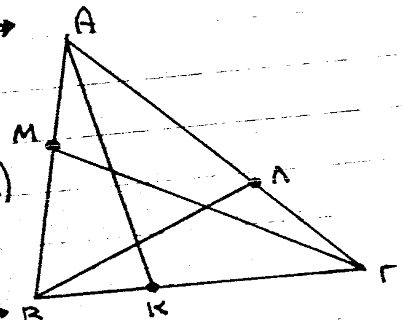
$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=3\vec{MG}\ \text{(G βαρύκεντρο)}$$

Είναι και $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{\alpha}$ (υπόθ.) $\Rightarrow$

$$3\vec{MG}=\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{MG}=\frac{1}{3}\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{GM}=-\frac{1}{3}\vec{\alpha}=c^{te}$$
$$G=c^{te}$$
$\Rightarrow$ M γνωστό. Συγκεκριμένα το M βρίσκεται σε ευθεία $(\varepsilon)\parallel\vec{\alpha}$, που διέρχεται απο το G, έτσι ώστε $|\vec{GM}|=\frac{1}{3}|\vec{\alpha}|$.

2) Ομοια, $\Pi_7 \Rightarrow \vec{HA}+\vec{HB}+\vec{H\Gamma}=3\vec{HG}$

Είναι και $\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{H\Gamma}=\vec{HM}$ $\Rightarrow$ $\vec{HM}=3\vec{HG}=c^{te}$, $H=c^{te}$ $\Rightarrow$ M γνωστό $\equiv M'$



Θ2. 1) $\vec{AK}=\dfrac{\vec{AB}+\lambda\cdot\vec{A\Gamma}}{1+\lambda} \Leftrightarrow \vec{AK}+\lambda\vec{AK}=\vec{AB}+\lambda\cdot\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\vec{AK}-\vec{AB}=\lambda\cdot\vec{A\Gamma}-\lambda\cdot\vec{AK} \Leftrightarrow$

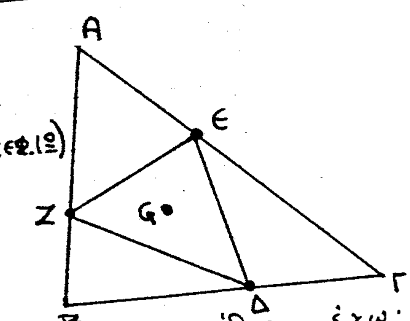
$\vec{BK}=\lambda\cdot(\vec{A\Gamma}-\vec{AK}) \Leftrightarrow$

$\vec{BK}=\lambda\cdot\vec{K\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\vec{BK}}{\vec{K\Gamma}}=\lambda$ ισχύει (υπόθ.)

2) Δείξαμε ότι: $\vec{AK}=\dfrac{\vec{AB}+\lambda\cdot\vec{A\Gamma}}{1+\lambda}$ (1)

Ομοια, $\vec{B\Lambda}=\dfrac{\vec{B\Gamma}+\lambda\cdot\vec{BA}}{1+\lambda}$ (2) και $\vec{\Gamma M}=\dfrac{\vec{\Gamma A}+\lambda\cdot\vec{\Gamma B}}{1+\lambda}$ (3)

$$(1)+(2)+(3) \Longrightarrow \vec{AK}+\vec{B\Lambda}+\vec{\Gamma M}=\frac{1}{1+\lambda}\cdot\left[(\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A})+\lambda\cdot(\vec{A\Gamma}+\vec{BA}+\vec{\Gamma B})\right]=$$
$$=\frac{1}{1+\lambda}\cdot\left[\vec{0}+\lambda\cdot\vec{0}\right]=\frac{1}{1+\lambda}\cdot\vec{0}=\vec{0}.$$



Θ3. Έστω G το βαρύκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

• Αρκεί να δείξω ότι $\vec{G\Delta}+\vec{GE}+\vec{GZ}=\vec{0}$, οπότε το G θα είναι βαρύκεντρο και του $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$. ($\Pi_5$.Φ6, κεφ.1ο)

Είναι $\vec{G\Delta}+\vec{GE}+\vec{GZ}=$

$\vec{GB}+\vec{B\Delta}+\vec{G\Gamma}+\vec{\Gamma E}+\vec{GA}+\vec{AZ}=$

$(\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma})+(\vec{B\Delta}+\vec{\Gamma E}+\vec{AZ})$. (1)

Αλλά $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$ (αφού G βαρύκ. $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$) και απο την υπόθεση, έχω:

$\vec{B\Delta}=\lambda\cdot\vec{\Delta\Gamma}=\lambda\cdot(\vec{B\Gamma}-\vec{B\Delta})=\lambda\vec{B\Gamma}-\lambda\vec{B\Delta} \Leftrightarrow \vec{B\Delta}+\lambda\vec{B\Delta}=\lambda\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow (1+\lambda)\cdot\vec{B\Delta}=\lambda\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$\vec{B\Delta}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\vec{B\Gamma}$

Ομοια, $\vec{\Gamma E}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\vec{\Gamma A}$

και $\vec{AZ}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{B\Delta}+\vec{\Gamma E}+\vec{AZ}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\cdot(\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}+\vec{AB})=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\vec{0}=\vec{0}$

Αρα: $(1) \Rightarrow \vec{G\Delta}+\vec{GE}+\vec{GZ}=\vec{0} \Leftrightarrow$ G βαρύκ. $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$, δηλαδή τα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο G.

Θ4. : Είναι $x^2+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$: Άρα $A_f = \mathbb{R}$.

Για να έχει η f μέγιστο το 7 και ελάχιστο το -3 πρέπει :

$$-3 \leq f(x) \leq 7, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq \frac{5x^2+4\alpha x-\beta}{\underbrace{x^2+1}_{+}} \leq 7 \Leftrightarrow$$

$$-3x^2-3 \leq 5x^2+4\alpha x-\beta \leq 7x^2+7 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x^2+4\alpha x-\beta \geq -3x^2-3 \\ 5x^2+4\alpha x-\beta \leq 7x^2+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2+4\alpha x+3-\beta \geq 0 & (1) \\ 2x^2-4\alpha x+\beta+7 \geq 0 & (2) \end{cases} \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Οι (1) και (2) ισχύουν αν $\Delta_1 = 0 \wedge \Delta_2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 16\alpha^2-32(3-\beta)=0 \\ 16\alpha^2-8(\beta+7)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+2\beta=6 \\ 2\alpha^2-\beta=7 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{matrix} \alpha=-2 \\ \beta=1. \end{matrix}$$

Θ5. 1) $D(A)\cdot D(B) = D(A\cdot B)$ ← Βλέπε Ασκ. 32.Β, κεφ. 1ο

2) Είναι $A\Gamma = \Gamma B$ (υπόθ.) $\Rightarrow D(A\Gamma) = D(\Gamma B) \overset{1)}{\Rightarrow} D(A)\cdot D(\Gamma) = D(\Gamma)\cdot D(B)$

$\Rightarrow D(A)\cdot D(\Gamma) - D(\Gamma)\cdot D(B) = 0 \Rightarrow D(\Gamma)\cdot[D(A)-D(B)] = 0$

Αλλά $D(A) \neq D(B)$ (υπ.) $\Rightarrow D(A)-D(B) \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow D(\Gamma)=0$.

Άρα ο πίνακας Γ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θ6. (Σ): $\begin{cases} \alpha x+y=\beta & (1) \\ -x+\alpha y=\gamma & (2) \\ x^2+y^2=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+1} & (3) \end{cases}$ Το σύστημα των (1), (2) έχει μ.μ.λ. διότι $D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2+1 \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Η λύση αυτή είναι: $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} \beta & 1 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2+1} = \dfrac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha^2+1}$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & \gamma \end{vmatrix}}{\alpha^2+1} = \dfrac{\alpha\gamma+\beta}{\alpha^2+1}$

Άρα, το (Σ) είναι συμβιβαστό, αν και μόνο αν, η λύση αυτή επαληθεύει και την (3). Δηλαδή: $\left(\dfrac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha^2+1}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha\gamma+\beta}{\alpha^2+1}\right)^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha^2\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2}{(\alpha^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{\alpha^2}{\cancel{\alpha^2+1}} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)+(\beta^2+\gamma^2)}{\alpha^2+1} = \alpha^2 \Leftrightarrow \frac{(\beta^2+\gamma^2)\cancel{(\alpha^2+1)}}{\cancel{\alpha^2+1}} = \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2+\gamma^2=\alpha^2.$$

Θ7. 1) (Σ): $\underline{3\times 2}$ $\begin{cases} \lambda x + y = 2\lambda \\ 2x+(\lambda+1)y=10 \\ 4x+\lambda y = 11 \end{cases}$ Είναι: $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2\lambda \\ 2 & \lambda+1 & 10 \\ 4 & \lambda & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 \\ 2 & \lambda+1 \\ 4 & \lambda \end{matrix} = 11\lambda(\lambda+1)+40+4\lambda^2-8\lambda(\lambda+1) -10\lambda^2-22 =$

$= 11\lambda^2+11\lambda+40+4\lambda^2-8\lambda^2-8\lambda-10\lambda^2-22 = -3\lambda^2+3\lambda+18 = -3(\lambda^2-\lambda-6) = \underline{-3(\lambda+2)(\lambda-3)}$

i) Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda \neq 3 \wedge \lambda \neq -2}$ το (Σ) είναι <u>αδύνατο</u>.

ii) Αν $\underline{\lambda=3}$ το (Σ) γίνεται: $\begin{cases} 3x+y=6 \\ 2x+4y=10 \\ 4x+3y=11 \end{cases}$. $E = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right]\cdot(\tfrac{1}{2}) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right] (-4) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right] (-3)$

$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & -5 & -9 \end{array}\right]\cdot(-\tfrac{1}{5}) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 9/5 \\ 0 & -5 & -9 \end{array}\right] \cdot 5 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-2)$ ταυτότης $\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & 9/5 \end{array}\right] \Leftrightarrow$ μ.μ.λ. $x=\frac{7}{5}, y=\frac{9}{5}$

iii) Αν $\underline{\lambda=-2}$ το (Σ) γίνεται: $\begin{cases} -2x+y=-4 \\ 2x-y=10 \\ 4x-2y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ 2x-y=10 \end{cases} \Big\} \Leftrightarrow$ <u>Αδύνατο</u>.

Θ7. 2) (Σ): $\begin{cases} 2\alpha x+y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+z=\alpha \\ \alpha x+y+\alpha z=-\alpha . \end{cases}$ 3×3

Είναι: $D=\begin{vmatrix} 2\alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\alpha & 1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix}=$

$=(\alpha+1)\cdot\begin{vmatrix} 2\alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix}=(\alpha+1)\cdot\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix}=\underline{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha+1)}$

i) Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \underline{\alpha\neq 0 \wedge \alpha\neq 1 \wedge \alpha\neq -1}$ το (Σ) έχει μ.μ.λ

$x=\frac{D_x}{D}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)^2}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha+1}{\alpha}$, $y=\frac{D_y}{D}=\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha}{\alpha-1}$, $z=\frac{D_z}{D}=\frac{(\alpha+1)(1-2\alpha^2)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)}$

ii) Αν $\underline{\alpha=0}$ το (Σ) γίνεται: $\begin{cases} y=1 \\ x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \to$ $\underline{\text{Αδύνατο}}$

iii) Αν $\underline{\alpha=1}$ " " " : $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=-1 \end{cases} \to$ $\underline{\text{Αδύνατο}}$

iv) Αν $\alpha=-1$ " " " : $\begin{cases} -2x+y-z=1 \\ x-y+z=-1 \\ -x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y-z=1 \\ x-y+z=-1 \\ \text{››} \end{cases}$

$E=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]_{(-1)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=1+z \end{matrix} : z\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ Αόριστο με ∞ λύσεις της μορφής: $(x,y,z)=(0,1+z,z): z\in\mathbb{R}$.

▼ Θ8. • Αρκεί $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι διάσταση $E=3$.

Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$: $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma}=\vec{0}$ (1)

$(1)\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow (\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}+\lambda_3\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow \lambda_1\vec{\alpha}^2+\lambda_2\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}+\lambda_3\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=0$ (2)

Αλλά $|\vec{\alpha}|=1 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2=1$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot συν(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})=2\cdot 1\cdot συν\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

και $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdot συν(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})=3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, οπότε: $(2)\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2+\frac{3}{2}\lambda_3=0$ (3)

Όμοια, $(1)\cdot\vec{\beta} \Rightarrow$ ---- ---- $\Rightarrow$ ---------- $\Rightarrow \lambda_1+4\lambda_2=0$ (4)

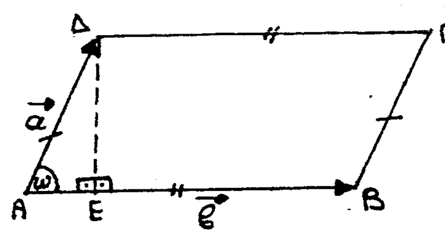
και, $(1)\cdot\vec{\gamma} \Rightarrow$ -------- $\Rightarrow$ --------- $\Rightarrow \frac{3}{2}\lambda_1+9\lambda_3=0$ (5)

(3),(4),(5) $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma} \text{ γραμμ. ανεξ.} \\ \text{διάσταση } E=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\}$ βάση του E.

▼ Θ9. $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{i} \Rightarrow (\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})^2=\vec{i}^2 \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\lambda\vec{\beta}+\lambda^2\vec{\beta}^2=1 \Leftrightarrow$

$\lambda^2|\vec{\beta}|^2+2\lambda|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot συνω+|\vec{\alpha}|^2-1=0$ (1)



Η (1) είναι β΄ βάθμια ως προς $|\vec{\beta}|$.

Επειδή $|\vec{\beta}|\in\mathbb{R}$ πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2|\vec{\alpha}|^2συν^2ω-4\lambda^2(|\vec{\alpha}|^2-1)\geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2|\vec{\alpha}|^2(συν^2ω-1)+4\lambda^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} 4\lambda^2\left[|\vec{\alpha}|^2(-ημ^2ω)+1\right]\geq 0 \\ \lambda\neq 0 \Rightarrow 4\lambda^2>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -|\vec{\alpha}|^2ημ^2ω+1\geq 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2ημ^2ω\leq 1 \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} |\vec{\alpha}|\cdotημω\leq 1 \\ \text{Αλλα το εμβαδόν } E=(AB)\cdot(\Delta E)=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\alpha}|\cdotημω \end{matrix}\right\} \Rightarrow E\leq|\vec{\beta}|\cdot 1 \Leftrightarrow E\leq|\vec{\beta}|$.

Θ10. 1) $\alpha_\nu = \frac{2\cdot(3^2)^\nu + 3\cdot(5^2)^\nu\cdot 5}{(4^2)^\nu\cdot 4^3 - 12\cdot(6^2)^\nu\cdot\frac{1}{6}} = \frac{2\cdot 9^\nu + 15\cdot 25^\nu}{16^\nu - 2\cdot 36^\nu}$ (Δια 36^ν)

$= \frac{2\cdot\left(\frac{9}{36}\right)^\nu + 15\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^\nu}{\left(\frac{16}{36}\right)^\nu - 2}$. Αλλα $\left|\frac{9}{36}\right| = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \left(\frac{9}{36}\right)^\nu \to 0$, $\left|\frac{25}{36}\right| < 1 \Rightarrow \left(\frac{25}{36}\right)^\nu \to 0$, $\left|\frac{16}{36}\right| < 1 \Rightarrow \left(\frac{16}{36}\right)^\nu \to 0$.

Αρα $\lim\alpha_\nu = \frac{2\cdot 0 + 15\cdot 0}{0-2} = \frac{0}{-2} = 0$.

2) $b_\nu = \gamma_\nu\cdot\delta_\nu$ όπου $\gamma_\nu = 5 + \eta\mu\frac{\nu\pi}{5}$, $\delta_\nu = \frac{1}{4\nu^2+\nu+3}$

Είναι $|\gamma_\nu| = \left|5+\eta\mu\frac{\nu\pi}{5}\right| \le 5 + \left|\eta\mu\frac{\nu\pi}{5}\right| \le 5+1 = 6 \Rightarrow \gamma_\nu$ φραγμένη

και $\lim(4\nu^2+\nu+3) = \lim(4\nu^2) = 4\cdot\lim\nu^2 = +\infty \Rightarrow \lim\delta_\nu = 0$ $\Bigg\} \Longrightarrow$

$\lim b_\nu = 0$ σαν γινόμενο μηδενικής με φραγμένη.

Θ11. 1) Οι όροι της α_ν αποτελούν Γεωμ. Πρόοδο με $\alpha_1 = 1$, $\lambda = \frac{1}{3}$, πλήθος $= \nu+1$

Αρα $\alpha_\nu = \Sigma = \frac{\alpha_1\cdot(\lambda^{\nu+1}-1)}{\lambda-1} = \frac{1\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu+1}-1\right]}{\frac{1}{3}-1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^\nu - 1}{-\frac{2}{3}}$

Είναι $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^\nu \to 0 \Rightarrow \lim\alpha_\nu = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0 - 1}{-2/3} = 3/2$.

2) Είναι: $\frac{1}{2^\nu+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{2^k+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{1+2^{\nu+1}}$, $\forall k\in\mathbb{N}:\ 0\le k\le\nu$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Για } k=0, && \frac{1}{2^\nu+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{1+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{1+2^{\nu+1}}\\
&\text{" } k=1, && \frac{1}{2^\nu+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{2+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{1+2^{\nu+1}}\\
&\text{" } k=2, && \frac{1}{2^\nu+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{2^2+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{1+2^{\nu+1}}\\
&\cdots && \cdots\\
&\text{" } k=\nu, && \frac{1}{2^\nu+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{2^\nu+2^{\nu+1}} \le \frac{1}{1+2^{\nu+1}}
\end{aligned}\right\} + \Rightarrow \frac{\nu+1}{2^\nu+2^{\nu+1}} \le \alpha_\nu \le \frac{\nu+1}{1+2^{\nu+1}} \Leftrightarrow$$

$$x_\nu \le \alpha_\nu \le y_\nu \quad (1)$$

Η (x_ν): $x_\nu = \frac{\nu+1}{2^\nu+2^{\nu+1}} = \frac{\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{2^\nu(1+2)} = \frac{\nu}{2^\nu}\cdot\frac{1+\frac{1}{\nu}}{3} = b_\nu\cdot\gamma_\nu$

Είναι $\frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} = \frac{\frac{\nu+1}{2^{\nu+1}}}{\frac{\nu}{2^\nu}} = \frac{\nu+1}{2\nu} \Rightarrow \lim\frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} = \frac{1}{2} < 0$
$b_\nu > 0,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*$ $\xrightarrow[\text{D'Alembert}]{\text{Κριτήριο}}$ $\lim b_\nu = 0$

και $\lim\gamma_\nu = \frac{1+\lim\frac{1}{\nu}}{3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$. $\Bigg\} \Longrightarrow$

$\lim x_\nu = 0\cdot\frac{1}{3} = 0$.
Όμοια, $\lim y_\nu = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$ $\Bigg\} \xrightarrow[(1)]{\text{Θ.Ι.Α.}}$ $\lim\alpha_\nu = 0$.

Θ12. $\alpha_\nu : \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{3+\alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu} \end{cases}$

Είναι $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

Για $\nu=1$: $\alpha_1 > 0 \Leftrightarrow 3>0$ ισχύει.

Έστω για $\nu=k$: $\alpha_k > 0$ (1)

Θα δείξω για $\nu=k+1$: $\alpha_{k+1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{3+\alpha_k^2}{2\alpha_k} > 0$ ισχύει, λόγω (1).

Μονοτονία: Είναι $\alpha_2 = \dfrac{3+\alpha_1^2}{2\alpha_1} = \dfrac{3+9}{2\cdot 3} = 2 \Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$.

Θα δείξω ότι $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

Για $\nu=1$: $\alpha_2 < \alpha_1$ δείχθηκε.

" $\nu=k$: $\alpha_{k+1} < \alpha_k$ (2)

" $\nu=k+1$: $\alpha_{k+2} < \alpha_{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{3+\alpha_{k+1}^2}{2\alpha_{k+1}} < \alpha_{k+1} \Leftrightarrow 3+\alpha_{k+1}^2 < 2\alpha_{k+1}^2 \Leftrightarrow \alpha_{k+1}^2 > 3$

$\Leftrightarrow \alpha_{k+1} > \sqrt{3}$ Η σχέση αυτή ισχύει (δείχνεται στη συνέχεια)

Άρα $\alpha_\nu \downarrow$ ($\Rightarrow$ άνω φραγμένη με "ένα" α.φ. το $\alpha_1=3$. Δηλ. $\alpha_\nu \leq 3$).

Φράγματα: Θα δείξω ότι $\alpha_\nu > \sqrt{3}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ (οπότε για $\nu=k+1$, $\alpha_{k+1} > \sqrt{3}$).

Για $\nu=1$: $\alpha_1 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 3 > \sqrt{3}$ ισχ.

" $\nu=k$: $\alpha_k > \sqrt{3}$ (3)

" $\nu=k+1$: $\alpha_{k+1} > \sqrt{3} \Longleftrightarrow \dfrac{3+\alpha_k^2}{\underset{+}{2\alpha_k}} > \sqrt{3} \Leftrightarrow 3+\alpha_k^2 > 2\sqrt{3}\,\alpha_k \Leftrightarrow (\sqrt{3}-\alpha_k)^2 > 0$ ισχύει

(διότι $\alpha_k > \sqrt{3} \Rightarrow \alpha_k - \sqrt{3} \neq 0$)

Άρα (α_ν) κάτω φραγμένη με "ένα" κ.φ. το $\sqrt{3}$. (Δηλ. $\alpha_\nu > \sqrt{3}$)

$(\alpha_\nu) \downarrow$ και κάτω φραγμένη $\xrightarrow[\text{Μονοτον.}]{\text{Κριτήρ.}}$ (α_ν) συγκλίνει.

Εύρεση ορίου:

Έστω $\lim \alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow \lim \alpha_{\nu+1} = \ell$, οπότε

$$\lim \alpha_{\nu+1} = \frac{3+(\lim \alpha_\nu)^2}{2\lim \alpha_\nu} \Leftrightarrow \ell = \frac{3+\ell^2}{2\ell} \Leftrightarrow 2\ell^2 = 3+\ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 = 3 \Leftrightarrow \ell = \pm 3 \Leftrightarrow$$

$\to \ell = \sqrt{3}$

$\to \ell = -\sqrt{3}$ απορρ. διότι $\sqrt{3} < \alpha_\nu \leq 3$

Άρα: $\lim \alpha_\nu = \sqrt{3}$.

Θ13. i) Αν $|x|<1 \Rightarrow x^\nu \to 0$ και $\dfrac{1}{(\nu+3)(\nu+4)} \to 0$. Άρα $\lim \alpha_\nu = 0\cdot 0 = 0$.

ii) Αν $|x|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \dfrac{1}{(\nu+3)(\nu+4)} \Leftrightarrow \lim \alpha_\nu = 0 \\ x=-1 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{(\nu+3)(\nu+4)} \Leftrightarrow \lim \alpha_\nu = 0 \end{cases}$

(διότι $\lim(\nu+3)(\nu+4) = \lim(\nu^2+7\nu+12) = \lim \nu^2 = +\infty$)

iii) Αν $|x|>1 \Leftrightarrow x<-1 \lor x>1$

α) $x<-1$ και $\begin{cases} \nu=2k \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty \\ \nu=2k+1 \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim \alpha_\nu$ (αποκλίνουσα).

β) $x>1 \Leftrightarrow \alpha_\nu = \dfrac{x^\nu}{\nu^2+7\nu+12} = \dfrac{x^\nu}{\nu^2} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{7}{\nu}+\frac{12}{\nu^2}} = \beta_\nu \cdot \gamma_\nu$. Η (γ_ν): $\lim \gamma_\nu = 1$ $\Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$

(β_ν): $\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)^2}}{\frac{x^\nu}{\nu^2}} = \dfrac{x\cdot\nu^2}{\nu^2+2\nu+1} = \dfrac{x\cancel{\nu^2}}{\cancel{\nu^2}(1+\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu^2})} \Rightarrow \lim \dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = x > 1 \xrightarrow[\text{Ασκ. 40Βii}]{} \lim \beta_\nu = +\infty$

Θ14. $A^2=A$ (1), $B^2=B$ (2), $AB=BA=\mathbf{0}$ (3).
$S=\{(\kappa A+\lambda B)\in \Pi_\nu : \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}$. $S\subseteq \Pi_\nu$ προφανώς.

●₁ "κλειστό"

Αν $X,\Psi\in S \Rightarrow \begin{cases} X=\kappa_1 A+\lambda_1 B \\ \Psi=\kappa_2 A+\lambda_2 B\end{cases} : \kappa_1,\kappa_2,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R} \Rightarrow X+\Psi=(\kappa_1+\kappa_2)A+(\lambda_1+\lambda_2)B=$
$=\kappa\cdot A+\lambda\cdot B : \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$(X+\Psi)\in S$ (4).

Ομοια, $X\cdot\Psi=(\kappa_1A+\lambda_1B)\cdot(\kappa_2A+\lambda_2B)=\kappa_1\kappa_2A^2+\kappa_1\lambda_2AB+\kappa_2\lambda_1BA+\lambda_1\lambda_2B^2=$
(λόγω των (1),(2),(3)) $=\kappa_1\kappa_2A+\kappa_1\lambda_2\cdot\mathbf{0}+\kappa_2\lambda_1\cdot\mathbf{0}+\lambda_1\lambda_2B=\kappa'A+\lambda'B : \kappa',\lambda'\in\mathbb{R}\Rightarrow$
$(X\cdot\Psi)\in S$ (5).

(4),(5) $\Rightarrow$ Το S είναι "κλειστό" ως προς τις πράξεις + και · στο Π_ν. (I).

●₂ (S,+) "Π.Α.Ο.Σ"

Π: $S\subseteq\Pi_\nu$ στο οποίο ισχ. η προσεταιριστική, άρα ισχύει και στο S.
Α: $S\subseteq\Pi_\nu$ " " " " αντιμεταθετική, " " " " ".
Ο: Το $\mathbf{0}=(0\cdot A+0\cdot B)\in S$ και $\forall X\in S$ ισχύει: $\mathbf{0}+X=X+\mathbf{0}=X\Rightarrow$ Ουδέτερο το $\mathbf{0}$.
Σ: $\forall X=(\kappa A+\lambda B)\in S\Rightarrow -X=[(-\kappa)A+(-\lambda)B]\in S$ και $X+(-X)=(-X)+X=\mathbf{0}\Rightarrow$
$\forall X\in S$ έχει συμμετρικό το $-X\in S$.

Άρα το S είναι προσθετική αντιμεταθετική ομάδα. (II).

●₃ (S,·) "Π.Α.Ο.Ε"

Π: $S\subseteq\Pi_\nu$ στο οποίο ισχύει η προσεταιρ. $\Rightarrow$ Ισχύει και στο ~~Π~~ S
Α: $\forall X,\Psi\in S\Rightarrow X\cdot\Psi=(\kappa_1A+\lambda_1B)\cdot(\kappa_2A+\lambda_2B)=\kappa_1\kappa_2A^2+\kappa_1\lambda_2\underbrace{\cancel{AB}}_{\mathbf{0}}+\lambda_1\kappa_2\underbrace{\cancel{BA}}_{\mathbf{0}}+\lambda_1\lambda_2B^2=$
$=\kappa_1\kappa_2A+\lambda_1\lambda_2B$. Ομοια, $\Psi X=(\kappa_2A+\lambda_2B)(\kappa_1A+\lambda_1B)=\kappa_2\kappa_1A^2+\kappa_2\lambda_1\cancel{AB}+\lambda_2\kappa_1\cancel{BA}+\lambda_2\lambda_1B^2=$
$=\kappa_1\kappa_2A+\lambda_1\lambda_2B$. Άρα $X\Psi=\Psi X$, $\forall X,\Psi\in S\Rightarrow$ Ισχύει η αντιμεταθετική.
Ο: Έστω $e=(xA+yB) : \forall X=(\kappa A+\lambda B)\in S$, $X\cdot e=X$ ($=e\cdot X$ λόγω αντιμετ.) $\Leftrightarrow$
$(\kappa A+\lambda B)(xA+yB)=\kappa A+\lambda B\Leftrightarrow \kappa xA^2+\kappa yAB+\lambda xBA+\lambda yB^2=\kappa A+\lambda B\Leftrightarrow$
$\kappa xA+\lambda yB=\kappa A+\lambda B\Leftrightarrow \kappa x=\kappa \wedge \lambda y=\lambda$, $\forall\kappa,\lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=1\wedge y=1\Leftrightarrow$
$x=y=1\Leftrightarrow e=(A+B)\in S\Leftrightarrow$ Μοναδιαίο το $e=A+B$.
Ε: $S\subseteq\Pi_\nu$ στο οποίο ισχύει η επιμεριστική $\Rightarrow$ ισχύει και στο S.

Άρα ο πολ/μός είναι προσεταιριστικός, αντιμεταθετικός, έχει μοναδιαίο στοιχείο και είναι επιμεριστικός ως πρός την πρόσθεση. (III)

(I),(II),(III) $\Rightarrow$ Το S με πράξεις τις + και · στο Π_ν είναι Αντιμεταθετικός Δακτύλιος.

Θ15. Η $*$ είναι Επιμερ. ως προς την $\circ$ $\Leftrightarrow$ $x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z)$ (1) και $(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x)$ (2)
Η $\circ$ " " " " " $*$ $\Leftrightarrow$ $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ (3) και $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$ (4).
(1) $\Leftrightarrow x*(\kappa y+\lambda z)=(2x-y)\circ(2x-z)\Leftrightarrow 2x-\kappa y-\lambda z=\kappa(2x-y)+\lambda(2x-z)\Leftrightarrow$
$2x-\cancel{\kappa y}-\cancel{\lambda z}-2\kappa x+\cancel{\kappa y}-2\lambda x+\cancel{\lambda z}=0\Leftrightarrow 2(1-\kappa-\lambda)x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1-\kappa-\lambda=0\Leftrightarrow \kappa+\lambda=1$.
Ομοια, για τις περιπτώσεις (2),(3),(4).

Θ16. • Αρκεί z_1, z_2 γραμ. ανεξάρτητα.

Έστω z_1, z_2 γραμ. εξαρτημένα $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : z_1 = \lambda z_2$ (1)

$(1) \Rightarrow |z_1| = |\lambda z_2| \Rightarrow |z_1| = |\lambda| \cdot |z_2| \xRightarrow{(υπ)} 1 = |\lambda| \cdot 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$(1) \Rightarrow z_1 = \pm z_2 \Rightarrow z_1^2 = z_2^2 \leftarrow$ Άτοπο (υπόθ.).

Άρα z_1, z_2 γραμ. ανεξάρτητα, διάσταση $\mathbb{C} = 2$, αφού $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow \{z_1, z_2\}$ βάση του $\mathbb{C}$.

Θ17. Είναι $A \subseteq \mathbb{R}^3$ και $A \neq \emptyset$, διότι το $\mathbf{0} = (0,0,0) \in A$ αφού $0 - 4\cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$.

Είναι $(x,y,z) = (4y-5z, y, z) = (4y, y, 0) + (-5z, 0, z) = y(4,1,0) + z(-5,0,1) : y, z \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή κάθε στοιχείο του A γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $v_1 = (4,1,0)$, $v_2 = (-5,0,1)$ του $\mathbb{R}^3$, άρα το A παράγεται από τα $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ A υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Ο πίνακας των συντεταγμένων των v_1, v_2: $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ έχει ένα υποπίνακα 2×2 με $D = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$

v_1, v_2 γραμ. ανεξάρτητα και παράγουν το $A \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ βάση του A.

Η διάσταση του A είναι 2 (όση και το πλήθος των στοιχείων της βάσης).

Θ18. $\varepsilon_1 : x + \mu y + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{\mu} : \mu \neq 0$ $\left(\text{Αν } \mu = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 : x+1=0 \\ \varepsilon_2 : 2y+\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y = -\frac{\lambda}{2} \end{matrix} \Rightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \text{ Άτοπο διότι } \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \right)$

$\varepsilon_2 : 2\mu x + 2y + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = -\mu$

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\mu} = -\mu \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\mu = \pm 1}$

Για $y=0$ η $(\varepsilon_1) \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A(-1,0) \in (\varepsilon_1)$

Άρα $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2}$ (υπόθ.) $\Rightarrow \dfrac{|2\mu(-1) + 2\cdot 0 + \lambda|}{\sqrt{4\mu^2+4}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda - 2\mu|}{\sqrt{4\mu^2+4}} = 2\sqrt{2}$ (1)

i) Αν $\mu = 1$ η $(1) \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda-2|}{\sqrt{8}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |\lambda - 2| = 8 \Leftrightarrow \lambda - 2 = \pm 8 \Leftrightarrow \lambda = 10$ ή $\lambda = -6$.

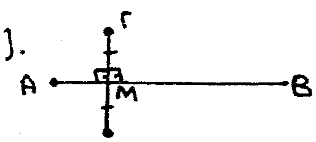
Άρα: $(\lambda, \mu) = (10, 1)$ ή $(-6, 1)$.

ii) Αν $\mu = -1$ η $(1) \Leftrightarrow |\lambda + 2| = 8 \Leftrightarrow \lambda + 2 = \pm 8 \Leftrightarrow \lambda = 6$ ή $\lambda = -10$

Άρα: $(\lambda, \mu) = (6, -1)$ ή $(-10, -1)$.

Θ19. $AB : \dfrac{x-1}{1-2} = \dfrac{y-2}{2+3} \Leftrightarrow 5x - 5 = -y + 2 \Leftrightarrow AB : 5x + y - 7 = 0$ με $\lambda_{AB} = -5$

$\Gamma\Gamma' \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Gamma'} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Gamma'} = \frac{1}{5}$, $\Gamma(3,2) \in \Gamma\Gamma'$ $\Rightarrow y - 2 = \frac{1}{5}(x-3)$.



$\Leftrightarrow \Gamma\Gamma' : x - 5y + 7 = 0$

$M = AB \cap \Gamma\Gamma'$, $\begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ x - 5y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots\; M\left(\frac{14}{13}, \frac{21}{13}\right)$. Αλλά M μέσο $\Gamma\Gamma'$, άρα:

$\dfrac{14}{13} = \dfrac{3 + x_{\Gamma'}}{2}$ και $\dfrac{21}{13} = \dfrac{2 + y_{\Gamma'}}{2} \Leftrightarrow x_{\Gamma'} = -\dfrac{11}{3}$, $y_{\Gamma'} = \dfrac{16}{13} \Leftrightarrow \Gamma'\left(-\dfrac{11}{13}, \dfrac{16}{13}\right)$.

Θ20. 1) $D(B_1) = \begin{vmatrix} \text{συν}\theta & \text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & -\text{συν}\theta \end{vmatrix} = -\text{συν}^2\theta - \text{ημ}^2\theta = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Τα 2 στοιχεία του B_1 είναι γραμμ. ανεξάρτητα Διάσταση $\mathbb{R}^2 = 2$ $\Rightarrow$ B_1 βάση του $\mathbb{R}^2$.

Όμοια, $D(B_2) = \begin{vmatrix} \text{συν}\theta - \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta + \text{ημ}\theta \\ -\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta - \text{ημ}\theta \end{vmatrix} = (\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta)^2 + (\text{συν}\theta + \text{ημ}\theta)^2 = 2(\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta) = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ Τα 2 στοιχεία του B_2 είναι γραμμ. ανεξάρ. Διάσταση $\mathbb{R}^2 = 2$ $\Rightarrow$ B_2 βάση του $\mathbb{R}^2$.

2) Αν $\theta = \frac{\pi}{4}$ οι εξισώσεις των συντεταγμένων από την υπόθεση, είναι: $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x,y) = \lambda\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}, \text{ημ}\frac{\pi}{4}\right) + (\mu-1)\left(\text{ημ}\frac{\pi}{4}, -\text{συν}\frac{\pi}{4}\right) \\ (x,y) = (\lambda-1)\left(\cancel{\text{συν}\frac{\pi}{4} - \text{ημ}\frac{\pi}{4}}^{0}, -\text{συν}\frac{\pi}{4} - \text{ημ}\frac{\pi}{4}\right) + \mu\cdot\left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + \text{ημ}\frac{\pi}{4}, \cancel{\text{συν}\frac{\pi}{4} - \text{ημ}\frac{\pi}{4}}^{0}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} + (\mu-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \mu\sqrt{2} \end{cases} \wedge \begin{cases} y = \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} - (\mu-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = (\lambda-1)(-\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (\lambda+\mu-1)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \mu\sqrt{2} \end{cases} \wedge \begin{cases} y = (\lambda-\mu+1)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -(\lambda-1)\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \frac{\lambda+\mu-1}{2} = \mu \right. \wedge \frac{\lambda-\mu+1}{2} = -\lambda+1 \Leftrightarrow \left\{ \lambda-\mu = 1 \right. \wedge 3\lambda-\mu = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \lambda = 0 \right. \wedge \mu = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}, \; y = \sqrt{2}$$ Άρα: $(x,y) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Θ21. $\forall A,B \in G \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & x_1 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha_2 & x_2 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$: $\alpha_1, x_1, \beta_1, \alpha_2, x_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha_1\cdot\beta_1 \neq 0, \alpha_2\beta_2 \neq 0$

$\Rightarrow A\cdot B = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1x_2+\beta_2x_1 \\ 0 & \beta_1\beta_2 \end{bmatrix}$: $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1x_2+\beta_2x_1, \beta_1\beta_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha_1\alpha_2\cdot\beta_1\beta_2 \neq 0 \Rightarrow A\cdot B \in G$

Άρα το G είναι κλειστό ως προς τον $\bullet$ στο Π_2. (Ι)

Π: $G \subseteq \Pi_2$ στο οποίο ισχύει η προσεταιριστική $\Rightarrow$ ισχύει και στο G. (ΙΙ).

Ο: Το $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$ διότι $1\cdot 1 \neq 0$ και $\forall A \in G$: $A\cdot I_2 = I_2\cdot A = A \Rightarrow$ Ουδέτερο το I_2 (ΙΙΙ)

Σ: $\forall A = \begin{bmatrix} \alpha & x \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in G$ είναι $D(A) = \alpha\beta \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{D(A)}\cdot\begin{bmatrix} \beta & -x \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{x}{\alpha\beta} \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \in G$

διότι $\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} \neq 0$. Άρα $\forall A \in G$ έχει αντίστροφο το $A^{-1} \in G$. (IV).

(Ι), (ΙΙ), (ΙΙΙ), (ΙV) $\Rightarrow$ G πολλαπλ. ομάδα.

Θ22.
$$2\cdot\begin{cases} \vec{x} - 4\vec{y} = 6\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} \\ 5\vec{x} + 8\vec{y} = 11\vec{\alpha} - 33\vec{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\vec{x} - 8\vec{y} = 12\vec{\beta} - 4\vec{\alpha} \end{cases} \overset{+}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 7\vec{x} = 7\vec{\alpha} - 21\vec{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \\ 5(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) + 8\vec{y} = 11\vec{\alpha} - 33\vec{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\vec{y} = 6\vec{\alpha} - 18\vec{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \\ \vec{y} = \frac{3}{4}(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \end{cases}$$

Άρα: $\vec{y} = \frac{3}{4}\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$, διότι $\frac{3}{4} > 0$.

Θ23. Αφού η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha,\beta] \Rightarrow$ έχει και πρώτη παράγωγο $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [\alpha,\beta] \\ f(\alpha)=f(\beta)=0 \ (\text{υπ.}) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Rolle}]{\Theta} \exists \xi \in (\alpha,\beta): f'(\xi)=0 \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } \forall x\in(\alpha,\beta),\ f''(x)<0 \Rightarrow f' \downarrow \text{ στο } [\alpha,\beta] \Rightarrow \begin{cases} f' \downarrow \text{ στο } [\alpha,\xi] & (2) \\ f' \downarrow \ ,, \ [\xi,\beta] & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \forall x\in[\alpha,\xi],\ f'(x) > f'(\xi) \overset{(1)}{=} 0 \Rightarrow f \uparrow \text{ στο } [\alpha,\xi] \Rightarrow \forall x\in(\alpha,\xi],\ f(x)>f(\alpha) \overset{(\text{υπ})}{=} 0 \Rightarrow f(x)>0, \forall x\in(\alpha,\xi]$$

$$(3) \Rightarrow \forall x\in[\xi,\beta),\ f'(x)<f'(\xi)=0 \Rightarrow f \downarrow \text{ στο } [\xi,\beta] \Rightarrow \forall x\in[\xi,\beta),\ f(x)>f(\beta)=0 \Rightarrow f(x)>0, \forall x\in[\xi,\beta)$$

$$\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in(\alpha,\beta).$$

Θ24. ρ ρίζα του $f(x) \Rightarrow \rho^{\nu-1}+\rho^{\nu-2}+\cdots+\rho+1=0 \Rightarrow \frac{\rho^{\nu}-1}{\rho-1}=0$ ($\rho\neq 1$ διότι $\beta\neq 0 \Rightarrow \rho\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \rho^{\nu}-1=0 \Rightarrow \rho^{\nu}=1 \Rightarrow |\rho|=1. \quad (1)$$

$$\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \rho+\frac{1}{\rho}=\overline{\rho+\frac{1}{\rho}} \Leftrightarrow \rho+\frac{1}{\rho}=\bar\rho+\frac{1}{\bar\rho} \Leftrightarrow \rho^2\bar\rho+\bar\rho=\rho\bar\rho^2+\rho \Leftrightarrow$$

$$\rho\bar\rho(\rho-\bar\rho)-(\rho-\bar\rho)=0 \Leftrightarrow (\rho-\bar\rho)(\rho\bar\rho-1)=0 \Leftrightarrow \rho\bar\rho-1=0 \Leftrightarrow |\rho|^2=1 \Leftrightarrow$$

Αλλά $\rho\in\mathbb{C}-\mathbb{R} \Leftrightarrow \rho\neq\bar\rho$ $\qquad$ $|\rho|=1$ που δείχθηκε στο (1).

Θ25. Έστω $z_1=\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta$ και $z_2=\sigma\upsilon\nu\varphi+i\,\eta\mu\varphi$ ($|z_1|=|z_2|=1$ υπόθ.)

Τότε:

$$(z_1+z_2)^{\nu}=\left[(\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu\varphi)+i(\eta\mu\theta+\eta\mu\varphi)\right]^{\nu}=\left[2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\varphi}{2}+i\cdot 2\,\eta\mu\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\varphi}{2}\right]^{\nu}=$$

$$=2^{\nu}\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu}\frac{\theta-\varphi}{2}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+\varphi}{2}+i\,\eta\mu\frac{\theta+\varphi}{2}\right]^{\nu}=2^{\nu}\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu}\frac{\theta-\varphi}{2}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta+\varphi)}{2}+i\,\eta\mu\frac{\nu(\theta-\varphi)}{2}\right].$$

και:

$$z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\,\eta\mu(\nu\theta)+\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi)+i\,\eta\mu(\nu\varphi)=\left[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi)\right]+i\left[\eta\mu(\nu\theta)+\eta\mu(\nu\varphi)\right]=$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta+\varphi)}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta-\varphi)}{2}+i\cdot 2\,\eta\mu\frac{\nu(\theta+\varphi)}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta-\varphi)}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta-\varphi)}{2}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta+\varphi)}{2}+i\,\eta\mu\frac{\nu(\theta-\varphi)}{2}\right].$$

$$\text{Άρα: } \frac{(z_1+z_2)^{\nu}}{z_1^{\nu}+z_2^{\nu}}=2^{\nu-1}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta-\varphi)}{2}}\in\mathbb{R}.$$

Θ26. Για να είναι ημιομάδα πρέπει η $*$ να είναι εσωτερική στο $\mathbb{R}$ (δίνεται) και προσεταιριστική $\Leftrightarrow \forall x,y,z\in\mathbb{R}$, $x*(y*z)=(x*y)*z \Leftrightarrow$

$$x*\left[(y+\alpha)(z+\alpha)\right]=\left[(x+\alpha)(y+\alpha)\right]*z \Leftrightarrow$$

$$(x+\alpha)\cdot\left[(y+\alpha)(z+\alpha)+\alpha\right]=\left[(x+\alpha)(y+\alpha)+\alpha\right](z+\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{(x+\alpha)(y+\alpha)(z+\alpha)}+(x+\alpha)\alpha=\cancel{(x+\alpha)(y+\alpha)(z+\alpha)}+\alpha(z+\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\alpha x+\cancel{\alpha^2}=\alpha z+\cancel{\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha(x-z)=0,\ \forall x,z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \underline{\alpha=0}$$

Άρα: για $\alpha=0$ η δομή $(\mathbb{R},*)$ είναι ημιομάδα.

Θ27. • Για να αποτελούν τα γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία $x,y,z\in V$ βάση του V, πρέπει $\forall u\in V$ να γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των x,y,z, δηλαδή το V να παράγεται απο τα x,y,z.

Επειδή $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ βάση του $V \Rightarrow \exists \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}:\ u=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3$ (1).

Επειδή τα β_1,β_2,β_3 γράφονται σαν γραμμικός συνδυασμός των x,y,z έχω:

$\beta_1=\kappa_1x+\kappa_2y+\kappa_3z$, $\beta_2=\mu_1x+\mu_2y+\mu_3z$, $\beta_3=\rho_1x+\rho_2y+\rho_3z$ όπου $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbb{R}$.

$$(1)\Rightarrow u=\lambda_1(\kappa_1x+\kappa_2y+\kappa_3z)+\lambda_2(\mu_1x+\mu_2y+\mu_3z)+\lambda_3(\rho_1x+\rho_2y+\rho_3z)\Rightarrow$$

$$u=\underbrace{(\lambda_1\kappa_1+\lambda_2\mu_1+\lambda_3\rho_1)}_{\lambda}x+\underbrace{(\lambda_1\kappa_2+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\rho_2)}_{\mu}y+\underbrace{(\lambda_1\kappa_3+\lambda_2\mu_3+\lambda_3\rho_3)}_{\rho}z\Rightarrow$$

$\exists\lambda,\mu,\rho\in\mathbb{R}:\ u=\lambda x+\mu y+\rho z\Rightarrow$ το u γράφεται σαν γραμ. συνδ. των $x,y,z\in V$, δηλαδή το V παράγεται απο τα x,y,z, πού είναι και γραμ. ανεξάρτητα, άρα το $\{x,y,z\}$ είναι βάση του V.

Θ28. 1) Έστω $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}:\ \lambda_1\cdot1+\lambda_2\cdot i=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0\Rightarrow 1,i$ γραμ. ανεξάρτητα.
$\forall z=\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$ γράφεται: $z=\alpha\cdot1+\beta i$, δηλ. το $\mathbb{C}$ παράγεται απο τα $1,i$ $\Big\}\Rightarrow$
το $\{1,i\}$ είναι βάση του $\mathbb{C}$.

2) $\{\alpha+\beta i,\gamma+\delta i\}$ βάση του $\mathbb{C}$, που έχει διάσταση 2 (αφού $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$) $\Leftrightarrow$
$\alpha+\beta i,\ \gamma+\delta i$ γραμ. ανεξ. $\Leftrightarrow$
$(\lambda_1(\alpha+\beta i)+\lambda_2(\gamma+\delta i)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0)\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_1\alpha+\lambda_2\gamma)+(\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)i=0\\ 1,i \text{ γραμ. ανεξ}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\lambda_1+\gamma\lambda_2=0\\ \beta\lambda_1+\delta\lambda_2=0\end{cases}:\ \lambda_1=\lambda_2=0\Leftrightarrow D\neq0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&\delta\end{vmatrix}\neq0\Leftrightarrow\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$$

Θ29. $x^2+1\neq0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow A=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν πηλίκο παραγωγ. συναρτ.
με
$$f'(x)=\frac{(2x+2\alpha)(x^2+1)-2x(x^2+2\alpha x+\beta)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2\alpha x^2-2(\beta-1)x+2\alpha}{(x^2+1)^2}=-2\cdot\frac{\alpha x^2+(\beta-1)x-\alpha}{(x^2+1)^2}.$$

1) $$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_\varphi)\parallel x'x\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \alpha x^2+(\beta-1)x-\alpha=0\\ \Delta=(\beta-1)^2+4\alpha^2>0\ (\alpha\in\mathbb{R}^*)\end{array}\right\}\Rightarrow 2 \text{ ρίζες } x_1\neq x_2\in\mathbb{R}.$$

2) $P=x_1\cdot x_2=\frac{-\alpha}{\alpha}=-1.\Leftrightarrow x_1x_2=-1.$

3) $$\begin{cases}x_1=2\\ f(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(2)=0\\ \frac{1+2\alpha+\beta}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\alpha+2(\beta-1)-\alpha=0\\ 1+2\alpha+\beta=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha+2\beta=2\\ 2\alpha+\beta=3\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{array}{l}\alpha=4\\ \beta=-5.\end{array}}$$

4) Για $\alpha=4,\beta=-5$ είναι $f(x)=\frac{x^2+8x-15}{x^2+1}$ και $f'(x)=-2\,\frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}=-4\cdot\frac{2x^2-3x-2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=-\frac12\end{cases}$

x	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$\varepsilon = -7$	$\nearrow$	$\mu = 3$	$\searrow$	1

Για $x_1=2$ έχω μέγιστο $\mu=f(2)=3$
" $x_2=-\frac12$ " ελάχιστο $\varepsilon=f(-\frac12)=-7$ $\Big\}\to$ που είναι ολικά ακρότατα διότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1$.

Θ30. $\forall \nu_0 \in \mathbb{N}$, $\exists \nu_1 = 2\kappa > \nu_0$ και $\nu_2 = 2\kappa+1 > \nu_0$:

$$|\alpha_{2\kappa} - \alpha_{2\kappa+1}| = \left|\frac{2\kappa+3}{4\kappa} + \frac{2\kappa+4}{4\kappa+2}\right| = \frac{2\kappa+3}{4\kappa} + \frac{2\kappa+4}{4\kappa+2} > \frac{2\kappa+3}{4\kappa+2} + \frac{2\kappa+4}{4\kappa+2} =$$

$$= \frac{4\kappa+7}{4\kappa+2} = 1 + \frac{5}{4\kappa+2} > 1.$$ Άρα $\exists \varepsilon = 1 > 0 : |\alpha_{2\kappa} - \alpha_{2\kappa+1}| > \varepsilon \xrightarrow[\text{μη σύγκλισης}]{\text{Κριτήριο}}$ η (α_ν) δεν συγκλίνει.

Θ31. 1) Αν $A(x_0,y_0)$ το σημείο επαφής η εφαπτομένη (ε) είναι: $\frac{x x_0}{\alpha^2} - \frac{y y_0}{\beta^2} = 1$

Είναι $E_1(-\gamma,0)$, $E_2(\gamma,0)$, άρα:

$$d(E_1,\varepsilon)\cdot d(E_2,\varepsilon) = \frac{\left|-\frac{x_0}{\alpha^2}\cdot\gamma - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{\alpha^4}+\frac{y_0^2}{\beta^4}}} \cdot \frac{\left|\frac{x_0}{\alpha^2}\cdot\gamma - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{\alpha^4}+\frac{y_0^2}{\beta^4}}} = \frac{\frac{|x_0\gamma+\alpha^2|}{\alpha^2}\cdot\frac{|x_0\gamma-\alpha^2|}{\alpha^2}}{\frac{x_0^2}{\alpha^4}+\frac{y_0^2}{\beta^4}} =$$

$$= \frac{|x_0^2\gamma^2 - \alpha^4|}{\alpha^4\cdot\left(\frac{x_0^2}{\alpha^4}+\frac{y_0^2}{\beta^4}\right)} = \frac{|x_0^2(\alpha^2+\beta^2) - \alpha^4|}{\cancel{\alpha^4}\cdot\frac{\beta^4x_0^2+\alpha^4y_0^2}{\cancel{\alpha^4}\beta^4}} \Leftrightarrow d(E_1,\varepsilon)\cdot d(E_2,\varepsilon) = \frac{\beta^4|x_0^2\alpha^2+x_0^2\beta^2-\alpha^4|}{|\beta^4x_0^2+\alpha^4y_0^2|} \quad (1)$$

Αλλά $A(x_0,y_0)\in(c) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{\alpha^2} - \frac{y_0^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2x_0^2 - \alpha^2y_0^2 = \alpha^2\beta^2 \overset{\cdot\alpha^2}{\Leftrightarrow} \alpha^2\beta^2x_0^2 - \alpha^4y_0^2 = \alpha^4\beta^2 \Leftrightarrow$
$\alpha^2\beta^2x_0^2 - \alpha^4\beta^2 = \alpha^4y_0^2.$

Άρα, ο παρονομαστής της (1) γίνεται: $|\beta^4x_0^2 + \alpha^2\beta^2x_0^2 - \alpha^4\beta^2| = \beta^2\cdot|\beta^2x_0^2+\alpha^2x_0^2-\alpha^4|.$

οπότε $(1) \Rightarrow d(E_1,\varepsilon)\cdot d(E_2,\varepsilon) = \beta^2 = c^{te}.$

2) $(\delta): 2x - y - 4 = 0$ εφαπτομένη της υπερβολής.

$E_1(-3,0), E_2(3,0) \Leftrightarrow 2\gamma = 6 \Leftrightarrow \gamma = 3$

Από το 1) είναι: $$\beta^2 = d(E_1,\delta)\cdot d(E_2,\delta) = \frac{|2\cdot(-3)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\cdot\frac{|2\cdot3-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 4 \Rightarrow \beta = 2.$$

Άρα $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2 = 5$, οπότε η εξίσωση της υπερβολής είναι: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1.$

Θ32. $$D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow D = (\alpha+2)(\alpha-1)^2.$$

i) Αν $D\neq0 \Leftrightarrow \alpha\neq-2 \wedge \alpha\neq1$ το ομογενές (Σ) έχει μ.μ.λ. τη μηδενική $(x,y,z)=(0,0,0)$. $\Leftrightarrow$
Σύνολο λύσεων $L_1 = \{\mathbf{0} = (0,0,0)\in\mathbb{R}^3\}$, δηλ. το L είναι ο μηδενικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, οπότε διάσταση $L_1 = 0$. Το L δεν έχει βάση (Είναι ο μοναδικός δ.χ. που στερείται βάσεων).

ii) Αν $\alpha=-2$ το (Σ) γίνεται: $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ και με τον Ε βρίσκω $(x,y,z)=(z,z,z) : z\in\mathbb{R}$.

Άρα σύνολο λύσεων $L_2 = \{z(1,1,1) : z\in\mathbb{R}\}$, δηλ. το L_2 παράγεται από το $v=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$ άρα είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και επειδή $v\neq\mathbf{0}$, δηλ. γραμμ. ανεξ. $\Rightarrow \{v\}$ βάση του L_2 και διάσταση $L_2 = 1$.

iii) Αν $\alpha=1$, το (Σ) γίνεται $x+y+z=0 \Leftrightarrow (x,y,z)=(-y-z,y,z)=(-y,y,0)+(-z,0,z)=y(-1,1,0)+z(-1,0,1) : y,z\in\mathbb{R}$

Άρα το σύνολο λύσεων L_3 παράγεται από τα $v_1=(-1,1,0)$, $v_2=(-1,0,1)\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow L_3$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Είναι $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ με $D_1 = 1\neq0 \Rightarrow v_1,v_2$ γραμμ.ανεξ. και παράγουν τον $L_3 \Rightarrow \{v_1,v_2\}$ βάση του L_3 και η διάσταση του $L_3 = 2$.

▼Θ33. Αν $A(x_0,y_0)$ το σημείο επαφής της (εφ) με την έλλειψη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $(\varepsilon): \frac{xx_0}{8}+\frac{yy_0}{2}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{x_0}{4y_0}x+\frac{2}{y_0}$

Για να είναι η (ε) εφαπτομένη και της παραβολής $y^2=4x$ πρέπει:

$p=2\lambda\kappa \Leftrightarrow 2=-\frac{\cancel{2}x_0}{\cancel{4}y_0}\cdot\frac{2}{y_0} \Leftrightarrow 2y_0^2=-x_0 \Leftrightarrow x_0=-2y_0^2$. (1).

Αλλά το A είναι σημείο της έλλειψης $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{2}=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{4y_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} y_0^4+y_0^2-2=0 \\ y_0^2=\omega \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\omega^2+\omega-2=0 \\ \Delta=9\end{array}\right\} \Leftrightarrow \omega_{1,2}=\begin{cases} 1 \\ -2<0 \text{ απορ.}\end{cases} \Leftrightarrow y_0^2=1 \Leftrightarrow y_0=\pm1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_0=-2.$

Άρα οι κοινές εφαπτόμενες είναι: $\begin{cases} (\varepsilon_1): \; y=\frac{1}{2}x+2. \\ (\varepsilon_2): \; y=-\frac{1}{2}x-2. \end{cases}$

▼Θ34. $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\lambda \Rightarrow |z_1|^2=|z_2|^2=|z_3|^2=\lambda^2 \Rightarrow z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=z_3\bar{z}_3=\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} z_1=\lambda^2/\bar{z}_1. \\ z_2=\lambda^2/\bar{z}_2. \\ z_3=\lambda^2/\bar{z}_3. \end{cases}$

Άρα: $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|=\left|\frac{\lambda^2}{\bar{z}_1}\cdot\frac{\lambda^2}{\bar{z}_2}+\frac{\lambda^2}{\bar{z}_2}\cdot\frac{\lambda^2}{\bar{z}_3}+\frac{\lambda^2}{\bar{z}_3}\cdot\frac{\lambda^2}{\bar{z}_1}\right|=$

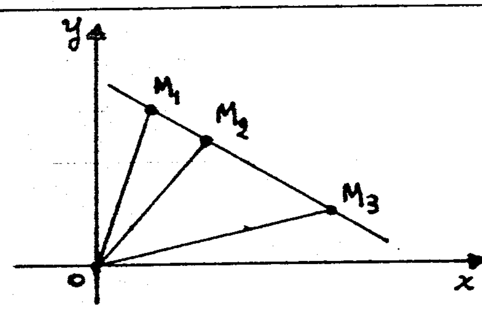
$=\lambda^4\cdot\left|\frac{1}{\bar{z}_1\bar{z}_2}+\frac{1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}+\frac{1}{\bar{z}_3\bar{z}_1}\right|=\lambda^4\cdot\left|\frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3}{\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\bar{z}_3}\right|=\lambda^4\cdot\frac{|\overline{z_1+z_2+z_3}|}{|\bar{z}_1|\cdot|\bar{z}_2|\cdot|\bar{z}_3|}=\lambda^4\frac{|z_1+z_2+z_3|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}=$

$=\lambda^4\cdot\frac{|z_1+z_2+z_3|}{\cancel{\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda}}=\lambda\cdot|z_1+z_2+z_3|.$

▼Θ35. $\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=\lambda \Leftrightarrow z_1-z_2=\lambda(z_2-z_3) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=\lambda\cdot(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_3}) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_2M_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{M_3M_2} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{M_2M_1} \parallel \overrightarrow{M_3M_2} \Leftrightarrow M_1, M_2, M_3$ συνευθειακά.



▼Θ36. 1) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=6x^2-6x+7\neq0, \forall x\in\mathbb{R}$, διότι $\Delta<0$.

Επειδή $\alpha=6>0 \Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

2) Αν η $f(x)=0$ έχει 2 ρίζες $\rho_1\neq\rho_2\in\mathbb{R}$, τότε στο $[\rho_1,\rho_2]$ ισχύει το Θ.Rolle, δηλαδή, $\exists\,\xi\in(\rho_1,\rho_2): f'(\xi)=0 \leftarrow$ Άτοπο (διότι $f'(x)\neq0, \forall x\in\mathbb{R}$).

Άρα, η $f(x)=0$ δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$ και επειδή είναι περιττού βαθμού έχει μια ρίζα, έστω $\rho\in\mathbb{R}$.

Αν η ρ είναι διπλή, τότε $f(x)=(x-\rho)^2\cdot\pi(x)$, όπου $\pi(x)$ α' βαθμού.

Άρα, $f'(x)=\left[(x-\rho)^2\cdot\pi(x)\right]'=2(x-\rho)\cdot\pi(x)+(x-\rho)^2\cdot\pi'(x) \Rightarrow$

$f'(x)=(x-\rho)\cdot\left[2\cdot\pi(x)+(x-\rho)\cdot\pi'(x)\right] \Rightarrow$ Η $x=\rho$ είναι και ρίζα της $f' \leftarrow$ Άτοπο.

Άρα η ρίζα ρ είναι απλή.

3) $\left.\begin{array}{l} f \text{ παραγ. στο } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } [0,1]\subset\mathbb{R} \\ f(0)=-1<0 \wedge f(1)=5>0 \Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0 \end{array}\right\} \overset{\text{Θ.}}{\underset{\text{B.W.}}{\Longrightarrow}} \exists\,\xi\in(0,1): f(\xi)=0$

Προφανώς $\xi=\rho$. Άρα $\rho\in(0,1) \Leftrightarrow 0<\rho<1$.

Θ37. 1) $(c): \begin{cases} y=x^2-x-6 \\ (ox): \ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2-x-6=0 \\ \Delta=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \notin (0x) \\ x_2=3 \Leftrightarrow (c)\cap(0x)=M_0(3,0) \leftarrow \end{cases}$ σημείο επαφής.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-1 \Rightarrow f'(3)=5$. Άρα η εφαπτομένη είναι:

$(\varepsilon): \ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-0=5(x-3) \Leftrightarrow (\varepsilon): \ 5x-y-15=0.$

2) Η εφαπτομένη της καμπύλης στο $(x_0,\varphi(x_0))$ είναι οριζόντια αν $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\varphi'(x_0)=0$.

Αλλά $\varphi'(x)=2(x-3)(x-2)+(x-3)^2\cdot 1=(x-3)(2x-4+x-3)=(x-3)(3x-7)$.

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \vee \\ x=\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \varphi(3)=0 \\ \varphi(\frac{7}{3})=\frac{4}{27} \end{matrix} \Rightarrow$ Οι ζητούμενες θέσεις είναι τα σημεία $(3,0)$, $(\frac{7}{3},\frac{4}{27})$.

Θ38. Π.Ο. $9-x^2\geq 0 \Leftrightarrow A=[-3,3]$

Παρατηρώ ότι $A(6,0)\notin(c)$ και άρα πρέπει να βρούμε το σημείο επαφής της $(\varepsilon\varphi)$ και της (C_f), έστω $M_0(x_0,f(x_0))$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ με $f'(x)=\left(\sqrt{9-x^2}\right)'=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

Άρα, $f'(x_0)=-\frac{x_0}{\sqrt{9-x_0^2}}$ (1) και $f(x_0)=\sqrt{9-x_0^2}$ (2)

Η $(\varepsilon\varphi)$: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} y-\sqrt{9-x_0^2}=-\frac{x_0}{\sqrt{9-x_0^2}}\cdot(x-x_0)$
Αλλά $A(6,0)\in(\varepsilon\varphi)$ $\Rightarrow$

$0-\sqrt{9-x_0^2}=-\frac{x_0}{\sqrt{9-x_0^2}}\cdot(6-x_0) \Leftrightarrow 9-\cancel{x_0^2}=6x_0-\cancel{x_0^2} \Leftrightarrow x_0=3/2$

Άρα, $f(x_0)=f(3/2)=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_0\left(3/2 \ , \ 3\sqrt{3}/2\right)$

και $f'(x_0)=f'(3/2)=-\frac{3/2}{3\sqrt{3}/2} \Rightarrow f'(x_0)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Άρα $(\varepsilon\varphi)$: $y-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(x-\frac{3}{2}) \Leftrightarrow \cdots\cdots (\varepsilon\varphi): \ \sqrt{3}x+3y-6\sqrt{3}=0.$

Θ39. 1) f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική, με $f'(x)=2x-1$.

Στο $0\in A$: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\equiv\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-x+1)=1$, $f(0)=0$ $\Rightarrow f$ ασυνεχής στο $0 \Rightarrow f$ όχι παραγωγ. στο 0.

Στο $1\in A$: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\equiv\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-x+1)=1$, $f(1)=0$ $\Rightarrow f$ ασυνεχής στο $1 \Rightarrow f$ όχι παραγωγ. στο 1.

Άρα, f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x)=2x-1$.

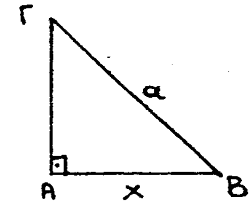
2) f όχι συνεχής στα $0,1$ (δείχθηκε) $\Rightarrow f$ όχι συνεχής στο $[0,1]$

Άρα, δεν ισχύει το Θ. Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

3) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in(0,1)$.

Άρα, $\exists x_0=\frac{1}{2}\in(0,1): f'(x_0)=0$

Θ40. Αν $AB=x$, τότε $A\Gamma=\sqrt{\alpha^2-x^2}$.



$$E=\frac{AB\cdot A\Gamma}{2} \Leftrightarrow E(x)=\frac{x\cdot\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2} \quad : \quad x\in(0,\alpha)$$

$$E'(x)=\frac{1}{2}\left(1\cdot\sqrt{\alpha^2-x^2}+x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2-x^2-x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\right)=\frac{\alpha^2-2x^2}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow \alpha^2-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \\ \text{ή} \\ x=-\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\notin(0,\alpha) \text{ απορ.}\end{cases}$$

x	0		$\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$		α
E'		$+$	0	$-$	
E		$\nearrow$	$\mu=\frac{\alpha^2}{4}$	$\searrow$	

Άρα, για $x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ έχουμε το μέγιστο εμβαδόν $E=\frac{\alpha^2}{4}$.

$AB=x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ και $A\Gamma=\sqrt{\alpha^2-\frac{2\alpha^2}{4}}=\sqrt{\alpha^2-\frac{\alpha^2}{2}}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{2}}=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

Άρα, $AB=A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν είναι το ισοσκελές.

Θ41. Το σημείο $M(1,2)$ είναι σημείο καμπής της f, όταν:

$f(1)=2$, $f''(1)=0$ και η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1.

Είναι: $f'(x)=3\alpha x^2-2\beta x$, $f''(x)=6\alpha x-2\beta$

$$\begin{array}{l} f(1)=2 \Leftrightarrow 2=\alpha-\beta \\ f''(1)=0 \Leftrightarrow 0=6\alpha-2\beta \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=2 \\ 3\alpha-\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\alpha=-1 \\ \beta=-3\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x)=-x^3+3x^2 \\ f''(x)=-6x+6\end{array}$$

x		1	
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	$K=2$	$\cap$

Άρα, για $\alpha=-1$, $\beta=-3$ το $M(1,2)$ είναι σημείο καμπής.

Θ42. $\varphi(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$, $A=\mathbb{R}$ στο οποίο η φ είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με:

$$\varphi'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow \varphi'(x)=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \quad \text{και}$$

$$\varphi''(x)=\frac{(-2x-2)(x^2+1)^2-(-x^2-2x+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \Leftrightarrow \cdots \quad \varphi''(x)=\frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-1)\cdot(x^2+4x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ \text{ή} \\ x_{2,3}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

x		$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$		1	
φ''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
φ	$\cap$	$K_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$	$\cup$	$K_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\cap$	$K_3 = 1$	$\cup$

Άρα, έχει 3 σημεία καμπής τα:
$A\left(-2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$, $B\left(-2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$, $\Gamma=(1,1)$.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2-\sqrt{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} & 1 \\ -2+\sqrt{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 2 \\ -2-\sqrt{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & \frac{9}{2} & 6 \\ -2-\sqrt{3} & \frac{9-3\sqrt{3}}{4} & 3+\sqrt{3}\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix} 9/2 & 6 \\ \frac{9-3\sqrt{3}}{4} & 3+\sqrt{3}\end{vmatrix}=\frac{27+9\sqrt{3}}{2}-\frac{\overset{3}{\cancel{6}}(9+3\sqrt{3})}{\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{27+9\sqrt{3}-27-9\sqrt{3}}{2}=0.$$

Άρα, τα A,B,Γ είναι συνευθειακά.

▼ Θ43. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu^3(\pi x)}{x^2}, & \alpha\nu\ x<0 \\ 0, & \alpha\nu\ x=0 \\ \dfrac{\eta\mu^3(\pi x)}{x^2}, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$

• Συνέχεια: Βρίσκω πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu^3(\pi x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu^3(\pi x)}{\pi^3 x^3}\cdot \pi^3 x\right) = -\lim_{x\to 0^-}(\pi^3 x)\cdot\left(\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x}\right)^3 = -0\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu^3(\pi x)}{x^2} = \cdots = 0$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $f(0)=0$ $\Rightarrow$ f συνεχής στο 0.

• Παραγωγισιμότητα: Ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ 0 και x, $\forall x\neq 0$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} -\dfrac{\eta\mu^3(\pi x)}{x^3}, & \alpha\nu\ x<0 \\ \dfrac{\eta\mu^3(\pi x)}{x^3}, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$$

Βρίσκω πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 0^-}\lambda(x) = -\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x}\right)^3\cdot\lim_{x\to 0^-}\pi^3 = -1\cdot\pi^3 = -\pi^3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\lambda(x) = \cdots = \pi^3$$

$\Rightarrow f'_\alpha(0)\neq f'_\delta(0) \Rightarrow$ f όχι παραγωγίσιμη στο 0.

▼ Θ44. f άρτια στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, -x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=f(x)$ (1)

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \Rightarrow g$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x) = 2x\cdot f(x) + (x^2+1)\cdot f'(x) + 4 \Rightarrow g'(0) = f'(0)+4$ (2)

$(1) \Rightarrow [f(-x)]' = [f(x)]' \Leftrightarrow f'(-x)\cdot(-x)' = f'(x) \Leftrightarrow -f'(-x) = f'(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$-f'(0) = f'(0) \Leftrightarrow 2\cdot f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0)=0$ (3)

$(2),(3) \Rightarrow g'(0) = 4.$

▼ Θ45. $f(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x}, & \alpha\nu\ x<0 \\ 0, & \alpha\nu\ x=0 \\ \sqrt{x}, & \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$

1) Βρίσκω πλευρικά όρια:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}[-\sqrt{-x}] = -\sqrt{\lim_{x\to 0^-}(-x)} = -\sqrt{0} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+} x} = \sqrt{0} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$

2) Συνέχεια: f συνεχής στα $(-\infty,0), (0,+\infty)$ ως ρίζα συνεχούς

Στο $0\in A$: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $f(0)=0$ $\Rightarrow$ f συνεχής και στο 0

$\Rightarrow$ f συνεχής σ' όλο το Π.Ο. $\mathbb{R}$.

Μονοτονία: f παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x) = -\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$.

f ,, ,, $(0,+\infty)$,, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Στο $0\in A$: $\lambda(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{-x}}{x}, & x<0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{x}, & x>0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0^+}\lambda(x) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{1/2}} = +\infty \Rightarrow$ f όχι παραγωγίσιμη στο 0.

x		0	
f'	$-$		$+$
f	↘		↗

Άρα, f ↓ στο $(-\infty,0)$ και ↑ στο $(0,+\infty)$. Φαουλ

▼ Θ46. 1) $X,\Psi\in S \Rightarrow \begin{cases} A\cdot X = X\cdot A \\ A\cdot\Psi = \Psi\cdot A \end{cases}$: $X,\Psi\in \Pi_\nu$ (1) $\Rightarrow (\kappa\cdot X^2+\lambda X\cdot\Psi+\mu\Psi^2)\in\Pi_\nu$ (2) και

$A\cdot(\kappa X^2+\lambda X\cdot\Psi+\mu\Psi^2) = A(\kappa X^2)+A(\lambda X\Psi)+A(\mu\Psi^2) = \kappa(AXX)+\lambda(AX\Psi)+\mu(A\Psi\Psi) =$
$\overset{(1)}{=} \kappa(XAX)+\lambda(XA\Psi)+\mu(\Psi A\Psi) \overset{(1)}{=} \kappa(XXA)+\lambda(X\Psi A)+\mu(\Psi\Psi A) =$
$=(\kappa X^2)A+(\lambda X\Psi)A+(\mu\Psi^2)A = (\kappa X^2+\lambda X\Psi+\mu\Psi^2)A$ (3)
(2),(3) $\Rightarrow (\kappa X^2+\lambda X\Psi+\mu\Psi^2)\in S$

2) Είναι $S\subseteq\Pi_\nu$ και $S\neq\emptyset$ διότι ο $\mathbf{0}\in S$, αφού $A\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot A(=\mathbf{0})$. (4)

$\forall X,\Psi\in S \overset{(1)}{\Longrightarrow} (X+\Psi)\in\Pi_\nu$ και
$A(X+\Psi) = AX+A\Psi \overset{(1)}{=} XA+\Psi A = (X+\Psi)A$ $\Bigg\} \Rightarrow (X+\Psi)\in S$ (5)

$\forall\kappa\in\mathbb{R}, X\in S \Rightarrow \kappa X\in\Pi_\nu$ και
$A(\kappa X) = \kappa(AX) \overset{(1)}{=} \kappa(X\cdot A) = (\kappa X)A$ $\Bigg\} \Rightarrow (\kappa\cdot X)\in S$ (6)

(4),(5),(6) $\Longrightarrow$ S υπόχωρος του Π_ν.

▼ Θ47. 1) Επαγωγικά: Για $\nu=1$, $A^1=\lambda^0\cdot A \Leftrightarrow A=A$ ισχύει.
Έστω ότι ισχύει, για $\nu=\kappa$, $A^\kappa=\lambda^{\kappa-1}\cdot A$ (1)
θα δείξω " " " $\nu=\kappa+1$, $A^{\kappa+1}=\lambda^\kappa\cdot A$.
$A^{\kappa+1}=A^\kappa\cdot A \overset{(1)}{=} \lambda^{\kappa-1}\cdot A\cdot A=\lambda^{\kappa-1}\cdot A^2 \overset{(\upsilon\pi.)}{=} \lambda^{\kappa-1}\cdot\lambda A=\lambda^\kappa\cdot A$. Άρα, ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

2) $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}4&6\\6&9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&6\\6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16+36&24+54\\24+54&36+81\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}52&78\\78&117\end{bmatrix}=13\cdot\begin{bmatrix}4&6\\6&9\end{bmatrix}\Rightarrow$

$A^2=13\cdot A \overset{1)}{\Longrightarrow} A^\nu=13^{\nu-1}\cdot A$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

▼ Θ48. 1) $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=2\alpha_\nu^2-6\alpha_\nu+7$ (υπόθ.)
$\Delta=-20<0$, $\alpha=2>0$ $\Bigg\} \Rightarrow \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu>0, \forall\nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$
$\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu \Rightarrow (\alpha_\nu)\uparrow$.

2) Έστω ότι η (α_ν) είναι φραγμένη
Επειδή είναι και μονότονη (λόγω 1) $\Bigg\} \Rightarrow (\alpha_\nu)$ συγκλίνει

Έστω $\lim\alpha_\nu=\ell\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\alpha_{\nu+1}=\ell$
Αλλά $\lim\alpha_{\nu+1}=\lim(2\alpha_\nu^2-5\alpha_\nu+7)$ $\Bigg\} \Rightarrow \ell=2\ell^2-5\ell+7 \Leftrightarrow 2\ell^2-6\ell+7=0$, $\Delta=-20<0$ $\Bigg\} \Rightarrow \ell\notin\mathbb{R}$ ← Άτοπο.
Άρα η (α_ν) δεν είναι φραγμένη.

▼ Θ49. Έστω $\vec{x}=\vec{OA}$, $\vec{y}=\vec{OB}$, $\vec{z}=\vec{O\Gamma}$
$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=2\vec{\alpha}-5\vec{\beta}+\vec{\gamma}-3\vec{\alpha}-\vec{\beta}+4\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}-6\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$.
$\vec{B\Gamma}=\vec{O\Gamma}-\vec{OB}=5\vec{\alpha}+13\vec{\beta}-14\vec{\gamma}-2\vec{\alpha}+5\vec{\beta}-\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+18\vec{\beta}-15\vec{\gamma}=-3(-\vec{\alpha}-6\vec{\beta}+5\vec{\gamma})$ $\Bigg\} \Rightarrow$
$\vec{B\Gamma}=-3\vec{AB} \Rightarrow \vec{B\Gamma}\parallel\vec{AB}$
Άρα, τα A,B,Γ είναι συνευθειακά.

▼ Θ50. $(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}=\sqrt{3}\,\vec{\beta}+\vec{\gamma}$. (1) , $|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{3}-1}\neq 0$. (2).

Έστω $|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=\rho \overset{(2)}{\Longrightarrow} |\vec{\alpha}|=\rho(\sqrt{3}-1)$. (3)

1) Για την $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$:

$(1)\Leftrightarrow (\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}-\sqrt{3}\vec{\beta}=\vec{\gamma}\Leftrightarrow\left[(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}-\sqrt{3}\vec{\beta}\right]^2=\vec{\gamma}^{\,2}\Leftrightarrow$

$(\sqrt{3}+1)^2\cdot\vec{\alpha}^{\,2}-2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{3}\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}^{\,2}=\vec{\gamma}^{\,2}\Longleftrightarrow$ (λόγω (3))

$(4+2\sqrt{3})\cdot\rho^2(\sqrt{3}-1)^2-2(3+\sqrt{3})\cdot\rho(\sqrt{3}-1)\cdot\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+3\rho^2=\rho^2\Leftrightarrow$

$4\rho^2-4\rho^2\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+3\rho^2=\rho^2\Leftrightarrow 4\rho^2\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=6\rho^2\Leftrightarrow$ $(\rho\neq 0)$

$\left.\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\in(-\pi,\pi]\end{array}\right\}\Longrightarrow(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pm\frac{\pi}{6}$

2) Για την $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})$:

$(1)\Leftrightarrow\left[(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha}\right]^2=\left(\sqrt{3}\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)^2\Leftrightarrow(4+2\sqrt{3})\vec{\alpha}^{\,2}=3\vec{\beta}^{\,2}+2\sqrt{3}\,\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^{\,2}\Leftrightarrow$

$(4+2\sqrt{3})\rho^2(\sqrt{3}-1)^2=3\rho^2+2\sqrt{3}\cdot\rho\cdot\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})+\rho^2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=0\Leftrightarrow(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=\pm\frac{\pi}{2}$.

▼ Θ51. 1) $\alpha\beta=1\overset{G_1}{\underset{\text{ομ.}}{\Longleftrightarrow}}\alpha^{-1}(\alpha\beta)=\alpha^{-1}1\overset{\text{πρ.}}{\Longleftrightarrow}(\alpha^{-1}\alpha)\beta=\alpha^{-1}\Leftrightarrow 1\beta=\alpha^{-1}\Leftrightarrow\beta=\alpha^{-1}\Leftrightarrow$

$\beta\alpha=\alpha^{-1}\alpha\Leftrightarrow\beta\alpha=1$.

2) $(\alpha\beta)^\kappa=1\Rightarrow\underbrace{\alpha\beta\cdot\alpha\beta\cdot\ldots\cdot\alpha\beta}_{\kappa\ \text{παράγοντες}}=1\Rightarrow\alpha(\beta\cdot\alpha\beta\cdot\ldots\cdot\alpha\beta)=1\overset{1)}{\Longrightarrow}$

$(\beta\cdot\alpha\beta\cdot\ldots\cdot\alpha\beta)\alpha=1\Rightarrow\overbrace{\beta\alpha\cdot\beta\alpha\cdot\ldots\cdot\beta\alpha}=1\Rightarrow(\beta\alpha)^\kappa=1$.

3) Επαγωγικά: Για $\nu=1$, $\gamma^1=\alpha^{-1}\beta\cdot\alpha$ ισχύει (υπόθ.)

Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$: $\gamma^\kappa=\alpha^{-1}\beta^\kappa\alpha$ (1)

Θα δείξω " " " $\nu=\kappa+1$: $\gamma^{\kappa+1}=\alpha^{-1}\beta^{\kappa+1}\alpha$.

$\gamma^{\kappa+1}=\gamma^\kappa\cdot\gamma\underset{(\upsilon\pi)}{\overset{(1)}{=}}\alpha^{-1}\beta^\kappa\alpha\cdot\alpha^{-1}\beta\cdot\alpha=\alpha^{-1}\beta^\kappa(\alpha\alpha^{-1})\beta\alpha=\alpha^{-1}\beta^\kappa 1\cdot\beta\cdot\alpha=\alpha^{-1}\beta^{\kappa+1}\alpha$.

Άρα, ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

▼ Θ52. Το $O(0,0)\in(c_1)\Rightarrow R_1=d(O,K_1)=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

(K_1) εφάπτεται $(\varepsilon)\Rightarrow d(K_1,\varepsilon)=R_1\Rightarrow\dfrac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ (1)

Ομοια, για τον (c_2) βρίσκουμε: $\dfrac{|Ax_2+By_2+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ (2)

$(1):(2)\Rightarrow\dfrac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{|Ax_2+By_2+\Gamma|}=\dfrac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\Longrightarrow$

$$\left(\frac{Ax_1+By_1+\Gamma}{Ax_2+By_2+\Gamma}\right)^2=\frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Θ53. $z=3\sqrt{3}-3i \Rightarrow \begin{cases} |z|=\sqrt{9\cdot 3+9}=\sqrt{36}=6 \\ \sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \eta\mu\varphi=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_0=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow z=6\cdot\left(\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{6})+i\eta\mu(-\frac{\pi}{6})\right)$

De Moivre.

1) $z^{1985} \stackrel{\downarrow}{=} 6^{1985}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu(-1985\cdot\frac{\pi}{6})+i\eta\mu(-1985\cdot\frac{\pi}{6})\right]=$
$=6^{1985}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu(-330\pi-\frac{5\pi}{6})+i\eta\mu(-330\pi-\frac{5\pi}{6})\right]=$
$=6^{1985}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu(-\frac{5\pi}{6})+i\eta\mu(-\frac{5\pi}{6})\right]=6^{1985}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right).$

2) $z^5=6\cdot\left[\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{6})+i\eta\mu(-\frac{\pi}{6})\right] \Leftrightarrow z=\sqrt[5]{6}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}}{5}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}}{5}\right]: \kappa=0,1,2,3,4.$
Έτσι: $z_0=\sqrt[5]{6}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{30})+i\eta\mu(-\frac{\pi}{30})\right]$. Όμοια $z_1, z_2, z_3, z_4 \dots$

Θ54. • Αρκεί οι z_1, z_2 να είναι γραμμ. ανεξ. στοιχεία του χώρου $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$.
Έστω z_1, z_2 γραμμ. εξαρτημένα $\Rightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*: z_1=\lambda z_2$ (1). ($\lambda\neq 0$, διότι $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$).
Αλλά $(z_1+z_2)^\nu=(z_1-z_2)^\nu \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (\lambda z_2+z_2)^\nu=(\lambda z_2-z_2)^\nu \Leftrightarrow z_2^\nu(\lambda+1)^\nu=z_2^\nu\cdot(\lambda-1)^\nu \stackrel{z_2\neq 0}{\Longleftrightarrow}$
$(\lambda+1)^\nu=(\lambda-1)^\nu \Rightarrow |\lambda+1|^\nu=|\lambda-1|^\nu \Leftrightarrow |\lambda+1|=|\lambda-1| \Leftrightarrow (\lambda+1)^2=(\lambda-1)^2 \Leftrightarrow$
$\lambda^2+2\lambda+1=\lambda^2-2\lambda+1 \Leftrightarrow \lambda=0 \leftarrow$ Άτοπο, λόγω (1).
Άρα, z_1, z_2 γραμμ. ανεξάρτητα, διάσταση $\mathbb{C}=2$ $\Rightarrow \{z_1,z_2\}$ βάση του $\mathbb{C}$.

Θ55. f παραγωγ. στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=15x^4-30x^2+15=15(x^2-1)^2$.
f' " " " $f''(x)=60x^3-60x=60x(x^2-1)$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, $\quad f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \lor x=-1 \lor x=1$.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f'	+	0	+		+	0	+
f''	−	0	+	0	−	0	+
f		$K_1 = -8$		$K_2 = 0$		$K_3 = 8$	

$f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και $\nexists$ ακρότατα.
Σημεία καμπής: $A(-1,-8)$, $B(0,0)$, $\Gamma(1,8)$.
$D=\begin{vmatrix} -1 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=\dots=0 \Rightarrow A, B, \Gamma$ συνευθειακά.

Θ56. f' περιοδική με περίοδο $T>0 \Rightarrow f'(x+T)=f'(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$
$[f(x+T)]'=[f(x)]', \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}$ σταθερά: $f(x+T)=f(x)+c, \forall x\in\mathbb{R}$ (1).

Η (1) για $x=0 \Rightarrow f(T)=f(0)+c$
Αλλά $f(T)=f(0)$. (υπ.) $\Big\} \Rightarrow c=0$.

Άρα, (1) $\Rightarrow f(x+T)=f(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$
f περιοδική με περίοδο T.

▼ Θ57. (c): $y^2=2px$. $\begin{cases} A(x_1,y_1)\in(c) \Leftrightarrow y_1^2=2px_1 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{y_1^2}{2p} & (1) \\ B(x_2,y_2)\in(c) \Leftrightarrow y_2^2=2px_2 \Leftrightarrow x_2=\dfrac{y_2^2}{2p} & (2) \end{cases}$

$E\in(AB) \Leftrightarrow A,B,E$ συνευθειακά $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-\frac{p}{2} & y_1 & 0 \\ x_2-\frac{p}{2} & y_2 & 0 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\left(x_1-\frac{p}{2}\right)y_2-\left(x_2-\frac{p}{2}\right)y_1=0 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} \frac{y_1^2}{2p}\cdot y_2-\frac{p}{2}\cdot y_2-\frac{y_2^2}{2p}y_1+\frac{p}{2}y_1=0 \Leftrightarrow$

$\frac{y_1y_2}{2p}(y_1-y_2)+\frac{p}{2}(y_1-y_2)=0 \Leftrightarrow (y_1-y_2)\cdot\left(\frac{y_1y_2}{2p}+\frac{p}{2}\right)=0 \overset{A\neq B}{\Longleftrightarrow} \frac{y_1y_2}{2p}+\frac{p}{2}=0$

$\Leftrightarrow y_1y_2+p^2=0 \Leftrightarrow y_1y_2=-p^2$.

▼ Θ58. (c): $\frac{x^2}{4}+y^2=1 \Leftrightarrow \alpha=2$ και $\beta=1$. (1)

Το $P(3,\sqrt5)$ δεν ανήκει στις κατακόρυφες εφαπτόμενες $x=\alpha=2$, $x=-\alpha=-2$

Έστω, $(\varepsilon\varphi)$: $y-\sqrt5=\lambda(x-3) \Leftrightarrow y=\lambda x+(\sqrt5-3\lambda)$ (2)

$(\varepsilon\varphi)$ εφάπτεται (c) $\Leftrightarrow \beta^2+\alpha^2\lambda^2=\kappa^2 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} 1+4\lambda^2=(\sqrt5-3\lambda)^2 \Leftrightarrow$

$5\lambda^2-6\sqrt5\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\frac{6\sqrt5\pm10}{10}=\frac{3\sqrt5\pm5}{5} \Rightarrow \begin{cases} (\varepsilon_1): y-\sqrt5=\frac{3\sqrt5+5}{5}(x-3) \\ (\varepsilon_2): y-\sqrt5=\frac{3\sqrt5-5}{5}(x-3) \end{cases}$

$|\varepsilon\varphi\omega|=\left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1+\lambda_1\lambda_2}\right|=\frac{\left|\frac{3\sqrt5+5}{5}-\frac{3\sqrt5-5}{5}\right|}{1+\frac{3\sqrt5+5}{5}\cdot\frac{3\sqrt5-5}{5}}=\frac{10}{9}$

▼ Θ59. $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix} \Rightarrow A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$

1) $A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \Leftrightarrow A^3=-I_2$. (1)

2) $A^2-A+I_2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Leftrightarrow A^2-A+I_2=\mathbf{0}$. (2)

3) $(A-I_2)^{19}\overset{(2)}{=}(A^2)^{19}=A^{38}=(A^3)^{12}\cdot A^2\overset{(1)}{=}(-I_2)^{12}\cdot A^2=I_2\cdot A^2=A^2$
$A^{19}-I_2=(A^3)^6\cdot A-I_2\overset{(1)}{=}(-I_2)^6\cdot A-I_2=I_2\cdot A-I_2=A-I_2\overset{(2)}{=}A^2$ → ισχύει.

4) Έστω $X=\begin{bmatrix}x&y\\z&\omega\end{bmatrix}\in S \Leftrightarrow A\cdot X=X\cdot A \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x&y\\z&\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&\omega\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x-z=x+y \\ y-\omega=-x \\ x=z+\omega \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-y \\ x=\omega-y \\ \omega,y\in\mathbb{R} \end{cases}$. Άρα: $X=\begin{bmatrix}\omega-y&y\\-y&\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega&0\\0&\omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y&y\\-y&0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$X=\omega\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}$: $y,\omega\in\mathbb{R}$. Δηλαδή, κάθε στοιχείο του S γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων $v_1,v_2\in\Pi_2$, όπου $v_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}$ και άρα το S είναι υπόχωρος του Π_2.

Έστω $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$: $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=\mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2=0 \\ \lambda_2=0 \\ -\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0 \Rightarrow v_1,v_2$ γραμμικώς ανεξάρτητα, και παράγουν τον υπόχωρο $S \Rightarrow$ το $\{v_1,v_2\}$ είναι μια βάση του S, και άρα η διάσταση του S είναι 2.

▼Θ60. 1) Π.Ο. Πρέπει $x-x^2\geq 0$

x		0		1	
$-x^2+x$	$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα: $A=[0,1]$

Π.Τ. Έστω y η εικόνα του x με τη συνάρτηση f.

Τότε: $y=\sqrt{x-x^2}$. Πρέπει $y\geq 0$ (1).

οπότε $y^2=x-x^2 \Leftrightarrow x^2-x+y^2=0$.

Επειδή $\alpha=1\neq 0$, πρέπει $\Delta\geq 0$ (ώστε $x\in\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow 1-4y^2\geq 0$

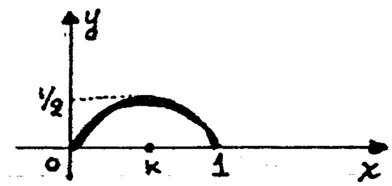
y		$-1/2$		$1/2$	
$1-4y^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Leftrightarrow y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (2). $\quad$ (1),(2) $\Rightarrow f(A)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2) Είναι $x^2-x+y^2=0 \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2=0 \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$: $x\in[0,1]$ και $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

Άρα το διάγραμμα της f είναι ημικύκλιο κέντρου $K\left(\frac{1}{2},0\right)$ και ακτίνας $\rho=\frac{1}{2}$.



▼Θ61. $\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2$ μοναδιαία $\Leftrightarrow |\vec{\delta}_1|=|\vec{\delta}_2|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1^2+y_1^2=1\\ x_2^2+y_2^2=1\end{cases} \Rightarrow$

$(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2)=1 \Leftrightarrow x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2=1$. (1).

$\vec{\delta}_1\perp\vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0 \Leftrightarrow (x_1x_2+y_1y_2)^2=0 \Leftrightarrow$

$x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2=0$. (2).

(1)−(2) $\Rightarrow x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2=1 \Leftrightarrow (x_1y_2-x_2y_1)^2=1 \Leftrightarrow |x_1y_2-x_2y_1|=1$.

▼Θ62. $\alpha\in\mathbb{C}^*$, $\nu\in\mathbb{N}^*$: $z^{2\nu+1}=\alpha$. (1).

Έστω $z_1\neq z_2$ δύο λύσεις της (1) στο $\mathbb{C}$.

Αν z_1,z_2 γραμμικώς εξαρτημένα στο $\mathbb{C}$, τότε $\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$: $z_1=\lambda z_2 \Leftrightarrow$

$z_1^{2\nu+1}=\lambda^{2\nu+1}\cdot z_2^{2\nu+1} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha=\lambda^{2\nu+1}\cdot\alpha \Leftrightarrow 1=\lambda^{2\nu+1} \Leftrightarrow \lambda=1$

Άρα: $z_1=1\cdot z_2 \Leftrightarrow z_1=z_2 \leftarrow$ Άτοπο, διότι $z_1\neq z_2$, οπότε τα z_1,z_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{C}$.

▼Θ63. 1) $A=\{z\in\mathbb{C}:(zi+\bar{z}\sqrt{3})\in\mathbb{R}\}$. Έστω $z=(x+yi)\in A \Rightarrow$

$zi+\bar{z}\sqrt{3}=(x+yi)i+(x-yi)\sqrt{3}=xi-y+x\sqrt{3}-y\sqrt{3}i=(x\sqrt{3}-y)+(x-y\sqrt{3})i$

Αλλά $(zi+\bar{z}\sqrt{3})\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x-y\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=y\sqrt{3} \Leftrightarrow z=y\sqrt{3}+yi=y(\sqrt{3}+i) \Leftrightarrow$

$z=y(\sqrt{3},1)$: $y\in\mathbb{R}$. Άρα το A παράγεται από το $z_0=\sqrt{3}+i=(\sqrt{3},1)\in\mathbb{C}$ οπότε είναι υπόχωρος του $\mathbb{C}$. Επειδή $z_0\neq 0 \Rightarrow z_0$ γραμμικώς ανεξάρτητο στοιχείο του $\mathbb{C} \Rightarrow$ το $\{z_0\}$ είναι βάση του A (αφού παράγει το A)

Άρα η διάσταση του A είναι 1.

2) $w\in A \Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{R}$: $w=y(\sqrt{3},1)=y(\sqrt{3}+i)$.

$|w|=1 \Leftrightarrow |y(\sqrt{3}+i)|=1 \Leftrightarrow |y|\cdot|\sqrt{3}+i|=1 \Leftrightarrow |y|\cdot 2=1 \Leftrightarrow |y|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{2}$.

Άρα: $w=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\pm\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$$w^{22}+\frac{1}{w^{22}}=\text{συν}\frac{11\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{11\pi}{3}+\frac{1}{\text{συν}\frac{11\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{11\pi}{3}}=\text{συν}\frac{11\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{11\pi}{3}+\frac{\text{συν}\frac{11\pi}{3}-i\,\text{ημ}\frac{11\pi}{3}}{\text{συν}^2\frac{11\pi}{3}+\text{ημ}^2\frac{11\pi}{3}}=2\,\text{συν}\frac{11\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Θ64. Αρκεί να δείξω ότι $\exists x_0 \in (0,1) : f(x_0) - e^{x_0} = 0$

• Θεωρώ τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - e^x$. (1).

Είναι: i) g συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά συνεχών συναρτ.) $\Rightarrow$ g συνεχής στο $[0,1]$

ii) $g(0) = f(0) - e^0 = f(0) - 1 < 0$. (υπόθ.)

και $g(1) = f(1) - e^1 = f(1) - e > 3 - e > 0$ (υπόθ.) $\Rightarrow g(0)\cdot g(1) < 0$ $\xrightarrow[\text{B.W.}]{\Theta}$

$\exists x_0 \in (0,1) : g(x_0) = 0 \xRightarrow{(1)} f(x_0) - e^{x_0} = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0,1) : f(x_0) = e^{x_0}$.

Θ65. 1) Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta\omega \\ \gamma x + \delta z & \gamma y + \delta\omega \end{bmatrix} \Rightarrow$

$D(A\cdot B) = (\alpha x + \beta z)(\gamma y + \delta\omega) - (\gamma x + \delta z)(\alpha y + \beta\omega) =$

$= \cancel{\alpha\gamma xy} + \alpha\delta x\omega + \beta\gamma yz + \beta\delta z\omega - \cancel{\alpha\gamma xy} - \beta\gamma x\omega - \alpha\delta yz - \beta\delta z\omega =$

$= \alpha\delta(x\omega - yz) - \beta\gamma(x\omega - yz) = (x\omega - yz)(\alpha\delta - \beta\gamma) = D(B)\cdot D(A) \Rightarrow D(A\cdot B) = D(A)\cdot D(B)$.

2) $S = \{A \in \Pi_2 : D(A) = 1\}$

$S \neq \emptyset$, διότι $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$, αφού $D(I_2) = 1$. $S \subseteq \Pi_2$ (υπόθ.)

α) $\forall A,B \in S \Rightarrow \begin{cases} A,B \in \Pi_2 \\ D(A) = D(B) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A\cdot B) \in \Pi_2 \\ D(AB) \overset{(1)}{=} D(A)\cdot D(B) = 1 \end{cases} \Rightarrow A\cdot B \in S \Rightarrow S$ κλειστό ως προς τον πολ/μό στο Π_2.

β) $\forall A,B,\Gamma \in S \Rightarrow A,B,\Gamma \in \Pi_2 \Rightarrow (AB)\Gamma = A(B\Gamma) \Rightarrow$ ισχύει η προσεταιριστική.

γ) $I_2 \in S$ (δείχθηκε) και $\forall A \in S \Rightarrow A \in \Pi_2 \Rightarrow A\cdot I_2 = I_2\cdot A = A \Rightarrow$ Ουδέτερο το I_2.

δ) $\forall A \in S \Rightarrow \begin{cases} A \in \Pi_2 \\ D(A) = 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Υπάρχει ο $A^{-1} \in \Pi_2$: $\begin{cases} A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I_2 \\ D(AA^{-1}) = D(I_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} D(A)\cdot D(A^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \end{cases}$

$D(A^{-1}) = 1 \Leftrightarrow A^{-1} \in S$. Άρα το συμμετρικό του A είναι ο αντίστροφος A^{-1}.

ε) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$, διότι $D(A) = D(B) = 1$, τότε:

$A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $B\cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα $AB \neq BA \Rightarrow$ Δεν ισχύει η αντιμεταθετ.

α) έως ε) $\Rightarrow$ το S είναι πολ/κή ομάδα, μη αντιμεταθετική.

Θ66. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (2\vec{\delta} - \vec{\delta_1} - \vec{\delta_2})\cdot(\vec{\delta_1} - \vec{\delta_2}) =$

$= 2\vec{\delta}\vec{\delta_1} - 2\vec{\delta}\cdot\vec{\delta_2} - \vec{\delta_1}^2 + \cancel{\vec{\delta_1}\vec{\delta_2}} - \cancel{\vec{\delta_1}\vec{\delta_2}} + \vec{\delta_2}^2 \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2\vec{\delta}\vec{\delta_1} - 2\vec{\delta}\cdot\vec{\delta_2} - \vec{\delta_1}^2 + \vec{\delta_2}^2$ (1).

Αλλά $|\vec{\delta} - \vec{\delta_1}| = |\vec{\delta} - \vec{\delta_2}| \Leftrightarrow |\vec{\delta} - \vec{\delta_1}|^2 = |\vec{\delta} - \vec{\delta_2}|^2 \Leftrightarrow (\vec{\delta} - \vec{\delta_1})^2 = (\vec{\delta} - \vec{\delta_2})^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{\vec{\delta}^2} - 2\vec{\delta}\vec{\delta_1} + \vec{\delta_1}^2 = \cancel{\vec{\delta}^2} - 2\vec{\delta}\vec{\delta_2} + \vec{\delta_2}^2 \Leftrightarrow 2\vec{\delta}\vec{\delta_1} - 2\vec{\delta}\vec{\delta_2} - \vec{\delta_1}^2 + \vec{\delta_2}^2 = 0$

Άρα (1) $\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Θ67. $\big||z_1+z_2| - |z_1-z_2|\big| = \sqrt{2}\cdot\big||z_1| - |z_2|\big| \Leftrightarrow \big(|z_1+z_2| - |z_1-z_2|\big)^2 = 2\cdot\big(|z_1| - |z_2|\big)^2 \Leftrightarrow$

$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 - 2|z_1+z_2|\cdot|z_1-z_2| = 2\big(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|\cdot|z_2|\big) \Leftrightarrow$

$(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2}) - 2|z_1^2 - z_2^2| = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - 4|z_1 z_2| \Leftrightarrow$ • $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

$\cancel{z_1\bar{z}_1} + \cancel{z_1\bar{z}_2} + \cancel{\bar{z}_1 z_2} + \cancel{z_2\bar{z}_2} + \cancel{z_1\bar{z}_1} - \cancel{z_1\bar{z}_2} - \cancel{\bar{z}_1 z_2} + \cancel{z_2\bar{z}_2} - 2|z_1^2 - z_2^2| = \cancel{2z_1\bar{z}_1} + \cancel{2z_2\bar{z}_2} - 4|z_1 z_2| \Leftrightarrow$

$|z_1^2 - z_2^2| = 2|z_1 z_2| \Leftrightarrow \dfrac{|z_1^2 - z_2^2|}{|z_1 z_2|} = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2} - \dfrac{z_2}{z_1}\right| = 2$ ισχύει, από την υπόθεση.

▼Θ68. $f(x)=(x^2+2x-7)\cdot e^x$. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη, με:

$f'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x-7)\cdot e^x=(x^2+4x-5)\cdot e^x$.

$f''(x)=(2x+4)e^x+(x^2+4x-5)e^x=(x^2+6x-1)\cdot e^x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=5 \vee x_2=-1$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x_1=-3+\sqrt{10} \vee x_2=-3-\sqrt{10}$

x	$-\infty$ … $-3-\sqrt{10}$	$-3-\sqrt{10}$ … -1	-1 … $-3+\sqrt{10}$	$-3+\sqrt{10}$ … 5	5 … $+\infty$
f'	+	+	−	−	+
f''	+	−	−	+	+
f	↗	↗	↘	↘	↗
	K_1	μ	K_2	ε	

1) $f \uparrow$ στα $(-\infty,-1)$, $(5,+\infty)$ και $\downarrow$ στο $(-1,5)$.
Έχει τοπικό μέγιστο το $(-1,-\frac{8}{e})$ και
» ελάχιστο το $(5, 28e^5)$.

2) f κυρτή $\cup$ στα $(-\infty,-3-\sqrt{10})$, $(-3+\sqrt{10},+\infty)$ και κοίλη $\cap$ στο $(-3-\sqrt{10},-3+\sqrt{10})$.

Έχει σημεία καμπής τα $(-3-\sqrt{10},K_1)$, $(-3+\sqrt{10},K_2)$ όπου $K_1=f(-3-\sqrt{10})$, $K_2=f(-3+\sqrt{10})$.

▼Θ69. f συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow f$ συνεχής στο $0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. (1).

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\eta\mu^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-x-1)'}{(\eta\mu^2 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{(\eta\mu 2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2\sigma\upsilon\nu 2x}=\dfrac{1}{2}\\ f(0)=\alpha\end{array}\right\}\xRightarrow{(1)} \alpha=\frac{1}{2}.$$

▼Θ70. $x^2=x$, $\forall x\in A$ (1)

1) $x\in A \Rightarrow (x+x)\in A \xRightarrow{(1)} (x+x)^2=x+x \Rightarrow (x+x)(x+x)=x+x \Rightarrow$
$x^2+x^2+x^2+x^2=x+x \xRightarrow{(1)} x+x+x+x=x+x \Rightarrow x+x=0 \Rightarrow x=-x$, $\forall x\in A$.

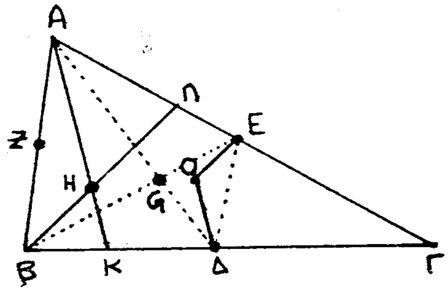
2) $\forall x,y\in A \Rightarrow (x+y)\in A \xRightarrow{(1)} (x+y)^2=x+y \Rightarrow (x+y)(x+y)=x+y \Rightarrow$
$x^2+xy+yx+y^2=x+y \xRightarrow{(1)} x+xy+yx+y=x+y \Rightarrow xy+yx=0 \Rightarrow xy=-yx$ (2)
Αλλά $x,y\in A \Rightarrow (yx)\in A$ οπότε, λόγω του 1) $yx=-yx$
Άρα (2) $\Rightarrow xy=yx$, $\forall x,y\in A \Leftrightarrow$ ο δακτύλιος A είναι αντιμεταθετικός.

3) $xy(x+y)\underset{\text{Επιμ.}}{=}xyx+xy^2\underset{2}{=}xxy+xy^2=x^2y+xy^2\underset{(1)}{=}xy+xy\underset{1)}{=}xy-xy=0$

▼Θ71. $\forall \alpha,\beta,\gamma\in E$: $\alpha*\beta=\gamma*\alpha \Rightarrow \beta=\gamma$ (I)

1) $\forall x,y\in E$, $(x*y)*x=x*(y*x)$ αφού η $*$ είναι προσεταιριστική $\Rightarrow$
$x*(y*x)=(x*y)*x \xRightarrow{(I)} y*x=x*y$ Άρα η $*$ είναι Αντιμεταθ.

2) Έστω $e\in E$ λύση της $x*x=x \Rightarrow e*e=e$. (II).
$\forall \alpha\in E$, $(\alpha*e)*e\overset{\pi\rho.}{=}\alpha*(e*e)\overset{(II)}{=}\alpha*e\overset{1)}{=}e*\alpha \xRightarrow{1)}$
$e*(\alpha*e)=\alpha*e \xRightarrow{(I)} \alpha*e=\alpha \Rightarrow \alpha*e\overset{1)}{=}e*\alpha=\alpha$
Άρα το e είναι το ουδέτερο στοιχείο της $*$.



▼ Θ72. 1) $O\Delta // AK \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}: \vec{O\Delta} = \mu \cdot \vec{AH}$
$OE // BH \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{R}: \vec{OE} = \nu \cdot \vec{BH}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\vec{O\Delta} - \vec{OE} = \mu \vec{AH} - \nu \cdot \vec{BH} \Rightarrow \vec{E\Delta} = \mu \vec{AH} - \nu \cdot \vec{BH} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\vec{AB} = \mu \cdot \vec{AH} - \nu \cdot \vec{BH} \Rightarrow \frac{1}{2}(\vec{AH} - \vec{BH}) = \mu \vec{AH} - \nu \cdot \vec{BH} \Rightarrow$

$$(\mu - \tfrac{1}{2})\vec{AH} + (\tfrac{1}{2} - \nu) \cdot \vec{BH} = \vec{0} \quad (\mathrm{I}).$$

$\vec{AH}, \vec{BH}$ γραμμικώς ανεξάρτητα (ΙΙ)

(διότι αν $\vec{AH}, \vec{BH}$ γρ. εξαρτημένα $\Leftrightarrow$ A, H, B συνευθειακά $\Leftrightarrow H \in AB \Rightarrow O \in \Delta E \leftarrow$ Άτοπο).

(Ι),(ΙΙ) $\Rightarrow \begin{cases} \mu - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2} - \nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = \nu = \frac{1}{2}$. Άρα: $\vec{O\Delta} = \frac{1}{2}\vec{AH}$.

2) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} \underset{O\Delta \text{ διάμεσος } \overset{\triangle}{BO\Gamma}}{=} \vec{OA} + 2\vec{O\Delta} \overset{1)}{=} \vec{OA} + 2 \cdot \frac{1}{2}\vec{AH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OH}$.

3) G βαρύκ. $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Longrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA} - \vec{OG} + \vec{OB} - \vec{OG} + \vec{O\Gamma} - \vec{OG} = \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = 3 \cdot \vec{OG} \overset{2)}{\Longrightarrow} \vec{OH} = 3 \cdot \vec{OG}$.

4). $2) \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OH} - \vec{O\Gamma} \Leftrightarrow 2 \cdot \vec{OZ} = \vec{\Gamma H} \Leftrightarrow \vec{OZ} // \vec{\Gamma H}$.

5) $3) \Rightarrow \vec{OH} = 3 \cdot \vec{OG} \Leftrightarrow \vec{OH} // \vec{OG} \Leftrightarrow O, H, G$ συνευθειακά.

▼ Θ73. $(\varepsilon): \frac{1}{12}x + \frac{1}{5}y = 1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{1/12}{1/5} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{5}{12}$
$(\varepsilon_\varphi) // (\varepsilon)$ $\Big\} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{5}{12}$

Άρα, (ε_φ): $y = -\frac{5}{12}x + \kappa$. (1).

(ε_φ) εφάπτεται $(c) \Leftrightarrow \beta^2 + \kappa^2 = \alpha^2\lambda^2$
$(c): \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 6, \ \beta = 2$ $\Big\} \Rightarrow 4 + \kappa^2 = 36\left(-\frac{5}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \kappa = \pm\frac{3}{2}$

Άρα (1) $\Rightarrow$ Οι εφαπτόμενες είναι οι $(\varepsilon_1): y = -\frac{5}{12}x + \frac{3}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = -\frac{5}{12}x - \frac{3}{2}$.

▼ Θ74. Ευθύ: Αν f άρτια $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = f(x) \Rightarrow$

» , » » $[f(-x)]' = [f(x)]' \Rightarrow$

» , » » $f'(-x) \cdot (-x)' = f'(x) \Rightarrow$

» , » » $-f'(-x) = f'(x) \Rightarrow$

» , » » $f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'$ περιττή.

Αντίστροφα: Αν f' περιττή $\Rightarrow$ » , » και $f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow$

» , » » $-f'(-x) = f'(x) \Rightarrow$

» , » » $[f(-x)]' = [f(x)]' \Rightarrow$

$\exists c \in \mathbb{R}: f(-x) = f(x) + c, \ \forall x \in \mathbb{R}$. (1).

Για $x = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} f(0) = f(0) + c \Rightarrow c = 0$

Άρα (1) $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ άρτια.

▼Θ75. $A, B, \Gamma \in \Pi_\mu$: $A = B^{-1} \cdot \Gamma \cdot B$ (1)

1) $A^\nu = B^{-1} \cdot \Gamma^\nu \cdot B$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$

Για $\nu=1$, $A = B^{-1} \cdot \Gamma \cdot B$ ισχύει, λόγω (1).

Έστω, για $\nu=k$, $A^k = B^{-1} \cdot \Gamma^k \cdot B$ (2)

Θα δείξω, για $\nu=k+1$ $A^{k+1} = B^{-1} \cdot \Gamma^{k+1} \cdot B$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} (B^{-1} \Gamma^k B) \cdot (B^{-1} \Gamma \cdot B) = B^{-1} \Gamma^k \cdot (B B^{-1}) \cdot \Gamma \cdot B = B^{-1} \Gamma^k I_\mu \cdot \Gamma \cdot B =$$
$$= B^{-1}(\Gamma^k \cdot \Gamma) \cdot B = B^{-1} \Gamma^{k+1} B.$$ Άρα ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

2) Έστω $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} \in S \Leftrightarrow$

$$X \cdot A = B \cdot X \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 3y = 2x \\ 10x - 3y = 2y \\ 8z - 3\omega = 3z \\ 10z - 3\omega = 3\omega \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = \frac{3\omega}{5} \end{cases} : x, \omega \in \mathbb{R}$$

Άρα: $$X = \begin{bmatrix} x & 2x \\ \frac{3\omega}{5} & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3\omega}{5} & \omega \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$X = x \cdot v_1 + \omega v_2$: $x, \omega \in \mathbb{R}$, όπου $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3/5 & 1 \end{bmatrix} \in \Pi_2$

Δηλαδή το S παράγεται από τα στοιχεία $v_1, v_2 \in \Pi_2 \Rightarrow S$ υπόχωρος του Π_2.

Αν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 \\ \frac{3\lambda_2}{5} & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$

v_1, v_2 γραμ. ανεξάρτητα και παράγουν τον $S \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ βάση του S και η διάσταση του S είναι 2. (όσο και το πλήθος των στοιχείων της βάσης).

▼Θ76. $z + \frac{1}{z} = 2\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + 1 = 0$

$\Delta = 4\sigma\upsilon\nu^2\theta - 4 = 4(\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1) = -4\eta\mu^2\theta$ $\Leftrightarrow$

$$z_{1,2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\theta \pm 2i\eta\mu\theta}{2} = \sigma\upsilon\nu\theta \pm i\eta\mu\theta \Leftrightarrow$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta \\ \sigma\upsilon\nu(-\theta) + i\eta\mu(-\theta) \end{cases} \Rightarrow z = \sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi \ : \ \varphi = \pm\theta.$$

Άρα: $$z^\nu + \frac{1}{z^\nu} = (\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)^\nu + \frac{1}{(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)^\nu} = \text{(De Moivre)}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\eta\mu(\nu\varphi) + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\eta\mu(\nu\varphi)} =$$

$$\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\eta\mu(\nu\varphi) + \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) - i\eta\mu(\nu\varphi)}{\sigma\upsilon\nu^2(\nu\varphi) + \eta\mu^2(\nu\varphi)} =$$

$$\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\eta\mu(\nu\varphi) + \sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) - i\eta\mu(\nu\varphi) =$$
$$2\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) = 2\sigma\upsilon\nu(\pm\nu\theta) = 2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta).$$

▼ Θ77. $(c_1): x^2+y^2=20 \to$ Κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$(c_2): x^2+y^2-6x+2y=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+9)-9+(y^2+2y+1)-1=0 \Leftrightarrow$

$(c_2): (x-3)^2+(y+1)^2=10 \to$ Κύκλος με κέντρο $K(3,-1)$ και ακτίνα $\rho_2=\sqrt{10}$.

β' τρόπος για την (c_2): Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=36+4-0=40>0 \Leftrightarrow (c_2)$ κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=(3,-1)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$.

$(c_1)\cap(c_2)$: $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x^2+y^2-6x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \longrightarrow \\ 6x-2y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(3x-10)^2=20 \\ y=3x-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+8=0 \\ \longrightarrow \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=-4 \end{matrix} \vee \begin{matrix} x=4 \\ y=2 \end{matrix} \Leftrightarrow (c_1)\cap(c_2)=\{A,B\}$, όπου $A(2,-4)$, $B(4,2)$

Αν M μέσο του $AB \Rightarrow M\left(\frac{2+4}{2},\frac{-4+2}{2}\right)=(3,-1) \Rightarrow M\equiv K \Rightarrow AB$ διάμετρος.

Οι εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) των (c_1), (c_2) αντίστοιχα, στο σημείο A, είναι

(ε_1): $x\cdot 2+y(-4)=20 \Leftrightarrow x-2y-10=0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\frac{1}{2}$.

(ε_2): $(x-3)\cdot(2-3)+(y+1)\cdot(-4+1)=10 \Leftrightarrow x+3y+10=0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{1}{3}$.

Αν $\hat{\omega}$ είναι η οξεία γωνία των (ε_1), (ε_2), τότε:

$$\varepsilon\varphi\omega=\left|\frac{\lambda_{\varepsilon_2}-\lambda_{\varepsilon_1}}{1+\lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right|=\left|\frac{-5/6}{5/6}\right|=1 \Rightarrow \hat{\omega}=45^\circ.$$

▼ Θ78. $f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$ $A=\mathbb{R}-\{2\}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη, με:

$f'(x)=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=6$.

$f''(x)=\frac{24x}{(x-2)^4}$. $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

x	$-\infty$		0		2		6		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	$\nparallel$	$-$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	$\nparallel$	$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$K_1=0$	$\nearrow$	$+\infty \nparallel +\infty$	$\searrow$	$E=\frac{27}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow c\cap x'x=(0,0)=c\cap y'y$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \nexists$ οριζόντια ασύμπτωτη.

$\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty \Rightarrow$ Κατακόρυφη ασύμπτ. η $x=2$.

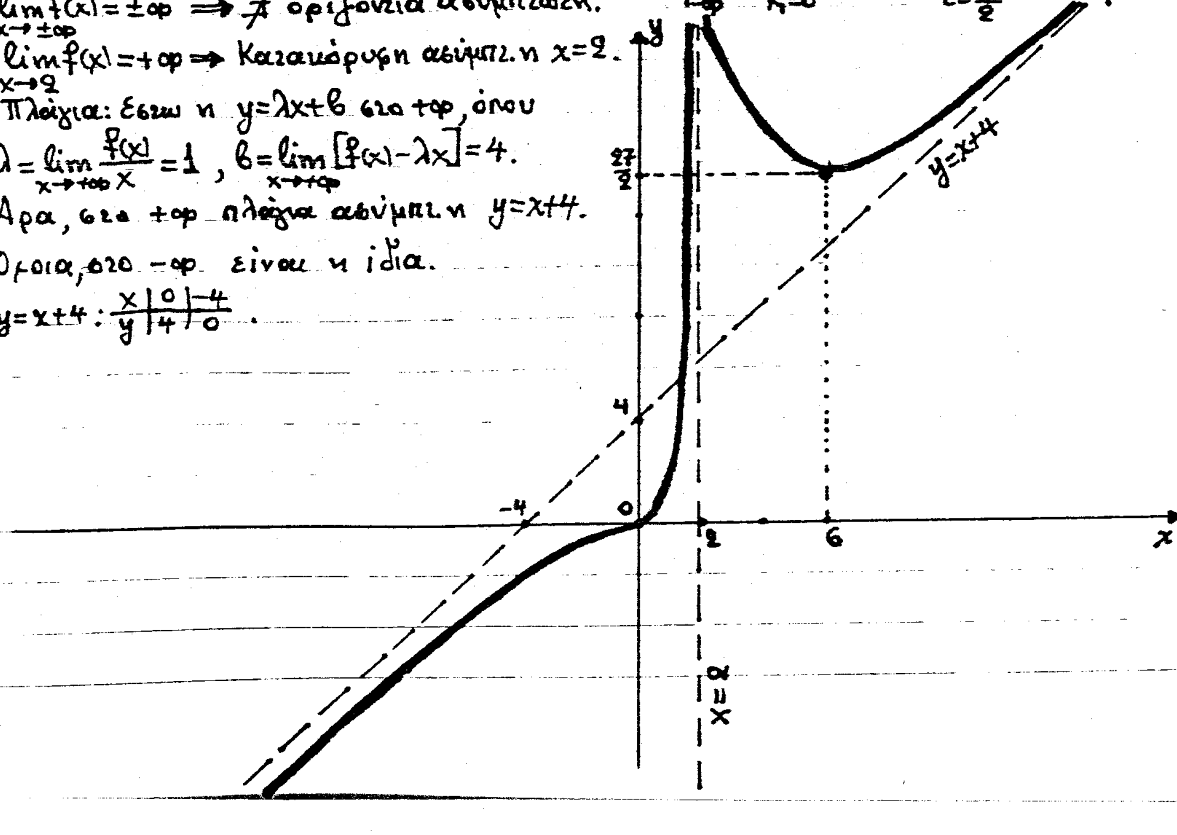
Πλάγια: Έστω η $y=\lambda x+\beta$ στο $+\infty$, όπου

$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=4$.

Άρα, στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτ. η $y=x+4$.

Ομοια, στο $-\infty$ είναι η ίδια.

$y=x+4$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -4 \\ y & 4 & 0 \end{array}$.



Θ79. 1) $f(x)=x^x$, $A=(0,+\infty)$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=(e^{x\ln x})'=(x\ln x)'\cdot e^{x\ln x}=(\ln x+1)\cdot x^x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.

$0<x<\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x<\ln e^{-1}$ $(y=\ln x \uparrow) \Leftrightarrow \ln x<-1 \Leftrightarrow$

$\ln x+1<0 \Leftrightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(0,\frac{1}{e}) \Leftrightarrow f \downarrow$ στο $(0,\frac{1}{e})$.

Ομοια, $f'(x)>0,\ \forall x\in(\frac{1}{e},+\infty) \Leftrightarrow f \uparrow$ στο $(\frac{1}{e},+\infty)$.

Εχει ελάχιστο το $\left(\frac{1}{e},(\frac{1}{e})^{1/e}\right)$.

x	0		$1/e$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\varepsilon=(\frac{1}{e})^{1/e}$	$\nearrow$	

2) $f(x)=\left(\frac{\lambda e}{x}\right)^x$, $A=(0,+\infty)$ διότι $\lambda>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με

$f'(x)=\left(e^{x\ln(\frac{\lambda e}{x})}\right)'=\left(x\ln(\frac{\lambda e}{x})\right)'\cdot e^{x\ln(\frac{\lambda e}{x})}=\left[\ln(\frac{\lambda e}{x})+x\cdot\frac{(\frac{\lambda e}{x})'}{\frac{\lambda e}{x}}\right]\cdot\left(\frac{\lambda e}{x}\right)^x=$

$=\left[\ln(\frac{\lambda e}{x})-1\right]\cdot\left(\frac{\lambda e}{x}\right)^x=\ln\left(\frac{\lambda}{x}\right)\cdot\left(\frac{\lambda e}{x}\right)^x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(\frac{\lambda}{x})=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{x}=1 \Leftrightarrow x=\lambda$.

$0<x<\lambda \Leftrightarrow \frac{\lambda}{x}>1 \Leftrightarrow \ln(\frac{\lambda}{x})>0 \Leftrightarrow$

$f'(x)>0,\ \forall x\in(0,\lambda)$. Αρα $f \uparrow$ στο $(0,\lambda)$.

Ομοια, $f'(x)<0,\ \forall x\in(\lambda,+\infty) \Leftrightarrow f \downarrow$ στο $(\lambda,+\infty)$. Εχει μέγιστο το (λ,e^{λ}).

x	0		λ		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\mu=e^{\lambda}$	$\searrow$	

Θ80. 1) $\alpha_\nu=\frac{\nu^2+\nu+2}{7^\nu+4^\nu}=(\text{Δια } 7^\nu)=\frac{\nu^2+\nu+2}{7^\nu}\cdot\frac{1}{1+(\frac{4}{7})^\nu}=\beta_\nu\cdot\gamma_\nu$.

Κρ. d'Alembert.

Είναι: $\lim\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=\lim\left[\frac{(\nu+1)^2+(\nu+1)+2}{7^{\nu+1}}:\frac{\nu^2+\nu+2}{7^\nu}\right]=\lim\frac{\nu^2+3\nu+4}{7(\nu^2+\nu+2)}=\frac{1}{7}<0 \Rightarrow \lim\beta_\nu=0$

και $\lim\gamma_\nu=\frac{1}{1+\lim(\frac{4}{7})^\nu}=\frac{1}{1+0}=1$, διότι $\left|\frac{4}{7}\right|<1 \Rightarrow \lim(\frac{4}{7})^\nu=0$.

Αρα: $\lim\alpha_\nu=\lim\beta_\nu\cdot\lim\gamma_\nu=0\cdot1=0$.

2) Αν $\beta_\nu=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\nu)}{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+\nu)}$ τότε $\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=\frac{\alpha+\nu+1}{\beta+\nu+1} \Rightarrow \lim\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=1>0$

Αρα: $\lim\alpha_\nu=\lim\sqrt[\nu]{\beta_\nu}=1$.

3) $\alpha_\nu:\begin{cases}\alpha_1=\alpha\\ \alpha_{\nu+1}=\alpha+\alpha_\nu^2\end{cases}$, $0<\alpha\le\frac{1}{4}$. Προφανώς $\alpha_\nu>0,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

Μονοτονία: Είναι $\alpha_2=\alpha+\alpha_1^2>\alpha_1$. Θα δείξω ότι $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

Για $\nu=1$: $\alpha_2>\alpha_1$ δείχθηκε. Εστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$: $\alpha_{\kappa+1}>\alpha_\kappa$ (1).

Θα δείξω ότι ισχύει και για $\nu=\kappa+1$: $\alpha_{\kappa+2}>\alpha_{\kappa+1}$.

Είναι: $\alpha_{\kappa+2}\overset{(\upsilon\pi)}{=}\alpha+\alpha_{\kappa+1}^2\overset{(1)}{>}\alpha+\alpha_\kappa^2\overset{(\upsilon\pi)}{=}\alpha_{\kappa+1}$. Αρα, ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow (\alpha_\nu)\uparrow$.

Φράγματα: Αφού $(\alpha_\nu)\uparrow \Rightarrow (\alpha_\nu)$ κάτω φραγμένη, με κ.φ. το $\alpha_1=\alpha \Rightarrow \alpha_\nu\ge\alpha$.

Θα δείξω ότι $\alpha_\nu\le\frac{1}{2},\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*$. Για $\nu=1$: $\alpha_1=\alpha\overset{(\upsilon\pi)}{\le}\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ ισχύει.

Εστω για $\nu=\kappa$: $\alpha_\kappa\le\frac{1}{2}$ (2). Θα δείξω και για $\nu=\kappa+1$: $\alpha_{\kappa+1}\le\frac{1}{2}$.

Είναι: $\alpha_{\kappa+1}\overset{(\upsilon\pi)}{=}\alpha+\alpha_\kappa^2\underset{(1)}{\overset{(\upsilon\pi)}{\le}}\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Αρα, ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$. Δηλαδή:

(α_ν) άνω φραγμένη, με α.φ. το $\frac{1}{4}$. Είναι και $\uparrow \xrightarrow[\text{Μονοτ.}]{\text{Κρ.}} (\alpha_\nu)$ συγκλίνει.

Εστω $\lim\alpha_\nu=\ell \Leftrightarrow \lim\alpha_{\nu+1}=\ell$. Αρα: $\ell=\alpha+\ell^2 \Leftrightarrow \ell^2-\ell-\alpha=0$, $\Delta=1-4\alpha\ge0$ $(\alpha\le\frac{1}{4})$ $\Rightarrow \ell=\frac{1\pm\sqrt{1-4\alpha}}{2}$

κι επειδή $\alpha\le\alpha_\nu\le\frac{1}{2}$, άρα $\ell=\frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2}=\lim\alpha_\nu$.

Θ80. 4) $\alpha_\nu=(1-x)^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$. Διακρίνω τις περιπτώσεις:

i) Αν $|1-x|<1 \Leftrightarrow -1<1-x<1 \Leftrightarrow 0<x<2$, τότε $\lim\alpha_\nu=0$.

ii) Αν $1-x=1 \Leftrightarrow x=0$, τότε $\lim\alpha_\nu=1$.

iii) Αν $1-x>1 \Leftrightarrow x<0$, τότε $\lim\alpha_\nu=+\infty$.

iv) Αν $1-x\le -1 \Leftrightarrow x\ge 2$, τότε η (α_ν) δεν συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, διότι $\lim(1-x)^{2k}=+\infty$, ενώ $\lim(1-x)^{2k+1}=-\infty$.

5) Είναι: $|\alpha_\nu|=\left|\nu\cdot\eta\mu\frac{1}{\nu^2}\right|=\nu\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{\nu^2}\right|\le\nu\cdot\frac{1}{\nu^2}=\frac{1}{\nu}$ Αλλά η (β_ν): $\beta_\nu=\frac{1}{\nu}\to 0$ $\Rightarrow \lim\alpha_\nu=0$. (• $|\eta\mu x|\le x$, $\forall x\in\mathbb{R}$)

6) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^2-\nu\cdot\eta\mu^3\nu+1}{3\nu^2-6\upsilon\nu(\nu\pi)}=\dfrac{\cancel{\nu^2}\left(1-\frac{1}{\nu}\eta\mu^3\nu+\frac{1}{\nu^2}\right)}{\cancel{\nu^2}\left(3+\frac{1}{\nu^2}\cdot 6\upsilon\nu(\nu\pi)\right)}$

Αλλά η (β_ν): $\beta_\nu=\frac{1}{\nu}\cdot\eta\mu^3\nu\to 0$ (μηδεν. · φραγμένη)

και η (γ_ν): $\gamma_\nu=\frac{1}{\nu^2}\cdot 6\upsilon\nu(\nu\pi)\to 0$ (›› · ››)

$\Rightarrow \lim\alpha_\nu=\dfrac{1-0+0}{3+0}=\dfrac{1}{3}$.

7) $\alpha_\nu=\dfrac{2\cdot 3^\nu+5^{\nu+1}}{4\cdot 3^\nu+5^{\nu+2}}=\dfrac{\cancel{5^\nu}\cdot\left[2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^\nu+5\right]}{\cancel{5^\nu}\cdot\left[4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^\nu+5^2\right]}\Rightarrow\lim\alpha_\nu=\dfrac{2\cdot 0+5}{4\cdot 0+25}=\dfrac{1}{5}$.

8) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu}{\nu^2+1}+\dfrac{\nu}{\nu^2+2}+\dots+\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu}$. Είναι: $\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu}\le\dfrac{\nu}{\nu^2+k}\le\dfrac{\nu}{\nu^2+1}$, $\forall k\in\mathbb{N}: 1\le k\le\nu$.

Για $k=1$: $\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu}\le\dfrac{\nu}{\nu^2+1}\le\dfrac{\nu}{\nu^2+1}$

Για $k=2$: $\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu}\le\dfrac{\nu}{\nu^2+2}\le\dfrac{\nu}{\nu^2+1}$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

Για $k=\nu$: $\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu}\le\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu}\le\dfrac{\nu}{\nu^2+1}$

$\xrightarrow{+}\nu\cdot\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu}\le\alpha_\nu\le\nu\cdot\dfrac{\nu}{\nu^2+1}\Rightarrow$

$\dfrac{\nu^2}{\nu^2+\nu}\le\alpha_\nu\le\dfrac{\nu^2}{\nu^2+1}$ Αλλά $\lim\dfrac{\nu^2}{\nu^2+\nu}=\lim\dfrac{\nu^2}{\nu^2+1}=1$ $\xrightarrow{\text{Θ.Ι.Α.}}\lim\alpha_\nu=1$.

9) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^2(1+2+\dots+\nu)}{1^3+2^3+\dots+\nu^3}=\dfrac{\cancel{\nu^2}\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}}{\frac{\cancel{\nu^2}(\nu+1)^2}{4}}=\dfrac{2\nu}{\nu+1}\Rightarrow\lim\alpha_\nu=2$.

Θ81. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\eta\mu\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\frac{2x^2}{x^4+1}\cdot\frac{\eta\mu\left(\frac{2x^2}{x^4+1}\right)}{\frac{2x^2}{x^4+1}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x^4+1}\cdot\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\eta\mu y}{y}=2\cdot 1=2$.

όπου $y=\frac{2x^2}{x^4+1}\to 0^+$, όταν $x\to+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x-1)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\lim\limits_{x\to 1^-}\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)'}{\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]'}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot 1=-\dfrac{2}{\pi}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3^x-2}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\eta\mu x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3^x-2}{-\eta\mu(\eta\mu x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5^x+3^x-2)'}{[-\eta\mu(\eta\mu x)]'}=\lim\dfrac{5^x\ln 5+3^x\ln 3}{[-\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)]\cdot\sigma\upsilon\nu x}=$

$=\dfrac{\ln 5+\ln 3}{-1}=-\ln 15$.

4) $A=[-2,-1]\cup[0,+\infty)$. Παίρνω $\Delta=(1,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο εξετάζω το lim.

$x\in\Delta\Leftrightarrow x>1\Leftrightarrow x-1>0$. Άρα: $f(x)=\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}-\sqrt[3]{(x-1)^3}=$

$\dfrac{x(x+1)(x+2)-(x-1)^3}{\left(\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}\right)^2+\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}\cdot(x-1)+(x-1)^2}=\dfrac{6x^2-x+1}{x^2\cdot\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})}\right)^2+x^2\cdot(1-\frac{1}{x})\cdot\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})}+x^2\cdot(1-\frac{1}{x})^2}$

$=(\text{Δια } x^2)=\dfrac{6-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})}\right)^2+(1-\frac{1}{x})\cdot\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})}+(1-\frac{1}{x})^2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{6-0+0}{1+1+1}=2$.

▼ Θ81. 5) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x^2-x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x+1}}{(x-2)\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$

Αλλά: $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$ και $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$. Άρα: $\nexists\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 2}f(x)$

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}=(1^{+\infty})=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}e^{\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{x-\pi/4}}=$

$=e^{\lim_{x\to\pi/4^+}\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{x-\pi/4}}\leftarrow\left(\frac{0}{0}\right)=e^{\lim_{x\to\pi/4^+}\frac{\frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi x}}{1}}=e^2.$

7) $\lim_{x\to 0^+}x^{\eta\mu x}=(0^0)=\lim_{x\to 0^+}e^{\eta\mu x\cdot\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x\cdot\ln x)}\leftarrow(0\cdot(-\infty))=$

$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\eta\mu x}}}\leftarrow\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\sigma\upsilon\nu x/\eta\mu^2 x}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)}=e^{1\cdot 0}=e^0=1.$

▼ Θ82. Είναι: $(x+\zeta_0)^3=x^3+3x^2\zeta_0+3\zeta_0^2\cdot x+\zeta_0^3=x^3+3x^2+3x+1$, διότι $\zeta_0=1$.

$(x+\zeta_1)^3=x^3+3x^2\zeta_1+3x\cdot\zeta_1^2+\zeta_1^3=x^3+3\zeta_1x^2+3\zeta_2x+1$, διότι $\zeta_1^2=\zeta_2$ και $\zeta_1^3=1$.

$(x+\zeta_2)^3=x^3+3\zeta_2x^2+3\zeta_2^2x+\zeta_2^3=x^3+3\zeta_2x^2+3\zeta_1x+1$, διότι $\zeta_2^2=\zeta_1$ και $\zeta_2^3=1$.

Άρα: $f(x)=3x^3+3(1+\zeta_1+\zeta_2)x^2+3(1+\zeta_1+\zeta_2)x+3=3x^3+3$, διότι $1+\zeta_1+\zeta_2=0$.

Είναι: $f'(x)=9x^2$. Άρα: $3\cdot f(x)-x\cdot f'(x)=3\cdot(3x^3+3)-x\cdot 9x^2=9$.

▼ Θ83. $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu(\nu+1)}$.

1) Είναι $\alpha_\nu>0,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*$ και $\Lambda=\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}}{\frac{1}{\nu(\nu+1)}}=\frac{\nu}{\nu+2}<1$ $\Rightarrow\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(\alpha_\nu)\downarrow$

2) Είναι: $\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}=\frac{\nu+1-\nu}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\alpha_\nu\Rightarrow\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$.

3) $\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$

Για $\nu=1$: $\alpha_1=1-\cancel{\frac{1}{2}}$

" $\nu=2$: $\alpha_2=\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}$

" $\nu=3$: $\alpha_3=\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}$

....

" $\nu=\nu$: $\alpha_\nu=\cancel{\frac{1}{\nu}}-\frac{1}{\nu+1}$

$\xRightarrow{+}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa=1-\frac{1}{\nu+1}\Longrightarrow\beta_\nu=\frac{\nu}{\nu+1}$.

Άρα: $\lim\beta_\nu=1$.

▼ Θ84. 1) Είναι $A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-I=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}$.

Άρα: $A^3-A=A(A^2-I)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&-2&-1\\2&3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow A^3-A=A^2-I$.

2) Για $\nu=3$: $A^3-A=A^2-I$, δείχθηκε στο 1).

Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$: $A^\kappa-A^{\kappa-2}=A^2-I$. (Ι).

Θα δείξω για $\nu=\kappa+1$: $A^{\kappa+1}-A^{\kappa-1}=A^2-I$. Είναι: $A^{\kappa+1}-A^{\kappa-1}=A(A^\kappa-A^{\kappa-2})\overset{(I)}{=}A\cdot(A^2-I)=A^3-A\overset{1)}{=}A^2-I$.

3) Από 2) $\Leftrightarrow A^\nu=A^{\nu-2}+A^2-I$ η οποία για $\nu=200$ γίνεται διαδοχικά

$A^{200}=A^{198}+A^2-I=A^{196}+A^2-I+A^2-I=A^{196}+2(A^2-I)=A^{194}+3\cdot(A^2-I)=\cdots\cdots=$

$=A^2+99(A^2-I)\overset{2)}{=}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\-99&0&0\\297&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-100&1&0\\300&0&1\end{bmatrix}.$

▼Θ85. $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \alpha_\nu = \dfrac{\alpha_{\nu-1}+5}{2} \end{cases}$, $(\beta_\nu): \beta_\nu = \alpha_\nu - 5.$

1) $\beta_\nu = \dfrac{\alpha_{\nu-1}+5}{2} - 5 = \dfrac{\alpha_{\nu-1}-5}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\beta_{\nu-1} \Rightarrow \beta_\nu = \dfrac{1}{2}\beta_{\nu-1}$. (I).

2) $\beta_0 = \alpha_0 - 5 \Rightarrow \beta_0 = -3.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{η (I) για } \nu=1: \cancel{\beta_1} = \frac{1}{2}\cdot(-3) \\ \text{,, ,, ,, } \nu=2: \cancel{\beta_2} = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\beta_1} \\ \text{,, ,, ,, } \nu=3: \beta_3 = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\beta_2} \\ \text{-------------------------} \\ \text{,, ,, ,, } \nu=\nu: \beta_\nu = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\beta_{\nu-1}} \end{array}\right) \Longrightarrow \beta_\nu = -3\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$$

3) $\lim\beta_\nu = -3\cdot\lim\left(\frac{1}{2}\right)^\nu = -3\cdot 0 = 0$

$\lim\alpha_\nu \overset{(I)}{=} \lim(\beta_\nu+5) = \lim\beta_\nu + 5 = 0+5 = 5.$

▼Θ86. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f 1-1 και επι (I) , $f(-1)=2$ (II).

$x*y = f^{-1}(f(x)+f(y)-2).$ (III).

$\forall x,y\in\mathbb{R}: x*y = f^{-1}(f(x)+f(y)-2) = f^{-1}(f(y)+f(x)-2) = y*x \Rightarrow$ Η $*$ αντιμεταθετική.

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}: (x*y)*z = [f^{-1}(f(x)+f(y)-2)]*z = f^{-1}[f[f^{-1}(f(x)+f(y)-2)]+f(z)-2] =$

$= f^{-1}(f(x)+f(y)+f(z)-4)$, διότι $f\circ f^{-1}$ ταυτοτική.

$x*(y*z) = x*[f^{-1}(f(y)+f(z)-2)] = f^{-1}[f(x)+f[f^{-1}(f(y)+f(z)-2)]-2] =$

$= f^{-1}[f(x)+f(y)+f(z)-4]$. Άρα $(x*y)*z = x*(y*z) \Rightarrow$ Προσεταιρ.

Έστω $e\in\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R}$, $x*e = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)+f(e)-2) = x \Leftrightarrow$ (λόγω (I))

$f[f^{-1}(f(x)+f(e)-2)] = f(x) \Leftrightarrow \cancel{f(x)}+f(e)-2 = \cancel{f(x)} \Leftrightarrow f(e)=2 \overset{(II)}{\Leftrightarrow} f(e)=f(-1) \overset{(I)}{\Leftrightarrow}$

$e=-1\in\mathbb{R}$. Ισχύει και $e*x = x$ (λόγω αντιμετ.). Άρα, ουδέτερο το $e=-1$.

Έστω $x\in\mathbb{R}$ και x' το συμμετρικό του. Δηλαδή: $x*x' = -1 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(f(x)+f(x')-2) = -1 \Leftrightarrow f[f^{-1}(f(x)+f(x')-2)] = f(-1) \Leftrightarrow$

$f(x)+f(x')-2 = 2 \Leftrightarrow f(x') = 4-f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x')) = f^{-1}(4-f(x)) \Leftrightarrow$

$x' = f^{-1}(4-f(x))\in\mathbb{R}$, διότι $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Άρα, $\forall x\in\mathbb{R}$ έχει συμμετρικό το $x' = f^{-1}(4-f(x))$. Άρα το $(\mathbb{R},*)$ είναι αβελιανή ομάδα.

▼Θ87. (α_ν) αριθμ. πρόοδος $\Rightarrow \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ (1)

1) $f(\alpha_{\nu+1}) \overset{(1)}{=} f(\alpha_\nu+\omega) \overset{(υπ.)}{=} \frac{1}{4}e^{-2\alpha_\nu-2\omega} = e^{-2\omega}\cdot\frac{1}{4}e^{-2\alpha_\nu} = e^{-2\omega}\cdot f(\alpha_\nu) \Rightarrow$

Η $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_\nu), \ldots$ είναι γεωμ. πρόοδος με λόγο $\lambda = e^{-2\omega}$.

- Αν $\omega<0 \Rightarrow \lambda>1 \Rightarrow \lim f(\alpha_\nu) = +\infty$ (αφού $f(\alpha_1)>0$)
- Αν $\omega>0 \Rightarrow 0<\lambda<1 \Rightarrow \lim f(\alpha_\nu) = 0.$

2) $\Sigma_\nu = \dfrac{f(\alpha_1)\cdot(e^{-2\nu\omega}-1)}{e^{-2\omega}-1} \overset{(υπ)}{=} \dfrac{e^{-2\alpha_1}}{4(e^{-2\omega}-1)}\cdot(e^{-2\nu\omega}-1)$

Αν $\omega>0 \Rightarrow \lim e^{-2\nu\omega} = 0 \Rightarrow \lim\Sigma_\nu = \dfrac{e^{-2\alpha_1}}{4(1-e^{-2\omega})}$

Αν $\omega<0 \Rightarrow \lim e^{-2\nu\omega} = +\infty \Rightarrow \lim\Sigma_\nu = +\infty$

3) $\gamma_\nu = \int_0^\nu \frac{1}{4}e^{-2x}dx = -\frac{1}{8}\int_0^\nu (e^{-2x})'dx = -\frac{1}{8}[e^{-2x}]_0^\nu = \frac{1}{8}(1-e^{-2\nu}).$

Είναι $\lim e^{-2\nu} = 0 \Rightarrow \lim\gamma_\nu = \frac{1}{8}.$

▼Θ88. 1) i) Έστω $f_1, f_2 \in A$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Τότε:

$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) = (\lambda_1 f_1)(0) + (\lambda_2 f_2)(0) = \lambda_1 \cdot f_1(0) + \lambda_2 \cdot f_2(0) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \in A \Rightarrow$ το A είναι υπόχωρος του $\mathbf{F}_{\mathbb{R}}$.

ii) Έστω $f_1, f_2 \in B$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\begin{cases} f_1(3) = f_1(1) \\ f_2(3) = f_2(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 f_1(3) = \lambda_1 f_1(1) \\ \lambda_2 f_2(3) = \lambda_2 f_2(1) \end{cases} \Rightarrow (\lambda_1 f_1)(3) + (\lambda_2 f_2)(3) = (\lambda_1 f_1)(1) + (\lambda_2 f_2)(1)$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(3) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(1)$$

$\Rightarrow (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \in B \Rightarrow$ το B είναι υπόχωρος του $\mathbf{F}_{\mathbb{R}}$.

iii) Όμοια, με το ii.

2) Αρκεί να $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, όχι όλοι μηδέν : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = w$ (1)

όπου w: $w(x) = 0$.

$(1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 (x^2 - x) + \lambda_3 (2x^3 - 3x^2 + 3x) = 0 \Leftrightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1 + 2\lambda_3) x^2 + (\lambda_2 - 3\lambda_3) x + (-\lambda_2 + 3\lambda_3) = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Για } x = 1 & \rightarrow & \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \quad " \quad x = -1 & \rightarrow & \lambda_1 - 2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ \quad " \quad x = 2 & \rightarrow & 4\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \text{Είναι } D = 0 \Leftrightarrow \text{Το ομογενές } (\Sigma) \text{ έχει και μη μηδενικές λύσεις.}$$

Άρα f_1, f_2, f_3 γραμμ. εξαρτημένα.

▼Θ89. 1) i) Αν $|x| > 2 \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{x^3 - x\left(\frac{4}{x^2}\right)^\nu}{x^2 + (x^2+1)\left(\frac{4}{x^2}\right)^\nu} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \dfrac{x^3 - x \cdot 0}{x^2 + (x^2+1) \cdot 0} = x$.

ii) Αν $|x| < 2 \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{x^3 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^\nu - x}{x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^\nu + (x^2+1)} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \dfrac{x^3 \cdot 0 - x}{x^2 \cdot 0 + (x^2+1)} = -\dfrac{x}{x^2+1}$

iii) Αν $x = 2 \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{4^\nu \cdot 2^3 - 2 \cdot 4^\nu}{4^\nu \cdot 2^2 + 5 \cdot 4^\nu} = \dfrac{8-2}{4+5} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

iii) Αν $x = -2 \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{4^\nu \cdot (-2)^3 - (-2) \cdot 4^\nu}{4^\nu \cdot (-2)^2 + 5 \cdot 4^\nu} = \dfrac{-8+2}{4+5} = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$.

2) Είναι : $f(x) = \lim \alpha_\nu = \begin{cases} x & , \text{ αν } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty). \\ -2/3 & , \text{ αν } x = -2. \\ 2/3 & , \text{ αν } x = 2. \\ -\dfrac{x}{x^2+1} & , \text{ αν } x \in (-2, 2). \end{cases}$

Στο $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, είναι $f'(x) = 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow$.

Στο -2, η f είναι ασυνεχής, διότι $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -2 \neq -\frac{2}{3} = f(-2)$.

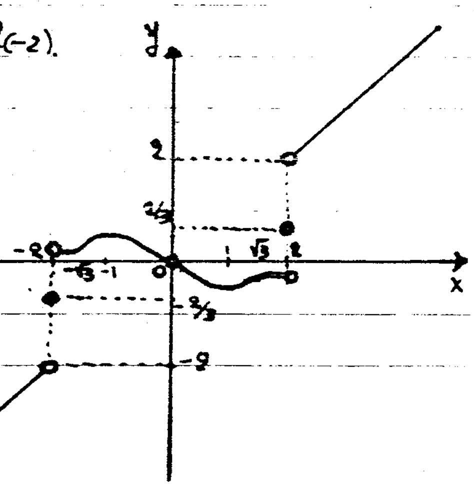
Στο 2, " " " " , η $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2 \neq \frac{2}{3} = f(2)$.

Στο $(-2, 2)$ είναι:

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$ και $f''(x) = -\dfrac{2x(x^2-3)}{x^2+1}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
f'		$+$	∦	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	∦	$+$	
f''			∦	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	∦		
f	$-\infty$	↗	-2, $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$	↗	$\sqrt{3}/4$	↗	$1/2$	↘	0	↘	$-1/2$	↗	$-\sqrt{3}/4$	↗	$-\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$, 2	↗	$+\infty$



▼Θ90. 1) Αρκεί να δείξω ότι $\forall A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}\in \Pi_2$ υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$:

$$A=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3+\lambda_4A_4 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda_4 & \lambda_4 \\ \lambda_4 & \lambda_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=x \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=y \\ \lambda_3+\lambda_4=z \\ \lambda_4=\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=x-y \\ \lambda_2=y-z \\ \lambda_3=z-\omega \\ \lambda_4=\omega \end{cases} \quad (\text{I})$$

Άρα ο δ.χ. Π_2 παράγεται από τα A_1,A_2,A_3,A_4.

2) Αρκεί επιπλέον (εκτός από το 1)) να δείξω ότι τα A_1,A_2,A_3,A_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του Π_2.

Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$: $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3+\lambda_4A_4=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0 \\ \lambda_3+\lambda_4=0 \\ \lambda_4=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0 \Rightarrow A_1,A_2,A_3,A_4$ γραμ. ανεξάρτητα

και παράγουν τον Π_2 (1), άρα το $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}=M$ είναι βάση του Π_2.

3) Από (I) για $x=-3, y=1, z=4, \omega=-2$ βρίσκω:

$\lambda_1=-4, \lambda_2=-3, \lambda_3=6, \lambda_4=-2$ και άρα: $B=-4A_1-3A_2+6A_3-2A_4$.

▼Θ91. 1) Θεωρώ τη συνάρτηση $f: f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$, όπου $x\geq 0$.

Είναι $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{x+1}\geq 0, \forall x\geq 0$.

Επειδή $f'(0)=0$ και $f'(x)>0, \forall x>0 \Rightarrow$ Η f είναι $\uparrow$ στο $[0,+\infty)$

Άρα: για κάθε $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>0 \Rightarrow$

$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$.

2) Επειδή $\ln(1+x)\leq x$ (§3.26B) $\xRightarrow{1)} x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)\leq x$. (I)

Η (I) για $x=\frac{1}{\nu^2} \Rightarrow \frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{\nu^4}<\ln\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)\leq\frac{1}{\nu^2}$

" " " $x=\frac{2}{\nu^2} \Rightarrow \frac{2}{\nu^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{\nu^4}<\ln\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)\leq\frac{2}{\nu^2}$

" " " $x=\frac{3}{\nu^2} \Rightarrow \frac{3}{\nu^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{\nu^4}<\ln\left(1+\frac{3}{\nu^2}\right)\leq\frac{3}{\nu^2}$

- -

" " " $x=\frac{\nu}{\nu^2} \Rightarrow \frac{\nu}{\nu^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu^2}{\nu^4}<\ln\left(1+\frac{\nu}{\nu^2}\right)\leq\frac{\nu}{\nu^2}$ $\xRightarrow{+}$

$$\frac{1+2+3+\cdots+\nu}{\nu^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2}{\nu^4}<\ln\left[\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)\left(1+\frac{2}{\nu^2}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu}{\nu^2}\right)\right]\leq\frac{1+2+3+\cdots+\nu}{\nu^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu+1}{2\nu}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^3}<\ln\alpha_\nu\leq\frac{\nu+1}{2\nu} \Rightarrow$$

$$e^{\beta_\nu}<\alpha_\nu\leq e^{\gamma_\nu}$$

όπου $\beta_\nu=\frac{\nu+1}{2\nu}-\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{12\nu^3}\longrightarrow\frac{1}{2}\Rightarrow e^{\beta_\nu}\to e^{1/2}$

και $\gamma_\nu=\frac{\nu+1}{2\nu}\longrightarrow\frac{1}{2}\Rightarrow e^{\gamma_\nu}\longrightarrow e^{1/2}$

$\xRightarrow{\text{Θ.Ι.Α.}} \lim\alpha_\nu=e^{1/2}=\sqrt{e}$.

Χρησιμοποίησα ότι:

$$S_1=1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

και $$S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

Θ92. Αρκεί να δείξω ότι το A είναι υποομάδα της αντιμεταθετικής πολ/κής ομάδας $\mathbb{C}^*$. i) Αν $z_1,z_2\in A \Rightarrow z_1=\frac{\alpha_1}{\gamma_1}+\frac{\beta_1}{\gamma_1}i$; $z_2=\frac{\alpha_2}{\gamma_2}+\frac{\beta_2}{\gamma_2}i$ με $\begin{cases}\alpha_1^2+\beta_1^2=\gamma_1^2\\ \alpha_2^2+\beta_2^2=\gamma_2^2\end{cases}$ (1)

$$\Rightarrow z_1z_2=\frac{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2}+\frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{\gamma_1\gamma_2}i \quad \text{και}$$

$$(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2=\alpha_1^2\alpha_2^2-\cancel{2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}+\beta_1^2\beta_2^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\cancel{2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}+\alpha_2^2\beta_1^2=$$

$$=\alpha_1^2(\alpha_2^2+\beta_2^2)+\beta_1^2(\alpha_2^2+\beta_2^2)=(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)\overset{(1)}{=}\gamma_2^2\gamma_1^2=(\gamma_1\gamma_2)^2\Rightarrow z_1z_2\in A \quad (\mathrm{I})$$

ii) Αν $z=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}i\in A$: $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ (2) τότε:

$$\frac{1}{z}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta i}=\frac{\gamma(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}\overset{(2)}{=}\frac{\cancel{\gamma}(\alpha-\beta i)}{\gamma^{\cancel{2}}}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{-\beta}{\gamma}i \quad \text{και} \quad \alpha^2+(-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2\overset{(2)}{=}\gamma^2.$$

$\rightarrow \frac{1}{z}\in A$ (II). (I),(II) $\Rightarrow$ το A είναι αντιμεταθετική πολλ/κή ομάδα.

Θ93. $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$. Είναι $A=\mathbb{R}_+^*$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη.

1) $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	0		1	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$\varepsilon=2$	$\nearrow$

Άρα, η f έχει ελάχιστο (ολικό) το $(1,2)$.

2) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ είναι $f(x)\geq 2>0 \Leftrightarrow f(x)>0$. (αφού το 2 είναι ολικό min).

3) $\forall x>1 \Rightarrow \ln x>\ln 1$ ($\ln \uparrow$) $\Rightarrow \ln x>0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x}>0$

Δείξαμε στο 2) ότι $f(x)>0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-\ln x>0 \Rightarrow \ln x<2\sqrt{x}\Rightarrow \frac{\ln x}{x}<\frac{2}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$

$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{2}{\sqrt{x}}. \quad (\mathrm{I})$$

4) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0 \xrightarrow[\text{Θ.Ι.Σ}]{(\mathrm{I})} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Θ94. 1) Έστω $z=x+yi$: $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε:

$$w_1=\frac{x+(y-4)i}{(x+2)+yi}=\frac{[x+(y-4)i][(x+2)-yi]}{(x+2)^2+y^2}=\frac{x(x+2)+y(y-4)}{(x+2)^2+y^2}+\frac{(x+2)(y-4)-xy}{(x+2)^2+y^2}i=$$

$$=\frac{x^2+y^2+2x-4y}{(x+2)^2+y^2}+\frac{-4x+2y-8}{(x+2)^2+y^2}i \quad \text{και όμοια,}$$

$$w_2=\frac{(x+2)+(y-3)i}{x+(y+1)i}=\frac{x^2+y^2+2x-2y-3}{x^2+(y+1)^2}+\frac{-4x-2y-2}{x^2+(y+1)^2}i$$

α) $w_1\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -4x+2y-8=0 \Leftrightarrow 2x-y+4=0$. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε): $2x-y+4=0$, χωρίς το σημείο της $(-2,0)$ αφού $z\neq-2$.

β) $w_2\in I \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-2y-3=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=3+1+1 \Leftrightarrow$ $(x+1)^2+(y-1)^2=5$. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος (c): $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$, εκτός από το σημείο του $(0,-1)$, αφού $z\neq -i$.

2) $(\varepsilon)\cap(c)$: $\begin{cases}2x-y+4=0\\(x+1)^2+(y-1)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \dots\ A\left(\frac{-7+2\sqrt{6}}{5},\frac{6+4\sqrt{6}}{5}\right), B\left(\frac{-7-2\sqrt{6}}{5},\frac{6-4\sqrt{6}}{5}\right)$

Άρα $d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\text{----}=\frac{4\sqrt{30}}{5}$.

$$f(x)=\frac{\ln(x-\alpha)}{x-\alpha} \quad : \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Θ95. 1) $A=(\alpha,+\infty)$

2) $f(2)=0 \Leftrightarrow \ln(2-\alpha)=0 \Leftrightarrow 2-\alpha=e^0 \Leftrightarrow 2-\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=1$.

3) $f'(x)=\frac{1-\ln(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}$. Είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x-\alpha)=1 \Leftrightarrow x-\alpha=e \Leftrightarrow x=\alpha+e$

x	α		$\alpha+e$		$+\infty$
f'	∥	+	0	−	
f	∥	↗	$\mu=1/e$	↘	

Αν $x<\alpha+e \Leftrightarrow x-\alpha<e \Leftrightarrow \ln(x-\alpha)<1 \Leftrightarrow 1-\ln(x-\alpha)>0 \Leftrightarrow f'(x)>0$.

Ομοια, αν $x>\alpha+e \Leftrightarrow f'(x)<0$. Αρα η f έχει μέγιστο το $(\alpha+e, \frac{1}{e})$.

4) Αν $\alpha=1$, τότε $f(x)=\frac{\ln(x-1)}{x-1}$ με $A=(1,+\infty)$.

Είναι: $f'(x)=\frac{1-\ln(x-1)}{(x-1)^2}$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1+e$

Η f είναι ↑ στο $(1,1+e)$ και ↓ ,, $(1+e,+\infty)$ και έχει μέγιστο το $(1+e, \frac{1}{e})$.

x	1		$1+e$		$+\infty$
f'	∥	+	0	−	
f	∥	↗	$\mu=\frac{1}{e}$	↘	

Είναι $f''(x)=\frac{2\ln(x-1)-3}{(x-1)^3}$ και $f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x-1=e^{3/2} \Leftrightarrow x=1+e\sqrt{e}$.

x	1		$1+e\sqrt{e}$		$+\infty$
f''	∥	−	0	+	
f	∥	∩	$K=\frac{2}{3e\sqrt{e}}$	∪	

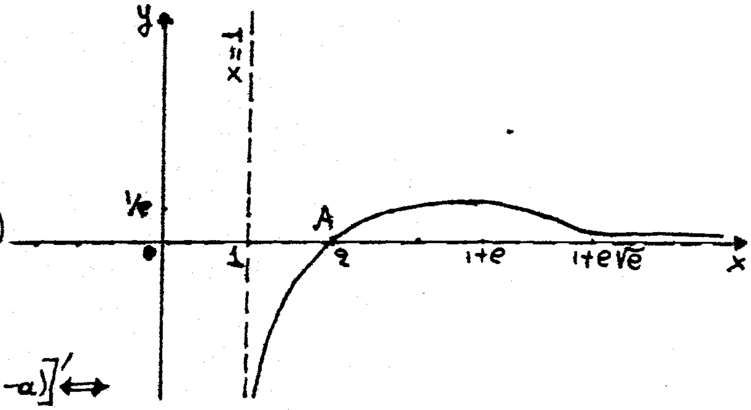
Η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(1,1+e\sqrt{e})$ και πάνω στο $(1+e\sqrt{e},+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο $1+e\sqrt{e}$ το $K=f(1+e\sqrt{e})=\frac{2}{3e\sqrt{e}}$

Είναι $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty \Rightarrow$ Η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f,

και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ (Ασκ. 46· Β.-3ο ΚεΦ.) $\Rightarrow$ Ο άξονας $x'x$ $(y=0)$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη

Είναι: $C\cap x'x=A(2,0)$, διότι $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$.

x	1		$1+e$		$1+e\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	∥	+	0	−		−	
f''	∥	−		−	0	+	
f	∥ $-\infty$	↗	$\mu=1/e$	↘	$K=2/3e\sqrt{e}$	↘	0



Από τον πίνακα (ή από το σχήμα) βρίσκω ότι: $f(A)=(-\infty, \frac{1}{e}]$.

5) $g'(x)=2\ln(x-\alpha)\cdot[\ln(x-\alpha)]' \Leftrightarrow$

$g'(x)=\frac{2\ln(x-\alpha)}{x-\alpha} \Leftrightarrow g'(x)=2f(x)$.

6) $E=\int_{\alpha+1}^{\alpha+4} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{\alpha+1}^{\alpha+4} 2f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{\alpha+1}^{\alpha+4} g'(x)dx=\frac{1}{2}\cdot[g(x)]_{\alpha+1}^{\alpha+4}=$

$=\frac{1}{2}[(\ln 4)^2-(\ln 1)^2]=\frac{1}{2}(\ln 4)^2=\frac{1}{2}\cdot(2\ln 2)^2=2(\ln 2)^2$.

7) $\int_{\alpha+1}^{\alpha+\mu} f(x)dx=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln\mu)^2=2 \Leftrightarrow (\ln\mu)^2=4 \Leftrightarrow$

$\ln\mu=2 \Leftrightarrow \mu=e^2$

$\ln\mu=-2 \Leftrightarrow \mu=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ απορρίπτεται, γιατί $\mu>1$ (υπ.)

Αρα: $\mu=e^2$.

▼Θ96. $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} = \overline{\left[\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}\right]} \Leftrightarrow \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{(\bar z_1+\bar z_2)^2}{\bar z_1\cdot \bar z_2} \Leftrightarrow$

$\bar z_1\cdot\bar z_2\,(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2) = z_1z_2\,(\bar z_1^2+2\bar z_1\bar z_2+\bar z_2^2) \Leftrightarrow$

$z_1^2\bar z_1\bar z_2+\cancel{2z_1z_2\bar z_1\bar z_2}+z_2^2\bar z_1\bar z_2 - z_1z_2\bar z_1^2-\cancel{2z_1z_2\bar z_1\bar z_2}-z_1z_2\bar z_2^2=0 \Leftrightarrow$

$z_1\bar z_1\,(z_1\bar z_2-\bar z_1 z_2)-z_2\bar z_2\,(z_1\bar z_2-\bar z_1z_2)=0 \Leftrightarrow (z_1\bar z_2-\bar z_1 z_2)\cdot(z_1\bar z_1-z_2\bar z_2)=0 \Leftrightarrow$

$(z_1\bar z_2-\bar z_1z_2)\cdot(|z_1|^2-|z_2|^2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1|=|z_2| \\ \vee \\ z_1\bar z_2=\bar z_1 z_2=\overline{z_1\bar z_2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} OA=OB & (1)\\ \vee & \\ z_1\bar z_2\in\mathbb{R} & (2)\end{matrix}$

Αν $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, τότε: $z_1\bar z_2=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)i$ οπότε $(2)\Leftrightarrow \alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2=0 \Leftrightarrow D(\vec{OA},\vec{OB})=0 \Leftrightarrow \vec{OA}//\vec{OB} \Leftrightarrow O,A,B$ συνευθειακά.

▼Θ97. $f(x)=\frac{x^2+\mu x+1}{x^2-2x-3}$, $\mu\in\mathbb{R}$. 1) $A=\mathbb{R}-\{-1,3\}$.

2) $f'(x)=-\frac{(\mu+2)x^2+8x+3\mu-2}{(x^2-2x-3)^2}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow (\mu+2)x^2+8x+3\mu-2=0$ (I)

• Για να έχει η f δύο ακρότατα πρέπει η (I) να είναι β' βάθμια με $\Delta>0$

Δηλαδή: $\begin{cases}\mu\neq-2\\ 64-4(\mu+2)(3\mu-2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \mu\in(-\frac{10}{3},-2)\cup(-2,2)$.

Αν ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της f' και:

α) $\mu\in(-\frac{10}{3},-2)\Leftrightarrow \mu<-2 \Leftrightarrow \mu+2<0 \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \alpha<0$,

x		ρ_1		ρ_2	
f'	+	0	−	0	+
f	↗	μ	↘	ε	↗

δηλαδή η f έχει μέγιστο στο ρ_1 το $\mu=f(\rho_1)$ και ελάχιστο στο ρ_2 το $\varepsilon=f(\rho_2)$.

β) $\mu\in(-2,2)\Leftrightarrow \mu>-2 \Leftrightarrow \mu+2>0 \Leftrightarrow \alpha>0$,

x		ρ_1		ρ_2	
f'	−	0	+	0	−
f	↘	ε	↗	μ	↘

δηλαδή η f έχει ελάχιστο στο ρ_1 το $\varepsilon=f(\rho_1)$ και μέγιστο στο ρ_2 το $\mu=f(\rho_2)$.

• Για να έχει η f ένα μόνο ακρότατο πρέπει η (I) να είναι α' βάθμια, δηλαδή $\mu=-2$, οπότε $f'(x)=-\frac{8(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

x		1	
f'	+	0	−
f	↗	$\mu=-1/2$	↘

Δηλαδή η f έχει μέγιστο στο 1 το $\mu=f(1)=-1/2$.

• Για να μην έχει ακρότατα η f πρέπει η (I) να μην έχει ρίζες ή να έχει διπλή ρίζα, δηλαδή $\Delta\leq 0 \Leftrightarrow \mu\in(-\infty,-\frac{10}{3}]\cup[2,+\infty)$.

3) Για $\mu=-2$ είναι: $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2-2x-3}$, $f'(x)=-\frac{8(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$, $f''(x)=\frac{8(3x^2-6x+7)}{(x^2-2x-3)^3}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. $f''(x)\neq0$, $\forall x\in A$

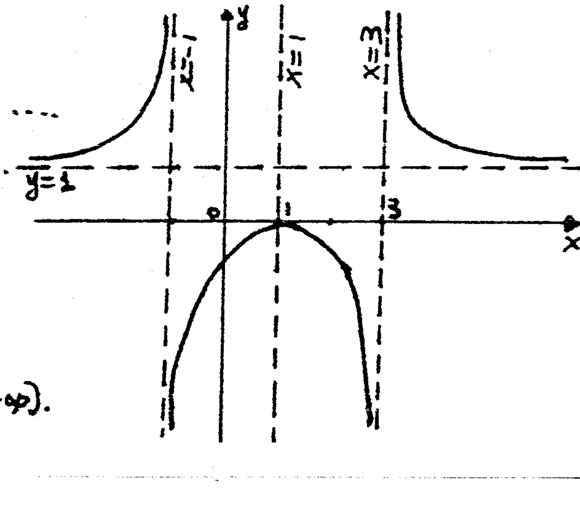
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Rightarrow$ Η $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty \Rightarrow$ Η $x=-1$ κατακόρυφη ....

$\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty \Rightarrow$ Η $x=3$ „

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'		+	‖	+	0	−	‖	−	
f''		+	‖	−		−	‖	+	
f	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\mu=0$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

• $f(A)=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$.



▼Θ97. 4) Αφού $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x \in A$, $1-x \in A$ και $f(1+x)=f(1-x)$ που ισχύει διότι $f(1+x)=f(1-x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$. Άρα η $x=1$ είναι άξονας συμμετρίας της C_f. (Βλέπε και σχήμα...)

5) Για $\mu=-2$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}=\dfrac{x^2-2x-3+4}{x^2-2x-3}=1+\dfrac{4}{(x+1)(x-3)}=$

$=1+\dfrac{(x+1)-(x-3)}{(x+1)(x-3)}=1+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow f(x)=1-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}$.

6) $E=\int_4^6 f(x)dx=\int_4^6\left(1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}\right)dx=$

$=\int_4^6 dx-\int_4^6\frac{dx}{x+1}+\int_4^6\frac{dx}{x-3}=\left[x+\ln(x-3)-\ln(x+1)\right]_4^6=$ Φαουλ.

$=2+\ln 3+\ln 5-\ln 7=2+\ln\frac{15}{7}$.

▼Θ98. $x*y=x+y-xy$

1) $(1-i)*(1+i)=(1-i)+(1+i)-(1-i)(1+i)=1-i+1+i-1-1=0$.

2) $(z-1)*(z+1)=2i\sqrt{3} \Leftrightarrow (z-1)+(z+1)-(z-1)(z+1)=2i\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$z-\cancel{1}+z+\cancel{1}-z^2+1-2i\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow z^2-2z-(1-2i\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=1+\sqrt{3}-i \\ z_2=1-\sqrt{3}+i \end{cases}$

3) α) $\forall x,y \in \mathbb{C}$: $x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x \Leftrightarrow$ Η $*$ αντιμεταθετική.

β) $\forall x,y,w \in \mathbb{C}$: $(x*y)*w=(x+y-xy)*w=x+y-xy+w-(x+y-xy)w=$

$=x+y+w-xy-xw-yw+xyw$.

και $x*(y*w)=x*(y+w-yw)=\dots=x+y+w-xy-xw-yw+xyw$ $\Rightarrow$ Η $*$ Προσεταιρ.

4) Έστω $e\in\mathbb{C}$: $\forall x\in\mathbb{C}$, $x*e=x$ (=$e*x$ λόγω αντιμεταθετικής)

$\Leftrightarrow$ ›› , $\cancel{x}+e-xe=\cancel{x} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{C}$, $ex-e=0 \Leftrightarrow e=0\in\mathbb{C}$

Άρα το $\mathbb{C}$ έχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την $*$ το 0.

5) Αν $x\in\mathbb{C}$ και $x'\in\mathbb{C}$ το συμμετρικό του ως προς την $*$, τότε:

$x*x'=e$ $(=x'*x) \Leftrightarrow x+x'-xx'=0 \Leftrightarrow (x-1)x'=x$, Αν $x\neq 1$ $\Rightarrow x'=\dfrac{x}{x-1}\in\mathbb{C}$

Άρα, $\forall x\in\mathbb{C}-\{1\}$ έχει συμμετρικό ως προς την $*$ το $x'=\dfrac{x}{x-1}$.

▼Θ99. 1) $B\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ \alpha-2 & 2\alpha+1 & 5\alpha+4\\ \beta-2\gamma+2 & 2\beta+\gamma+1 & 5\beta+4\gamma+1\end{bmatrix}$

Για να είναι ο $B\cdot A$ κάτω κλιμακωτός πρέπει: $\begin{cases}\alpha-2=0\\ \beta-2\gamma+2=0\\ 2\beta+\gamma+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=-\frac{4}{5}\\ \gamma=\frac{3}{5}\end{array}$.

2) $A\cdot X=\Gamma$. Επειδή ο $A\in\Pi_{3\times3}$ και ο $\Gamma\in\Pi_{3\times1}$ πρέπει ο $X\in\Pi_{3\times1}$. Έστω, λοιπόν $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$, οπότε:

$A\cdot X=\Gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x+2y+5z\\-2x+y+4z\\2x+y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y+5z=1\\-2x+y+4z=-1\\2x+y+z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}x=1\\ y=-\frac{5}{3}\\ z=\frac{2}{3}\end{array}$.

Θ100. 1) Η (1) έχει δύο λύσεις $\Leftrightarrow \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. (I)

Στο (2) είναι: $D = \begin{vmatrix} \beta & 2\alpha \\ 2\gamma & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta \neq 0$ (λόγω (I)).

Άρα το (2) έχει Μ.Μ.Λ.

2) Αν το (2) έχει μια λύση, τότε $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \Delta \neq 0$.

- Αν $D > 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ η (1) έχει δύο λύσεις
- Αν $D < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ ›› ›› είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άρα, δεν ισχύει το αντίστροφο της 1).

3) Αν η (1) έχει μια λύση $\Rightarrow \Delta = 0$ (αφού είναι β' βάθμια, $\alpha \neq 0$)

$\Rightarrow D = 0$. Άρα, το ομογενές σύστημα (2) θα είναι αόριστο.

Θ101. f συνεχής στο $1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ (I)

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x^2+\beta) = 3+\beta$

και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2\alpha x+1) = 2\alpha+1$

$f(1) = 2\alpha+1$

$\xrightarrow{(I)} 3+\beta = 2\alpha+1 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = 2$. (1).

Είναι: $I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (3x^2+\beta)dx + \int_1^2 (2\alpha x+1)dx = 3\int_0^1 x^2dx + \beta\int_0^1 dx + 2\alpha\int_1^2 x dx + \int_1^2 dx =$

$= \cancel{3}\cdot\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^1 + \beta\cdot[x]_0^1 + \cancel{2}\alpha\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_1^2 + [x]_1^2 = 1 + \beta + 3\alpha + 1 = 3\alpha + \beta + 2$

Αλλά $I = 15 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta + 2 = 15 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = 13$. (2).

$(1) + (2) \Leftrightarrow \alpha = 3,\ \beta = 4$.

Θ102. f παραγωγίσιμη στο $1 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) & (I) \\ f'_\alpha(1) = f'_\delta(1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} \lambda(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \lambda(x) & (II) \end{cases}$

όπου $\lambda(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$: $x \neq 1 \Leftrightarrow \lambda(x) = \dfrac{f(x) - (\alpha+\gamma)}{x-1} \Leftrightarrow \lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+\beta x-2-(\alpha+\gamma)}{x-1}, & x<1 \\ \dfrac{\alpha x+\gamma-(\alpha+\gamma)}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

Είναι:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x^2+\beta x-2) = 1+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (\alpha x+\gamma) = \alpha+\gamma$

$f(1) = \alpha+\gamma$

$\xrightarrow{(I)} \alpha+\gamma = \beta+1 \Leftrightarrow \alpha - \beta + \gamma = 1$. (1).

$\lim\limits_{x\to 1^-} \lambda(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+\beta x-2-(\alpha+\gamma)}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+\beta x-2-\beta-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3(x^2-1)+\beta(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(3x+3+\beta) \Rightarrow$

$f'_\alpha(1) = 6+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \lambda(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\alpha x+\gamma-(\alpha+\gamma)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\alpha(x-1)}{x-1} = \alpha \Leftrightarrow f'_\delta(1) = \alpha$

$\xrightarrow{(II)} 6+\beta = \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 6$. (2).

$I = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (3x^2+\beta x-2)dx + \int_1^2 (\alpha x+\gamma)dx = 3\int_0^1 x^2dx + \beta\int_0^1 x dx - 2\int_0^1 dx + \alpha\int_1^2 x dx + \gamma\int_1^2 dx =$

$= \cancel{3}\cdot\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^1 + \beta\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2[x]_0^1 + \alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \gamma[x]_1^2 = \frac{3\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma - 1$.

Αλλά $I = 5 \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma - 1 = 5 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta + 2\gamma = 12$. (3)

$(1), (2), (3) \Leftrightarrow \alpha = 7,\ \beta = 1,\ \gamma = -5$.

Θ103. Είναι

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα: $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{αν } x\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty) \\ -x+1, & \text{αν } x\in(-1,1)\end{cases}$

Άρα, $I=\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\alpha} f(x)dx=\int_0^1(-x+1)dx+\int_1^{\alpha}(x-1)dx=\dots=\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+1.$

Αλλά $I=5 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2}-\alpha+1=5 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=4 \\ \alpha_2=-2\notin(1,+\infty) \text{ απορρίπτεται.}\end{cases}$

Άρα, $\alpha=4$.

Θ104. Πρώτα θα βρώ τη συνάρτηση f, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{x^{2\nu+2}+x}{x^{2\nu}+1}$

- Αν $|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$, τότε $x^{\nu}\to 0 \Rightarrow x^{2\nu}=(x^{\nu})^2\to 0$ και $x^{2\nu+2}=x^{2\nu}\cdot x^2\to 0$

  Άρα: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{x^{2\nu+2}+x}{x^{2\nu}+1}=\frac{0+x}{0+1}=x$

- Αν $|x|>1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, τότε $\left|\frac{1}{x}\right|<1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu}\to 0$ ...

  Άρα: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2\nu+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^{2\nu+2}}=\frac{1+0}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+0}=x^2.$

- Αν $|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm1$, τότε για $x=1 \Rightarrow f(x)=1$, για $x=-1 \Rightarrow f(x)=0$.

Άρα: $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\in(-\infty,-1)\cup[1,+\infty) \\ x, & \text{αν } x\in(-1,1] \\ 0, & \text{αν } x=-1\end{cases}$

Επειδή η f είναι προφανώς συνεχής στο $[0,2]$, άρα:

$I=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{8-1}{3}=\frac{17}{6}.$

Θ105. Πρώτα θα βρώ τη συνάρτηση f, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{e^{\nu x}\cdot x^2-x}{e^{\nu x}+1}$.

- Αν $x>0$, τότε $\nu\cdot x\to+\infty \Rightarrow e^{\nu x}\to+\infty \Rightarrow \frac{1}{e^{\nu x}}\to 0$.

  Άρα: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{x^2-\frac{x}{e^{\nu x}}}{1+\frac{1}{e^{\nu x}}}=\frac{x^2-0}{1+0}=x^2.$

- Αν $x<0$, τότε $\nu x\to-\infty \Rightarrow e^{\nu x}\to 0$.

  Άρα: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{e^{\nu x}\cdot x^2-x}{e^{\nu x}+1}=\frac{0\cdot x^2-x}{0+1}=-x.$

- Αν $x=0$, τότε $f(x)=0$. Άρα: $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{αν } x\in(-\infty,0) \\ x^2, & \text{αν } x\in[0,+\infty)\end{cases}$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-1,1]$ έχω:

$I=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 -x\,dx+\int_0^1 x^2dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$

Θ106. • Αν $1 \leq x \leq \sqrt{2} \Rightarrow 2 \leq x+1 \leq \sqrt{2}+1 \Rightarrow 2 \leq x+1 < 3 \Rightarrow [x+1]=2$.

• Αν $0 \leq x < 1 \Rightarrow [x]=0$

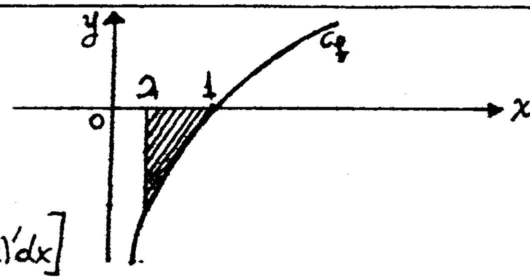
Άρα στο διάστημα $[0,\sqrt{2}]$ ο τύπος της f είναι: $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & 1\leq x\leq\sqrt{2} \\ x, & 0\leq x<1 \end{cases}$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\sqrt{2}]$, είναι:

$$I=\int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^{\sqrt{2}}(3x-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}}-2\left[x\right]_1^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}+3-\frac{3}{2}-2\sqrt{2}+2=4-2\sqrt{2}.$$

Θ107. 1) Διακρίνω τις περιπτώσεις:



i) $0<\lambda\leq 1$, τότε:

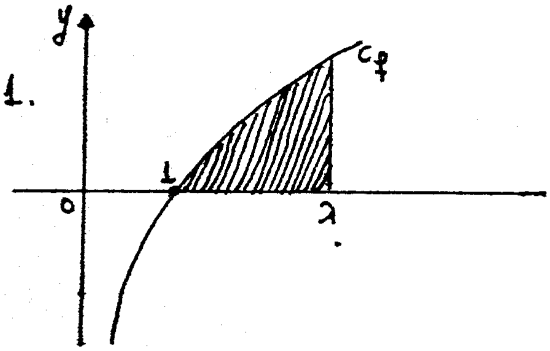
$$E_\lambda=-\int_\lambda^1 f(x)dx=-\int_\lambda^1 \ln x\,dx=$$

$$=-\int_\lambda^1 x'\cdot\ln x\,dx=-\left[[x\ln x]_\lambda^1-\int_\lambda^1 x\cdot(\ln x)'dx\right]$$

$$=-[x\ln x]_\lambda^1+\int_\lambda^1 \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=-[x\ln x]_\lambda^1+[x]_\lambda^1=-(0-\lambda\ln\lambda)+(1-\lambda)=\lambda\ln\lambda-\lambda+1$$

ii) $\lambda\geq 1$, τότε:

$$E_\lambda=\int_1^\lambda f(x)dx=-\int_\lambda^1 f(x)dx=\lambda\ln\lambda-\lambda+1.$$



Άρα: $E_\lambda=\lambda\ln\lambda-\lambda+1$, $\forall\lambda>0$.

2) α) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln\lambda-\lambda+1)=$

$$=\lim_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln\lambda)-0+1=1+\lim_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln\lambda)=[0\cdot(-\infty)]$$

$$=1+\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]=1+\lim_{\lambda\to0^+}\frac{(\ln\lambda)'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'}=1+\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}=$$

$$=1+\lim_{\lambda\to0^+}(-\lambda)=1+0=1.$$

β) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda\ln\lambda-\lambda+1)=$

$=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}[\lambda(\ln\lambda-1)]+1=+\infty$, διότι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda=+\infty$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\lambda=+\infty$.

γ) $\lim\limits_{\lambda\to1}E_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to1}(\lambda\ln\lambda-\lambda+1)=\lim\limits_{\lambda\to1}\lambda\cdot\lim\limits_{\lambda\to1}\ln\lambda-\lim\limits_{\lambda\to1}\lambda+1=$

$$=1\cdot\ln1-\cancel{1}+\cancel{1}=1\cdot0=0.$$

Θ108. Είναι $f(x) = -\int_0^x 4t\,dt = -4\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = -2x^2 \Rightarrow f(x) = -2x^2$.

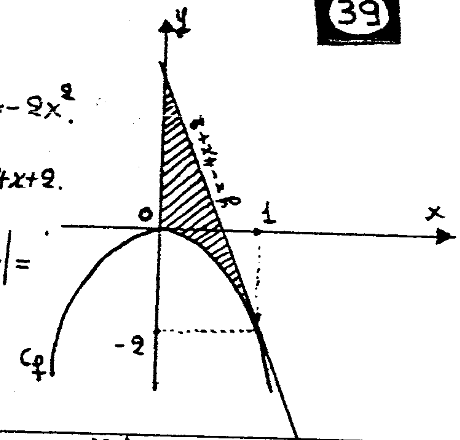
Η $(\varepsilon\varphi)$ στο $A(1,-2)$ είναι: $y-(-2) = f'(1)(x-1)$

Αλλά $f'(x) = -4x \Rightarrow f'(1) = -4$

$\Rightarrow (\varepsilon\varphi): y = -4x+2$.

Άρα: $E = \left|\int_0^1 [(-4x+2)-(-2x^2)]\,dx\right| = \left|\int_0^1 (2x^2-4x+2)\,dx\right| =$

$= \left|\left[2\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x\right]_0^1\right| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$.



Θ109. $f(x) = 1 + \eta\mu x \;,\; x \in [0, 3\pi]$

Η $(\varepsilon\varphi)$ στο $A(0,1)$ είναι $y-1 = f'(0)(x-0)$

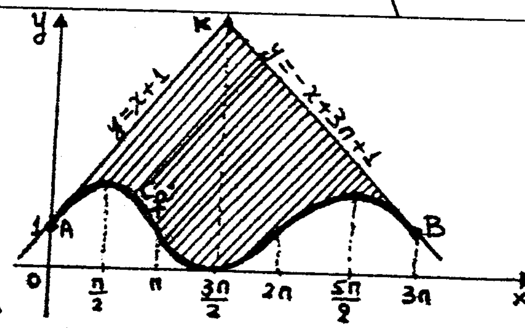
Αλλά $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow f'(0) = 1$. Άρα $(\varepsilon\varphi): y = x+1$

Η $(\varepsilon\varphi')$ στο $B(3\pi, 1)$ είναι $y - 1 = f'(3\pi)\cdot(x-3\pi)$

Αλλά $f'(3\pi) = \sigma\upsilon\nu 3\pi = -1$. Άρα $(\varepsilon\varphi'): y = -x+3\pi+1$.

Είναι: $(\varepsilon\varphi)\cap(\varepsilon\varphi'):\ \begin{cases} y = x+1 \\ y = -x+3\pi+1 \end{cases} \Leftrightarrow x+1 = -x+3\pi+1 \Leftrightarrow$

$x = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow K\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}+1\right)$.



Άρα, $E = \int_0^{3\pi/2}[(x+1)-(1+\eta\mu x)]\,dx + \int_{3\pi/2}^{3\pi}[(-x+3\pi+1)-(1+\eta\mu x)]\,dx =$

$= \int_0^{3\pi/2}(x - \eta\mu x)\,dx + \int_{3\pi/2}^{3\pi}(-x-\eta\mu x+3\pi)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x + 3\pi x\right]_{3\pi/2}^{3\pi} =$

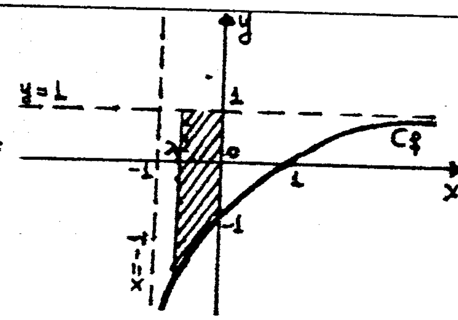
$= \left(\frac{9\pi^2}{8} - 1\right) + \left(-1 + \frac{9\pi^2}{8}\right) = \frac{9\pi^2}{4} - 2$.

Θ110. Διακρίνω τις περιπτώσεις:

i) $-1 < \lambda \leq 0$, τότε:

$E_\lambda = \int_\lambda^0 \left[1 - \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)\right]dx = 2\int_\lambda^0 \frac{1}{x+1}\,dx = 2\left[\ln(x+1)\right]_\lambda^0 =$

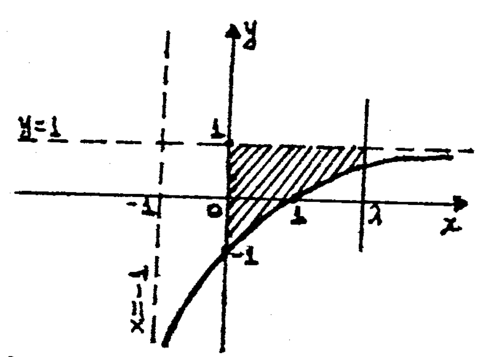
$= 2\ln 1 - 2\ln(\lambda+1) = -2\ln(\lambda+1)$.



ii) $\lambda \geq 0$, τότε:

$E_\lambda = \int_0^\lambda \left[1 - \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)\right]dx = 2\int_0^\lambda \frac{1}{x+1}\,dx =$

$= -2\int_\lambda^0 \frac{1}{x+1}\,dx = -2\left[\ln(x+1)\right]_\lambda^0 = 2\ln(\lambda+1)$.



Άρα: $E_\lambda = \begin{cases} -2\ln(\lambda+1) & , \text{ αν } -1<\lambda\leq 0 \\ 2\ln(\lambda+1) & , \text{ αν } \lambda \geq 0 \end{cases}$.

1) $\lim\limits_{\lambda\to -1^+} E_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to -1^+}[-2\ln(\lambda+1)] = -2\lim\limits_{\lambda\to -1^+}\ln(\lambda+1) = -2\lim\limits_{y\to 0^+}\ln y = +\infty$, διότι $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln y = -\infty$.

2) $\lim\limits_{\lambda\to +\infty} E_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}[2\ln(\lambda+1)] = 2\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln(\lambda+1) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln(\lambda+1) = +\infty$.

▼ Θ111. α) Είναι $f''=g'' \Rightarrow (f')'=(g')' \Rightarrow$

υπάρχει σταθερή στο Δ συνάρτηση u με $u(x)=c$: $f'=g'+u \Rightarrow$

$f'(x)=g'(x)+c$, $\forall x\in\Delta \Rightarrow f'(x)-g'(x)=c$, $\forall x\in\Delta \Rightarrow$

$(f(x)-g(x))'=c$, $\forall x\in\Delta \Rightarrow f(x)-g(x)=cx+K$, $K\in\mathbb{R}$ (1)

Η (1) για $x=0$, δίνει $f(0)-g(0)=K \xRightarrow{(ii)} K=0$.

Άρα $(1) \Rightarrow f(x)-g(x)=cx$, $\forall x\in\Delta$. (2)

β) g παραγωγίσιμη στο Δ $\Rightarrow$ g συνεχής στο Δ $\Rightarrow$ g συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]\subseteq\Delta$ (3)

Η (2) για $x=\rho_1$, δίνει $f(\rho_1)-g(\rho_1)=c\cdot\rho_1 \xRightarrow{f(\rho_1)=0} g(\rho_1)=-c\rho_1$

Η (2) για $x=\rho_2$, δίνει $f(\rho_2)-g(\rho_2)=c\rho_2 \xRightarrow{f(\rho_2)=0} g(\rho_2)=-c\rho_2$ $\Rightarrow$

$g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=c^2\rho_1\rho_2$

- Αν $c\neq 0$, επειδή $\rho_1\rho_2<0$ (υπόθεση) $\Rightarrow g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)<0$ (4)

(3), (4) $\Rightarrow$ Ισχύει το Θεώρ. B-W $\Rightarrow \exists\, \xi\in(\rho_1,\rho_2) : g(\xi)=0$

- Αν $c=0$, τότε $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=0 \Rightarrow g(\rho_1)=0 \vee g(\rho_2)=0 \rightarrow \rho_1,\rho_2$ ρίζες της $g(x)=0$. Άρα: σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$.

Το α) ερώτημα μπορεί να λυθεί και με Θ.Μ.Τ. για τη βοηθητική συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ στο $[0,x]$ και στο $[x,0]$.

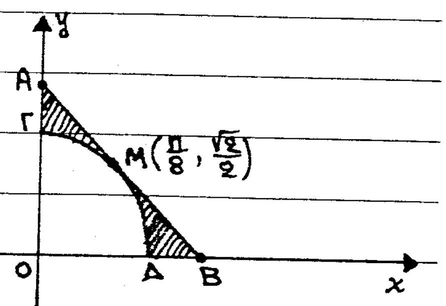
▼ Θ112. Είναι $f(x)=\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]=A$

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A, σαν σύνθεση παραγ. συναρτήσεων με $f'(x)=-2\eta\mu 2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}=-\sqrt{2}$

Είναι και $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ Σημείο επαφής το $M\left(\frac{\pi}{8},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Άρα (ε_f): $y-f\left(\frac{\pi}{8}\right)=f'\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$. (1)

β) Τα σημεία τομής της (1) με τους άξονες είναι τα $A\left(0,\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}\right)$, $B\left(\frac{\pi+4}{8},0\right)$



Είναι $E=(AOB)-(O\Gamma M\Delta)$ (2)

Αλλά: $(AOB)=\frac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\frac{\sqrt{2}(\pi+4)^2}{128}$

$(O\Gamma M\Delta)=\int_0^{\pi/4} f(x)dx=\int_0^{\pi/4}\sigma\upsilon\nu 2x\,dx=$

$=\left[\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}-\eta\mu 0\right)=\frac{1}{2}$

Άρα: $(2)\Rightarrow E=\frac{\sqrt{2}(\pi+4)^2}{128}-\frac{1}{2}$

▼ Θ113. f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $\Rightarrow$

f συνεχής στο $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$

f παραγωγ. στο $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$

$f(0) = \delta$

$f(1) = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma + \delta = 0 + \delta = \delta$ $\Rightarrow f(0) = f(1)$ $\xRightarrow[\text{Rolle}]{\Theta}$

$\exists \xi \in (0,1)$: $f'(\xi) = 0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = 0$ στο $(\xi, f(\xi)) \Rightarrow (\varepsilon\varphi) // x'x$.

▼ Θ114. $(c): x^2+y^2-x-2=0 \Leftrightarrow K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{3}{2}$.

i) Οι συντεταγμένες (x,y) των κοινών σημείων των (c) και (ε) πληρούν τις σχέσεις: $x^2+y^2-x-2=0$ και $5x+3y+2=0$

Άρα: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$

Άρα τα M, N πληρούν την εξίσωση $(c)'$: $x^2+y^2-x-2+\lambda(5x+3y+2)=0$. (1)

(1) $\Leftrightarrow x^2+y^2+(5\lambda-1)x+3\lambda y+2\lambda-2=0$ που είναι της μορφής

$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A=5\lambda-1$, $B=3\lambda$, $\Gamma=2\lambda-2$ και

$A^2+B^2-4\Gamma = 25\lambda^2-10\lambda+1+9\lambda^2-8\lambda+8 = 34\lambda^2-18\lambda+9>0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

διότι $\Delta=-900<0$ και $\alpha=34>0$.

Άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα M, N και έχει κέντρο $K'\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{1-5\lambda}{2}, -\frac{3\lambda}{2}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ο κύκλος $(c)'$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ όταν $-2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ (από την (1) για $x=0$ και $y=0$).

ii) Έστω (x,y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε $K'\left(\frac{1-5\lambda}{2}, -\frac{3\lambda}{2}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε: $\begin{cases} x = \frac{1-5\lambda}{2} \\ y = -\frac{3\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1-5\lambda \\ 2y = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1-2x}{5} \\ \lambda = -\frac{2y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\frac{1-2x}{5} = -\frac{2y}{3} \Leftrightarrow 3-6x = -10y \Leftrightarrow 6x-10y-3=0$.

Άρα, οι συντεταγμένες των κέντρων της οικογένειας των κύκλων με εξίσωση την (1), επαληθεύουν την εξίσωση $6x-10y-3=0$ που είναι εξίσωση ευθείας.

Άρα, (ε_1): $6x-10y-3=0$

▼Θ115. $f(x)=3x+\frac{1}{2x^2}$ $\quad A=\mathbb{R}^*$.

α) • $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}3x+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x^2}=3\cdot\lim\limits_{x\to\pm\infty}x+\frac{1}{2}\cdot\cancel{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}}=\pm\infty \Rightarrow \cancel{\exists}$ οριζόντια ασύμπτωτη.

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}3x+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}=0+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0}2x^2=0$ και $2x^2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$. Άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Έστω (ε): $y=\lambda x+\beta$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f, όπου

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{2x^3}\right)=3+0=3 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x+\frac{1}{2x^2}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

Άρα η $y=3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Η ίδια είναι και στο $-\infty$.

β) Οι f,g: $f(x)=3x+\frac{1}{2x^2}$ και $g(x)=3x$ είναι συνεχείς στο $[1,\alpha]$ και $f(x)-g(x)=\frac{1}{2x^2}>0$, $\forall x\in[1,\alpha]$. Άρα:

$$E(\alpha)=\int_1^\alpha\frac{1}{2x^2}dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\alpha=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha}+1\right) \text{ τ.μ.}$$

γ) $$\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1-0)=\frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

▼Θ116. Α. α) Αφού $\lim\alpha_\nu=\ell\neq 0 \Rightarrow \exists\kappa\in\mathbb{N}$: $\forall\nu>\kappa$ οι όροι της (α_ν) να είναι ομόσημοι προς το $\ell\neq 0$. Δηλαδή $\alpha_{\nu+\kappa}\neq 0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$.

β) (α_ν) συγκλίνουσα $\Rightarrow$ $(\alpha_{\nu+\kappa})$ συγκλίνουσα και $\alpha_{\nu+\kappa}\neq 0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ η (β_ν) με $\beta_\nu=\frac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}}$ είναι συγκλίνουσα με όριο $\neq 0$ $\Rightarrow$ (β_ν) φραγμένη.

Β. α) 1ος τρόπος:

$\beta>1 \Rightarrow \beta^{1/\beta}>1 \Rightarrow \beta^{1/\beta}=1+\theta$, $\theta>0$.

$\Rightarrow \alpha_{\nu+1}=(1+\theta)^{\alpha_\nu}$. Θα δείξω ότι:

$\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$.

για $\nu=1$: $\alpha_2>\alpha_1 \Leftrightarrow (\beta^{1/\beta})^{1/\beta}>\beta^{1/\beta} \Leftrightarrow \beta^{1/\beta}>1$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$: $\alpha_{\kappa+1}>\alpha_\kappa$ (1)

θα δείξω για $\nu=\kappa+1$, δηλαδή: $\alpha_{\kappa+2}>\alpha_{\kappa+1}$

Είναι: $\frac{\alpha_{\kappa+2}}{\alpha_{\kappa+1}}=\frac{(1+\theta)^{\alpha_{\kappa+1}}}{(1+\theta)^{\alpha_\kappa}}=(1+\theta)^{\alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa}>1$

διότι (1) $\Rightarrow \alpha_{\kappa+1}-\alpha_\kappa>0$. Άρα $\alpha_{\kappa+2}>\alpha_{\kappa+1}$.

2ος τρόπος:

Αφού $\alpha_{\nu+1}=(\beta^{1/\beta})^{\alpha_\nu}>1 \Rightarrow \ln\alpha_{\nu+1}=\ln(\beta^{1/\beta})^{\alpha_\nu}$

$=\ln\beta^{\frac{\alpha_\nu}{\beta}}=\frac{\alpha_\nu}{\beta}\ln\beta>0$. (1)

Θα δείξω ότι: $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

$\nu=1$: $\alpha_2>\alpha_1 \Leftrightarrow \ln\alpha_2>\ln\alpha_1$ ($\ln\uparrow$)

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha_1}{\beta}\ln\beta>\ln\beta^{1/\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\cancel{\beta}}\cancel{\ln\beta}>\frac{1}{\cancel{\beta}}\cancel{\ln\beta}$

$\Leftrightarrow \alpha_1>1 \Leftrightarrow \beta^{1/\beta}>1$ ισχύει.

$\nu=\kappa$: $\alpha_{\kappa+1}>\alpha_\kappa$ (2)

$\nu=\kappa+1$: $\alpha_{\kappa+2}>\alpha_{\kappa+1} \Leftrightarrow \ln\alpha_{\kappa+2}>\ln\alpha_{\kappa+1}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha_{\kappa+1}}{\cancel{\beta}}\cancel{\ln\beta}>\frac{\alpha_\kappa}{\cancel{\beta}}\cancel{\ln\beta} \Leftrightarrow \alpha_{\kappa+1}>\alpha_\kappa$ ισχύει (2).

Θ116. Β. β) Θα δείξω ότι : $\alpha_\nu < \beta$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

για $\nu=1$: $\alpha_1 < \beta \Leftrightarrow \beta^{1/\beta} < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < 1 \Leftrightarrow \beta > 1$ ισχύει.

Έστω για $\nu=\kappa$: $\alpha_\kappa < \beta$ (1).

Θα δείξω για $\nu=\kappa+1$: $\alpha_{\kappa+1} < \beta$.

Είναι : $\alpha_{\kappa+1} = (\beta^{1/\beta})^{\alpha_\kappa} \underset{(1)}{<} (\beta^{1/\beta})^{\beta} = \beta^1 = \beta \Rightarrow \alpha_{\kappa+1} < \beta$.

Θ117. Α α) Αρκεί : $I_\nu + I_{\nu-2} = \frac{1}{\nu-1}$

$$I_\nu + I_{\nu-2} = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^\nu x\,dx + \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,dx = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^2 x \cdot \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/4} (\varepsilon\varphi^2 x \cdot \varepsilon\varphi^{\nu-2} x + \varepsilon\varphi^{\nu-2} x)\,dx = \int_0^{\pi/4} (\varepsilon\varphi^2 x + 1)\varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\, \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\nu-1} \int_0^{\pi/4} (\nu-1)\cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,\varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,dx = \frac{1}{\nu-1} \int_0^{\pi/4} (\nu-1)(\varepsilon\varphi x)' \varepsilon\varphi^{\nu-2} x\,dx = \frac{1}{\nu-1} \left[\varepsilon\varphi^{\nu-1} x\right]_0^{\pi/4} =$$

$$\frac{1}{\nu-1} \cdot \left(\varepsilon\varphi^{\nu-1} \frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi^{\nu-1} 0\right) = \frac{1}{\nu-1}(1-0) = \frac{1}{\nu-1} \Rightarrow I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}. \quad (1)$$

β) $(1) \Rightarrow I_5 = \frac{1}{4} - I_3$ (2).

$$I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi x\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^{\pi/4} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/4} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \Big[\ln|\sigma\upsilon\nu x|\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} + \left(\ln\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \ln\sigma\upsilon\nu 0\right) = \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\ln 1}^{\,0}$$

$$= \frac{1}{2} + \ln 2^{-1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Άρα: $(2) \Rightarrow I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$.

Β. α) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ με $f'(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)' =$

$$= \left(\frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{(2-\frac{1}{x})2\sqrt{x} - (2x-\ln x)\cdot \cancel{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x} = \frac{4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{4x} =$$

$$= \frac{4x - 2 - 2x + \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 + \ln x = 0$ Αυτή έχει προφανή ρίζα την $x_0 = 1$ που είναι και μοναδική, διότι η συνάρτηση $\varphi: \varphi(x) = 2x - 2 + \ln x$ είναι $\uparrow$, αφού η $g: g(x) = 2x - 2$ είναι $\uparrow$ $(\alpha = 2 > 0)$ και η $h: h(x) = \ln x$ είναι $\uparrow$

Για $0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x < 2 \\ \ln x < \ln 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2<0 \\ \ln x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2+\ln x<0 \\ 4x\sqrt{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο $(0,1)$.

Όμοια, $f \uparrow$ στο $(1,+\infty)$. Για $x=1$ έχει ολικό min το $f(1)=1$.

Θ117. B. β) Δείξαμε ότι $f \uparrow$ στο $(1,+\infty)$ και $f(1)=1>0$ $\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in[1,4]$

Άρα: $E=\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^4 x^{1/2}dx-\int_1^4\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x\,dx=$

$\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4-\int_1^4(\sqrt{x})'\ln x\,dx=\frac{2}{3}\left(4^{3/2}-1^{3/2}\right)-\left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^4+\int_1^4\sqrt{x}(\ln x)'dx$

$=\frac{2}{3}(8-1)-(2\ln 4-\cancel{1\ln 1})+\int_1^4\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}\cdot 7-2\ln 2^2+\int_1^4 x^{-1/2}dx=$

$=\frac{14}{3}-4\ln 2+\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^4=\frac{14}{3}-4\ln 2+2\cdot\left(4^{1/2}-1^{1/2}\right)=\frac{14}{3}-4\ln 2+2$

$=\frac{20}{3}-4\ln 2=\frac{20-12\ln 2}{3}.$

Θ118. A. Η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ έχει $\alpha=5$, $\beta=4$ και $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=9\Rightarrow\gamma=3$.
Επειδή $\alpha>\beta$ η έλλειψη και άρα και η υπερβολή έχουν τις εστίες στον $x'x$. Έστω (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ η υπερβολή.
Είναι $\alpha^2+\beta^2=3^2=9$. (1) (αφού η έλλειψη και η υπερβολή έχουν το ίδιο γ.)
Επειδή η (c) εφάπτεται στην ευθεία (ε): $x-y+1=0\Leftrightarrow y=x+1$ $\begin{cases}\lambda=1\\ \kappa=1\end{cases}$
είναι $\beta^2+\kappa^2=\alpha^2\lambda^2\Leftrightarrow\beta^2+1=\alpha^2\Leftrightarrow\alpha^2-\beta^2=1$. (2)
$(1),(2)\Leftrightarrow\alpha^2=5$, $\beta^2=4$. Άρα (c): $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$.

B. Έστω (ε): $y=\lambda x+\kappa$ η ζητούμενη ευθεία $\Leftrightarrow(\varepsilon)$: $\lambda x-y+\kappa=0$.
Ο κύκλος $x^2+y^2=4$ έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.
Είναι $d(O,\varepsilon)=\frac{|\lambda\cdot 0-1\cdot 0+\kappa|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{|\kappa|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ Αλλά $d=\rho=2\Rightarrow 4=\frac{\kappa^2}{\lambda^2+1}$
$\Leftrightarrow\kappa^2-4\lambda^2=4$. (1).
Η (ε) εφάπτεται στην παραβολή (c): $y^2=3x\Leftrightarrow P=2\kappa\lambda\Leftrightarrow\frac{3}{2}=2\kappa\lambda$
$\Leftrightarrow 4\kappa\lambda=3\Leftrightarrow\quad 2\lambda=\frac{3}{2\kappa}$ (2)
$(1),(2)\Rightarrow\kappa^2-\left(\frac{3}{2\kappa}\right)^2=4\Leftrightarrow\kappa^2-\frac{9}{4\kappa^2}=4\Leftrightarrow 4\kappa^4-16\kappa^2-9=0$, $\kappa^2=\omega$
$\Delta=256+144=400=20^2\Rightarrow\omega_{1,2}=\frac{16\pm 20}{8}=$ $\begin{cases}\frac{36}{8}=9/2\\ -4/8=-\frac{1}{2}<0 \text{ απορ.}\end{cases}$
Άρα: $\kappa^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\kappa=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$(2)\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{4\kappa}\Leftrightarrow\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι: $\begin{cases}(\varepsilon_1):\ y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ (\varepsilon_2):\ y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Θ119. A. Είναι $f'(x) = 2ημx \cdot συνx - \sqrt{2}συνx = συνx(2ημx - \sqrt{2})$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} συνx = 0 \\ ημx = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ Στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ ρίζες είναι οι: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Επειδή $συνx \geq 0$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και $\begin{cases} 2ημx - \sqrt{2} \leq 0, & \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ 2ημx - \sqrt{2} \geq 0, & \forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

άρα $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ και $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Δηλαδή:

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
f'		$-$	0	$+$	0
f		$\searrow$		$\nearrow$	
	$\mu = 2\sqrt{2}$		$\varepsilon = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$		$\mu = 1+\sqrt{2}$

Η f είναι $\downarrow$ στο $(0, \frac{\pi}{4})$ και $\uparrow$ " $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Έχει ένα min το $\varepsilon = f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$ και δύο max τα $\mu_1 = f(0) = 2\sqrt{2}$ (άκρο κλειστού διαστήματος) και $\mu_2 = f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \sqrt{2}$.

B. Στο $(-\infty, 1)$ η f είναι συνεχής σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
Στο $(1, +\infty)$ " " " " πηλίκο " " "
αφού η $\sqrt{\ln x}$ είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών " .
Στο 1:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-}(e^x - e) = e^1 - e = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= 0 \\ f(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής και στο } 1.$$

Είναι $f(x) < 0$, $\forall x < 1$, διότι $e^x - e < 0 \Leftrightarrow e(e^{x-1} - 1) < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} < 1 \Leftrightarrow e^{x-1} < e^0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ισχύει, και
$f(x) > 0$, $\forall x > 1$, διότι $\frac{\sqrt{\ln x}}{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ισχύει.

Άρα: $E = \int_0^e f(x)dx = -\int_0^1 (e^x - e)dx + \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx =$

$= -[e^x - ex]_0^1 + \frac{2}{3}\int_1^e \frac{3}{2}(\ln x)^{1/2} \cdot (\ln x)' dx =$

$= -(e - e - 1) + \frac{2}{3}[(\ln x)^{3/2}]_1^e = 1 + \frac{2}{3}((\ln e)^{3/2} - (\ln 1)^{3/2}) =$

$= 1 + \frac{2}{3}(1 - 0) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ.

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

α) Αν το όριο της ακολουθίας α_ν είναι το $+\infty$ και το όριο της ακολουθίας β_ν είναι το $+\infty$, να αποδειχθεί ότι το όριο της ακολουθίας του αθροίσματος $\alpha_\nu+\beta_\nu$ είναι το $+\infty$. (ΘΕΩΡΙΑ: §2.12)

β) Να αποδειχθεί η πρόταση:
Κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. (ΘΕΩΡΙΑ: §4.7)

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

α) Δίνεται η συνάρτηση που ορίζει ο τύπος $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\cdot(x-1)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια και να γίνει η γραφική της παράσταση.

β) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $y=-x+\sqrt{x^2+2x+3}$ όταν το $x\to+\infty$.

(ΑΝΑΛΥΣΗ – 3ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 24 – Φ.20)

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε η συνάρτηση $y=\alpha x^3+\beta x^2-6x+1$ να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία $x=1$ και $x=-2$.

β) Να μελετηθεί η μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης (αφού αντικατασταθούν τα α, β με τις τιμές τους).

(ΑΝΑΛΥΣΗ – 4ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 23 – Φ.23)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,3)$, $\Gamma(2,-4)$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Α.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Β.

γ) Να βρεθεί το σημείο της τομής των παραπάνω ευθειών.

(ΑΝΑΛ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – 3ο ΚΕΦ. Ασκηση 27 – Φ.7)

"1981"

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

α) Να βρεθεί το $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-2x+1}{|x|-1}$ (ΑΝΑΛΥΣΗ – 3ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 25 – Φ.20)

β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y=\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$.
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και η οριακή της τιμή, όταν $x\to -2$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

α) Αν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ και $\lim \beta_\nu = \beta$, τότε υπάρχει το $\lim(\alpha_\nu \beta_\nu)$ και ισούται με $\alpha\beta$, δηλαδή: $\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = (\lim \alpha_\nu)\cdot(\lim \beta_\nu)$. (ΘΕΩΡΙΑ: §2.12$_2$)

β) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$ όπου $\nu = 1, 2, \dots$ και ω πραγματικός με $|\omega|<1$, είναι μηδενική. (ΘΕΩΡΙΑ: Εφαρμογή 2, σελ.48).

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha}=(2,2,-1)$, $\vec{\beta}=(1,-3,2)$, $\vec{\gamma}=(1,1,-\frac{1}{2})$

α) Να αναλυθεί το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$.

β) Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

γ) Να εξηγήσετε γιατί το $\vec{\beta}$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$. (ΑΝΑΛ.ΓΕΩΜ–2ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 25 – ΦΥΛ.12)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $9x^2-16y^2=144$, εστίες E', E και σημείο $A(\lambda,\mu)$ πάνω στην υπερβολή.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία A, E' και της ευθείας που περνά από τα σημεία A και E.

β) Να προσδιοριστούν τα σημεία A για τα οποία οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

(ΑΝΑΛ.ΓΕΩΜ. – 4ο ΚΕΦ. Άσκηση 20' – ΦΥΛ. 15)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

α) Θεωρούμε ότι οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών (β_ν), (γ_ν) συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό κ.
Αν για την ακολουθία (α_ν) ισχύει: $\beta_\nu \le \alpha_\nu \le \gamma_\nu$ για κάθε $\nu \geq \nu_0$, ν' αποδειχθεί ότι η (α_ν) συγκλίνει επίσης στο κ. (ΘΕΩΡΙΑ – §2.16).

β) Να υπολογιστεί το $\lim \alpha_\nu$ με $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$
(υπενθυμίζεται ότι ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$, αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$). (Εφαρμογή 1.Β – σελ.62).

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

α) Να δοθεί ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και στη συνέχεια να δοθεί ο ορισμός της γεωμετρικής σημασίας της παραγώγου στο σημείο x_0. (ΘΕΩΡΙΑ: §4.4)

β) Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ έχουν κοινό πεδίο ορισμού $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίζονται παντού σ' αυτό.
Επιπλέον είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση φ: $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Να αποδειχθεί ότι αν $\varphi'(\rho) = 0$, τότε είναι:
$\varphi(\rho) = \dfrac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$, όπου $g'(\rho) \neq 0$ και $\rho \in \Delta$. (Άσκηση 25Β – σελ.217).

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

Η συνάρτηση g ορίζεται από το τύπο:

$$g(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{x^{2\nu+1} + x^2}{x^{2\nu} + 1} \quad \text{με } \nu = 1, 2, \ldots \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $x = 1$ και $x = -1$.
(ΑΝΑΛΥΣΗ – 3ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 26 – ΦΥΛ.20)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

α) Να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. (ΘΕΩΡΙΑ: §2.15)

β) Στο επίπεδο θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy και σταθερό σημείο Α αυτού με $|\overrightarrow{OA}| = 3$.
Ποιά γραμμή γράφουν τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{OA}) = 7$.
(Άσκηση 34.Β – σελ.66).

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

α) Αν (α_ν), (β_ν) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $\lim\alpha_\nu=\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim\beta_\nu=\beta\in\mathbb{R}$, τότε να δειχτεί ότι:

$$\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)=\alpha\cdot\beta.$$ (ΘΕΩΡΙΑ: § 2.12₂)

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}}\cdot\left(\sqrt{\nu^2+1}-\nu\right).$$ (ΑΝΑΛΥΣΗ — 2ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 26 — ΦΥΛ.24)

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχθεί:

α) ότι για τη συνάρτηση F με $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$ όπου $c\in[\alpha,\beta]$ υπάρχει $c_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0)=0$.

β) Αν $c\in[\alpha,\beta]$, ότι υπάρχει $c_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0,f(c_0))$ της γραμμής $y=f(x)$ διέρχεται από το σημείο $(c,0)$. (Άσκηση 47.Β — σελ.220).

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

α) Να αποδειχτεί ότι $\ln x\le x-1$, $\forall x\in(0,+\infty)$. (ΘΕΩΡΙΑ: §3.26)

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & \text{αν } 0<x\neq 1\\ 0, & \text{αν } x=0\\ -1, & \text{αν } x=1\end{cases}.$$

Να αποδειχθεί ότι:

i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ii) Η f είναι φθίνουσα στο $(0,1)$.

iii) $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$. (Άσκηση 66.Β — σελ. 222)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

Στο τετράεδρο ΟΑΒΓ να αποδειχτεί ότι:

α) αν $\vec{OA}\cdot\vec{B\Gamma}=0$ και $\vec{OB}\cdot\vec{\Gamma A}=0$, τότε $\vec{O\Gamma}\cdot\vec{AB}=0$.

β) αν $\vec{OA}\cdot\vec{B\Gamma}=0$ και d_1 είναι η απόσταση των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΒ, ΓΑ και d_2 η απόσταση των μέσων των ΟΓ, ΑΒ, τότε: $d_1=d_2$.

(ΑΝΑΛ.ΓΕΩΜ. — 2ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 26 — ΦΥΛ. 12)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

α) Έστω ότι $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι τα διανύσματα $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)$ αντίστοιχα (ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς) και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ το εσωτερικό τους γινόμενο.
Να δείξτε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$. (ΘΕΩΡΙΑ: § 2.20).

β) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α το σημείο (2,1) και έστω ότι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις: $3x+y-11=0$, $x-y+3=0$.
Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου, και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ. (ΑΝΑΛ.ΓΕΩΜ.-3ο ΚΕΦ., Άσκηση 28-ΦΥΛ.7)

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

α) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $0<|\alpha|<1$, να δείξτε ότι $\lim \alpha^\nu = 0$ (ΘΕΩΡΙΑ: Εφαρμογή 2, σελ.48).

β) Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία
$$\beta_\nu = \frac{\lambda^\nu + 2^{\nu+1}}{2\lambda^\nu - 3\cdot 2^{\nu-1}}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda \neq 0, -2.$$
(ΑΝΑΛΥΣΗ-2ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 13_3-ΦΥΛ.23).

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

α) Δίνονται τα σύνολα διανυσμάτων B_1, B_2 του χώρου $\mathbb{R}^2$ με
$B_1 = \{(\text{συν}\theta, \text{ημ}\theta), (\text{ημ}\theta, -\text{συν}\theta)\}$
$B_2 = \{(\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta, -\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta), (\text{συν}\theta + \text{ημ}\theta, \text{συν}\theta - \text{ημ}\theta)\}$, με $\theta \in \mathbb{R}$.
Να δείξτε ότι το καθένα από τα B_1, B_2 είναι μια βάση του δ.χ. $\mathbb{R}^2$ (για κάθε τιμή του θ).

β) Έστω $\theta = \frac{\pi}{4}$. Να αποδείξτε ότι υπάρχει ένα (και μόνο) διάνυσμα (x,y) του δ.χ. $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε τα διατεταγμένα ζεύγη των συντεταγμένων του να είναι $(\lambda, \mu-1)$, $(\lambda-1, \mu)$ ως προς τις βάσεις B_1, B_2 αντίστοιχα. (ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ.ΕΞΕΤ. - ΘΕΜΑ 20, ΦΥΛ.3).

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

Έστω z ο μιγαδικός $x+yi$ με $y\neq 0$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Θέτουμε $w = \frac{\bar{z}^2}{z-1}$ όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z. Να αποδείξτε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν το σημείο (x,y) ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy, ανήκει σε μια υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της. (ΑΛΓΕΒΡΑ-4ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 24, ΦΥΛ.19)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

α) Έστω μια ευθεία που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχει εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $|A|+|B|\neq 0$.
Έστω $P(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο εκτός της ευθείας αυτής.
Δείξτε ότι η απόσταση του P από την ευθεία ισούται με

$$\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ (ΘΕΩΡΙΑ: §3.15)

β) Θεωρούμε δύο ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξίσωση $x+\mu y+1=0$ και $2\mu x+2y+\lambda=0$ αντίστοιχα ($\lambda,\mu\in\mathbb{R}$).
Να προσδιορίσετε για ποιά ζεύγη των τιμών των λ και μ οι δύο ευθείες είναι παρ/λες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

(ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ.ΕΞΕΤ. – ΘΕΜΑ 18, ΦΥΛ.3).

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} x+2y+2\omega=0 \\ 4x+(3+\lambda)y+6\omega=0 \\ 4x+4y+(1+\lambda)\omega=0 \end{cases}$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις

β) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος για τη μικρότερη τιμή του λ που βρίσκουμε στο ερώτημα α). (ΑΛΓΕΒΡΑ–1ο ΚΕΦ. Άσκηση 53 – ΦΥΛ.16.)

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

α) Έστω μια ακολουθία (β_ν). Αν υπάρχουν δύο ακολουθίες (α_ν) και (γ_ν) με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για κάθε $\nu>k$ (k ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_\nu\leq\beta_\nu\leq\gamma_\nu$, τότε και η (β_ν) έχει το ίδιο όριο. (ΘΕΩΡΙΑ: § 2.16).

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\nu^2-2\nu+3}$. (ΑΝΑΛΥΣΗ–2ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 27 – ΦΥΛ.24)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

α) Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο σημείο $x_0\in\Delta$ είναι $f'(x_0)=0$.
Αν $f''(x_0)>0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (ΘΕΩΡΙΑ §4.23)

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2(x-3)+4$, για $x\in\mathbb{R}$.
Έστω x_1,x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 είναι το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι: τα σημεία του επιπέδου $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, $(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

(ΑΝΑΛΥΣΗ–4ο ΚΕΦ, ΘΕΜΑ 24 – ΦΥΛ.23).

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

α) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ που ανήκουν στο $\mathcal{E}$.
Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:
I) Πότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα.
II) ›› ›› ›› ›› ›› ›› ανεξάρτητα. (ΘΕΩΡΙΑ §1.21)

β) Να αποδείξετε ότι: αν τα διαν. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε επίσης και τα διαν. $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$, $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$, $\vec{w} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. (ΑΝΑΛ.ΓΕΩΜ.–1ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 29 –ΦΥΛ.18).

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

α) I) Να δώσετε τον ορισμό του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού.
II) Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2.
Δείξτε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. (ΘΕΩΡΙΑ §4.11 και §4.17)

β) Έστω ότι $z = (2x-3) + (2y-1)i$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) που είναι τέτοια ώστε $|2z - 1 + 3i| = 3$, είναι κύκλος.
Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου αυτού και την ακτίνα του. (ΑΛΓΕΒΡΑ–4ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 27 – ΦΥΛ.12).

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

α) Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ και έστω $x_0 \in \Delta$.
Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς: (ΘΕΩΡΙΑ: §3.14 και §3.15).
I) Πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0.
II) ›› ›› ›› ›› ›› ›› από δεξιά στο x_0.
III) ›› ›› ›› ›› ›› ›› ›› αριστερά στο x_0.

β) Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1} + x, & x \le -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x + 1, & 0 \le x \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
(ΑΝΑΛΥΣΗ–3ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 27–ΦΥΛ.20)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

α) Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και ότι στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ είναι $f'(x_0) = 0$. Δείξτε ότι:
Η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο, αν
$\forall x \in (\alpha, x_0]$, $f'(x) \geq 0$ και $\forall x \in [x_0, \beta)$, $f'(x) \le 0$. (ΘΕΩΡΙΑ: §4.22).

β) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = (\alpha - \frac{2}{3})x^3 - (\alpha + \frac{1}{2})x^2 - 10x + 7$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 3/2$.
Για τη τιμή αυτή του α να κάνετε το πίνακα μεταβολής της f.
(ΑΝΑΛΥΣΗ–4ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 25 – ΦΥΛ.23).

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

α) Ι) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του επιπέδου. Να αποδειχτεί ότι:
$$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.$$ (ΘΕΩΡΙΑ: § 2.19).

ΙΙ) Να αποδειχτεί ότι, δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα, αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. (ΘΕΩΡΙΑ: § 2.21).

β) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy δίνονται τα σημεία $A(4,2)$ και $B(3,-5)$. Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση: $7x+y-23=0$. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ. (ΑΝΑΛ. ΓΕΩΜ. – 3ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 26 – ΦΥΛ. 11).

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

α) Αν $\{v_1, v_2, \ldots, v_\rho\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου V, τότε να αποδειχτεί ότι κάθε διάνυσμα $v \in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής του V. (ΘΕΩΡΙΑ: § 3.11).

β) Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, $V=\{(\alpha, \alpha-\beta, 2\alpha+3\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Να αποδειχτεί ότι το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάστασή του. (ΑΛΓΕΒΡΑ – 3ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 28 – ΦΥΛ. 14).

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

α) Αν $\lim \alpha_v = +\infty$ ή $-\infty$ και για κάθε $v \in \mathbb{N}$ είναι $\alpha_v \neq 0$, τότε να αποδειχτεί ότι $\lim \frac{1}{\alpha_v} = 0$. (ΘΕΩΡΙΑ: § 2.28₁)

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_v) με
$$\alpha_v = \left(\sqrt{7v^4+6v+5} - \sqrt{7v^4+3v+3}\right)\cdot\sqrt{63v^2-5v+20}.$$
(ΑΝΑΛΥΣΗ – 2ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 28 – ΦΥΛ. 24).

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

α) Αν μια συνάρτηση f ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ (τοπικό) και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε να αποδειχτεί ότι $f'(x_0)=0$. (ΘΕΩΡΙΑ: § 4.13).

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$, και έστω C η γραφική της παράσταση. Δείξτε ότι υπάρχουν τρία σημεία $A, B, \Gamma \in C$, τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα A, B, Γ να είναι παρ/λες προς τον άξονα $x'x$. Να αποδειχτεί ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$. (ΑΝΑΛΥΣΗ – 4ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 26 – ΦΥΛ. 23).

● **ΖΗΤΗΜΑ 1ο:**

α) Να λυθεί το σύστημα : $\begin{cases} (\lambda+1)x+y=\lambda+1. \\ x+(\lambda+1)y=1. \\ x+y=2\lambda+1. \end{cases}$ (ΑΛΓΕΒΡΑ – 1ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 17 – ΦΥΛ.18)

β) Δείξτε ότι το σύνολο $A=\left\{\frac{4\kappa+1}{5-4\lambda} : \kappa,\lambda \in \mathbb{Z}\right\}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη πράξη του πολ/μού κλασμάτων στο $\mathbb{R}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα. (ΑΛΓΕΒΡΑ – 2ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 14 – ΦΥΛ.10).

● **ΖΗΤΗΜΑ 2ο:**

α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακολουθία αύξουσα και φραγμένη άνω είναι συγκλίνουσα. (ΘΕΩΡΙΑ : § 2.17).

β) Να βρείτε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=\sqrt{4\alpha_\nu+5}$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$. (ΑΝΑΛΥΣΗ – 2ο ΚΕΦ., ΘΕΜΑ 11 – ΦΥΛ.23).

● **ΖΗΤΗΜΑ 3ο:**

α) Θεωρούμε συνάρτηση g που ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in\Delta$ και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ (ΘΕΩΡΙΑ: §4.11)

β) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+1+\frac{1}{x+1}$.

Ι) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

ΙΙ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=2$, $x=5$. (ΑΝΑΛΥΣΗ – 5ο ΚΕΦ. ΑΣΚΗΣΗ 45 – ΦΥΛ.29)

● **ΖΗΤΗΜΑ 4ο:**

α) Ι) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής (ΘΕΩΡΙΑ: §4.4).

ΙΙ) Δίνεται η παραβολή $y^2=2px$ και η ευθεία $y=\lambda x+\kappa$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή έχουν ένα διπλό κοινό σημείο αν και μόνο αν $p=2\lambda\kappa$. (ΘΕΩΡΙΑ: §4.9).

β) Δίνεται παραβολή με εξίσωση: $y^2=4x$

Ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση: $3x+y+3=0$.

ΙΙ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής τις οποίες φέρνουμε από το σημείο $(-2,1)$. (ΑΝΑΛ.ΓΕΩΜ. – 4ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 22 – ΦΥΛ.18)

Δ΄ "1989"

● ΖΗΤΗΜΑ 1ο :

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x+\lambda(y+z)=0 \\ -2y+z=\lambda x \\ \lambda x+y=-z \end{cases}$ (ΑΛΓΕΒΡΑ – 1ο ΚΕΦ. ΘΕΜΑ 17 – ΦΥΛ.18)

● ΖΗΤΗΜΑ 2ο :

α) Να αποδειχτεί ότι κάθε ν-οστή ρίζα της μονάδας είναι της μορφής: $z_k=\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu}$, $k\in\mathbb{Z}$. (ΘΕΩΡΙΑ: §4.21)

β) Να λυθεί η εξίσωση:

$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$ (ΑΛΓΕΒΡΑ – 4ο ΚΕΦ. Ασκηση 113 – ΦΥΛ.17)

● ΖΗΤΗΜΑ 3ο :

α) Να αποδειχτεί ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ. (ΘΕΩΡΙΑ: §4.16)

β) Εστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ

ii) $f''=g''$ και iii) $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$. (ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ.ΕΞΕΤ. ΘΕΜΑ 111 – ΦΥΛ.15)

Να δειχτεί ότι: α) Για κάθε $x\in\Delta$, $f(x)-g(x)=cx$, $c\in\mathbb{R}$.

β) Αν η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1,ρ_2 τότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

● ΖΗΤΗΜΑ 4ο :

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\eta\mu(2x+\frac{\pi}{2})$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{8}$

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την γραφική παράσταση της f και από τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy. (ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ.ΕΞΕΤ. ΘΕΜΑ 112 – ΦΥΛ.15.)

● ΖΗΤΗΜΑ 1ο :

α) Αν $A, B \in \Pi_\nu$ και $A^2 = A$, $AB + BA = O$, όπου $O \in \Pi_\nu$ δείξτε ότι : $AB = BA = O$.

β) Αν $A, B, \Gamma, I \in \Pi_\nu$ και $AB = \Gamma A = I$, δείξτε ότι : ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι $A^{-1} = B = \Gamma$.

γ) Αν $A, B \in \Pi_\nu$ και ο B είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι : $\forall \kappa \in Z_+^*$, $(BAB^{-1})^\kappa = BA^\kappa B^{-1}$. (ΑΛΓΕΒΡΑ-1º ΚΕΦ. Άσκηση 57-Φυλ.16)

● ΖΗΤΗΜΑ 2ο :

α) Δείξτε ότι : αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ (ΘΕΩΡΙΑ § 4.15)

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\alpha x^3}{3} + \left(\dfrac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$ όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. (ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ. ΕΞΕΤ. ΘΕΜΑ 113-Φυλ.15)

● ΖΗΤΗΜΑ 3ο :

α) Θεωρούμε κύκλο με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, καθώς και σημείο $A(x_1, y_1)$ αυτού. Δείξτε ότι η εφαπτομένη αυτού του κύκλου στο A έχει εξίσωση: $(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2$. (ΘΕΩΡΙΑ § 4.3).

β) Δίνεται η ευθεία (ε) : $5x + 3y + 2 = 0$ και ο κύκλος (c): $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ που τέμνονται στα M και N. Δείξτε ότι:

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x + 3y + 2) = 0$ παριστάνει κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα M, N. Για ποιά τιμή του λ ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την αρχή των αξόνων.

ii) Τα κέντρα των κύκλων της i) ερώτησης ανήκουν σε ευθεία (ε_1) της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ. ΕΞΕΤ. -ΘΕΜΑ 114-Φυλ.15)

● ΖΗΤΗΜΑ 4ο : Αν $f : f(x) = 3x + \dfrac{1}{2x^2}$, α) να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

β) να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f της ευθείας $y = 3x$ και των ευθειών $x = 1$ και $x = \alpha$ με $\alpha > 1$.

γ) να υπολογίσετε το $\lim E(\alpha)$ όταν το α τείνει στο άπειρο. (ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ. ΘΕΜΑ 115-Φ.15)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο:

Α. Εστω V ένας διανυσματικός χώρος και V_K ένας υπόχωρός του ο οποίος παράγεται από K διανύσματα του V. Αν από τα K αυτά διανύσματα υπάρχουν p γραμμικώς ανεξάρτητα, $1 \le p < K$, τα οποία μαζί με καθένα από τα υπόλοιπα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε να αποδειχθεί ότι ο V_K έχει διάσταση p.

(ΘΕΩΡΙΑ §3.14).

Β. Αν $w = \dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $z \neq \alpha i$,

δείξτε ότι: α) $w \in I \Leftrightarrow z \in I$. β) $|w| = 1 \Leftrightarrow z \in I$.

(ΑΛΓΕΒΡΑ-4ο ΚΕΦ.-ΘΕΜΑ 12'-ΦΥΛ. 18)

ΖΗΤΗΜΑ 2ο:

1. Εστω (α_ν) ακολουθία συγκλίνουσα με $\lim \alpha_\nu \neq 0$. Δείξτε ότι:

α) υπάρχει φυσικός K τέτοιος ώστε $\alpha_{\nu+K} \neq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

β) για το παραπάνω K η ακολουθία (b_ν) με $b_\nu = \dfrac{1}{\alpha_{\nu+K}}$ είναι φραγμένη.

Β. Εστω $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) με $\begin{cases} \alpha_1 = b^{1/b} \\ \alpha_{\nu+1} = (b^{1/b})^{\alpha_\nu} \end{cases}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι:

α) Η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα. β) Η (α_ν) είναι φραγμένη άνω από το b.

(ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ. ΕΞΕΤ. - ΘΕΜΑ 116 - ΦΥΛ. 16)

ΖΗΤΗΜΑ 3ο:

Α. Αν $I_\nu = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^\nu x\,dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε

α) Δείξτε ότι για κάθε $\nu > 2$, ισχύει: $I_\nu = \dfrac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$.

β) Υπολογίστε το I_5

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφ. παράσταση της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x=1$ και $x=4$.

(ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ. ΕΞΕΤ. - ΘΕΜΑ 117 - ΦΥΛ. 16)

ΖΗΤΗΜΑ 4ο:

Α. Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη και εφάπτεται στην ευθεία $x-y+1=0$. Β. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες εφάπτονται συγχρόνως στον κύκλο $x^2+y^2=4$ και στην παραβολή $y^2=3x$.

(ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛ. ΕΞΕΤ. - ΘΕΜΑ 118 - ΦΥΛ. 16).

ΑΝΑΛΥΣΗ

Α' ΔΕΣΜΗ

ΘΕΜΑΤΑ

1ο Δείξτε ότι:

α) αν η ακολουθία (β_ν) έχει όριο 0 και υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$

2 τέτοιος ώστε $\forall \nu > \kappa$ είναι $|\alpha_\nu| \leq |\beta_\nu|$, τότε και η (α_ν) έχει όριο 0.

β) το γινόμενο μιας ακολουθίας που έχει όριο 0 με μια

2 φραγμένη ακολουθία, είναι ακολουθία με όριο 0.

γ) η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu}{(-5)^\nu \cdot (\nu^2+5)}$ είναι μηδενική.

2

2ο α) Δείξτε ότι: αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_ν) και (γ_ν)

2 με κοινό όριο, τέτοιες ώστε $\forall \nu > \kappa$ (κ ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \leq \gamma_\nu$, τότε και η (β_ν) έχει το ίδιο όριο.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_ν) με

3 $$\alpha_\nu = \frac{1}{1+2^{\nu+1}} + \frac{1}{2+2^{\nu+1}} + \frac{1}{2^2+2^{\nu+1}} + \dots + \frac{1}{2^\nu+2^{\nu+1}}$$

γ) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών (β_ν) και (γ_ν)

3 με $\beta_\nu = \sqrt[\nu]{\dfrac{7^{\nu+1}+2}{7^\nu-3^\nu}}$ και $\gamma_\nu = \dfrac{\nu^\nu}{(\nu!)^2}$

3ο α) Δείξτε ότι: η ακολουθία (α_ν) με

3 $\alpha_\nu = 1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\dots+\frac{\nu}{2\nu-1}$ τείνει στο $+\infty$.

β) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (β_ν) με

3 $\beta_\nu = \dfrac{\omega^{2\nu+2}+\omega}{\omega^{2\nu}+1}$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

Προαιρετικό: 1) Δίνονται οι ακολουθίες (α_ν) με $\begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \alpha_\nu = \dfrac{\alpha_{\nu-1}+5}{2} \end{cases}$

20 και (β_ν) με $\beta_\nu = \alpha_\nu - 5$.

Βρείτε: α) το γενικό όρο της (β_ν).

β) τα όρια των (β_ν) και (α_ν)

2) Αν $\alpha_\nu = 5\nu^2 + (-1)^{\nu^2+\nu-1} \cdot (8\nu^2+1)$, να βρείτε το όριο της (α_ν).

ΑΝΑΛΥΣΗ

Α' ΔΕΣΜΗ.

ΘΕΜΑΤΑ

(1ο) α) Πότε, μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο A, λέγεται άρτια, περιττή. Τι γνωρίζετε για τη γραφική τους παράσταση;
Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f: f(x)=\log\frac{9-x}{9+x}$ είναι άρτια ή περιττή.

β) Πότε, μια συνάρτηση $f: A\to B$, λέγεται "επί", "1-1";
Δείξτε ότι η $f: f(x)=\frac{3^x+2}{5+3^x}$ δεν είναι επί, ενώ είναι "1-1".

Θεωρείστε για σύνολο αφίξης το πεδίο τιμών της f και βρείτε την f^{-1}. (7)

(2ο) ~~α)~~ α) Πότε μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο A λέγεται γνησίως αύξουσα, φθίνουσα, φραγμένη.
~~β)~~ Αν οι συναρτήσεις $f: A\to B$ και $g: B\to \Gamma$ είναι γνησίως φθίνουσες, δείξτε ότι η gof είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.
(3) β) Δείξτε ότι: μια συνάρτηση f ορισμένη στο A είναι φραγμένη στο A αν και μόνο αν υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}_+$ τέτοιος ώστε για κάθε $x\in A$ να είναι $|f(x)|\leq\theta$.
(4) ii) Δείξτε ότι οι ακολουθίες $(\alpha_\nu): \alpha_\nu=\frac{4\nu+1}{4^\nu}$ και $(\beta_\nu): \beta_\nu=\frac{\eta\mu 2\nu+2\sigma\upsilon\nu^2\nu}{\nu}$, είναι φραγμένες.

(3ο) Προαιρετικά:
α) i) Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η ακολουθία
$$(\alpha_\nu):\quad \alpha_\nu=(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)+1.$$
~~ii)~~ Αν η ακολουθία (β_ν) είναι γνησίως αύξουσα, δείξτε ότι και η $(\gamma_\nu): \gamma_\nu=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu}$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρεθεί ο γενικός όρος της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_1=3$ και $16\alpha_{\nu+1}^2+\alpha_\nu^2=8\alpha_{\nu+1}\cdot\alpha_\nu$.