Α΄ ΔΕΣΜΗ

⁕ ΑΝΑΛΥΣΗ
⁕ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Α. ΠΙΣΤΟΦΙΔΗΣ

Θεσσαλονίκη 1991 - 1992

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

▼ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: $x \geq y \Leftrightarrow x-y \geq 0.$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) $x \leq y \Leftrightarrow x+z \leq y+z, \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$

2) $x \leq y$ και $\begin{cases} z>0 \Rightarrow xz \leq yz \\ z<0 \Rightarrow xz \geq yz \end{cases}$

3) $x<y$ και $\begin{cases} xy>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \\ xy<0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \end{cases}$

4) $x<y \wedge z<\omega \Rightarrow x+z<y+\omega.$

5) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x^\kappa>0, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$

6) $x<y \Leftrightarrow x^\nu<y^\nu, \ \forall x,y \in \mathbb{R}_+^*, \nu \in \mathbb{N}^*.$

• $x=y \Rightarrow x^\nu=y^\nu, \ \forall x,y \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}.$

7) $\forall x,y \in \mathbb{R}_-^*: x<y \Rightarrow \begin{cases} x^\nu>y^\nu, & \nu=2k. \\ x^\nu<y^\nu & \nu=2k+1. \end{cases}$

8) $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*: x<y \Leftrightarrow x^{-\nu}>y^{-\nu}, \ \nu \in \mathbb{N}^*.$

9) $\forall x,y,z,\omega \in \mathbb{R}_+^*: x<y \wedge z<\omega \Rightarrow xz<y\omega.$

10) $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z.$

Ανισότης Bernoulli.

Αν $\alpha>-1$ και $\nu \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow (1+\alpha)^\nu \geq 1+\nu\cdot\alpha.$ (Απόδειξη...).

• Η σχέση ισχύει και όταν $\alpha=-1$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1 Δείξτε ότι:
1) $5^\nu \geq 1+4\nu, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$, 2) $\left(\frac{3}{2}\right)^\nu > \nu+1, \ \forall \nu \geq 4$, 3) $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \geq 2, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*.$

2 Δείξτε ότι: $\left(\frac{2\nu}{\nu+1}\right)^\nu \geq \frac{\nu+1}{2}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*.$ (Υπόδειξη: Βάλτε όπου $2\nu=(\nu+1)+(\nu-1)$).

3 Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$ και $\nu \geq 2$ δείξτε ότι: $(\alpha+\beta)^\nu > \alpha^\nu+\nu\cdot\alpha^{\nu-1}\cdot\beta.$

4 Αν $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu \in \mathbb{R}_+^*$ και $\nu \geq 2 \Rightarrow (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_\nu) > 1+(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu).$

Weierstrass. • Αν $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_\nu=x$ τι παρατηρείτε;

5 Αν $0<\alpha_i<1, \ \forall i=1,2,\dots,\nu$ και $\nu \geq 2$ $\Rightarrow (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_\nu) > 1-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu).$

6 Δείξτε ότι: 1) $2^\nu > \nu^3, \ \forall \nu \geq 10$. 2) $3^{2\nu} > 2^{2\nu+1}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*.$

7 Δείξτε ότι: 1) $2^{\nu+2} > 2\nu+5, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*.$ 2) $3^{\nu-1} > \nu^2, \ \forall \nu \geq 4.$

8 Δείξτε ότι: $\nu^2 \leq (\nu!)^2, \ \forall \nu \geq 2.$

• ν παραγοντικό $\nu! = 1\cdot2\cdot3\cdots\nu$

▼ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ.

Ανοικτό $(\alpha,\beta) \to x\in(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$.
Ανοικτό αριστερά $(\alpha,\beta] \to x\in(\alpha,\beta] \Leftrightarrow \alpha<x\le\beta$.
Ανοικτό δεξιά $[\alpha,\beta) \to x\in[\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha\le x<\beta$.
Κλειστό $[\alpha,\beta] \to x\in[\alpha,\beta] \Leftrightarrow \alpha\le x\le\beta$.
} → Το πλάτος όλων αυτών είναι $\beta-\alpha$.

• $(\alpha,+\infty)=\{x: x>\alpha\}$, $[\alpha,+\infty)=\{x: x\ge\alpha\}$. ** $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.
$(-\infty,\beta)=\{x: x<\beta\}$, $(-\infty,\beta]=\{x: x\le\beta\}$.

▼ΦΡΑΓΜΑΤΑ.

Ορισμός: Έστω ένα σύνολο $E\subseteq\mathbb{R}$. Ονομάζουμε:
1) άνω φράγμα του E, κάθε $\varphi\in\mathbb{R}$: $\forall x\in E$, $x\le\varphi$.
2) κάτω φράγμα του E, » » : », $x\ge\varphi$.

Το E λέγεται
- → φραγμένο άνω, όταν έχει άνω φράγμα (π.χ. $(-\infty,\beta)$, $(-\infty,\beta]$).
- → φραγμένο κάτω, » » κάτω » (π.χ. $(\alpha,+\infty)$, $[\alpha,+\infty)$).
- → φραγμένο, όταν είναι άνω και κάτω φραγμένο. (π.χ. (α,β), $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta]$)

• Αν ένα άνω (κάτω) φράγμα φ ενός συνόλου E ανήκει στο E, τότε το φ είναι το μοναδικό στοιχείο με αυτή την ιδιότητα. Το φ στη περίπτωση αυτή λέγεται μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο του E. (maxE − minE).

▼ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ. (Βλέπε και §5.1-5.5 βιβλίο Α' Λυκείου).

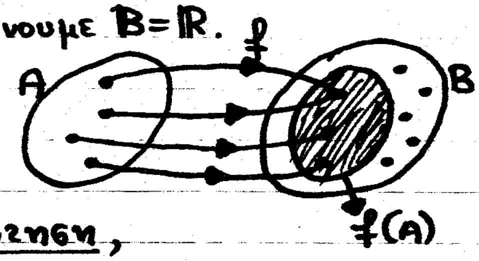
Η ιδιότητα που διαφοροποιεί το $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{Q}$ είναι το αξίωμα του κιβωτισμού: για κάθε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[\alpha_\nu,\beta_\nu]$ υπάρχει ένας αριθμός που είναι το μοναδικό κοινό στοιχείο τους.
(Κιβωτισμένα: είναι κλειστά διαστήματα $[\alpha_\nu,\beta_\nu]$ με τα χαρακτηριστικά:
1) $\forall\nu\in\mathbb{N}$, $[\alpha_{\nu+1},\beta_{\nu+1}]\subset[\alpha_\nu,\beta_\nu]$.
2) $\forall\varepsilon>0$, υπάρχει διάστημα της ακολουθίας με πλάτος μικρότερο από το ε).

▼ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$.

1) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός $\nu>x$. (Θεώρημα Αρχιμήδη).
2) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος K_0 τέτοιος ώστε: $K_0\le x<K_0+1$.
• Ο K_0 λέγεται ακέραιο μέρος του x και σημειώνεται $[x]$. Άρα: $x=[x]+\varepsilon$ όπου $0\le\varepsilon<1$.
• Προφανώς ισχύει: $x-1<[x]\le x<[x]+1$.
3) Κάθε θετικός αριθμός α έχει μοναδική θετική ν-οστή ρίζα $\sqrt[\nu]{\alpha}=\alpha^{1/\nu}$.
• $\forall\alpha>0$ και $\frac{\kappa}{\nu}=p\in\mathbb{Q}$ $(\nu\in\mathbb{N}^*)$ ορίζεται η δύναμη $\alpha^p=\alpha^{\kappa/\nu}=(\sqrt[\nu]{\alpha})^\kappa$.
4) Για κάθε φραγμένο άνω (κάτω) σύνολο $E\subseteq\mathbb{R}$, το σύνολο των άνω (κάτω) φραγμάτων του έχει ελάχιστο $A=\sup E$ (μέγιστο $K=\inf E$) στοιχείο.
• Για τα A,K ισχύουν: 1) $\forall x\in E$, $x\le A$. ($\forall x\in E$, $x\ge K$).
2) $\forall\varepsilon>0, \exists x\in E: x>A-\varepsilon$. ($\forall\varepsilon>0, \exists x\in E: x<K+\varepsilon$).

▼ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ είναι κάθε διμελής σχέση $f: A \to B$, $(A, B \subseteq \mathbb{R})$
κατά την οποία σε $\forall x \in A$ αντιστοιχεί ένα μόνο $y = f(x) \in B$
$A \to$ Πεδίο Ορισμού
$B \to$ Σύνολο Αφίξεως → Αν δε δίδεται, παίρνουμε $B = \mathbb{R}$.
$y = f(x) \to$ εικόνα του x.
$f(A) \to$ Σύνολο εικόνων του A ή Πεδίο Τιμών.
• Προφανώς $f(A) \subseteq B$.



Για να δείξω ότι μια σχέση είναι συνάρτηση,
δείχνω ότι: $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.
ή αντιθετοαντίστροφα: $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

▼ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Η $f: A \to B$ λέγεται σταθερή με τιμή c, όταν $\forall x \in A$, $f(x) = c$.
2) Η $f: A \to A$ λέγεται ταυτοτική στο A, όταν $\forall x \in A$, $f(x) = x$.

▼ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. Η $f: A \to B$ λέγεται:

1) Συνάρτηση "επί" όταν $f(A) = B$.
2) Συνάρτηση "ένα προς ένα" ("1-1") όταν
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$
ή αντιθετοαντίστροφα $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
3) Συνάρτηση "1-1 και επί" όταν συμβαίνουν τα 1 και 2.

• Όταν η $f: A \to B$ είναι "1-1 και επί" υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$ η οποία είναι επίσης "1-1 και επί".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9 Δείξτε ότι οι παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις:
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x + \beta$
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^2$. $(\alpha \neq 0)$
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$.
4) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ $(\alpha \neq 0)$
5) $f: \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$.

10 Ποιές από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι "1-1";

11 Δείξτε ότι: 1) η $f: (-2, 5] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^2 + 3$ δεν είναι "1-1".
2) η $\varphi: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = 2x^2 + 3$ είναι "1-1".

▼ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ⟶ A.

Όταν δε δίνεται, παίρνουμε για Π.Ο. το "ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$" για το οποίο ο τύπος $y=f(x)$ της συνάρτησης f έχει έννοια πραγματικού αριθμού. Έτσι σε συνάρτηση:

1) ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ⟶ $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$ το $A=\mathbb{R}$.

2) ΡΗΤΗ (ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ) ⟶ $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$ το $A=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: g(x)=0\}$.

3) ΑΡΡΗΤΗ ⟶ $f(x)=\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ το $A=\{x\in\mathbb{R}: \varphi(x)\geq 0\}$.

4) ΕΚΘΕΤΙΚΗ ⟶ $f(x)=\alpha^x : \alpha>0$ το $A=\mathbb{R}$.

- Αν $f(x)=[\varphi(x)]^{g(x)}$ το Π.Ο. $A=\{x\in\mathbb{R}: \varphi(x)>0\}$.

5) ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ⟶ $f(x)=\log_\alpha x : \alpha>0 \wedge \alpha\neq 1$ το $A=\mathbb{R}^*_+$.

- Αν $f(x)=\log_{\varphi(x)} h(x)$ το Π.Ο. προκύπτει από τις σχέσεις: $\begin{cases} h(x)>0 \\ \varphi(x)>0 \\ \varphi(x)\neq 1 \end{cases}$.

▼ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ πραγματικού αριθμού x ⟶ $|x|=\begin{cases} x, & \text{αν } x\geq 0 \\ -x, & \text{αν } x<0 \end{cases}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) $|x|\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}. (|x|=0 \Leftrightarrow x=0)$.
2) $-|x|\leq x\leq |x|$, $|x|=\max\{-x,x\}$.
3) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$.
4) $|x|-|y|\leq\big||x|-|y|\big|\leq|x\pm y|\leq|x|+|y|$.
5) $|x|^{2k}=x^{2k}$, $|x|^{2k+1}=|x^{2k+1}|$.
6) $|x|=|-x|$
7) $|\eta\mu x|\leq 1$, $|\sigma\upsilon\nu x|\leq 1$.
8) $|x|=\alpha>0 \Leftrightarrow x=\pm\alpha$.
9) $|x|=|\alpha| \Leftrightarrow x=\pm\alpha$.
10) $|x|\leq\alpha \Leftrightarrow -\alpha\leq x\leq\alpha \Leftrightarrow x\in[-\alpha,\alpha]$.
11) $|x|<\alpha \Leftrightarrow -\alpha<x<\alpha \Leftrightarrow x\in(-\alpha,\alpha)$.
12) $|x|\geq\alpha \Leftrightarrow x\leq-\alpha \vee x\geq\alpha \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\alpha]\cup[\alpha,+\infty)$.
13) $|x|>\alpha \Leftrightarrow x<-\alpha \vee x>\alpha \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$.

- Στις 10-11-12-13 ο $\alpha>0$. Αν $\alpha<0$ τότε οι 10-11 είναι αδύνατες, ενώ οι 12-13 ταυτότητες.

ΑΣΚΗΣΗ

(12) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

1) $y=-2x^4+\frac{2}{3}x-\sqrt{5}$.
2) $y=\dfrac{x}{x^2-6x+9}$
3) $y=\dfrac{x-1}{x^2+5x-6}$
4) $y=\dfrac{3}{x^2-x+1}$
5) $y=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$
6) $y=\dfrac{x+1}{x+2}$
7) $y=\sqrt{1-x}$
8) $y=\sqrt[3]{2x-5}$
9) $y=\sqrt[4]{x^2-x-12}$
10) $y=\sqrt{x^2+x+3}$
11) $y=\sqrt[5]{x^2+5x+1}$
12) $y=\sqrt[6]{x^2+25-10x}$
13) $y=\sqrt{x-x^3}$
14) $y=-\dfrac{2}{\sqrt{3-x}}$
15) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$
16) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$
17) $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\sqrt{x^2-4}$.
18) $y=\sqrt[4]{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{5+x}}$.
19) $y=\sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-5)}$.
20) $y=\sqrt{x^2-4}+\sqrt[3]{x-1}$
21) $y=3|x-2|+5$.
22) $y=\dfrac{2}{|x-2|-1}$.
23) $y=\dfrac{3x-1}{|x|+2}$.
24) $y=\sqrt{3-|x|}$.
25) $y=\sqrt{|x|+3}$.
26) $y=\sqrt{|x-2|-1}$.
27) $y=\log_x(5x+3)$
28) $y=\ln\dfrac{5+x}{3-x}$
29) $y=x^x$

ΙΣΟΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $f_1=f_2 \Leftrightarrow A_1=A_2=A$ και $f_1(x)=f_2(x)$, $\forall x\in A$.

• Εννοείται ότι οι f_1, f_2 θα έχουν και ίδιο σύνολο αφίξεως B, άρα ίδιο γράφημα.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ – ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Έστω $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $A_2 \subset A_1$.
Τότε η $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ με $f_2(x)=f_1(x)$, $\forall x\in A_2$ → Περιορισμός της f_1 στο A_2,
ενώ η f_1 → Επέκταση της f_2 στο A_1.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω f_1, f_2 συναρτήσεις με πεδία ορισμού A_1, A_2 αντίστοιχα.

1) **ΑΘΡΟΙΣΜΑ** f_1+f_2 : $A=A_1\cap A_2$ και $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

2) **ΑΝΤΙΘΕΤΗ** $-f_1$ της f_1 : $A=A_1$ και $(-f_1)(x)=-f_1(x)$.

• Οι γραφικές παραστάσεις των $f_1, -f_1$ είναι συμμετρικές ως προς τον $x'x$.

3) **ΔΙΑΦΟΡΑ** f_1-f_2 : $A=A_1\cap A_2$ και $(f_1-f_2)(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

4) **ΓΙΝΟΜΕΝΟ** λf_1 του $\lambda\in\mathbb{R}$ με την f_1 : $A=A_1$ και $(\lambda f_1)(x)=\lambda\cdot f_1(x)$.

5) **ΓΙΝΟΜΕΝΟ** $f_1 f_2$: $A=A_1\cap A_2$ και $(f_1 f_2)(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$.

6) **ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ** $\frac{1}{f_1}$ της f_1 : $A'=A_1-\{x\in\mathbb{R} : f_1(x)=0\}$ και $\left(\frac{1}{f_1}\right)(x)=\frac{1}{f_1(x)}$.

7) **ΠΗΛΙΚΟ** $\frac{f_1}{f_2}$: $A=A_1\cap A_2'$ όπου $A_2'=A_2-\{x\in\mathbb{R} : f_2(x)=0\}$
και $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

13) Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1 : f_1(x)=|x-2|-|x+5|+2$ και
$f_2 : f_2(x)=\begin{cases} 9, & \text{αν } x<-5 \\ -2x-1, & \text{αν } -5\le x<2 \\ -5, & \text{αν } 2\le x. \end{cases}$ Δείξτε ότι $f_1=f_2$.

14) Δίνονται οι συναρτήσεις $f : f(x)=\frac{(x-2)(x^2-3x-10)}{x^2-4}$ και $g : g(x)=x-5$.
1) Βρείτε τα πεδία ορισμού τους A_f και A_g.
2) Δείξτε ότι η f είναι περιορισμός της g στο A_f.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f : f(x)=\frac{x^3-9x}{x^2-25}$. Να οριστεί η $\frac{1}{f}$.

16) Δίνονται οι συναρτήσεις $f : f(x)=\log x$ και $\varphi : \varphi(x)=\log(-x)$.
1) Να εξεταστεί αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f+\varphi$ και $f\varphi$.
2) Να οριστούν οι συναρτήσεις $\frac{1}{f}$ και $\frac{1}{g}$.

17) Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ και $g : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (ακολουθίες)
με τύπους $f(\nu)=(-1)^\nu$ και $g(\nu)=\begin{cases} 1, & \text{αν } \nu=2k \\ -1, & \text{αν } \nu=2k+1 \end{cases}$
Δείξτε ότι:
1) $f=g$. 2) $f(\mu)+f(\mu+1)=0$, $\forall \mu\in\mathbb{N}$.

18 Αν f, g, h είναι συναρτήσεις του F_A, δείξτε ότι:

1) $f=g \Leftrightarrow f+h=g+h$. 4) $f=g \Rightarrow fh=gh$.

2) $\kappa(f+g)=\kappa f+\kappa g$, $\forall \kappa\in\mathbb{R}$. 5) $(-f)(-g)=fg$.

3) $(-f)g=-fg$.

• **F_A είναι το σύνολο των συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού A.**

19 Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1: f_1(x)=\frac{3x^2+4}{x}$ και $f_2: f_2(x)=\frac{-2x^2-4}{x}$.
Να ορίσετε τη συνάρτηση $f=f_1+f_2$
και να δείξτε ότι η f είναι ταυτοτική.

20 Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1: f_1(x)=x$, $f_2: f_2(x)=x+\frac{1}{x}$, $f_3: f_3(x)=x-\frac{1}{x}$.
Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $f=f_2^2-f_3^2$ και $\varphi=\frac{f_2+f_3}{f_1}$
είναι σταθερές.

21 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1: f_1(x)=\begin{cases} x^2-5x+2, & x\in[-3,5] \\ 5x+2, & x\in\mathbb{R}-[-3,5] \end{cases} \quad \text{και} \quad f_2: f_2(x)=\begin{cases} -5x+7, & x\in[-2,7] \\ -x^2+5x-1, & x\in\mathbb{R}-[-2,7] \end{cases}.$$

Να ορίσετε την f_1+f_2 και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία
είναι σταθερή.

22 Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\left|\frac{x}{2}-1\right|+\left|\frac{x}{2}+1\right|$.

1) Να απαλλαγεί ο τύπος από τις απόλυτες τιμές
(δηλαδή να γίνει πολλαπλού τύπου).

2) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η f είναι
σταθερή ή ταυτοτική.

23 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: f(x)=\sqrt{1-x^2}$ και $g: g(x)=\frac{1}{x}$.
Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$.

24 Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (ακολουθίες)
με τύπους $f(\nu)=(-1)^\nu$ και $g(\nu)=2^\nu$.
Να ορισθούν οι συναρτήσεις $f-g$, $2f+2g$, fg.

25 Αν f_1, f_2 είναι σταθερές συναρτήσεις του F_A,
δείξτε ότι και οι συναρτήσεις $f_1\pm f_2$, f_1f_2 και f_1/f_2
είναι επίσης σταθερές.

26 Αν $f: f(x)=\log(x+2)$ και $g: g(x)=\sqrt{-5x}$ να βρεθούν οι
συναρτήσεις $f+g$, fg, f/g.

27 Αν $f: f(x)=3\sqrt{1-x^2}$ και $g: g(x)=\sqrt{2\eta\mu x}$ να βρεθούν οι
συναρτήσεις $f+g$ και g/f.

28 Αν $f: f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2-36}$, να βρεθούν οι συναρτήσεις $\frac{1}{f}$, $f+\frac{1}{f}$, $f/4f$.

▼ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ – ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

1) f άρτια $\Leftrightarrow$ $\forall x\in A,\ -x\in A$ και $f(-x)=f(x)$.

- Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
- Βασικές άρτιες: $y=c$, $y=|x|$, $y=\alpha x^2+\gamma$, $y=\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$, $y=\sigma\upsilon\nu x$.

2) f περιττή $\Leftrightarrow$ $\forall x\in A,\ -x\in A$ και $f(-x)=-f(x)$.

- Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή $O(0,0)$.
- Βασικές περιττές: $y=\alpha x$, $y=\frac{\alpha}{x}$, $y=\eta\mu x$, $y=\varepsilon\varphi x$, $y=\sigma\varphi x$, $y=\alpha x^3+\beta x$.

Από τους ορισμούς 1-2 φαίνεται ότι:
βασική προϋπόθεση ώστε η f να είναι άρτια ή περιττή, είναι το Π.Ο. της A να είναι συμμετρικό ως προς την αρχή O, οπότε $\forall x\in A \Rightarrow -x\in A$.

3) f περιοδική $\Leftrightarrow$ $\exists T\in\mathbb{R}^*: \forall x\in A,\ x+T\in A$ και $f(x+T)=f(x)$.

- Η μελέτη της μπορεί να περιορίζεται σε διάστημα πλάτους T.
- Βασικές περιοδικές:

Η $y=\eta\mu x$ και η $y=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.
Η $y=\varepsilon\varphi x$ και η $y=\sigma\varphi x$,, ,, ,, ,, π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

29) Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες:
1) $f(x)=|x-4|+|x+4|$. 2) $h(x)=x^4-x^2$. 3) $g(x)=x^2+\sigma\upsilon\nu x$. 4) $\varphi(x)=2x^4-3x^2+5$.

30) Δείξτε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι περιττές: 1) $g(x)=x+\eta\mu x$.
2) $f(x)=x^3+x$ στο $[-1,1]$. 3) $h(x)=\frac{2}{x^3}+\varepsilon\varphi x$. 4) $\varphi(x)=\frac{3x|x|}{2|x|+1}$.

31) Η συνάρτηση $f: f(x)=2x-1$ να αναλυθεί σε άθροισμα δύο συναρτήσεων g και r, ώστε η μία να είναι άρτια και η άλλη περιττή.

32) Αν f άρτια ή περιττή, δείξτε ότι η $g: g(x)=[f(x)]^2$ είναι άρτια.

33) Να εξεταστεί αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.
1) $f: f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$ στο $(-3,7]$. 2) $g: g(x)=x^3+5x$ στο $[-4,4)$.

34) Δείξτε ότι η $f: f(x)=\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}$ έχει περίοδο 2π.

35) Να βρεθεί η περίοδος των συναρτήσεων:
1) $f: f(x)=\eta\mu 7x$ 2) $g: g(x)=\varepsilon\varphi\frac{5x}{2}$.

36) Δείξτε ότι η $f: f(x)=\sigma\varphi(x^2)$ δεν είναι περιοδική.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

Μία συνάρτηση f ορισμένη στο A λέγεται:

1) Γνησίως αύξουσα ↥ όταν $\forall x_1, x_2 \in A$: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
2) Αύξουσα $\uparrow$ » » » $\Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
3) Γνησίως φθίνουσα ↧ » » » $\Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
4) Φθίνουσα $\downarrow$ » » » $\Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
5) Σταθερή ($\uparrow \wedge \downarrow$) » » » $\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

→ Μονότονη όταν είναι $\uparrow$ ή $\downarrow$.
Γνησίως μονότονη όταν είναι ↥ ή ↧.

• Αν ο περιορισμός της f στο $A_1 \subset A$ είναι μονότονη συνάρτηση τότε η f είναι μονότονη στο A_1.

ΠΡΟΣΟΧΗ ► Η f μπορεί να παρουσιάζει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο υποσύνολα A_1, A_2 του Π.Ο. της, αλλά "όχι" και στο $A_1 \cup A_2$.

→ Το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης καθορίζεται ισοδύναμα και από το πρόσημο του λόγου μεταβολής $\lambda = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$: $x_1 \neq x_2$.
Έτσι η f είναι στο $A_1 \subset A$

1) ↥ όταν $\forall x_1, x_2 \in A_1$, $\lambda > 0$. 3) ↧ όταν $\forall x_1, x_2 \in A_1$, $\lambda < 0$.
2) $\uparrow$ » », $\lambda \geq 0$. 4) $\downarrow$ » », $\lambda \leq 0$.

Θ. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι "1-1". (Απόδειξη...)

▼ Εφαρμογές-Θεωρία (Απόδειξη...)

1) Αν οι f_1, f_2 (ορισμένες στο A) είναι αύξουσες, τότε: i) η $f_1 + f_2$ είναι $\uparrow$
ii) η αf_1 ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) είναι $\begin{cases} \uparrow & \text{αν } \alpha > 0 \\ \downarrow & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$.

2) Αν όλοι οι όροι μιας ακολουθίας (α_ν) είναι θετικοί, τότε:
i) $(\alpha_\nu) \downarrow \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq 1$. ii) $(\alpha_\nu) \uparrow \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \geq 1$.

→ Μονοτονία γνωστών συναρτήσεων.

1) Η $y = \alpha x + \beta$ είναι $\begin{cases} ↥ & \text{αν } \alpha > 0 \\ ↧ & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$. Αν $\alpha = 0$ είναι σταθερή. ($y = \beta$).

2) Η $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι $\begin{cases} \text{Αν } \alpha > 0: ↧ \text{ στο } \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right] \text{ και } ↥ \text{ στο } \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right) \\ \text{Αν } \alpha < 0: ↥ \text{ » » » } ↧ \text{ » »} \end{cases}$.

• Το σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ είναι min στη πρώτη περίπτωση και max στη δεύτερη.

3) Η $y = \frac{\alpha}{x}$ είναι $\begin{cases} \text{Αν } \alpha > 0 \text{ ↧ στα } (-\infty, 0), (0, +\infty). \\ \text{Αν } \alpha < 0 \text{ ↥ στα » , ».} \end{cases}$

4) Η $y = \alpha^x$: $\alpha > 0$ είναι $\begin{cases} ↥ & \text{αν } \alpha > 1 \\ ↧ & \text{αν } \alpha < 1 \end{cases}$. Αν $\alpha = 1$ είναι σταθερή. ($y = 1$).

5) Η $y = \log_\alpha x$: $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$ είναι $\begin{cases} ↥ & \text{αν } \alpha > 1 \\ ↧ & \text{αν } \alpha < 1 \end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

37 Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μονότονες στο Π.Ο. τους:

1) $y=x^2$ στο $(-\infty,0]$. 4) $y=3x+2$ 7) $y=3^x$
2) $y=\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$. 5) $y=-5x$ 8) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
3) $y=x^3$ 6) $y=x^2-4x+5$ στο $[2,+\infty)$. 9) $y=\log_5 x$.

38 Όμοια για τις συναρτήσεις:

1) $y=-\frac{2}{x}$ στο $(-\infty,0)$. 2) $y=\frac{x+1}{x-3}$ στο $(-\infty,3)$. 3) $y=\frac{6x-5}{2x+4}$ στο $(-2,+\infty)$.
4) $y=\ln x$. 5) $y=\log x$. 6) $y=\log_{1/2}x$ 7) $y=\log_{\sqrt{2}}x$.

39 Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

1) $y=\frac{3x+1}{x+2}$. 2) $y=\frac{x+8}{3x+1}$. 3) $y=\frac{1}{x^3}+1$. 4) $y=-3x^2$. 5) $y=\frac{1}{2}x^2+3$.
6) $y=x^2-x+1$. 7) $y=-2x^2+3x-1$. 8) $y=4x^3+8$. 9) $y=\frac{3}{x-1}$.

40 Όμοια για τις συναρτήσεις:

1) $y=|x|$. 2) $y=|4x-5|+6$. 3) $y=|x|+|1-x|-2x$
4) $y=\frac{2}{|x|}$. 5) $y=\frac{|x-1|}{x-1}$. 6) $y=x^2-|x|$

41 Όμοια για τις συναρτήσεις:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}-5}$ 2) $y=\frac{2}{\sqrt{x}-1}$ 3) $y=\sqrt{x}+2$. 4) $y=3x+4\sqrt{x}$.
5) $y=4x^3+5$ 6) $y=\left|\frac{x+2}{x-1}\right|$. 7) $f: f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{αν } 0\neq x\leq 2.\\ -2x+6, & \text{αν } x>2.\end{cases}$

42 Δείξτε ότι η συνάρτηση:

1) $y=3-2x^3$ είναι $\downarrow$ σε όλο το Π.Ο. της.
2) $y=\frac{1}{4x^3}+2$ είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}^*_+$.
3) $y=\frac{1}{x^2+5}$ είναι $\uparrow$ στο $(-\infty,0]$ και $\downarrow$ στο $[0,+\infty)$.

43 Δείξτε ότι:
αν μια συνάρτηση f είναι $\uparrow$ τότε δεν μπορεί να είναι άρτια.

44 Οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και παίρνουν τιμές από το σύνολο $\mathbb{R}^*_+$, $\forall x\in A$.
Δείξτε ότι:
1) Αν και οι δύο είναι αύξουσες, τότε και η fg είναι αύξουσα.
2) » » » » » φθίνουσες, » » » » » φθίνουσα.

▼ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ → $f(A)$.

Για να βρώ το Π.Τ. συνάρτησης $y=f(x)$ δουλεύω ως εξής:

Γενικά: •₁ Βρίσκω το Π.Ο. A (αν δε δίνεται)

•₂ Λύνω ως προς x και βρίσκω τα όρια του y, χρησιμοποιώντας αυτά που έκανα για το A.

▼Ειδικά:

1) Σε ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ με $A=\mathbb{R}$ (Να δειχτούν...)

i) $y=\alpha x+\beta$: $\alpha\neq 0 \rightarrow f(A)=\mathbb{R}$. Αν $\alpha=0 \rightarrow f(A)=\{\beta\}$ (σταθερή).

ii) $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$: $\alpha\neq 0$ → Αν $\alpha>0 \rightarrow f(A)=\left[-\frac{\Delta}{4\alpha},+\infty\right)$
→ Αν $\alpha<0 \rightarrow f(A)=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4\alpha}\right]$

2) ΣΕ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

i) Ομογραφική $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ με $A=\mathbb{R}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\} \rightarrow f(A)=\mathbb{R}-\{\frac{\alpha}{\gamma}\}$. (Να δειχτεί.)

ii) Σε ανάγωγο κλάσμα (Δηλαδή όταν δεν έχει απλοποίηση).

•₁ Αφού βρώ το A, λύνω ως προς x και σχηματίζω τη β΄βάθμια εξίσωση...

•₂ Αν το α εξαρτάται απο το y, διακρίνω τις περιπτώσεις:

1) $\alpha=0$ (⇔ βρίσκω το y), λύνω την α΄ βάθμια ως προς x και έστω $x=\rho$, οπότε αν → $\rho\in A$ τότε και το $y\in f(A)$
→ $\rho\notin A$,, ,, ,, $y\notin f(A)$.

2) $\alpha\neq 0$. Τότε πρέπει $\Delta\geq 0$ (ώστε οι ρίζες της β΄βαθμίου να είναι πραγματικές)
Απο τη $\Delta\geq 0$ βρίσκω τα όρια του y και σε συνδυασμό με το 1) βρίσκω το $f(A)$.

iii) Σε μη ανάγωγο κλάσμα

•₁ Αφού βρώ το A παραγοντοποιώ πάνω-κάτω και απλοποιώ.

•₂ Βρίσκω το Π.Τ. της νέας συνάρτησης (που είναι "επέκταση" της αρχικής)

•₃ Απο αυτό το Π.Τ. εξαιρώ τις τιμές του y που παίρνω, αν στη νέα συνάρτηση βάλω στη θέση του x τις τιμές που εξαιρούνται απο το A.

3) ΣΕ ΑΡΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ → $y=\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$

•₁ Βρίσκω το A ($\varphi(x)\geq 0$).

•₂ Βάζω το περιορισμό $y\geq 0$ και υψώνω στο δείκτη ν της ρίζας, για να φύγει το ριζικό.

•₃ Συνεχίζω όπως παραπάνω...

⊗ → Αν $y=-\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ βάζω $y\leq 0$...

⊗ → Αν $y=\sqrt[\nu]{\varphi(x)}+\alpha$,, $y-\alpha\geq 0$...

4) ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

•₁ Βρίσκω το A και μετατρέπω την f σε συνάρτηση πολλαπλού τύπου, ανάλογα με τις ρίζες των απολύτων (Διάκριση περιπτώσεων...)

•₂ Βρίσκω τα $f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_\nu)$ για κάθε διάστημα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ οπότε το $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup\ldots\cup f(A_\nu)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

45 Να βρεθεί το πεδίο τιμών των συναρτήσεων:
1) $y=2x-1$. 2) $y=-3x+7$. 3) $y=x^2-5x+6$. 4) $y=-2x^2+4x+7$.
5) $y=x^2-4$. 6) $y=2x^2-2x$. 7) $y=-3x^2$. 8) $y=-2x^3+5$.

46 Όμοια, των συναρτήσεων:
1) $y=\frac{3}{x}$ 2) $y=\frac{2x+1}{x+3}$. 3) $y=\frac{4}{2x-5}$. 4) $y=\frac{2x-1}{4x-2}$

47 Όμοια, των συναρτήσεων:
1) $y=\frac{x+2}{x^2+2}$. 2) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+3}$. 3) $y=\frac{x^2-6x+8}{x^2-2x+1}$. 4) $y=\frac{x^2+4x-36}{2x-10}$.
5) $y=\frac{x^2+x+2}{x^2+x+3}$. 6) $y=\frac{5x}{x^2+x+1}$. 7) $y=\frac{x^2-10x+21}{2x-15}$. 8) $y=\frac{(x-8)(2-x)}{x^2}$.

48 Όμοια, των συναρτήσεων:
1) $y=\frac{x^2-5x+6}{2x-6}$. 2) $y=\frac{x^2-9}{x-3}$. 3) $y=\frac{(x-1)\cdot(x^2+5x+6)}{(x^2+x-2)\cdot(x+4)}$.
4) $y=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$. 5) $y=\frac{4x^2-1}{6x^2-7x+2}$. 6) $y=\frac{x^3-1}{x-1}$. 7) $y=\frac{x^4-16}{x^2+4}$.

49 Όμοια, των συναρτήσεων:
1) $y=\sqrt{1-x^2}$. 2) $y=-\sqrt{x^2-9}$. 3) $y=\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}}$. 4) $y=2-\sqrt{x+3}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ. Αν η f ορίζεται σε περιορισμό $A_1 \subset A$, δουλεύω ως εξής:
α' τρόπος: Συνθετικά. Βάζω το x στο A_1 και δημιουργώ το $y=f(x)$
(Ειδικά, για το τριώνυμο σε διάστημα, βλέπε τετράδιο...).
β' τρόπος: Λύνω τη $y=f(x)$ ως προς x και τη λύση που βρίσκω (έστω $\varphi(y)$) τη βάζω στο A_1 και βρίσκω το y. Δηλαδή: $x\in A_1 \Rightarrow \varphi(y)\in A_1 \Rightarrow y\in f(A)$.

50 Να βρεθεί το πεδίο τιμών των συναρτήσεων:
1) $f:\{-2,0,1\}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x-1$. 2) $f:[-2,5)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=3x-1$
3) $f:\{-3,-2,1,5,10\}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2+1$. 4) $y=3x+2$ στο $[-1,2]$.
5) $y=\frac{x+2}{x-3}$ στο $[0,2)$. 6) $y=-\frac{2}{x}$ στο $[-2,0)$.

51 Όμοια, των συναρτήσεων:
1) $y=x^2-1$, αν $x\in(-5,6]$. 2) $y=2x^2+3x$, αν $x\in[-1,2)$
3) $y=x^2-5x+6$, αν $x\in[-2,3]$. 4) $y=x^2+3x+1$, αν $x\in(2,5)$.

52 Όμοια, των συναρτήσεων:
1) $f: f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in[1,2)\\ 3x-2, & x\in[2,6)\end{cases}$. 2) $y=\frac{|x|}{2x}$. 3) $y=|x-1|+2$. 4) $y=|3x-1|-2|x|+3$. 5) $y=\frac{x}{1-|x|}$

53 Όμοια, των συναρτήσεων:
1) $y=x^3+2$ 2) $y=x-|x|$. 3) $y=\frac{3}{2-x^2}$. 4) $y=|x-2|$
5) $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. 6) $y=\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$. 7) $y=\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}$. 8) $y=x^2+2x$, αν $x\in(0,+\infty)$.
9) $y=\frac{2^x+1}{3+2^x}$

▼ ΦΡΑΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, λέγεται:

1) Φραγμένη άνω, όταν υπάρχει $\Phi \in \mathbb{R}: \forall x \in A,\ f(x) \leq \Phi$.
- Ο Φ και κάθε μεγαλύτερός του, λέγεται άνω φράγμα της f.

2) Φραγμένη κάτω, όταν υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}: \forall x \in A,\ f(x) \geq \varphi$.
- Ο φ και κάθε μικρότερός του, λέγεται κάτω φράγμα της f.

3) Φραγμένη, όταν είναι φραγμένη άνω και φραγμένη κάτω.
- Αν ο περιορισμός f_1 της f στο $A_1 \subset A$ είναι συνάρτηση φραγμένη (ή άνω ή κάτω) τότε η f λέγεται φραγμένη στο A_1 (ή άνω ή κάτω).

→ ΕΤΣΙ, για να δείξω αν μια συνάρτηση είναι ή όχι φραγμένη (ή άνω ή κάτω), βρίσκω το πεδίο τιμών της $f(A)$ και από κει συμπεραίνω...

▼ Εφαρμογή – Θεωρία (Απόδειξη...).

Μία συνάρτηση f είναι φραγμένη στο A, αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}_+: \forall x \in A,\ |f(x)| \leq \theta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

54) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=3x-2$. Δείξτε ότι η f είναι:
1) φραγμένη άνω στο $A_1=(-\infty,3)$. 2) φραγμένη κάτω στο $A_2=[2,+\infty)$.
3) φραγμένη στο $A_3=(-1,4]$.

55) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=x^2+x+3$ είναι:
1) φραγμένη κάτω στο $A_1=(2,+\infty)$. 2) φραγμένη στο $A_2=[1,4]$
3) φραγμένη κάτω στο πεδίο ορισμού της $A=\mathbb{R}$.

56) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=\dfrac{3x+4}{x-1}$ δεν είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

57) Δείξτε ότι η $f: f(x)=3x^2$ είναι φραγμένη στα $A_1=(2,3)$, $A_2=(3,4]$. Ποιό είναι το μέγιστο κάτω φράγμα (inf) και ποιό το ελάχιστο άνω φράγμα (sup) σε κάθε περίπτωση.

58) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=3\eta\mu x$ είναι φραγμένη.

59) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$ είναι φραγμένη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

60) Αν f, g είναι συναρτήσεις του F_A και φραγμένες, δείξτε ότι:
1) Η συνάρτηση $f+g$ είναι φραγμένη.
2) » » $c \cdot f$ ($c>0$ σταθερά) είναι φραγμένη.
3) » » fg είναι φραγμένη. (Χρησιμοποιείστε την εφαρμογή...).

▼ ΑΚΡΟΤΑΤΑ (max − min) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

1) Ένα άνω φράγμα μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ είναι δυνατό να ανήκει στο Π.Τ. της $f(A)$. Στη περίπτωση αυτή $\exists x_0 \in A: f(x) \leq f(x_0), \forall x \in A$. Η τιμή $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f, και λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 μέγιστο το $f(x_0)$. Δηλαδή: $max = (x_0, f(x_0))$.

2) Όμοια, ένα κάτω φράγμα είναι δυνατό να ανήκει στο Π.Τ. $f(A)$. Τότε $\exists x_0 \in A: f(x) \geq f(x_0), \forall x \in A$ και λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο το $f(x_0)$. Δηλαδή: $min = (x_0, f(x_0))$.

➜ ΑΡΑ τα ακρότατα είναι συνυφασμένα με το Π.Τ. $f(A)$. Δηλαδή: για να τα βρω, βρίσκω το $f(A)$ και παίρνω τα άκρα των διαστημάτων του $f(A)$ στα οποία αυτό είναι κλειστό διάστημα.

ΕΤΣΙ, αν το $f(A)$ είναι της μορφής:

α) $f(A) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \Rightarrow \nexists$ ακρότατα.
β) $f(A) = (\alpha, \beta) \Rightarrow$ » »
γ) $f(A) = (-\infty, \beta] \Rightarrow$ (ολικό) max το β.
δ) $f(A) = [\alpha, \beta) \Rightarrow$ (») min το α.
ε) $f(A) = [\alpha, \beta] \Rightarrow$ (») » » » και (ολικό) max το β.
στ) $f(A) = (-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty) \Rightarrow$ (τοπικό) max το α και (τοπικό) min το β.
ζ) $f(A) = (-\infty, \alpha] \cup (\beta, +\infty) \Rightarrow$ (») » » » » $\nexists$ min.
η) $f(A) = (-\infty, \alpha] \cup [\beta, \gamma] \cup [\delta, +\infty) \Rightarrow$ 2 (τοπ.) max α, γ και 2 (τοπ.) min β, δ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ που βρίσκω είναι οι τεταγμένες των αντίστοιχων ακροτάτων. Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση βρίσκω και τις τετμημένες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

61 Να βρεθούν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) των συναρτήσεων:
1) $y = -2x + 3$. 2) $y = 2x^2 - 8x + 6$. 3) $y = -2x^2 + 16x + 1$. 4) $y = \frac{3}{x}$.
5) $y = \frac{3x+2}{x-1}$. 6) $y = \frac{x^2+3}{-x^2+2x-1}$. 7) $y = \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+4}$. 8) $y = \frac{x^2+4x-36}{2x-10}$.
9) $y = \frac{2x-3}{x^2-2x+3}$. 10) $y = \frac{x^2-4x+3}{x^2+5x-14}$. 11) $y = \frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$. 12) $y = \frac{5x}{x^2+x+1}$.
13) $y = |2-x| + 3$. 14) $y = \sqrt{4-x^2}$. 15) $y = \sqrt{1-x^2}$. 16) $y = |x| - 3|x+4|$.

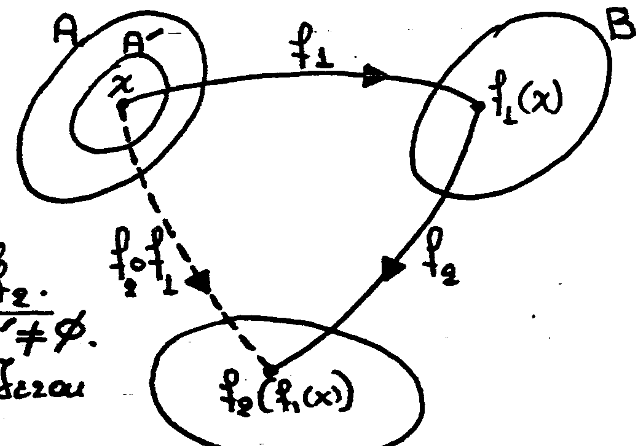
62 Αν $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ και $xx' = K^2$ ($K > 0$ σταθερά), δείξτε ότι το άθροισμα $x + x'$ γίνεται ελάχιστο όταν $x = x' = K$. (Βλέπε και εφαρμογή 1 βιβλίου σελ.28).

63 Από όλα τα ορθογώνια παρ/μα με την ίδια περίμετρο 2α, ποιό έχει το μέγιστο εμβαδόν;

64 Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με το ίδιο εμβαδόν K^2, να βρεθεί εκείνο που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα.

▼ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Γενικά: Έστω δύο συναρτήσεις f_1, f_2 ορισμένες στα A, B αντίστοιχα.
Τότε: $\forall x \in A \xrightarrow{f_1} f_1(x)$ και αν $f_1(x) \in B \xrightarrow{f_2} f_2(f_1(x))$.



→ Περιορίζοντας λοιπόν την f_1 στο σύνολο $A' = \{x \in A : f_1(x) \in B\}$, ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $f_2 \circ f_1$ με πεδίο ορισμού A' και τύπο $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$, που τη λέμε σύνθεση των f_1, f_2.

- Για να ορίζεται η $f_2 \circ f_1$ πρέπει $A' \neq \varnothing$.
- Αν $f_1(A) \subseteq B$ τότε η $f_2 \circ f_1$ ορίζεται στο A. (Δηλαδή $A' = A$).
- Η $f_1 \circ f_2$ ορίζεται στο $B' = \{x \in B : f_2(x) \in A\}$.

→ ΑΡΑ: για να βρω τη σύνθεση $f_2 \circ f_1$ των f_1, f_2 που ορίζονται στα A, B αντίστοιχα, δουλεύω ως εξής:

1) Βρίσκω το A', λύνοντας το σύστημα: $\begin{cases} x \in A \\ f_1(x) \in B \end{cases}$.
2) Βρίσκω το τύπο $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$ αντικαθιστώντας στο τύπο της f_2 όπου x το $f_1(x)$.

- Δεν ισχύει (εν γένει) η αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή:
$$f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(65) Δίνονται οι συναρτήσεις $f: f(x) = 3x+1$ και $g: g(x) = x+4$ ορισμένες στα $[-1, 6]$ και $[0, 7]$ αντίστοιχα.
Να οριστούν οι συναρτήσεις: $g \circ f$ και $f \circ g$.

(66) Να βρεθεί η σύνθεση $g \circ f$ των συναρτήσεων $f: f(x) = x^2$ και $g: g(x) = \sqrt{x+2}$.

(67) Να βρεθεί η σύνθεση $f_2 \circ f_1$ των $f_1: f_1(x) = x^2+1$ και $f_2: f_2(x) = \sqrt{3-x}$.

(68) » » » » » » $f_1: f_1(x) = 2x+1$ » $f_2: f_2(x) = x^2+2$.

(69) » » » » $g \circ f$ » $f: f(x) = \sqrt{25-x^2}$ » $g: g(x) = x^2-3x+1$.

(70) Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1: f_1(x) = ημx$ και $f_2: f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Να βρεθούν οι συναρτήσεις: $f_2 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_2$.
ii) Αν $f: f(x) = x$ και $g: g(x) = |x|$ δείξτε ότι: $f \circ g = g \circ f$.

▼ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

Μία συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται ως γνωστόν (Φυλ.3):

1) "επί" όταν $f(A)=B$. ● Όταν δεν δίνεται το B, παίρνουμε $B=\mathbb{R}$.

2) "1-1" όταν $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ή ισοδύναμα όταν $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ (Αντιθετοαντίστροφη).

⇕ Η αντίστροφη σχέση μιας συνάρτησης f είναι συνάρτηση και μάλιστα "1-1 και επί" αν και μόνο αν η f είναι "1-1 και επί".
Η συνάρτηση αυτή $f^{-1}: B \to A$ έχει γραφική παράσταση συμμετρική της f ως προς τη διχοτόμο $y=x$ της $x\hat{O}y$.

● Η $f^{-1} \circ f$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο A. (Απόδειξη...)

● Η $f \circ f^{-1}$,, ,, ,, ,, ,, B.

Θ. Αν μια συνάρτηση "επί" είναι γνησίως μονότονη, τότε υπάρχει η f^{-1} η οποία έχει το ίδιο είδος μονοτονίας. (Απόδειξη...).

⇕ **ΜΕΘΟΔΟΣ.** Για να βρω (αν υπάρχει) την f^{-1} της $f: A \to B$ δουλεύω ως εξής:

1) Αποδεικνύω ότι η f είναι "επί και 1-1".
Δηλαδή: i) $f(A)=B$ οπότε f "επί". ● Οποιαδήποτε συνάρτηση f μπορούμε (αν θέλουμε) να την κάνουμε "επί" θεωρώντας για σύνολο αφίξεως το Π.Τ. της, δηλαδή παίρνοντας τη συνάρτηση $\hat{f}: A \to f(A)$.

ii) $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
ή $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$
ή f γνησίως μονότονη (και "επί" που δείχθηκε)
} οπότε f "1-1"

και άρα υπάρχει η $f^{-1}: B \to A$.

2) Ο τύπος $y=f^{-1}(x)$ της αντίστροφης προκύπτει από το τύπο της f αν εναλλάξω τα x και y και λύσω ως προς y.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(71) Δίνεται η συνάρτηση $f: [-2,3] \to [1,11]$ με τύπο $f(x)=2x+5$.
Να εξεταστεί αν η αντίστροφη σχέση αυτής είναι συνάρτηση.

(72) Όμοια για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=x^2-7x+6$.

(73) ,, ,, ,, ,, $\varphi: \varphi(x)=\frac{x}{3}+1$.

(74) Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη των συναρτήσεων:
1) $y=2x+3$. 2) $y=2x^3+3$. 3) $y=\frac{2x+3}{x-2}$. 4) $y=\frac{5x+2}{2x-1}$ αν $B=\mathbb{R}-\{\frac{5}{2}\}$.
5) $f: [0,2] \to [3,7]$ με $f(x)=2x+3$. 6) $y=3x^2$. 7) $y=3+\sqrt{x-1}$.
8) $f: [1,2] \to [2,11]$ με $f(x)=3x^2-1$.
9) $f: \mathbb{R} \to [\frac{7}{4}, +\infty)$ με $f(x)=x^2-3x+4$.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

(1) Αν $x>y>0$, $\alpha>\beta>0$, $\kappa\in\mathbb{Z}_+^*$, $\lambda\in\mathbb{Z}_-^*$ δείξτε ότι: $x^\kappa \beta^\lambda > y^\kappa \alpha^\lambda$.

(2) Αν $0<\alpha\le 1 \Rightarrow (1-\alpha)^\nu \le \dfrac{1}{1+\nu\alpha}$.

(3) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
1) $y=4\sqrt{x^2-2x}+5\sqrt{x^2-3x-4}$. 2) $y=\dfrac{2x+5}{|x-3|-4}$. 3) $y=\log\dfrac{4-x}{4+x}$.
4) $y=\dfrac{5x}{\sqrt{3-2\sigma\upsilon\nu x}}$. 5) $y=\dfrac{4x^2\ln x-5\eta\mu x}{(x-4)(x-7)}$. 6) $y=\sqrt{3-\sqrt{x-3}}$.

(4) Δείξτε ότι η συνάρτηση f: $f(x)=\dfrac{(x^2-2x)(x-3)}{x^2-5x+6}$ είναι ταυτοτική.

(5) Αν $f_1(x)=\dfrac{6}{x-1}$ και $f_2(x)=\dfrac{8x}{x^2-1}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις f_1+f_2 και $\dfrac{f_1}{f_2}$.

(6) Δίνονται οι συναρτήσεις f: $f(x)=\dfrac{3x|x|}{4|x|+3}$ και φ: $\varphi(x)=4x^4-3\sigma\upsilon\nu^3 x$.
Δείξτε ότι η πρώτη είναι περιττή και η δεύτερη άρτια.

(7) Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι συναρτήσεις:
1) $y=\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{5}$. 2) $y=\eta\mu\dfrac{x}{\pi}$. 3) $y=\varepsilon\varphi 3x$. 4) $y=\sigma\upsilon\nu(x^2-x+3)$.

(8) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:
1) $y=4x+3$. 2) $y=-3x^2+4$. 3) $y=4x^3+2$. 4) $y=\dfrac{4x+1}{x-2}$ 5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$
6) $y=|x-2|+|x+1|+2x-5$. 7) $y=\dfrac{2x}{1+|x|}$. 8) $y=x+\sqrt{x^2}$.

(9) Δείξτε ότι το πεδίο τιμών των συναρτήσεων: 1) $y=3\sigma\upsilon\nu 2x+6\eta\mu^2 x-1$
2) $y=x-\sqrt{x^2-6x+9}$ αν $x\ge 3$, αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο.

(10) Να βρεθεί το πεδίο τιμών των συναρτήσεων:
1) $y=4x-3$ αν $x\in[-2,4)$. 2) $y=4x^2-5$. 3) $y=\dfrac{3x}{x^2+1}$
4) $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1}$. 5) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{3x}$. 6) $y=\dfrac{4x-3}{2x-1}$ αν $x\in(-1,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$.
7) $y=\dfrac{x}{|x|+2}$ 8) $y=\dfrac{4x+7}{x^2+2x+2}$ 9) $y=\begin{cases}2x^2, & \text{αν } x\in[1,3)\\ 3x-1, & \text{αν } x\in[3,5)\end{cases}$.

(11) Να βρεθούν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) των συναρτήσεων:
1) $y=3x+2$, αν $x\in[3,8]$ 2) $y=-x^2+2x+3$. 3) $y=\dfrac{3x+2}{x-4}$
4) $y=\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-3x+4}$. 5) $y=\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}$. 6) $y=|x^2-9|$.

(12) Δείξτε ότι η συνάρτηση:
1) $y=-4x^2$ είναι φραγμένη άνω στο πεδίο ορισμού της.
2) $y=x^2+x+7$,, ,, κάτω στο $(3,+\infty)$.
3) $y=x^2+x+7$,, ,, στο $(2,5)$.

(13) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g\circ f$ όπου f: $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ και g: $g(x)=2x-1$.

(14) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\longrightarrow[0,1)$ με $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.
1) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το πεδίο ορισμού της.
2) Να βρείτε, αν υπάρχει, την αντίστροφη f^{-1} της f.

(15) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

(16) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h, σ με τύπους $f(x)=\sqrt{1-x}$, $g(x)=\log(x-1)$, $h(x)=\sqrt{x}$, $\sigma(x)=x^2-6x+8$.

1) Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f\circ g$, $g\circ f$, $h\circ\sigma$.

2) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $h\circ\sigma$.

(17) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$.

(18) Δίνεται η $f:(0,1)\to\left(\frac{5}{2},3\right)$ με $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$

1) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

2) Να βρεθεί η f^{-1} και να μελετηθεί και αυτή ως προς τη μονοτονία.

(19) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=x^2+\kappa x+\lambda$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.
Αν $f(2)=9$ και έχει min για $x=-1$ να βρεθεί το πεδίο τιμών της.

(20) Όμοια, για την $f: f(x)=-x^2+3x-\kappa$, $\kappa\in\mathbb{R}$, αν το $\max f(x)=-\frac{7}{2}$.

(21) Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε:

1) η $f: f(x)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^x$ να είναι $\uparrow$. 2) η $g: g(x)=\left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$ να είναι $\downarrow$.

3) η $h: h(x)=\log_{\alpha^2-1}x$ να είναι $\uparrow$ 4) η $\varphi: \varphi(x)=\log_{\alpha+3}x$ να είναι $\downarrow$.

(22) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=|2x-1|+|x-2|$.

1) Να βρεθούν τα A, $f(A)$ και τα ακρότατα της f (αν υπάρχουν).

2) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

3) Αν $x_1,x_2\in A: x_1\geq 2$ και $x_1+x_2=2$, δείξτε ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

(23) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f: f(x)=\sqrt{\eta\mu 2x}$, και το πεδίο τιμών της $\varphi: \varphi(x)=\sqrt{5|x-2|+9}$.

(24) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=x^2+x+12$ είναι:

1) φραγμένη κάτω στο $A_1=(4,+\infty)$.

2) φραγμένη στο $A_2=(1,6)$.

(25) Δείξτε ότι η $f: f(x)=\frac{x^3}{1+x}$ με $x\in\mathbb{R}_+$ είναι φραγμένη στο $A=(1,10]$.

(26) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=\frac{4\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x}{x^4+x^2+8}$ είναι φραγμένη.
(Υπόδειξη: Δείξτε ότι είναι απολύτως φραγμένη. Εφαρμογή Σημ. 12).

(27) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\eta\mu x+[\sigma\upsilon\nu x]$ είναι φραγμένη.

(28) Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $x^2-(\alpha+3)x-(\alpha-4)=0$ να είναι ελάχιστο.

(29) Αν $f: f(x)=\frac{4-\alpha x}{3-x}$, να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η $f\circ f$ να είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

(30) Αν $f:[2,22]\to[2,8]$ με $f(x)=\sqrt{3x-2}$ να βρεθεί (αν υπάρχει) η f^{-1}.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

▼ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ πραγματικών αριθμών ή απλούστερα πραγματική ακολουθία λέγεται κάθε συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ (ή $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$)

● Όταν δεν αναφέρεται το Π.Ο. της ακολουθίας θα εννοείται το $\mathbb{N}^*$.

Η τιμή μιας ακολουθίας α στο ν συμβολίζεται α_ν (αντί $\alpha(\nu)$) και λέγεται όρος με δείκτη ν. Έτσι μια ακολουθία συμβολίζεται :

1) $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ ή (α_ν) ή αναλυτικότερα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu, \dots$
2) $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ή (α_ν) ή » $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$

▼ ΤΡΟΠΟΙ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΥ ΜΙΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ.

1) Με το γενικό της όρο α_ν. π.χ. η ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{2\nu}$.

2) Επαγωγικά με αναδρομικό (αναγωγικό) τύπο ⟵● ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ακολουθίες

i) Αναδρομική α' τάξης: Δίνεται ο 1ος όρος και μια αναδρομική σχέση που εκφράζει τον όρο ν+1 τάξης συναρτήσει του προηγουμένου όρου ν τάξης. π.χ. η ακολουθία $(\alpha_\nu) : \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu - 1 \end{cases}$.

ii) Αναδρομική β' τάξης: Δίνονται ο 1ος και ο 2ος όρος και μια αναδρομική σχέση που εκφράζει τον όρο ν+2 τάξης συναρτήσει των όρων ν και ν+1 τάξης. π.χ. $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 3, \ \alpha_2 = 4 \\ \alpha_{\nu+2} = 3\alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} \end{cases}$, $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} \end{cases}$ ⟵● Fibonacci.

iii) Αναδρομική κ' τάξης: Δίνονται κ αρχικοί όροι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa$ και μια αναδρομική σχέση που εκφράζει τον γενικό όρο α_ν συναρτήσει των κ προηγουμένων του όρων. π.χ. $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 2, \ \alpha_3 = 5 \\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 2\alpha_{\nu-2} - 3\alpha_{\nu-3} \end{cases}$.

▼ ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

1) $(\alpha_\nu) \Uparrow \Leftrightarrow \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}, \ \forall \nu\in\mathbb{N}$. 3) $(\alpha_\nu) \uparrow \Leftrightarrow \alpha_\nu \le \alpha_{\nu+1}, \ \forall\nu\in\mathbb{N}$.
2) $(\alpha_\nu) \Downarrow \Leftrightarrow \alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, » . 4) $(\alpha_\nu) \downarrow \Leftrightarrow \alpha_\nu \geqslant \alpha_{\nu+1}$, » .

▼ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΙΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ.

1) Βρίσκω το ΠΡΟΣΗΜΟ της διαφοράς $\Delta = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$, οπότε αν:
$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha_\nu)\Uparrow$, $\Delta < 0 \Leftrightarrow (\alpha_\nu)\Downarrow$, $\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow (\alpha_\nu)\uparrow$, $\Delta \le 0 \Leftrightarrow \alpha_\nu \downarrow$.

2) Αν οι όροι της (α_ν) διατηρούν πρόσημο θετικό, τότε συγκρίνω το λόγο $\Lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ με τη μονάδα, οπότε αν: $\Lambda > 1 \Leftrightarrow (\alpha_\nu)\Uparrow$, $\Lambda < 1 \Leftrightarrow (\alpha_\nu)\Downarrow$, $\Lambda \geqslant 1 \Leftrightarrow (\alpha_\nu)\uparrow$, $\Lambda \le 1 \Leftrightarrow (\alpha_\nu)\downarrow$. (Αντίστροφα σε αρνητικούς όρους)

3) Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, αφού βρούμε μια ένδειξη μονοτονίας μεταξύ δύο ή τριών πρώτων όρων της ακολουθίας.

4) Με επαγωγή αν η ακολουθία ορίζεται με αναδρομικό τύπο.

5) Χρησιμοποιώντας γνωστές ταυτοανισότητες και συνήθως του Bernoulli.

● Για να δείξω ότι δεν είναι μονότονη, βρίσκω 3,4 πρώτους όρους της (α_ν), και απο κει συμπεραίνω. (π.χ. αν $\alpha_1 > \alpha_2 \wedge \alpha_2 < \alpha_3 \Rightarrow (\alpha_\nu)$ όχι μονότονη).
ή δείχνω ότι η διαφορά $\Delta = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ δεν διατηρεί πρόσημο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(1) Να βρεθούν οι 5 πρώτοι όροι των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu \cdot \nu}{\nu+1}$, $\nu\in\mathbb{N}$. 2) $\beta_\nu = \frac{3\nu+1}{2^\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$. 3) $(\gamma_\nu): \begin{cases} 0, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \\ \frac{2}{\nu+3}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$ $\nu\in\mathbb{N}^*$.

(2) Να οριστούν επαγωγικά (δηλαδή να γίνουν αναδρομικές) οι ακολουθίες:

1) $\alpha_\nu = 3\nu+7$. 2) $\beta_\nu = \frac{1}{\nu}$. 3) $\gamma_\nu = 2^\nu$. (• Βρέστε τη διαφορά $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$).

(3) Στις παρακάτω ακολουθίες να βρεθεί ο γενικός όρος:

1) $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu^2} \end{cases}$. 2) $\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{2} \\ \alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu \end{cases}$. 3) $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3 \end{cases}$. • Με Ενδειξη.

(4) Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες:

1) $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$. 2) $\alpha_\nu = 3\nu - \nu^2$. 3) $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot 3\nu$. 4) $\alpha_\nu = 2\nu + (-1)^\nu$. 5) $\alpha_\nu = \frac{\nu+2}{2^\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

(5) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι γνησίως αύξουσες:

1) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2}{\nu+3}$. 2) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu} - \sqrt{\nu+1}$. 3) $\alpha_\nu = x^\nu - y^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, όπου $0<y<1<x$.

4) $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\nu^2}$. 5) $\alpha_\nu = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{\nu!}$ (• $\nu! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots \nu$.)

(6) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι γνησίως φθίνουσες:

1) $\alpha_\nu = \frac{3\nu+1}{4^\nu}$. 2) $\alpha_\nu = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2\nu)}$. 3) $\alpha_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu}$. 4) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_{\nu+1} = \frac{3\alpha_\nu - 5}{4} \end{cases}$.

(7) Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες:

1) $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = 2 + 3\alpha_\nu \end{cases}$. 2) $\alpha_\nu = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{\nu(\nu+1)}$. 3) $\alpha_\nu = \frac{3\lambda\nu}{\nu+2}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

(8) Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν): $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{7}{\nu+1}, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \\ \frac{7}{\nu}, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$ είναι φθίνουσα.

(9) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες δεν είναι μονότονες:

1) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu} + \frac{1+(-1)^\nu}{2}$. 2) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \cdot \eta\mu\frac{\pi\nu}{2}$.

(10) Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν): $\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_{\nu+1} = \frac{2\alpha_\nu^2+1}{1+\alpha_\nu} \end{cases}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι γνησίως αύξουσα.

(11) Όμοια, για την ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\lambda^\nu}$ όπου $0<\lambda\le 1$.

(12) Αν η ακολουθία (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}$ είναι αύξουσα και $\lambda\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_\nu = \lambda - \alpha_\nu$ είναι φθίνουσα.

(13) Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν): $\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{2} \\ \alpha_{\nu+1} = \frac{2+\alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu} \end{cases}$ είναι συγχρόνως αύξουσα και φθίνουσα.

(• Αρκεί να είναι σταθερή).

• **ΣΤΑΘΕΡΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ** λέγεται μια ακολουθία (α_ν), αν και μόνο αν,

$$\alpha_\nu = c,\ \forall \nu\in\mathbb{N}\quad (c\in\mathbb{R})$$

ΙΣΟΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ : $(\alpha_\nu)=(\beta_\nu) \Leftrightarrow \alpha_\nu=\beta_\nu$, $\forall \nu\in\mathbb{N}$.

▼**ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ**:

1) Άθροισμα: $(\alpha_\nu)+(\beta_\nu)=(\alpha_\nu+\beta_\nu)$.
2) Διαφορά: $(\alpha_\nu)-(\beta_\nu)=(\alpha_\nu-\beta_\nu)$.
3) Γινόμενο: $(\alpha_\nu)\cdot(\beta_\nu)=(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)$.
4) Πηλίκο: $(\alpha_\nu):(\beta_\nu)=(\alpha_\nu:\beta_\nu)$.
5) Απόλυτη τιμή: $|(\alpha_\nu)|=(|\alpha_\nu|)$.
6) Τετραγωνική ρίζα: $\sqrt{(\alpha_\nu)}=(\sqrt{\alpha_\nu})$, $\alpha_\nu\geq 0$
7) Ρίζα Κ-τάξης: $\sqrt[\kappa]{(\alpha_\nu)}=(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})$, $\alpha_\nu\geq 0$
8) Δύναμη: $(\alpha_\nu)^\kappa=(\alpha_\nu^\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{N}$.

▼**ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ** (Βλέπε και Φυλ. 12 στις συναρτήσεις).

1) (α_ν) φραγμένη άνω $\Leftrightarrow \exists \Phi\in\mathbb{R}: \alpha_\nu\leq\Phi$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$.
2) (α_ν) φραγμένη κάτω $\Leftrightarrow \exists \varphi\in\mathbb{R}: \alpha_\nu\geq\varphi$, » .
3) (α_ν) φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \varphi,\Phi\in\mathbb{R}: \varphi\leq\alpha_\nu\leq\Phi$, » .
4) (α_ν) απολύτως φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \theta\in\mathbb{R}_+ : |\alpha_\nu|\leq\theta$, » .

(Ο Φ και κάθε μεγαλύτερός του είναι ένα άνω φράγμα της (α_ν). Ο φ και κάθε μικρότερός του είναι ένα κάτω φράγμα της (α_ν))

● → (α_ν) απολύτως φραγμένη $\Leftrightarrow$ (α_ν) φραγμένη.

● Μια άνω φραγμένη ακολουθία (α_ν), έχει άπειρα άνω φράγματα, από τα οποία το ελάχιστο λέγεται supremum (άνω πέρας) και συμβολίζεται $\sup\alpha_\nu$

● Μια κάτω φραγμένη ακολουθία (α_ν), έχει άπειρα κάτω φράγματα, από τα οποία το μέγιστο λέγεται infimum (κάτω πέρας) και συμβολίζεται $\inf\alpha_\nu$

● Κάθε ↑ ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, με κάτω φράγμα το 1º όρο της.
● » ↓ » » άνω » , » άνω » » » » ».

●→ **ΜΕΘΟΔΟΣ.** Για να δείξω ότι μια ακολουθία (α_ν):

1) ΕΙΝΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ, δουλεύω ως εξής:

i) Αν η (α_ν) ορίζεται από το γενικό της όρο α_ν, δείχνω (με ενίσχυση) ότι είναι απολύτως φραγμένη, οπότε είναι και φραγμένη.

ii) Αν η (α_ν) διατηρεί πρόσημο, τότε είναι άνω ή κάτω φραγμένη
Έτσι: α) Αν έχει θετικούς μόνο όρους, είναι κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα το 0.
β) » » αρνητικούς » », » άνω » » άνω » » ».

iii) Αν η (α_ν) είναι αναδρομική, δουλεύω επαγωγικά.

iv) Δείχνω ότι είναι συγκλίνουσα, οπότε είναι και φραγμένη (Βλέπε Φυλ. 8)

v) Όταν στην (α_ν) υπάρχει όρος της μορφής θ^ν όπου $\theta>0$, τότε θέτω $\theta=1+\alpha$ όπου $\alpha>-1$ οπότε $\theta^\nu=(1+\alpha)^\nu\geq 1+\nu\alpha$ (Bernoulli) και σύμφωνα με αυτή μπορώ να έχω ένα φράγμα της (α_ν).

vi) Αν η (α_ν) είναι μονότονη (↑ ή ↓) τότε είναι φραγμένη (κάτω ή άνω) με κάτω ή άνω φράγμα το πρώτο όρο της α_1.

2) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ, δουλεύω συνήθως με "άτοπο απαγωγή".

● Κάθε πολυωνυμική ακολουθία δεν είναι φραγμένη. (Να δειχτεί...).

● Αν η (α_ν) δεν είναι φραγμένη, τότε δεν είναι και συγκλίνουσα. (Φυλ. 8).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(14) Δείξτε ότι οι ακολουθίες (α_ν), (β_ν) είναι ίσες, όπου:
$\alpha_\nu = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + \nu(\nu+1)}{\nu^3}$ και $\beta_\nu = \dfrac{\nu^2+3\nu+2}{3\nu^2}$.

(15) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες: (→ Βλέπε $M1_i$)
1) $\alpha_\nu = (-7)^{-\nu}$. 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{\nu^2+8}$. 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\nu + \eta\mu\nu}{\nu^2}$. 4) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}\eta\mu\dfrac{\pi\nu}{2}$.
5) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^2 5\nu}{\nu^3\sqrt{\nu}}$. 6) $\alpha_\nu = \dfrac{5\cdot\eta\mu 3\nu}{4\nu}$. 7) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+40}{\nu+20}$. 8) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{2^\nu}$.

(16) Όμοια, για τις ακολουθίες:
1) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+\nu} - \nu$. 2) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\nu+1} - \sqrt[3]{\nu}$. 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu+2}}{\sqrt{\nu+3}}$.

(17) Όμοια για τις ακολουθίες: (→ Βλέπε $M1_{iii-iv}$ και βάλτε $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu=x$ ώστε από τη ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ που θα προκύψει να βρείτε ένα φράγμα.)
1) $(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_1 = 2\\ \alpha_{\nu+1} = \sqrt{3\alpha_\nu+1}\end{cases}$

2) $(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_1 = 2\\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{\alpha_\nu+5}{2}\end{cases}$. 3) $(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_1 = 3\\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{4\alpha_\nu+2}{\alpha_\nu+3}\end{cases}$.

(18) Όμοια για τις ακολουθίες: (→ Βλέπε $M1_v$).
1) $\alpha_\nu = \dfrac{4\nu+5}{3^\nu}$. 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{5^\nu}$. 3) $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu^2-1}{\nu\cdot 4^\nu}$.

(19) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες δεν είναι φραγμένες: (→ Βλέπε $M2$)
1) $\alpha_\nu = \dfrac{4\nu^2+1}{5\nu}$. 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2+2}{\nu+2}$. 3) $\alpha_\nu = -4\nu^2+3\nu+1$. 4) $\alpha_\nu = 2\nu^3-\nu+1$.
4) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2}{2\nu+\sigma\upsilon\nu^2(\nu\pi)}$. 6) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^2+5}{3\nu+\nu\cdot\eta\mu\nu}$. 7) $\alpha_\nu = (-2)^{\nu+1} + (-2)^\nu + 2$.

(20) 1) Αν η (α_ν) είναι φραγμένη, δείξτε ότι και η (β_ν): $\beta_\nu = \dfrac{\alpha_\nu}{\nu}$ είναι φραγμένη.
2) Αν οι (α_ν) και (β_ν) είναι γνησίως αύξουσες και φραγμένες, δείξτε ότι και η (γ_ν): $\gamma_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη.

(21) Δείξτε ότι η ακολουθία $(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_1 = 3\\ \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+2\alpha_\nu}\end{cases}$, $\nu\in\mathbb{N}$, είναι μονότονη και φραγμένη.

(22) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες:
1) $\alpha_\nu = (-1)^\nu + 1^\nu$. 2) $\alpha_\nu = \dfrac{3\eta\mu\nu}{\nu^2}$. 3) $\alpha_\nu = \dfrac{4\nu\cdot\sigma\upsilon\nu(\nu^2+\nu+1)}{7\nu-1}$
4) $\alpha_\nu = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+\nu^2}{\nu^3+1}$.

(23) Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν): $\alpha_\nu = 3^\nu$ είναι κάτω φραγμένη και δεν είναι άνω φραγμένη.

(24) Δείξτε ότι η (α_ν) με $\alpha_1 = \sqrt{5}$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{5+\alpha_\nu}$ είναι άνω φραγμένη.

▼ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΜΕ ΟΡΙΟ ΤΟ ΜΗΔΕΝ $\longleftrightarrow$ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία ακολουθία (α_ν) λέμε ότι έχει όριο 0, όταν

$$\forall \varepsilon>0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \in \mathbb{N}, \nu>\nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu|<\varepsilon.$$

Συμβολισμός: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu=0$ (ή $\alpha_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0$) ή απλούστερα $\lim\alpha_\nu=0$ (ή $\alpha_\nu \to 0$).

- $_1$ Αν $\lim\alpha_\nu=0$, τότε $\forall\varepsilon>0$ (οσονδήποτε μικρό) όλοι οι όροι της (α_ν), με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος όρων, συσσωρεύονται σε διάστημα κέντρου 0 και ακτίνας ε. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται στη ταινία των παραλλήλων ευθειών $y=\varepsilon$ και $y=-\varepsilon$.
- $_2$ Η ακολουθία (α_ν): $\alpha_\nu=0$ έχει όριο το 0.
- $_3$ Οι ακολουθίες με γενικούς όρους $\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\sqrt{\nu}}, \frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}$ και γενικά $\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}}$ και $(-1)^\nu\cdot\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\nu}}$ έχουν όριο το 0. (παράδειγμα 2.Β σελ. 43).
- $_4$ Αν $\lim\alpha_\nu=0 \Leftrightarrow \lim(-\alpha_\nu)=0 \Leftrightarrow \lim|\alpha_\nu|=0$. (διότι $|\alpha_\nu|=|-\alpha_\nu|=||\alpha_\nu||$)
- $_5$ $\forall\kappa\in\mathbb{N}$, $\lim\alpha_\nu=0 \Leftrightarrow \lim\alpha_{\nu+\kappa}=0$ όπου η $(\alpha_{\nu+\kappa})$ προκύπτει από την (α_ν) αν παραλείψουμε κ αρχικούς όρους. (Απόδειξη...)
- $_6$ Κάθε ακολουθία που έχει όριο 0, είναι φραγμένη. (Απόδειξη...)
- **Θ$_1$** Αν η ακολουθία (b_ν) έχει όριο 0 και υπάρχει $K\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu>K$ είναι $|\alpha_\nu|\le|b_\nu|$, τότε και η (α_ν) έχει όριο 0. (Απόδειξη...)
- $_7$ Η ακολουθία $\left(\frac{1}{\nu^p}\right)$, $\forall p\in\mathbb{Q}_+^*$ έχει όριο 0. (παράδειγμα 2.Β σελ. 45).

- **Θ$_2$** Το άθροισμα δύο ακολουθιών με όριο 0, είναι ακολουθία με όριο 0. • Το αντίστροφο δεν ισχύει. (Απόδειξη...)
- **Θ$_3$** Το γινόμενο μιας ακολουθίας που έχει όριο 0 με μία φραγμένη ακολουθία, είναι ακολουθία με όριο 0. (Απόδειξη...)

Πορίσματα:

1) $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu\to 0\\ \lambda\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\cdot\alpha_\nu\to 0.$ 2) $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu\to 0\\ b_\nu\to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu\cdot b_\nu\to 0.$

3) $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu\to 0\\ b_\nu\to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\alpha_\nu+\mu b_\nu\to 0,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$ Δηλαδή κάθε γραμμικός συνδυασμός μηδενικών ακολουθιών, είναι μηδενική ακολουθία.

▼Εφαρμογές-Θεωρία. (Απόδειξη...)

1) Αν $\alpha\in\mathbb{R}$ με $|\alpha|<1 \Rightarrow \lim\alpha^\nu=0$.
Άρα: κάθε απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος ($|\lambda|<1$) είναι μηδενική

2) Αν (α_ν) ακολουθία με θετικούς όρους και υπάρχει $\lambda<1$ τέτοιος ώστε $\forall\nu>\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$ να είναι $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\le\lambda$, τότε η ακολουθία (α_ν) έχει όριο 0.

$\rightarrow$ Το σύνολο των ακολουθιών με όριο 0 είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση και το πολ/μό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

25) Δείξτε (με τον ορισμό) ότι οι επόμενες ακολουθίες είναι μηδενικές:

→ Για να δείξω με τον ορισμό ότι η $(α_ν)$ είναι μηδενική, δουλεύω ως εξής: Ενισχύω κατάλληλα τον όρο $|α_ν|$, μετά βάζω $<ε$ και λύνω ως προς ν, οπότε βρίσκω $ν > f(ε)$. Θέτω $ν_0 = [f(ε)]$ οπότε $\forall ν > ν_0 \xRightarrow{\text{Μεταβ.}} ν > f(ε) \Longrightarrow |α_ν| < ε \Longrightarrow \lim α_ν = 0$.

1) $α_ν=\frac{ν}{ν^3+ν+1}$. 2) $α_ν=\frac{(-1)^ν}{(ν+1)^2}$. 3) $α_ν=\frac{1+\sqrt{ν}}{ν^3}$. 4) $α_ν=\frac{4}{5ν+1}$.

5) $α_ν=\frac{5}{3ν^2-1}$. 6) $α_ν=\frac{συνν}{ν+4}$. 7) $α_ν=\frac{2}{ν^2+ν}$. 8) $α_ν=\frac{3}{4ν^2-2ν}$.

9) $α_ν=\frac{ημν+συν^3ν}{\sqrt{ν}}$. 10) $α_ν=\frac{3}{\sqrt{ν^2+2}}$. 11) $α_ν=\frac{ν-1}{ν^2+1}$. 12) $α_ν=\frac{1}{3^ν}$.

26) Όμοια, για τις ακολουθίες: (→ Χρησιμοποιείστε για συντομία τις $\bullet_3 - \bullet_7$ και τα $Θ_1 - Θ_3$ του Φυλ.5 μετά την ενίσχυση του $|α_ν|$).

1) $α_ν=\frac{(-1)^ν}{ν+3}$. 2) $α_ν=\frac{(-1)^ν}{ν^2+4ν+11}$.

3) $α_ν=\frac{ημ2ν+4συν3ν}{ν+3}$. 4) $α_ν=\frac{4ν+3}{ν^2+1}$.

5) $α_ν=\frac{ν-3}{ν^3+ν+4}$. 6) $α_ν=\frac{ημν}{\sqrt{ν}}$. 7) $α_ν=\frac{ημν+συνν}{ν^2}$. 8) $α_ν=\frac{ημ^2ν}{2+\sqrt[3]{ν^5}}$.

27) Όμοια για τις ακολουθίες: (→ Μορφή $\infty-\infty$. Πολ/ζω και διαιρώ με τη συζυγή παράσταση.)

1) $α_ν=\sqrt{ν+1}-\sqrt{ν}$.

2) $α_ν=\sqrt{ν^2+3}-\sqrt{ν^2+1}$. 3) $α_ν=\sqrt{ν^2+7}-ν$. 4) $α_ν=ν^{3/2}\cdot\left(\sqrt{ν^4+5}-ν^2\right)$.

5) $α_ν=\sqrt[3]{ν+1}-\sqrt[3]{ν}$. 6) $α_ν=4ν\left(\sqrt{ν^3+1}-\sqrt{ν^3}\right)$. 7) $α_ν=ν\left(\sqrt{ν^4+8}-ν^2\right)$.

8) $α_ν=α\sqrt{ν+7}+β\cdot\sqrt{ν+8}$ όπου $α,β\in\mathbb{R}^*$ και $α+β=0$.

28) Δείξτε ότι η $α_ν=κ\cdot ω^ν$ με $κ,ω\in\mathbb{R}$ και $|ω|<1$, έχει όριο το 0.

29) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές:

→ Με διάσπαση του γενικού όρου $α_ν$ σε άθροισμα μηδενικών ή γινόμενο μηδενικών ή γινόμενο μηδενικής και φραγμένης.

1) $α_ν=\frac{4ν^2+3}{ν^3}$. 2) $α_ν=\frac{5+συνν}{3ν^4}$. 3) $α_ν=\frac{ν}{(-3)^ν\cdot(ν^2+2)}$.

σ' 4) $α_ν=\frac{ν!}{ν^ν}$. 5) $α_ν=\frac{1+\sqrt{ν}}{ν^2}$. 6) $α_ν=\frac{ν+1}{ν\sqrt{ν}}$.

30) Δείξτε ότι οι ακολουθίες: $α_ν=\frac{1^2+2^2+\cdots+ν^2}{ν^4+5ν+2}$, $β_ν=\frac{1^3+2^3+\cdots+ν^3}{3ν^5+2ν}$ έχουν όριο το 0.

31) Αν $(α_ν)$, $(β_ν)$ μηδενικές ακολουθίες και $α_ν>0$, $β_ν>0$, $\forall ν\in\mathbb{N}^*$, δείξτε ότι και η ακολουθία $(γ_ν)$: $γ_ν=\frac{α_ν^2+β_ν^2}{α_ν+β_ν}$ είναι μηδενική.

32) Δείξτε ότι η $α_ν=\frac{5ν}{6ν+7}$ δεν έχει όριο το 0.

(→ Αρκεί να $\exists ε>0$: $|α_ν|\geq ε$.)

▼ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Μια ακολουθία (α_ν) λέμε ότι έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$, όταν η ακολουθία $(\alpha_\nu - \lambda)$ έχει όριο 0. ⟷ Συγκλίνουσα ακολουθία.

Λέμε ισοδύναμα: "η (α_ν) συγκλίνει προς το $\ell \in \mathbb{R}$" ή "η (α_ν) τείνει στο $\ell \in \mathbb{R}$".

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια ακολουθία (α_ν) συγκλίνει προς τον $\ell \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \in \mathbb{N}, \nu > \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon.$$

Δηλαδή: $\forall \nu > \nu_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \alpha_\nu < \ell + \varepsilon$. Άρα, $\forall \varepsilon > 0$ όλοι οι όροι της (α_ν), με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος, συσσωρεύονται σε διάστημα $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ κέντρου ℓ και ακτίνας ε. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται στη ζώνη που ορίζουν οι παράλληλες ευθείες $y = \ell - \varepsilon$ και $y = \ell + \varepsilon$.

- •₁ Η σταθερή ακολουθία (α_ν) : $\alpha_\nu = c$ συγκλίνει προς το c.
- •₂ $\forall \kappa \in \mathbb{N}$, $\lim \alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow \lim \alpha_{\nu+\kappa} = \ell$.
- •₃ $\lim \alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow \lim(-\alpha_\nu) = -\ell$.

Μοναδικότητα του ορίου: Αν μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$, το όριο αυτό είναι μοναδικό. (Απόδειξη...)

● Ένα κριτήριο μη σύγκλισης: Μια ακολουθία (α_ν) δεν είναι συγκλίνουσα, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $\nu_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχουν φυσικοί $\nu_1 > \nu_0$ και $\nu_2 > \nu_0$ με $|\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}| \geq \varepsilon$ (Απόδειξη...)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(33) Δείξτε (με τον ορισμό) ότι: (⟶ Αρκεί $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$, ενισχύοντας παράλληλα το $|\alpha_\nu - \ell|$ όπως και στις μηδενικές, ή δείξτε ότι η $(\alpha_\nu - \ell)$ φράσσεται από μηδενική, ή διασπάται σε μηδενική επί φραγμένη....)

1) $\lim \frac{\nu}{\nu+1} = 1$. 2) $\lim \frac{2\nu-1}{3\nu} = \frac{2}{3}$. 3) $\lim \frac{\nu^2+1}{\nu^2-1} = 1$. 4) $\lim \frac{4\nu+1}{5\nu} = \frac{4}{5}$.

5) $\lim \frac{\nu^2-\nu}{\nu^2+1} = 1$. 6) $\lim \frac{\nu^3}{\nu^3-1} = 1$. 7) $\lim \frac{3\nu+2}{7(\nu+4)} = \frac{3}{7}$. 8) $\lim \frac{6\nu-5}{3\nu+4} = 2$.

⟶ Τι παρατηρείτε στις παραπάνω ρητές ακολουθίες;

(34) Όμοια: 1) $\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^5 = 1$. 2) $\lim \frac{\nu^2-4\nu-21}{3\nu^2+1} = \frac{1}{3}$. 3) $\lim\left(3+\frac{1}{\nu}\right)^2 = 9$.

Στη 2) να βρεθεί το ελάχιστο ν_0 ώστε $\forall \nu > \nu_0$ να είναι $\alpha_\nu > 0$.

(35) Αν $\alpha_\nu = 7 \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^\nu - 1\right]$ δείξτε ότι $\lim \alpha_\nu = -7$.

(36) Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \ln \frac{2\nu+5}{\nu}$ έχει όριο τον αριθμό $\ln 2$.

(37) Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες δεν είναι συγκλίνουσες:

1) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu + 1}{2}$. 2) $\alpha_\nu = \eta\mu \frac{\nu\pi}{2}$. 3) $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{\nu+2}{3\nu}$.

4) $\alpha_\nu = \frac{2(-2)^\nu + 2^\nu}{(-2)^\nu - 3 \cdot 2^{\nu-1}}$. 5) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2 + (-1)^\nu \cdot \nu^2}{\nu+1}$.

▼ ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.

1) Η ιδιότητα του φραγμένου συνέπεια της σύγκλισης.

→ Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. (Απόδειξη...).

ΠΡΟΣΟΧΗ: το αντίστροφο δεν ισχύει. Ισχύει όμως το αντιστροφοαντίθετο, δηλαδή: όταν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη, τότε δεν είναι και συγκλίνουσα.

κριτήριο μη σύγκλισης.

2) Όριο απόλυτης τιμής ακολουθίας.

→ Αν μια ακολουθία (α_ν) είναι συγκλίνουσα, τότε και η $(|\alpha_\nu|)$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα $\lim|\alpha_\nu| = |\lim\alpha_\nu|$. (Απόδειξη...)

ΠΡΟΣΟΧΗ: το αντίστροφο δεν ισχύει. (• Αντιστροφοαντίθετη: Αν η $(|\alpha_\nu|)$ δεν συγκλίνει, τότε και η (α_ν) δεν συγκλίνει)

3) Πρόσημο των όρων και πρόσημο του ορίου.

Θ. Έστω μια ακολουθία (α_ν) με όριο $\ell\neq 0$. Τότε υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε οι όροι με δείκτη $\nu>\nu_0$ να είναι ομόσημοι προς τον ℓ. (Απόδειξη)

• Αν $\exists\, \kappa\in\mathbb{N}: \forall \nu>\kappa$ οι όροι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας (α_ν) να είναι θετικοί (αρνητικοί), τότε το όριο της (α_ν) αποκλείεται να είναι αρνητικός (θετικός) αριθμός, αλλά δεν αποκλείεται να είναι 0.

Εφαρμογή-Θεωρία (Απόδειξη...) ⟷ $\lim\sqrt[\nu]{\nu}=1$.

▼ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

• Το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση και το πολ/μό.

Πρόσθεση και πολ/μός.

Θ. Αν οι (α_ν) και (β_ν) είναι συγκλίνουσες, τότε και οι $(\alpha_\nu+\beta_\nu)$, $(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)$ είναι συγκλίνουσες και μάλιστα:

1) $\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)=\lim\alpha_\nu+\lim\beta_\nu$. 2) $\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)=\lim\alpha_\nu\cdot\lim\beta_\nu$. (Απόδειξη...).

Πορίσματα:

i) Αν $\lim\alpha_\nu=\ell \Rightarrow \lim(\lambda\alpha_\nu)=\lambda\ell$, $(\lambda\in\mathbb{R})$. ii) Αν $\lim\alpha_\nu=\ell\Rightarrow\lim(\alpha_\nu)^\kappa=\ell^\kappa$, $(\kappa\in\mathbb{N}^*)$.

iii) Κάθε γραμμικός συνδυασμός συγκλινουσών ακολουθιών είναι συγκλίνουσα ακολουθία

• Μπορεί να υπάρχει το $\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ ή το $\lim(\alpha_\nu\beta_\nu)$ χωρίς να υπάρχει το ένα (ή και τα δύο) από τα $\lim\alpha_\nu$, $\lim\beta_\nu$. (π.χ. $\alpha_\nu=(-1)^\nu$, $\beta_\nu=(-1)^{\nu+1}$).

Διαίρεση.

Θ. Αν η (α_ν), με $\alpha_\nu\neq0$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$, είναι συγκλίνουσα και $\lim\alpha_\nu\neq0$, τότε η $\left(\frac{1}{\alpha_\nu}\right)$ είναι συγκλίνουσα και μάλιστα $\lim\frac{1}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\lim\alpha_\nu}$. (Απόδειξη).

Πόρισμα: Έστω (α_ν), (β_ν) συγκλίνουσες με $\lim\beta_\nu\neq0$. Αν $\forall\nu\in\mathbb{N}$ είναι $\beta_\nu\neq0$, τότε η $\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$ είναι συγκλίνουσα και $\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\frac{\lim\alpha_\nu}{\lim\beta_\nu}$.

Όριο ρίζας. Αν μια συγκλίνουσα ακολουθία (α_ν) έχει μη αρνητικούς όρους, τότε $\forall\kappa\in\mathbb{N}^*$ θα έχουμε $\lim\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}=\sqrt[\kappa]{\lim\alpha_\nu}$. (Απόδειξη...).

Εφαρμογή-Θεωρία (Απόδειξη...) ⟷ $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ είναι $\lim\sqrt[\nu]{\alpha}=1$

ΜΕΘΟΔΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ (που λύνονται με τις ιδιότητες των πράξεων).

M_1 → Για ακολουθίες της μορφής: $\boxed{\alpha_\nu = \dfrac{f(\nu)}{g(\nu)}}$ ⟷ Διαιρώ (βλέπε και φυλ.21) αριθμητή και παρονομαστή με τη μέγιστη δύναμη του ν, που υπάρχει στα $f(\nu), g(\nu)$ και χρησιμοποιώ τη βασική ιδιότητα: $\lim \dfrac{1}{\nu^{\rho}} = 0$, $\forall \rho \in Q_+^*$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\alpha_\nu = \frac{3\nu^2-4\nu+1}{5-2\nu^2} = \frac{\frac{3\nu^2}{\nu^2}-\frac{4\nu}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^2}}{\frac{5}{\nu^2}-\frac{2\nu^2}{\nu^2}} = \frac{3-\frac{4}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}{\frac{5}{\nu^2}-2}.$$

$$\Leftrightarrow \lim\alpha_\nu = \frac{\lim\left(3-\frac{4}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right)}{\lim\left(\frac{5}{\nu^2}-2\right)} = \frac{3-\lim\frac{4}{\nu}+\lim\frac{1}{\nu^2}}{\lim\frac{5}{\nu^2}-2}$$

$$= \frac{3-4\cdot 0+0}{5\cdot 0-2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Άσκηση 38 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{4}{\nu^2}-\frac{5}{\nu^3}\right)^2$. 2) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^3+4\nu^2-2}{6\nu+3\nu^3-5}$. 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2+2\nu+3}{3\nu^3+\nu^2-1}$.

4) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu-3}{\nu^3+\nu+4}$. 5) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^2-5\nu+3}{1-5\nu^2}$. 6) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2+2\nu\sqrt{\nu}+5}{-\nu^2-\nu\sqrt{\nu}+8\nu}$.

M_2 → Για ακολουθίες της μορφής: $\boxed{\alpha_\nu = \dfrac{\kappa_1^\nu+\kappa_2^\nu+\dots+\kappa_\rho^\nu}{\lambda_1^\nu+\lambda_2^\nu+\dots+\lambda_\mu^\nu}}$ ⟷ Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με τη ν-οστή δύναμη της μεγαλύτερης βάσης και χρησιμοποιώ τη βασική ιδιότητα: $\lim\alpha^\nu = 0$ όπου $|\alpha|<1$. (Βλέπε φυλ.5 Εφαρμογή 1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\alpha_\nu = \frac{3^\nu+4^{\nu+1}}{3^\nu-4^\nu} = \frac{3^\nu+4\cdot 4^\nu}{3^\nu-4^\nu} =$$

$$= \frac{\frac{3^\nu}{4^\nu}+4\cdot\frac{4^\nu}{4^\nu}}{\frac{3^\nu}{4^\nu}-\frac{4^\nu}{4^\nu}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^\nu+4}{\left(\frac{3}{4}\right)^\nu-1}.$$

$$\Leftrightarrow \lim\alpha_\nu = \frac{\lim\left[\left(\frac{3}{4}\right)^\nu+4\right]}{\lim\left[\left(\frac{3}{4}\right)^\nu-1\right]} = \frac{\lim\left(\frac{3}{4}\right)^\nu+4}{\lim\left(\frac{3}{4}\right)^\nu-1} = \frac{0+4}{0-1} = -4.$$

Άσκηση 39 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{2^\nu+5^\nu}{4^\nu+7^\nu}$. 2) $\alpha_\nu = \dfrac{2^\nu+3^\nu}{2^\nu-3^\nu}$. 3) $\alpha_\nu = \dfrac{2\cdot 8^\nu-5^{2\nu}}{4+6^{2\nu+1}}$.

4) $\alpha_\nu = \dfrac{3^\nu+4^{-\nu}}{3^\nu-4^{-\nu}}$. 5) $\alpha_\nu = \dfrac{5+3^\nu+5^{\nu+1}}{7+2^\nu+5^{\nu+4}}$.

6) $\alpha_\nu = \dfrac{2^{2\nu}+3^{2\nu}+6^\nu}{2^{2\nu}+5\cdot 3^{2\nu}-6^\nu}$. 7) $\alpha_\nu = \dfrac{(-2)^\nu-7^\nu}{3^\nu+7^\nu}$. 8) $\alpha_\nu = \dfrac{7^\nu-2\cdot 5^\nu+2}{3^\nu+7^{\nu+1}-3}$.

9) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2\cdot 3^\nu+2\nu\cdot 3^{\nu-1}+1}{3\nu\cdot 2^\nu-7\nu^2\cdot 5^\nu-1}$ 10) $\alpha_\nu = \dfrac{3\cdot 4^\nu-5^{2\nu}}{7+6^{2\nu+1}}$. 11) $\alpha_\nu = \dfrac{2\cdot 5^\nu-3^{2\nu}}{6+4^{2\nu+1}}$.

12) $\alpha_\nu = \dfrac{6\cdot 3^\nu-5\cdot 8^\nu+1}{7\cdot 5^\nu-7^\nu+2\cdot 8^\nu}$. 13) $\alpha_\nu = \dfrac{3^\nu+2\cdot 6^\nu+5^{\nu+1}}{6^{\nu+1}-4^\nu+1}$. 14) $\alpha_\nu = \dfrac{\omega^{2\nu}}{3+\omega^{2\nu}}$, $\omega\in\mathbb{R}$.

M_3 → Για ακολουθίες της μορφής: $\boxed{\alpha_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\kappa)}$ ↔ Προσδιορίζω το άθροισμα με τη βοήθεια των προόδων ή με κατάλληλο τέχνασμα (ανάλυση γενικού όρου) ή με τους γνωστούς τύπους:

$S_1 = 1+2+3+\dots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

$S_2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$.

$S_3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3 = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} = S_1^2$.

οπότε καταλήγω σε ακολουθία της μορφής M_1 ή M_2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\alpha_\nu = \frac{2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\dots+2\nu^2}{3\nu^3} = \frac{2\cdot S_2}{3\nu^3}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}}{3\nu^3} = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{9\nu^3}.$$

$$\Leftrightarrow \lim\alpha_\nu = \lim\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{9\nu^2} =$$

$$= \lim\frac{2\nu^2+3\nu+1}{9\nu^2} = \underset{(M_1)}{\dots\dots} = \frac{2}{9}.$$

Άσκηση 40 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+\nu(\nu+1)}{\nu^3}$. 2) $\alpha_\nu = \frac{1+2+\dots+\nu}{5\nu^2}$.

3) $\alpha_\nu = \frac{1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3}{\nu^4}$. 4) $\alpha_\nu = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}$.

5) $\alpha_\nu = \frac{1^3+2^3+\dots+\nu^3}{(1+2+\dots+\nu)[1+3+5+\dots+(2\nu-1)]}$. 6) $\alpha_\nu = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^\nu}$.

7) $\alpha_\nu = \frac{1-2+3-4+\dots-2\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}$. 8) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[(3+\frac{1}{\nu})^2+(3+\frac{2}{\nu})^2+(3+\frac{3}{\nu})^2+\dots+(3+\frac{\nu-1}{\nu})^2\right]$.

M_4 → Για ακολουθίες της μορφής: $\boxed{\alpha_\nu = \sqrt[\kappa]{f(\nu)} - \sqrt[\kappa]{\varphi(\nu)}}$ ↔ 1) Αν $\kappa=2$ πολ/ζω και διαιρώ με τη συζυγή παράσταση.

2) Αν $\kappa>2$ Θέτω $\sqrt[\kappa]{f(\nu)}=x$, $\sqrt[\kappa]{\varphi(\nu)}=y$ και χρησιμοποιώ τη ταυτότητα:

$$x-y = \frac{x^\kappa-y^\kappa}{x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}\cdot y+\dots+x\cdot y^{\kappa-2}+y^{\kappa-1}}$$

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγω σε ακολουθία της μορφής M_1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+3\nu} - \sqrt{\nu^2-3\nu} =$$

$$\frac{(\sqrt{\nu^2+3\nu}-\sqrt{\nu^2-3\nu})(\sqrt{\nu^2+3\nu}+\sqrt{\nu^2-3\nu})}{\sqrt{\nu^2+3\nu}+\sqrt{\nu^2-3\nu}} =$$

$$\frac{(\nu^2+3\nu)-(\nu^2-3\nu)}{\sqrt{\nu^2+3\nu}+\sqrt{\nu^2-3\nu}} = \frac{6\nu}{\sqrt{\nu^2+3\nu}+\sqrt{\nu^2-3\nu}} = \underset{(M_1)}{\overset{(\text{Διαιρώ με } \nu)}{\dots\dots\dots}} =$$

$$\frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{\nu}}+\sqrt{1-\frac{3}{\nu}}} \Leftrightarrow \lim\alpha_\nu = \frac{6}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} =$$

$$= \frac{6}{2} = 3.$$

Άσκηση 41 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = (\sqrt{\nu+4}-\sqrt{\nu+3})\cdot\sqrt{\nu+2}$. 2) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\nu^3+\nu}-\nu$. 3) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+\sqrt{\nu}}-\sqrt{\nu-\sqrt{\nu}}$.

4) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\nu^3-\nu^2}-\sqrt[3]{\nu^3+\nu^2}$. 5) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\nu^2}\cdot(\sqrt[3]{\nu+1}-\sqrt[3]{\nu})$.

Άσκηση 42 Δείξτε ότι:

$$\lim\left[\sqrt{(\nu+\alpha)(\nu+\beta)}-\nu\right] = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{όπου } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

▼ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ.

Συμβιβαστότητα ορίου και διάταξης.

Θ. Αν οι (α_ν) και (β_ν) είναι συγκλίνουσες και υπάρχει $K\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\forall \nu > K$ να είναι $\alpha_\nu \le \beta_\nu$, τότε $\lim\alpha_\nu \le \lim\beta_\nu$. (Απόδειξη...)

Ακολουθίες με το ίδιο όριο.

Θ. ΙΣΟΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ: Έστω μια ακολουθία (β_ν).
Αν υπάρχουν δυο ακολουθίες (α_ν) και (γ_ν) με κοινό όριο, τέτοιες ώστε $\forall \nu > K$ (K ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_\nu \le \beta_\nu \le \gamma_\nu$, τότε και η (β_ν) έχει το ίδιο όριο. (Απόδειξη...).

Εφαρμογή – Θεωρία (Απόδειξη...)

→ Αν $\lim\alpha_\nu = \alpha > 0$ και $\alpha_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$.

▼ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗ.

→ Ένα κριτήριο σύγκλισης.

Θ. Κάθε ακολουθία αύξουσα και φραγμένη άνω ή φθίνουσα και φραγμένη κάτω, είναι συγκλίνουσα. (Απόδειξη...)

- Εφαρμόζεται συνήθως σε αναδρομικές ακολουθίες.

Εφαρμογή – Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση (Βλέπε Φυλ. 16)

→ Ο αριθμός e:
Η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ συγκλίνει, και το όριό της το συμβολίζουμε e, δηλαδή: $\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = e$.
Ο αριθμός e είναι άρρητος.
Μια δεκαδική προσέγγισή του είναι $e \simeq 2{,}718281$.

→ **ΒΑΣΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ**

1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

i) $(\alpha_\nu)\uparrow$ και φραγμένη άνω $\Rightarrow (\alpha_\nu)$ συγκλίνει. $\left(\lim\alpha_\nu = \sup(\alpha_\nu)\right)$.

ii) $(\alpha_\nu)\downarrow$ » » κάτω $\Rightarrow$ » » . $\left(\lim\alpha_\nu = \inf(\alpha_\nu)\right)$.

2ο Θ.Ι.Α. (Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών)

Αν $\forall\nu > K$, $\alpha_\nu \le \beta_\nu \le \gamma_\nu$ και $\lim\alpha_\nu = \lim\gamma_\nu = \ell$ $\Big\} \Rightarrow \lim\beta_\nu = \ell$.

- $\lim\sqrt[\nu]{\nu} = \lim\sqrt[\nu]{\alpha} = 1$, όπου $\alpha > 0$.

3ο Αν $\lim\alpha_\nu = \alpha > 0$ και $\alpha_\nu > 0$, $\forall\nu\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$.

4ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ D' Alembert. (Εφαρμογή 3, Β σελ. 61 – Θεωρία).

Αν (α_ν) ακολουθία με θετικούς όρους και $\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda < 1$ $\Big\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu = 0$

ΜΕΘΟΔΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ (που λύνονται σε σύγκριση με γνωστές ακολουθίες)

Σύγκριση με γνωστές ακολουθίες κάνουμε στηριζόμενοι στις προτάσεις:

1) Αν $|\alpha_\nu| \le |\beta_\nu|, \forall \nu \in \mathbb{N}, \nu > \kappa$, και $\beta_\nu \to 0$ $\Rightarrow \alpha_\nu \to 0$ (Η μέθοδος εφαρμόστηκε ήδη... Βλέπε Φυλ. 6 – Ασκήσεις 25-26).

● Με τη μέθοδο αυτή καταλήγουμε (με ενίσχυση) σε μια από τις ακολουθίες $\frac{1}{\nu^p}, p \in Q_+^*$ ή ω^ν με $|\omega|<1$ που έχουν όριο το 0.

2) Θ.Ι.Α. Αν $x_\nu \to \lambda$, $y_\nu \to \lambda$ και $\exists \kappa \in \mathbb{N}: \forall \nu > \kappa$, $x_\nu \le \alpha_\nu \le y_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \alpha_\nu \to \lambda$

Στη μέθοδο αυτή προσπαθούμε να δείξουμε ότι ο γενικός όρος α_ν βρίσκεται ανάμεσα στους γενικούς όρους άλλων ακολουθιών με γνωστά όρια, όπως οι: $\sqrt[\nu]{\nu} \to 1$, $\sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$ $(\alpha>0)$, $(1+\frac{1}{\nu})^\nu \to e$, κ.λ.π.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

● Μορφή $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{f(\nu)}$

1) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu+1}$ α' τρόπος: Με το Θ.Ι.Α. (Κάνω αυθαίρετες αυξομειώσεις...)

Είναι $1 < \nu^2+\nu+1 < \nu^2+\nu^2+\nu^2 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{1} < \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu+1} < \sqrt[\nu]{3\nu^2} \Leftrightarrow 1 < \alpha_\nu < \sqrt[\nu]{3}\cdot(\sqrt[\nu]{\nu})^2$.

Αλλά $\lim 1 = 1$

$\lim \sqrt[\nu]{3} = 1 = \lim \sqrt[\nu]{\nu} \Rightarrow \lim[\sqrt[\nu]{3}\cdot(\sqrt[\nu]{\nu})^2] = 1$ $\xRightarrow{\text{Θ.Ι.Α}}$ $\lim \alpha_\nu = 1$.

β' τρόπος: Ειδικά, αν $f(\nu)$ πολυώνυμο K βαθμού ως προς ν, τότε βγάζω κοινό παράγοντα το ν^K και χρησιμοποιώ το 3ο κριτήριο.

Έτσι έχω: $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu+1} = \sqrt[\nu]{\nu^2(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2})} = (\sqrt[\nu]{\nu})^2 \cdot \sqrt[\nu]{1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} \to 1\cdot 1 = 1$,

διότι $\sqrt[\nu]{\nu} \to 1 \Rightarrow (\sqrt[\nu]{\nu})^2 \to 1$

και $\lim(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}) = 1 > 0 \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} = 1$

γ' τρόπος: Η μορφή αυτή μπορεί να λυθεί και εξ' αρχής με το 3ο κριτήριο, εφ' όσον $f(\nu)>0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim f(\nu) = \alpha > 0$. Η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται στο προηγούμενο παράδειγμα, διότι $\lim(\nu^2+\nu+1) \notin \mathbb{R}$, εφαρμόζεται όμως στο...

2) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{7^{\nu+1}+2}{7^\nu-3^\nu}}$ Η ακολουθία $\beta_\nu = \frac{7^{\nu+1}+2}{7^\nu-3^\nu} = \frac{7\cdot7^\nu+2}{7^\nu-3^\nu} = \frac{7+\frac{2}{7^\nu}}{1-\frac{3^\nu}{7^\nu}} \Rightarrow$

$\lim \beta_\nu = \frac{7+2\cdot0}{1-0} = 7 > 0$, $\beta_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$ $\xRightarrow{\text{3ο κρ.}}$ $\lim \alpha_\nu = 1$.

Άσκηση 43 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2+1}$. 2) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{5\nu^2+2\nu}$. 3) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{2\nu^3-\nu+5}$ 4) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{2^\nu+3^\nu+5^\nu}$.

5) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{2^\nu+4^\nu+9^\nu}$. 6) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{3+\frac{1}{\nu}}$. 7) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\sqrt[\nu]{1+2^\nu+3^\nu+\dots+K^\nu}$.

Άσκηση 44 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{3+\frac{\nu^2+\nu+1}{\nu^3+5}}$. 2) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{3\nu^2+\nu+1}{6\nu^2+5\nu-2}}$. 3) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\left(\frac{1}{4}\right)^\nu+\left(\frac{4}{5}\right)^\nu}$.

4) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{5^{\nu+1}+2}{5^\nu+4^\nu}}$. 5) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{7\nu+1}{3\nu+2}}$. 6) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{x^\nu+x^{-\nu}}$ με $x>0$.

Άσκηση 45 Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας α_ν για την οποία ισχύει:

1) $8 \le \alpha_\nu \le \sqrt[\nu]{3^\nu+5^\nu+8^\nu}$. 2) $\frac{3\nu-2}{4\nu+3} \le \alpha_\nu \le \frac{3\nu^2-\nu+2}{4\nu^2+7}$. 3) $\sqrt[\nu]{2\nu^2+3} \le \alpha_\nu \le \sqrt[\nu]{7\nu^2+4\nu}$

● Μορφή $\underline{\alpha_\nu = \sum f(\nu)}$ ⟷ Βρίσκω το μικρότερο όρο μ και το μεγαλύτερο όρο M του αθροίσματος $\sum f(\nu)$ κι έχω:

$\mu+\mu+\dots+\mu \le \sum f(\nu) \le M+M+\dots+M$

$\Leftrightarrow \nu\mu \le \sum f(\nu) \le \nu M$

Μετά, δείχνω ότι: $\lim(\nu\mu)=\lim(\nu M)=\ell$ οπότε και $\lim\sum f(\nu)=\ell$. (Θ.Ι.Α.)

3) $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}}$.

Είναι: $\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}} \le \frac{1}{\sqrt{\nu^2+\kappa}} \le \frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}$, $\underline{\forall \kappa\in\mathbb{N}: 1\le\kappa\le\nu}$.

Άρα για $\kappa=1,2,3,\dots,\nu$ έχω:

$$\underbrace{\nu\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}}}_{\mu} \le \frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}} \le \underbrace{\nu\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}}_{M} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+\nu}} \le \alpha_\nu \le \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+1}}$$

Αλλά $\lim\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+\nu}} = \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}} = 1$

και $\lim\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+1}} = \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\nu^2}}} = 1$

$\xrightarrow{\text{Θ.Ι.Α.}} \lim\alpha_\nu = 1$.

Άσκηση 46 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt[3]{\nu^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\nu^3+2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\nu^3+3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{\nu^3+\nu}}$.

2) $\alpha_\nu = \frac{\nu^3}{\nu^4+1}+\frac{\nu^3}{\nu^4+2}+\dots+\frac{\nu^3}{\nu^4+\nu}$.

3) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{(\nu+1)^2}+\dots+\frac{1}{(2\nu)^2}$.

4) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu}{\nu^2+2}+\dots+\frac{\nu}{\nu^2+\nu}$.

5) $\alpha_\nu = \frac{\eta\mu 1}{\nu^2+1}+\frac{\eta\mu 2}{\nu^2+2}+\dots+\frac{\eta\mu\nu}{\nu^2+\nu}$.

ΜΕΘΟΔΟΙ–ΑΣΚΗΣΕΙΣ (που λύνονται με τα κριτήρια σύγκλισης).

1) Με το Κριτήριο Μονοτονίας (Βλέπε Φυλ. 11).

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συνήθως σε αναδρομικές ακολουθίες πρώτης τάξης, όταν ζητείται να δείξουμε ότι συγκλίνουν.

• Το κριτήριο αυτό μας βεβαιώνει μόνο για τη σύγκλιση της ακολουθίας. Έτσι, για να βρούμε και το όριο (αν ζητείται) εφαρμόζουμε το εξής ....

ΤΕΧΝΑΣΜΑ: για την ακολουθία (α_ν): $\begin{cases}\alpha_1=\alpha\\ \alpha_{\nu+1}=f(\alpha_\nu)\end{cases}$.

i) Μελετώ τη μονοτονία.

ii) Μελετώ τα φράγματα.

iii) Συμπεραίνω ότι συγκλίνει (αν συγκλίνει) με το κριτήριο μονοτονίας.

iv) Παίρνω τα όρια του αναδρομικού τύπου $\alpha_{\nu+1}=f(\alpha_\nu)$ και θέτω $\lim\alpha_{\nu+1}=x \leftrightarrow \lim\alpha_\nu=x$, οπότε έχω τη

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $\leftrightarrow$ $x=f(x)$

Από τις ρίζες αυτής το όριο είναι η ρίζα που είναι ανάμεσα στα φράγματα.

• Αν μεταξύ των φραγμάτων βρίσκονται περισσότερες ρίζες, τότε συμπτύσσουμε το μεταξύ των φραγμάτων διάστημα, ώστε το όριο να ορίζεται μονότιμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

$\boxed{22.B}$ (α_ν): $\begin{cases}\alpha_1=3\\ \alpha_{\nu+1}=\sqrt{\alpha_\nu+7}\end{cases}$.

α) Μονοτονία:

Είναι $\alpha_2=\sqrt{\alpha_1+7}=\sqrt{3+7}=\sqrt{10}>3=\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2>\alpha_1 \leftrightarrow$ "Ένδειξη $\uparrow$"

Θα δείξω επαγωγικά ότι $(\alpha_\nu)\uparrow$, δηλαδή ότι: $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$; $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

Για $\nu=1$: $\alpha_2>\alpha_1$ ισχύει (δείχθηκε).

Έστω ότι ισχύει για $\nu=k$: $\alpha_{k+1}>\alpha_k$ (1).

Θα δείξω " " " $\nu=k+1$: $\alpha_{k+2}>\alpha_{k+1}$.

Είναι $\alpha_{k+2}\underset{(\text{υπ.})}{=}\sqrt{\alpha_{k+1}+7}\underset{(1)}{>}\sqrt{\alpha_k+7}\underset{(\text{υπ.})}{=}\alpha_{k+1}\Rightarrow\alpha_{k+2}>\alpha_{k+1}$. Άρα ισχύει $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

Άρα η (α_ν) είναι $\uparrow$. (οπότε έχει κάτω φράγμα το πρώτο όρο της $\alpha_1=3$).

β) Φράγματα: Θα δείξω ότι η (α_ν) έχει άνω φράγμα το 4, πάλι επαγωγικά, δηλαδή ότι: $\alpha_\nu<4$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

Για $\nu=1$: $\alpha_1<4 \Leftrightarrow 3<4$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $\nu=k$: $\alpha_k<4$ (2)

Θα δείξω για $\nu=k+1$: $\alpha_{k+1}\underset{(\text{υπ})}{=}\sqrt{\alpha_k+7}\underset{(2)}{<}\sqrt{4+7}=\sqrt{11}<4\Rightarrow\alpha_{k+1}<4$.

Άρα η (α_ν) είναι άνω φραγμένη από το 4, είναι και $\uparrow\Rightarrow$ Συγκλίνει (Κρ. Μον.)

γ) Εύρεση του ορίου της (α_ν): Έστω $\lim\alpha_{\nu+1}=\lim\alpha_\nu=x$, οπότε:

$\alpha_{\nu+1}=\sqrt{\alpha_\nu+7}\Rightarrow\lim\alpha_{\nu+1}=\sqrt{\lim\alpha_\nu+7}\Rightarrow x=\sqrt{x+7}\Rightarrow x^2=x+7\Rightarrow x^2-x-7=0\Rightarrow$

$x_1=\frac{1-\sqrt{29}}{2}<0$, απορρίπτεται, διότι η (α_ν) έχει θετικούς όρους $(\alpha_\nu\geq3)$.

$x_2=\frac{1+\sqrt{29}}{2}\Rightarrow\lim\alpha_\nu=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$.

Άσκηση 47 Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν και βρείτε τα όριά τους:

1) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu} \end{cases}$. 2) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{3\alpha_\nu - 4}{5} \end{cases}$. 3) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{2\alpha_\nu - 3}{4} \end{cases}$.

4) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\alpha_\nu^2 + \frac{1}{8} \end{cases}$. 5) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{3}\alpha_\nu + 2 \end{cases}$. 6) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_{\nu+1} = \dfrac{3\alpha_\nu + 1}{4} \end{cases}$.

7) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{5}(\alpha_\nu^2 + 4) \end{cases}$. 8) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+2\alpha_\nu} - 1 \end{cases}$. 9) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = \sqrt{\alpha_\nu + 6} \end{cases}$.

10) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{2}{\alpha_\nu}\right) \end{cases}$. 11) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_1 = \sqrt[3]{6} \\ \alpha_{\nu+1} = \sqrt[3]{6+\alpha_\nu} \end{cases}$. 12) $(\alpha_\nu): \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_\nu = \sqrt{3\alpha_{\nu-1} + 4} \end{cases}$.

2) Με τα άλλα κριτήρια

Άσκηση 48 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\dfrac{3^{\nu+1}+2}{3^\nu + 2^\nu}}$, $\nu \geq 2$. 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{3^\nu}$. 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{2^\nu}$

4) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu!}{\nu^\nu}$. 5) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^{\nu+1} + 2^\nu \cdot \nu!}{(2\nu)^\nu}$ → Χρησιμοποιείστε τις 3–4.

6) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^3}{6^\nu}$. 7) $\alpha_\nu = \dfrac{5^\nu + \nu^3}{6^\nu + \nu^2}$ → Χρησιμοποιείστε την 6

8) $\alpha_\nu = \dfrac{3^\nu}{\nu!}$ 9) $\alpha_\nu = \dfrac{4^\nu \cdot \nu!}{(2\nu)^\nu}$ → Χρησιμοποιείστε την 4.

→ **ΧΡΗΣΗ της βασικής ακολουθίας $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \to e$.**

Άσκηση 49 Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

1) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+2}$. 2) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)^\nu$. 3) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^\nu$

4) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{5\nu}$ → Θέστε $\nu+1=\kappa \Leftrightarrow \nu=\kappa-1$ ...

5) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{5\nu}\right)^\nu$ → Θέστε $5\nu=\kappa \Leftrightarrow \nu=\frac{\kappa}{5}$ ...

6) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{2}{\nu}\right)^\nu$ → Γενικά σε μορφή $\alpha_\nu = \left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu$ γράφω το $1+\frac{\alpha}{\nu}$ σαν γινόμενο κλασμάτων στα οποία ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή κατά μονάδα και χρησιμοποιώ ότι:

$$\left(1+\frac{1}{\nu+\kappa}\right)^\nu = \left(1+\frac{1}{\nu+\kappa}\right)^{\nu+\kappa-\kappa} = \left(1+\frac{1}{\nu+\kappa}\right)^{\nu+\kappa} \cdot \left(1+\frac{1}{\nu+\kappa}\right)^{-\kappa} \ldots$$

(Είναι: $\lim\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu = e^\alpha$ §3.25.Β. – Φ.17 κεφ3°)

7) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{3}{\nu}\right)^\nu$. 8) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{3}{5\nu}\right)^\nu$. 9) $\alpha_\nu = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu$.

▼ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

1) ΕΚΘΕΤΙΚΗ: είναι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ με $f(x)=\alpha^x$ όπου $\alpha>0$.

▼ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

1) $\alpha^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
2) Αν $\alpha=1 \Rightarrow \alpha^x=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
3) $\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1+x_2}$.
4) $(\alpha\beta)^x=\alpha^x\beta^x$.
5) $\alpha^{x_1}:\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1-x_2}$.
6) $(\alpha^{x_1})^{x_2}=\alpha^{x_1x_2}$.
7) i) Αν $\alpha>1 \Rightarrow$ η α^x είναι $\uparrow$ (δηλαδή: $x_1<x_2 \Rightarrow \alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$)
ii) Αν $\alpha<1 \Rightarrow$ η α^x είναι $\downarrow$ (» : $x_1<x_2 \Rightarrow \alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$).
iii) Αν $\alpha=1 \Rightarrow$ η α^x είναι σταθερή με τιμή 1.
8) i) Αν $x>0$ και $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha^x>\beta^x$.
ii) Αν $x<0$ και $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha^x<\beta^x$.
9) Η α^x είναι συνάρτηση "επί", δηλαδή $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+^*$ $(\alpha\neq1)$.

- Αν $\alpha>1 \Rightarrow \begin{cases}\alpha^x>1, & \text{αν } x>0\\ \alpha^x<1, & \text{αν } x<0\end{cases}$

2) ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ:

Η εκθετική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ με $f(x)=\alpha^x$ ($\alpha>0$ και $\alpha\neq1$) είναι συνάρτηση "1-1 και επί", οπότε ορίζεται η αντίστροφη αυτής, που τη συμβολίζουμε $\log_\alpha$ και τη λέμε λογαριθμική συνάρτηση με βάση α. Δηλαδή ο τύπος της είναι: $y=\log_\alpha x \Leftrightarrow \alpha^y=x$, και το Π.Ο. της το $\mathbb{R}_+^*$.

▼ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ** (Απόδειξη...)

1) $\alpha^x=y \Leftrightarrow \log_\alpha y=x$.
2) $\log_\alpha 1=0,\ \log_\alpha\alpha=1$.
3) $\alpha^{\log_\alpha x}=x,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$.
4) $\log_\alpha(x_1x_2)=\log_\alpha x_1+\log_\alpha x_2$.
5) $\log_\alpha(x_1:x_2)=\log_\alpha x_1-\log_\alpha x_2$.
6) $\log_\alpha x^y=y\log_\alpha x$.
7) i) Αν $\alpha>1 \Rightarrow$ η $\log_\alpha$ είναι $\uparrow$.
(δηλαδή, αν $x_1<x_2 \Rightarrow \log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2$)
ii) Αν $\alpha<1 \Rightarrow$ η $\log_\alpha$ είναι $\downarrow$.
(δηλαδή, αν $x_1<x_2 \Rightarrow \log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$).

- Αν $\alpha>1 \Rightarrow \begin{cases}x>1 \Leftrightarrow \log_\alpha x>0\\ 0<x<1 \Leftrightarrow \log_\alpha x<0\end{cases}$
- Αν $\alpha<1$ και $\begin{cases}x>1 \Leftrightarrow \log_\alpha x<0\\ 0<x<1 \Leftrightarrow \log_\alpha x>0\end{cases}$

Δεκαδικός λογάριθμος ($\log x$): είναι ο λογάριθμος θετικού αριθμού x με βάση το 10.
Νεπέρειος » ($\ln x$): " " " " " " " " " e.

- $\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$.

▼Εφαρμογή – Θεωρία (Απόδειξη...)

ΤΥΠΟΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΒΑΣΕΩΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ► $\log_\alpha x=\dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta\alpha}$.

- $\log_\alpha x=\dfrac{\log x}{\log\alpha}=\dfrac{\ln x}{\ln\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(50) Να λυθούν οι (εκθετικές) ανισώσεις:

1) $3^{2x-1} \geq 1$. 2) $2^{x^2-3x+1} < 1$. 3) $4^{-x^2+x-1} > 1$.

4) $5^{x^2-9} \leq 1$. 5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3-x} > 1$. 6) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-1} \geq 1$.

7) $3^{x-1} < 9$ 8) $2^{x-2} \geq 16$ 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} \leq \frac{8}{27}$

(51) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.
Δείξτε ότι: $f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = 2$.

(52) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ημ\left(λ + 2κπ\frac{\log x}{\log α}\right)$.
Δείξτε ότι: $f(αx) = f(x)$.

(53) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x) = α + \frac{κ\log(\log x)}{\log ν}$
όπου $α$ σταθερός αριθμός και $ν \in \mathbb{N}^* - \{1\}$,
πληρεί τη σχέση: $f(x^ν) - f(x) = κ$.
Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της f;

(54) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{α^x + α^{-x}}{2}$ όπου $α > 0$.
Δείξτε ότι: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(55) Να λυθούν οι (λογαριθμικές) ανισώσεις

1) $\log x > 1$. 2) $\log(x-3) > 2$ 3) $\log(2x+1) < 3$

4) $\log_{1/2} x \leq 4$ 5) $\log_{2/3}(x-5) > 1$ 6) $\ln x > 2$

(56) Δίνεται η μη ταυτοτική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
η οποία πληρεί τη σχέση: $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
Αν το $f(1) \neq 1$, δείξτε ότι: $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(57) Να βρεθεί ο $α \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

1) $f: f(x) = (α^2-3)^x$ να είναι $\uparrow$.
2) $φ: φ(x) = (α^2-α)^x$,, ,, $\downarrow$.
3) $h: h(x) = \log_{α^2+2} x$,, ,, $\uparrow$.
4) $g: g(x) = \log_{3α-1} x$,, ,, $\downarrow$.

▼ ΜΗ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

ΟΡΙΣΜΟΙ: Μια ακολουθία (α_ν), θα λέμε ότι έχει όριο το

$+\infty$	$-\infty$
όταν για κάθε $M>0$ υπάρχει φυσικός ν_0, τέτοιος ώστε:	
$\forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu>\nu_0 \Longrightarrow \alpha_\nu > M$	$\forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu>\nu_0 \Longrightarrow \alpha_\nu < -M$.
Συμβολισμοί	
$\lim \alpha_\nu = +\infty$ ή ή $\alpha_\nu \to +\infty$	$\lim \alpha_\nu = -\infty$ ή $\alpha_\nu \to -\infty$.
• Έτσι, για κάθε $M>0$ όλοι οι όροι, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα	
$(M,+\infty)$	$(-\infty,-M)$.
• Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης της (α_ν) βρίσκονται	
"πάνω" από την ευθεία $y=M$	"κάτω" από την ευθεία $y=-M$.

Παρατηρήσεις:

1) $\forall \kappa \in \mathbb{N}^*,\ \lim \alpha_\nu = +\infty\ (-\infty) \Longleftrightarrow \lim \alpha_{\nu+\kappa} = +\infty\ (-\infty)$.
2) $\lim \alpha_\nu = +\infty \Longleftrightarrow \lim(-\alpha_\nu) = -\infty$.
3) $\lim \alpha_\nu = +\infty\ (-\infty) \Longrightarrow \lim|\alpha_\nu| = +\infty$. • Δεν ισχύει το αντίστροφο.
4) Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty\ (-\infty)$ τότε $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}: \forall \nu>\nu_0$ είναι $\alpha_\nu>0$ $(\alpha_\nu<0)$.
5) Έστω ότι $\exists \kappa \in \mathbb{N}$: για τις $(\alpha_\nu), (\beta_\nu)$ να είναι $\alpha_\nu \le \beta_\nu$, $\forall \nu>\kappa$. Τότε:
   i) Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty \Longrightarrow \lim \beta_\nu = +\infty$.
   ii) Αν $\lim \beta_\nu = -\infty \Longrightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty$.

•→ Όριο της $\frac{1}{\alpha_\nu}$ Βλέπε Φυλ. 19.

▼ Ακολουθίες που δεν έχουν όριο

Μια ακολουθία μη συγκλίνουσα, δηλαδή που δεν έχει πεπερασμένο όριο $\ell \in \mathbb{R}$, είναι δυνατόν:

1) να έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$.
2) να μην έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$. $\longleftrightarrow$ Αποκλίνουσα ακολουθία.

▼ Εφαρμογές-Θεωρία (Απόδειξη...)

1) Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ και $\forall \nu \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_\nu \ge 0$ $\Longrightarrow \lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = +\infty$, $(\kappa \in \mathbb{N}^*)$.

2) Αν $\alpha>1 \Longrightarrow \lim \alpha^\nu = +\infty$.

• $\lim \nu^\kappa = +\infty$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$. • $\lim \sqrt[\kappa]{\nu} = +\infty$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$.

▼ ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Θ. Έστω (α_ν) μια ακολουθία με όριο το $+\infty$.

I) Αν η ακολουθία (β_ν) είναι φραγμένη κάτω, τότε $\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)=+\infty$.

II) Αν η (β_ν) έχει κάτω φράγμα θετικό, τότε $\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)=+\infty$.

III) » » » » άνω » αρνητικό, » $\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)=-\infty$. (Απόδειξη)

- Το Θεώρημα εφαρμόζεται και στη περίπτωση που οι υποθέσεις για την (β_ν) ισχύουν $\forall\nu>\kappa$, $(\kappa\in\mathbb{N})$.
- Το Θεώρημα εφαρμόζεται και όταν η (β_ν) έχει όριο L και ειδικά:
  η (I) περίπτωση αν $L\neq-\infty$.
  η (II) » » $L>0$ ή $L=+\infty$.
  η (III) » » $L<0$ ή $L=-\infty$.

Θ. Έστω (α_ν) μια ακολουθία με όριο το $-\infty$.

I) Αν η ακολουθία (β_ν) είναι φραγμένη άνω, τότε $\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)=-\infty$.

II) Αν η (β_ν) έχει άνω φράγμα αρνητικό, τότε $\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)=+\infty$.

III) » » » » κάτω » θετικό, » $\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)=-\infty$.

▼ ΟΡΙΟ ΤΗΣ $\frac{1}{\alpha_\nu}$.

Θ. 1) Αν $\lim\alpha_\nu=+\infty$ ή $-\infty$ και $\forall\nu\in\mathbb{N}$ είναι $\alpha_\nu\neq0$, τότε $\lim\frac{1}{\alpha_\nu}=0$. (Απόδειξη)

2) Αν $\lim\alpha_\nu=0$ και $\exists\kappa\in\mathbb{N}:\ \forall\nu>\kappa$ να είναι $\alpha_\nu>0$ $(\alpha_\nu<0)$, τότε $\lim\frac{1}{\alpha_\nu}=+\infty$ $(-\infty)$. (Απόδειξη...)

- Στη (1) περίπτωση, αν η συνθήκη $\alpha_\nu\neq0$ ισχύει $\forall\nu>\kappa$ όπου $\kappa\in\mathbb{N}$, (και όχι $\forall\nu\in\mathbb{N}$), τότε $\lim\frac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}}=0$.
- Στη (2) περίπτωση, αν οι όροι της (α_ν) δεν διατηρούν σταθερό πρόσημο, τότε η $\left(\frac{1}{\alpha_\nu}\right)$ δεν έχει όριο. ← Αποκλίνουσα.

▼ ΠΡΟΣΟΧΗ

- Αν η (α_ν) δεν είναι φραγμένη άνω, τότε δεν συμπεραίνουμε ότι $\lim\alpha_\nu=+\infty$.
- Αν η (α_ν) είναι ↑ και όχι φραγμένη άνω, τότε $\lim\alpha_\nu=+\infty$ (Ασκ. 30_i.B).
- » » » » ↓ » » » κάτω, » $\lim\alpha_\nu=-\infty$.
- Αν $\lim\alpha_\nu=+\infty$ οπωσδήποτε δεν θα είναι φραγμένη άνω (Ασκ. 29.B), αλλά δεν είναι βέβαιο ότι θα είναι ↑ η (α_ν). (Ασκ. 30_{ii}.B).

▼ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ.▼

$\lim \alpha_\nu$	$\lim \beta_\nu$	$\lim \frac{1}{\beta_\nu}$	$\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)$	$\lim(\alpha_\nu \beta_\nu)$	$\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$
$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_2 \neq 0$	$\frac{1}{\ell_2}$	$\ell_1+\ell_2$	$\ell_1 \cdot \ell_2$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$
	$\ell_2 = 0$	$+\infty,\ \beta_\nu>0$ $-\infty,\ \beta_\nu<0$	ℓ_1	0	$+\infty,\ \ell_1\beta_\nu>0$ $-\infty,\ \ell_1\beta_\nu<0$?$,\ \ell_1=0$
	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty,\ \ell_1>0$ $-\infty,\ \ell_1<0$?$,\ \ell_1=0$	0
	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty,\ \ell_1>0$ $+\infty,\ \ell_1<0$?$,\ \ell_1=0$	0
$+\infty$	$\ell_2 \neq 0$	$1/\ell_2$	$+\infty$	$+\infty,\ \ell_2>0$ $-\infty,\ \ell_2<0$	$+\infty,\ \ell_2>0$ $-\infty,\ \ell_2<0$
	$\ell_2 = 0$	$+\infty,\ \beta_\nu>0$ $-\infty,\ \beta_\nu<0$	$+\infty$	?	$+\infty,\ \beta_\nu>0$ $-\infty,\ \beta_\nu<0$
	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	?
	$-\infty$	0	?	$-\infty$	?
$-\infty$	$\ell_2 \neq 0$	$1/\ell_2$	$-\infty$	$-\infty,\ \ell_2>0$ $+\infty,\ \ell_2<0$	$-\infty,\ \ell_2>0$ $+\infty,\ \ell_2<0$
	$\ell_2 = 0$	$+\infty,\ \beta_\nu>0$ $-\infty,\ \beta_\nu<0$	$-\infty$	?	$-\infty,\ \beta_\nu>0$ $+\infty,\ \beta_\nu<0$
	$+\infty$	0	?	$-\infty$	?
	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	?

▼ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ — ΜΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ

ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ

$\ell+(+\infty)=+\infty$	$\ell\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot\ell=+\infty,\ \ell>0$	$\frac{\ell}{+\infty}=0$
$(+\infty)+\ell=+\infty$	$\ell\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot\ell=-\infty,\ \ell<0$	
$\ell+(-\infty)=-\infty$	$\ell(-\infty)=(-\infty)\ell=+\infty,\ \ell<0$	$\frac{\ell}{-\infty}=0$
$(-\infty)+\ell=-\infty$	$\ell(-\infty)=(-\infty)\ell=-\infty,\ \ell>0$	
$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	
$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(+\infty)(-\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$	

ΜΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ

$(+\infty)+(-\infty)$	$(-\infty)+(+\infty)$	$(+\infty)-(+\infty)$	$(-\infty)-(-\infty)$
$0\cdot(+\infty)$	$0\cdot(-\infty)$	$(+\infty)\cdot 0$	$(-\infty)\cdot 0$
$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$
$\frac{+\infty}{0}$	$\frac{-\infty}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\ell}{0},\ \ell\in\mathbb{R}$

▼ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ.

Απο τα προηγούμενα φαίνεται, ότι οι βασικές απροσδιόριστες μορφές είναι οι : $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

(υπάρχουν και άλλες που θα δούμε στο κεφάλαιο των παραγώγων).

● Απο αυτές άλλες δεν έχουν όριο (αποκλίνουσες) και άλλες έχουν όριο πεπερασμένο (συγκλίνουσες) ή άπειρο (μη συγκλίνουσες).

ΑΡΣΗ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑΣ.

1) Σε Πολυωνυμική Ακολουθία → $\alpha_\nu = \beta_\kappa \nu^\kappa + \beta_{\kappa-1}\nu^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 \nu + \beta_0$,

ισχύει : $\begin{cases} \lim \alpha_\nu = +\infty, \text{ αν } \beta_\kappa > 0 \\ \lim \alpha_\nu = -\infty, \text{ αν } \beta_\kappa < 0 \end{cases}$ ● Δηλαδή: το όριο είναι ομόσημο του μεγιστοβάθμιου συντελεστή.

2) Σε Ρητή Ακολουθία → $\alpha_\nu = \dfrac{\beta_\kappa \nu^\kappa + \beta_{\kappa-1}\nu^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 \nu + \beta_0}{\gamma_\lambda \nu^\lambda + \gamma_{\lambda-1}\nu^{\lambda-1} + \dots + \gamma_1 \nu + \gamma_0}$ (Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ Βλέπε Φυλ.9)

ισχύει: $\lim \alpha_\nu = \dfrac{\beta_\kappa}{\gamma_\lambda} \cdot \lim \nu^{\kappa-\lambda}$

Έτσι : 1) Αν $\kappa > \lambda \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \infty \begin{cases} +\infty, \text{ αν } \frac{\beta_\kappa}{\gamma_\lambda} > 0 \\ -\infty, \text{ αν } \frac{\beta_\kappa}{\gamma_\lambda} < 0 \end{cases}$.

2) Αν $\kappa = \lambda \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \dfrac{\beta_\kappa}{\gamma_\lambda}$. (Αποδείξεις των 1)-2).)

3) Αν $\kappa < \lambda \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0$.

● Άρση απροσδιοριστίας ορισμένων μορφών, Βλέπε και στα Φυλ.9-10.

▼ Βασικά παραδείγματα

1) $\alpha_\nu = \lambda \cdot \nu$, $(\lambda \in \mathbb{R}^*_+) \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$.
2) $\alpha_\nu = \nu^\kappa$, $(\kappa \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$.
3) $\alpha_\nu = \sqrt[\kappa]{\nu}$, $(\kappa \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$.

(Βλέπε και εφαρμογές 1-2 Φυλ.18)

4) Αν (α_ν) ακολουθία με θετικούς όρους και $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda > 1 \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$
(Εφαρμογή 3ii · Βσελ61-θεωρία)

▼ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΜΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ.

1o) Η (α_ν) δεν είναι συγκλίνουσα αν $\exists \varepsilon > 0 : \forall \nu > \nu_0 \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu| \geq \varepsilon$.
(Βλέπε άλλη διατύπωση στο Φυλ.7 και εφαρμογές στην άσκηση 37.Φ.)

2o) Κάθε μη φραγμένη ακολουθία δεν είναι συγκλίνουσα. (Βλέπε Φυλ.8).

3o) Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ ή $\lim \alpha_\nu = -\infty$ η ακολουθία (α_ν) δεν είναι συγκλίνουσα.
(Το ίδιο συμβαίνει αν $\nexists \lim \alpha_\nu$, οπότε η (α_ν) λέγεται αποκλίνουσα.)

4o) Αν η $(|\alpha_\nu|)$ δεν συγκλίνει, τότε και η (α_ν) δεν συγκλίνει -
(αντιστροφοαντίθετη της ιδιότητας 2 του Φυλ.8).

ΜΕΘΟΔΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΠΕΙΡΙΖΟΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

1) ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ

Προσδιορίζω δείκτη $\nu_0 = \nu_0(M)$, $\forall M > 0$ έτσι ώστε

$$\forall \nu > \nu_0 \begin{cases} \alpha_\nu > M, \text{ οπότε } \lim \alpha_\nu = +\infty. \\ \alpha_\nu < -M, \quad \text{»} \quad \lim \alpha_\nu = -\infty. \end{cases}$$

Άσκηση 58 Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες έχουν όριο το $+\infty$.

1) $\alpha_\nu = \nu^3 + \nu + 3$. 2) $\alpha_\nu = \nu^4 + 2\nu^3 - \nu^2$. 3) $\alpha_\nu = 4\nu^2 + 3\nu + 1$
4) $\alpha_\nu = 7\nu - 10$. 5) $\alpha_\nu = \nu^2 + 4$. 6) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2 + 5}$.

Άσκηση 59 Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες έχουν όριο το $-\infty$.

1) $\alpha_\nu = \dfrac{2-\nu}{5}$. 2) $\alpha_\nu = \dfrac{4-\nu^3}{4\nu}$. 3) $\alpha_\nu = \eta\mu 5\nu - 3\nu$.
4) $\alpha_\nu = -\nu^2 - \nu - 1$. 5) $\alpha_\nu = -2\nu^3 - 3\nu$. 6) $\alpha_\nu = -5\nu^3 + \nu - 2$.

2) ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ.

Στηρίζεται στις προτάσεις:

I) $\alpha_\nu \le \beta_\nu$, $\forall \nu > \kappa \in \mathbb{N}$ και $\alpha_\nu \to +\infty \Rightarrow \beta_\nu \to +\infty$. (Παρατήρηση 5), Φυλ.18).
II) » , » » $\beta_\nu \to -\infty \Rightarrow \alpha_\nu \to -\infty$.
III) $\alpha_\nu \to 0$ και $\exists \kappa \in \mathbb{N}: \forall \nu > \kappa \begin{cases} \alpha_\nu > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha_\nu} \to +\infty. \\ \alpha_\nu < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha_\nu} \to -\infty. \end{cases}$ (Θ.2), Φυλ.19)
IV) $\alpha_\nu \to +\infty$ και $\alpha_\nu \ge 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} \to +\infty$. (Εφαρμογή 1), Φυλ.18).
V) $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^\nu \to +\infty$. (Εφαρμογή 2), Φυλ.18).

- $\nu^\kappa \to +\infty$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$. • $-\nu^\kappa \to -\infty$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 60 Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες απειρίζονται θετικά:

1) $\alpha_\nu = \nu^3 + 5\nu^2 - 3\nu + 7$. 2) $\alpha_\nu = \nu^4 + 2\nu^3 - \nu^2 + 6$. 3) $\alpha_\nu = 5\nu^4 - 8\nu + 3$
4) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2 + 5\nu + 8}$. 5) $\alpha_\nu = \left(\frac{4}{3}\right)^\nu$. 6) $\alpha_\nu = \dfrac{4\nu^3 + 5\nu - 1}{\nu^2 + 7}$

Άσκηση 61 Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες απειρίζονται αρνητικά:

1) $\alpha_\nu = -\nu^3 - \nu^2 + \nu + 2$. 2) $\alpha_\nu = -3\nu^5 + 4\nu^3 + 2\nu - 5$.
3) $\alpha_\nu = 2^\nu + 4^\nu - 7^\nu$. 4) $\alpha_\nu = \dfrac{-3\nu^2}{\nu + 2}$.

Άσκηση 62 Δείξτε ότι:

1) $\lim\left(\sqrt{4\nu^2 + \nu + 3} + \sqrt{2\nu + 1}\right) = +\infty$. 2) $\lim\left(\dfrac{4\nu^2 + 5\nu + 1}{\sqrt{4\nu^2 + \nu - 2}}\right) = +\infty$.
3) $\lim\left(\sqrt{9\nu^2 + \nu} - \sqrt{\nu + 5}\right) = +\infty$. 4) $\lim \sqrt{\nu^4 - \nu^3 + 2\nu} = +\infty$.
5) $\lim\left(\dfrac{-\nu^2 + 3}{\left(\frac{3}{4}\right)^\nu + 2}\right) = -\infty$. 6) $\lim\left(\dfrac{2\nu^2 + 5}{\left(\frac{5}{6}\right)^\nu + 1}\right) = +\infty$.
7) $\lim\left(\dfrac{8^\nu + 6^\nu - 2^\nu}{5^\nu + 3^\nu}\right) = +\infty$. 8) $\lim\left(\dfrac{6^\nu + 4^\nu - 3^\nu}{4^\nu + 3^\nu}\right)$. 9) $\lim\left(\dfrac{-\nu^3 + 2\nu + 1}{\nu^2 + 5\nu}\right) = -\infty$.

Άσκηση 63 Να λυθούν με τη θεωρία του Φ.21 οι ασκήσεις:
$58_{2-6} - 59_{3-6} - 60_{2-4-6} - 61_{3-4}$ από τα Φυλλάδια.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot (2\nu+3)$ είναι αποκλίνουσα.

② Να βρεθεί ο γενικός όρος της ακολουθίας (α_ν): $\begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ 16\alpha_{\nu+1}^2 + \alpha_\nu^2 = 8\alpha_{\nu+1}\cdot\alpha_\nu \end{cases}$.

③ Δείξτε ότι η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu}{2^\nu}$ είναι φθίνουσα.

④ Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της ακολουθίας $\alpha_\nu = (\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)+1$.

⑤ i) Αν η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα, δείξτε ότι και η ακολουθία $\beta_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu}$ είναι γνησίως αύξουσα. ii) Δείξτε ότι η (α_ν): $\alpha_\nu = \frac{\nu\cdot\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^4\sqrt{3\nu}}{3\nu^3+4}$ είναι φραγμένη.

⑥ Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές:

1) $\alpha_\nu = \frac{\eta\mu\frac{\nu\pi}{2}}{\nu^2}$. 2) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^7 - 1$. 3) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{(\nu^2+1)^2}$. 4) $\alpha_\nu = \frac{3^\nu+4^\nu}{5^\nu+7^\nu}$

5) $\alpha_\nu = \frac{\sqrt[3]{\nu}\cdot\eta\mu 7\nu - \sqrt{\nu}\cdot\eta\mu 3\nu}{3\nu+\sigma\upsilon\nu\nu}$. 6) $\alpha_\nu = \left(\frac{1}{3}\right)^\nu \cdot \frac{\sqrt{\nu+4}}{5\nu+1}$. 7) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2+2\nu}{\nu^3+\nu-1}$.

8) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+3} - \sqrt{\nu^2+4}$. 9) $\alpha_\nu = \frac{11}{5^\nu}$. 10) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{3\nu+2} - \sqrt[3]{3\nu}$.

11) $\alpha_\nu = \frac{1+2^2+3^2+\cdots+\nu^2}{\nu^4}$. 12) $\alpha_\nu = \frac{27^{\log_3 \nu}}{32^{\log_2 \nu}}$. 13) $\alpha_\nu = \frac{\sqrt{\nu+3}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+3}+\sqrt{\nu}}$.

⑦ Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{\alpha^\nu + \beta^{\nu+1}}{2\alpha^\nu - 3\beta^{\nu-1}}$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$.

⑧ Αν $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[\left(\alpha+\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\alpha+\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\alpha+\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right] \Longrightarrow \lim\alpha_\nu = \alpha^2+\alpha+\frac{1}{3}$.

⑨ Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \frac{5^\nu+6^{-\nu}}{5^\nu-6^{-\nu}}$. 2) $\alpha_\nu = \frac{x^{\nu+1}+x^{-(\nu+1)}}{x^\nu+x^{-\nu}}$, $x>1$.

⑩ Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ και $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{8}(4\alpha_\nu^2+1)$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

⑪ Να βρείτε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{4\alpha_\nu+5}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

ΘΕΜΑ 88

⑫ Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \frac{1+2+3+\cdots+\nu}{\nu^\kappa}$ όπου $\kappa\in\mathbb{Q}$ και $\kappa<2$. 2) $\alpha_\nu = \frac{1+3+5+\cdots+(2\nu-1)}{\sqrt{\nu^2+2\nu}-\nu}$

3) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{3^\nu+5^\nu+7^\nu}$ ΘΕΜΑ 82.

⑬ Όμοια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \frac{3\cdot 6^\nu + 9\cdot 3^\nu + 1}{8\cdot 2^\nu + 3^\nu + 6^\nu}$. 2) $\alpha_\nu = \frac{2^\nu+3^\nu}{2^{\nu+1}+3^{\nu+1}}$. 3) $\alpha_\nu = \frac{\lambda^\nu + 2^{\nu+1}}{2\lambda^\nu - 3\cdot 2^{\nu-1}}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*-\{-2\}$.

ΘΕΜΑ 84.

(14) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{[\nu\alpha]}{\nu}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(15) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

1) $\alpha_\nu = \frac{3\nu^2-5\nu-7}{\nu+1}$. 2) $\alpha_\nu = \frac{-\nu^3+2\nu+1}{\nu^2+5\nu}$. 3) $\alpha_\nu = \sqrt{2\nu^2+\nu+1}$.

4) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}$. 5) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+1} - \alpha\nu$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 6) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{2^\nu+3^\nu+\dots+\nu^\nu}$.

7) $\alpha_\nu = \sqrt{3\nu+1}-\sqrt{2\nu+3}$. 8) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{2\eta\mu^2\nu+3\sigma\upsilon\nu^2\nu}$. 9) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{3\nu}\right)^{1/\nu}$.

(16) Αν $\alpha \in \mathbb{N}^*-\{1\}$ δείξτε ότι η $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\alpha\cdot\nu}\right)^{1/\nu}$ έχει όριο το 1.

(17) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{\alpha\nu^3+\nu^2+1}{\beta\nu^3+\nu+5}$.

(18) Αν $\kappa \in \mathbb{N}^*$ να βρεθεί το όριο της $\alpha_\nu = \nu^\kappa \cdot \left(\sqrt{\frac{\nu+2}{\nu+5}}-1\right)$.

(19) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_ν) με τύπο:

$$\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{\nu-1}{\nu}\cdot\sqrt[\nu]{\nu}, & \nu \text{ περιττός.} \\ \frac{\nu+2}{\nu}, & \nu \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

(20) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η ακολουθία (α_ν) με τύπο: $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{2}{\nu+1}, & \nu \text{ περιττός} \\ \frac{2}{\nu}, & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$ και να βρεθεί το όριό της.

(21) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_ν) με τύπο:

$$\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{4\nu+5}{3\nu+2}, & \text{αν } \nu = 2\kappa+1 \\ \frac{4\nu^3+2\nu+5}{3\nu^3+7}, & \text{αν } \nu = 2\kappa \end{cases}$$

(22) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu + \frac{\eta\mu 2\nu}{\nu+2}}$.

(23) Όμοια της ακολουθίας $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\sqrt{4\nu^2+\nu+2}-2\nu}$.

(24) Όμοια της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{\nu^2}{\nu^3+1}+\frac{\nu^2}{\nu^3+2}+\dots+\frac{\nu^2}{\nu^3+\nu}$.

(25) Αν $x \in \mathbb{R}$ και $x>-1$, να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{x^\nu-1}{x^\nu+1}$ ΘΕΜΑ 79

(26) Να βρεθεί το όριο της $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^{\nu+1}}\cdot\left(\sqrt{\nu^2+1}-\nu\right)$ ΘΕΜΑ 83.

(27) Να βρεθεί το όριο της $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2-2\nu+3}$ ΘΕΜΑ 85.

(28) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_ν) με

$\alpha_\nu = \left(\sqrt{7\nu^4+6\nu+5}-\sqrt{7\nu^4+3\nu+3}\right)\cdot\sqrt{63\nu^2-5\nu+20}$ ΘΕΜΑ 87.

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

ΟΡΙΣΜΟΙ:

1) Ένα σημείο x_0 λέγεται οριακό σημείο ή σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A\subseteq\mathbb{R}$ (ανεξάρτητα αν $x_0\in A$ ή $x_0\notin A$), αν και μόνο αν, σε κάθε περιοχή του x_0, υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο του A διάφορο του x_0.

(π.χ. στα (α,x_0), (x_0,β), $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, $(\alpha,x_0]$, $[x_0,\beta)$... το x_0 είναι σ.σ.).

• Τα $+\infty$, $-\infty$ λέγονται κατ' εξοχή σ.σ. ενός συνόλου A, αν σε κάθε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$ ή $(-\infty,\alpha)$ υπάρχουν σημεία του συνόλου A.

2) Ένα σημείο $x_0\in A\subseteq\mathbb{R}$ λέγεται μεμονωμένο σημείο, αν και μόνο αν, υπάρχει περιοχή $\Pi(x_0)$ του σημείου x_0 τέτοια ώστε: $\Pi(x_0)\cap A=\{x_0\}$.

(π.χ. στο $A=(-2,1)\cup\{3\}$ το 3 είναι μεμονωμένο σημείο).

3) Ένα σημείο $x_0\in A\subseteq\mathbb{R}$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A, αν και μόνο αν, υπάρχει περιοχή $\Pi(x_0)$ του x_0, τέτοια ώστε: $\Pi(x_0)\subset A$.

(π.χ. στο $A=(-2,1)$ το 0 είναι εσωτερικό σημείο).

▼ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ.

▼Βασική προϋπόθεση▼

ώστε το όριο στο $+\infty$ ‖ $-\infty$

να έχει έννοια και να το εξετάσω, είναι το Π.Ο. A της f να μην είναι φραγμένο άνω ‖ κάτω

δηλαδή να περιέχει ένα διάστημα της μορφής $\Delta=(\alpha,+\infty)$ ‖ $\Delta=(-\infty,\beta)$.

ΟΡΙΣΜΟΙ: Θα λέμε ότι η f έχει όριο στο $+\infty$ ‖ $-\infty$

1) το $\ell\in\mathbb{R}$, όταν $\forall\varepsilon>0,\ \exists X_0>0$:

$\forall x\in A,\ x>X_0\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$ ‖ $\forall x\in A,\ x<-X_0\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

• Η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

2) το $+\infty$, όταν $\forall M>0,\ \exists X_0>0$:

$\forall x\in A,\ x>X_0\Rightarrow f(x)>M$ ‖ $\forall x\in A,\ x<-X_0\Rightarrow f(x)>M$.

3) το $-\infty$, όταν $\forall M>0,\ \exists X_0>0$:

$\forall x\in A,\ x>X_0\Rightarrow f(x)<-M$ ‖ $\forall x\in A,\ x<-X_0\Rightarrow f(x)<-M$.

Συμβολισμοί

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ ή $\lim\limits_{+\infty}f=L$ ή $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}L$ ‖ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ ή $\lim\limits_{-\infty}f=L$ ή $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}L$

όπου $L\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Παρατηρήσεις

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ell]=0$.
2) $\lim_{+\infty} f=\ell \Leftrightarrow \lim_{+\infty}(-f)=-\ell$.
3) $\lim_{+\infty} f=+\infty \Leftrightarrow \lim_{+\infty}(-f)=-\infty$.
4) $\lim_{+\infty} f=L \Leftrightarrow \lim_{+\infty} f_1=L$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\ell]=0$.
2) $\lim_{-\infty} f=\ell \Leftrightarrow \lim_{-\infty}(-f)=-\ell$.
3) $\lim_{-\infty} f=+\infty \Leftrightarrow \lim_{-\infty}(-f)=-\infty$.
4) $\lim_{-\infty} f=L \Leftrightarrow \lim_{-\infty} f_1=L$

όπου f_1 περιορισμός της f. ($L\in\overline{\mathbb{R}}$).

- Η τελευταία παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι μπορούμε (αν χρειάζεται) να περιοριζόμαστε για την εύρεση του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ σε διάστημα $\Delta=(\alpha,+\infty)\subseteq A$ ‖ $\Delta=(-\infty,\beta)\subseteq A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $\lim_{x\to\pm\infty} u(x)=c$, όπου u σταθερή συνάρτηση με τιμή c.

2) $\lim_{x\to+\infty} x^{\kappa}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^{2\kappa}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^{2\kappa+1}=-\infty$.

3) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{\kappa}}=0$, $\forall \kappa\in\mathbb{N}^*$.

▼ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΟΥ

Θ. Έστω ότι οι συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A που δεν είναι φραγμένο άνω. Αν οι f,g έχουν στο $+\infty$ πεπερασμένα όρια, τότε:

1) $\lim_{+\infty}(f+g)=\lim_{+\infty} f+\lim_{+\infty} g$.
2) $\lim_{+\infty}(fg)=\lim_{+\infty} f\cdot\lim_{+\infty} g$.
3) $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\lim_{+\infty}(\lambda f)=\lambda\cdot\lim_{+\infty} f$.
4) Αν $\lim_{+\infty} g\neq 0$, τότε $\begin{cases} \lim_{+\infty}\frac{1}{g}=\frac{1}{\lim_{+\infty} g} \\ \lim_{+\infty}\frac{f}{g}=\frac{\lim_{+\infty} f}{\lim_{+\infty} g} \end{cases}$.
5) Αν $\forall x\in A, f(x)\geq 0$ και $\kappa\in\mathbb{N}^*$, τότε $\lim_{+\infty}\sqrt[\kappa]{f}=\sqrt[\kappa]{\lim_{+\infty} f}$. (Πρέπει $\lim_{+\infty} f>0$).

- Ανάλογη είναι η διατύπωση για πράξεις με συναρτήσεις που έχουν στο $-\infty$ πεπερασμένα όρια.

ΟΡΙΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. ► $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\alpha_\nu x^\nu$, όπου $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$.

ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. ► $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}$, όπου

$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $g(x)=\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\dots+\beta_1 x+\beta_0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Δείξτε (με τον ορισμό) ότι:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{x-5}=2$. 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5}{x^2}=2$. 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 3x}{x}=0$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-9}=+\infty$. 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+3}=0$. 7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-5}{x^3}=1$. 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log x=+\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3-5}{2x^3}=1$. 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$. 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=3$. 12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-4}=-\infty$.

② Να βρεθούν τα παρακάτω όρια (χρησιμοποιώντας τα βασικά παραδείγματα και τις ιδιότητες του ορίου στο ∞. Φυλ.2).

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x^4+x^3-2x+3)$. 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-2x^3+5x^2-3)$. 3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^2+5x)$

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x+1}{3x^3-2x^2}$. 5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x+3}{x^2+2}$. 6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x+1}{x^5+3x^4}$ 7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4}{x-2}$

8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{|x-3|}$. 9) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-4}$. 10) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-2x}$. 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}$. 12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-x}$

13) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x^2-9}$. 14) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3}{4}$. 15) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{x^2+1}$. 16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x-2}}$.

▼ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ → $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$.

1) ΜΟΡΦΗ $\frac{\infty}{\infty}$. Παρουσιάζεται σε συναρτήσεις του τύπου: $f(x)=\frac{\varphi(x)}{g(x)}$, $f(x)=\sqrt[\kappa]{\frac{\varphi(x)}{g(x)}}$, $f(x)=\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{g(x)}$, $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt[\kappa]{g(x)}}$ όπου $\varphi(x), g(x)$ πολυώνυμα.

ΜΕΘΟΔΟΣ. → Βγάζω κοινό παράγοντα από αριθμητή και παρονομαστή τη μεγαλύτερη δύναμη του x, απλοποιώ, και μετά εφαρμόζω ιδιότητες ορίων. (Βλέπε και M_1 Φυλ.9 ακολουθίες).

• Ειδικά στη 1η περίπτωση που η συνάρτηση είναι ρητή, η απροσδιοριστία αίρεται και με το όριο ρητής συνάρτησης. (Βλέπε Φυλ.2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

③ Δείξτε ότι:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{2x+3}=1$. 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2-x+1}{\sqrt{x^4+3}}=6$. 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2-2x+5}}{x+4}=-3$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^3-x+1}{\sqrt{x^2+x+5}}=+\infty$. 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+4}+x-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3+1}}=-\frac{1}{2}$. 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-x+5}{x+4}=-2$.

④ Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια, όταν $x \to +\infty$, των συναρτήσεων:

1) $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt[3]{x^3+4}}$. 2) $f(x)=\dfrac{5x}{3x-1+\sqrt{9x^2+x+1}}$. 3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$.

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}$. 5) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. 6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-3x^2-6x+3}}{x-2}$. 7) $f(x)=\dfrac{\log_3 9^x}{x+\sqrt{x}}$.

⑤ Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια, όταν $x \to -\infty$, των συναρτήσεων:

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+1}$. 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x^3+1}$. 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x+4}$.

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ 5) $f(x)=\dfrac{5x}{3x-1+\sqrt{9x^2+x+1}}$. 6) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{16x^2-x+7}}{x+3}$. 8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7}-x+4}{x+3}$.

⑥ Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+2}{|x|\cdot x}$. 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x-2|+3x}{3x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$. 4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{|x|}{\sqrt{x}}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Σε ΑΡΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=\sqrt[k]{\varphi(x)}$ το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

α' τρόπος: δεν μπαίνει στη ρίζα, πριν βγει κοινός παράγων η μεγαλύτερη δύναμη του x, ώστε το όριο του υπορρίζου να γίνει πεπερασμένο (θετικό).

β' τρόπος: Εφαρμογή (Βλέπε 5η ιδιότητα ορίου, ΦΥΛ. 2)

Αν $\forall x\in A$, $f(x)\geq 0$ και $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$. $(k\in\mathbb{N}^*)$, $(\sigma\in\overline{\mathbb{R}})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

⑦ Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-9}$. 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+5}-4x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+4-\sqrt{x^2-x+3}\right)$. 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x}+2x\right)$.

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[4]{2x^4+3x^2+1}$. 6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+4}$.

2) ΜΟΡΦΗ $\infty - \infty$.

Παρουσιάζεται σε συναρτήσεις του τύπου:

1) $f(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$ όπου $Q_1(x), Q_2(x)$ ρητές συναρτήσεις.

2) i) $f(x) = \sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{g(x)}$ όπου $\varphi(x), g(x)$ πολυώνυμα.

ii) $f(x) = \varphi(x) \pm \sqrt{g(x)}$ " " " " .

iii) $f(x) = \sqrt{\varphi(x)} \pm g(x)$ " " " " .

3) $f(x) = \sqrt[\kappa]{\varphi(x)} - \sqrt[\kappa]{g(x)}$ " " " " .

ΜΕΘΟΔΟΣ

- Στη 1η περίπτωση κάνω πράξεις (ομώνυμα) και φτάνω σε ρητή συνάρτηση.
- Στη 2η " πολ/ζω και διαιρώ με τη συζυγή παράσταση.
- Στη 3η " " " " " $\sqrt[\kappa]{\varphi^{\kappa-1}(x)} + \sqrt[\kappa]{\varphi^{\kappa-2}(x)g(x)} + \cdots + \sqrt[\kappa]{\varphi(x)\cdot g^{\kappa-2}(x)} + \sqrt[\kappa]{g^{\kappa-1}(x)}$.

(Βλέπε και M_4 ΦΥΛ.10 ακολουθίες).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(8) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)$. 2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x}{2x} - \frac{3+x}{x^2}\right)$. 3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1} - x\right)$

Τα παρακάτω όρια υπολογίζονται και με την ιδιότητα: $\lim\limits_{\pm\infty}(f+g) = \lim\limits_{\pm\infty} f + \lim\limits_{\pm\infty} g$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - \frac{2x^2}{x-1}\right)$. 5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^4-2}{2x} + \frac{x^3+1}{x}\right)$

(9) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

1) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$. 2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1} - 3x\right)$. 3) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+2} - \sqrt{4x^2-1}\right)$.

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(x+4 - \sqrt{x^2-x+3}\right)$. 5) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+1} - x\right)$. 6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x-3}\right)$. 8) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+1+\sqrt{x^2+x+1}\right)$ 9) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

10) $\lim_{x\to+\infty} x^{2/3}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)$. 11) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{-x^3+1} + x\right)$. 12) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$.

(10) Ομοια, για τα όρια: 1) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/3}\cdot\left[(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}\right]$. 2) $\lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\right]$.

(11) Να βρεθεί το όριο της $f: f(x) = \frac{(\alpha x+2)^\nu}{x^\nu + 3\beta}$ όταν $x\to\pm\infty$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

(12) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4} + \alpha x + \beta\right) = 11$.

(13) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2} - \alpha x\right) = \beta$.

(14) Αν $f(x) = \alpha x - \sqrt[3]{x^3+4}$, να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. ($\alpha\in\mathbb{R}$).

(15) Αν $f(x) = (3x+1)\cdot\sqrt{2x}$ και $g(x) = 3x$ να βρεθούν (αν υπάρχουν):

1) $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)]$. 2) $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - g(x)]$.

▼ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0\in\mathbb{R}$.

Βασική προϋπόθεση για να μελετήσουμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, είναι το Π.Ο. A να περιέχει τουλάχιστον ένα ανοιχτό διάστημα με άκρο x_0 δηλαδή: ή ένα διάστημα της μορφής (α,x_0) ή ένα διάστημα της μορφής (x_0,β) ή ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Αν $x_0\in A$, τα παραπάνω σύνολα γίνονται: $(\alpha,x_0]$, $[x_0,\beta)$, (α,β).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ και f μια συνάρτηση της οποίας το Π.Ο. A περιέχει τουλάχιστον ένα ανοιχτό διάστημα με άκρο x_0. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο:

1) το $\ell\in\mathbb{R}$, όταν $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: \forall x\in A,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.
2) το $+\infty$, όταν $\forall M>0, \exists\delta>0: \forall x\in A,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$.
3) το $-\infty$, » » , » : » , » $\Rightarrow f(x)<-M$.

• Στις περιπτώσεις 2)-3) η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Συμβολισμοί: $\lim_{x_0} f=L$ ή $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ ή $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} L$ όπου $L\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Παρατηρήσεις:

1) $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-\ell]=0$. 2) $\lim_{x_0}f=\ell\Leftrightarrow\lim_{x_0}(-f)=-\ell$.

3) $\lim_{x_0} f=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x_0}(-f)=-\infty$. 4) $\lim_{x_0}f=L\Leftrightarrow \lim_{x_0}f_1=L$ όπου f_1 περιορισμός της f σε περιοχή του x_0.

▼ ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ και μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A.

• Αν το A περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (x_0,β) και ο περιορισμός f_1 της f στο (x_0,β) έχει στο x_0 όριο L, θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο από δεξιά το L.

• Αν το A περιέχει τουλάχιστον ένα διάστημα της μορφής (α,x_0) και ο περιορισμός f_2 της f στο (α,x_0) έχει στο x_0 όριο L, θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο από αριστερά το L.

Συμβολισμοί: Για το όριο από δεξιά: $\lim_{x_0^+}f=L$ ή $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L$ ή $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)=L$.

Για το όριο από αριστερά: $\lim_{x_0^-}f=L$ ή $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L$ ή $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)=L$.

• Αν η f δεν ορίζεται αριστερά του x_0, δεν υπάρχει λόγος να μιλάμε για "όριο από δεξιά στο x_0", αφού ως έννοια συμπίπτει "με το όριο στο x_0". Όμοια, αν η f δεν ορίζεται δεξιά του x_0

Θ. Έστω f συνάρτηση της οποίας το Π.Ο. A περιέχει ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Η f έχει στο x_0 όριο $L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, αν και μόνο αν, υπάρχουν τα πλευρικά της όρια στο x_0 και είναι ίσα με L. (Απόδειξη...)

• Αν $\lim_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+}f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to x_0}f(x)$

• Αν $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=L$

Απαραίτητα, για συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, όταν ζητείται το όριο σε συνοριακό σημείο x_0.

▼ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΟΥ** σε σημείο συσσωρεύσεως $\sigma\in\overline{\mathbb{R}}$ του Π.Ο. A της f.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΠΡΟΣ ΤΟ 0.

1) Αν μια συνάρτηση f έχει στο σ όριο μηδέν και η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ, τότε η fg έχει στο σ επίσης όριο μηδέν. (Απόδειξη...).

2) Έστω ότι για τις συναρτήσεις f, g σε μια περιοχή του σ είναι $|g(x)|\le|f(x)|$.
Αν $\lim\limits_{x\to\sigma}f(x)=0$, τότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to\sigma}g(x)=0$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ.

3) Μια συνάρτηση f δεν έχει στο σ πεπερασμένο όριο (δηλαδή δεν έχει όριο, ή έχει το $+\infty$ ή το $-\infty$), αν υπάρχει $\varepsilon>0$, ώστε σε κάθε διάστημα Δ_σ υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε: $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon$.

4) Ιδιότητα του φραγμένου: Αν μια συνάρτηση έχει στο σ πεπερασμένο όριο ℓ, τότε είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ.

5) Αν μια συνάρτηση f έχει στο σ:

- πεπερασμένο όριο, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to\sigma}f(x)\right|$.
- όριο $+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)|=+\infty$.

(Δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλ. μπορεί η $|f(x)|$ να έχει όριο πεπερασμένο ή $+\infty$ και η $f(x)$ να μην έχει όριο. π.χ. $f(x)=\frac{|x|}{x}$ στο 0.)

6) Πρόσημο συνάρτησης και πρόσημο ορίου: Έστω ότι μια συνάρτηση f έχει στο σ όριο $L\neq0$. Τότε σε μια περιοχή του σ οι τιμές της f έχουν το πρόσημο του ορίου της.

Παρατηρήσεις: i) Αν σ' ένα διάστημα Δ_σ οι τιμές της f είναι θετικές (αρνητικές) και υπάρχει στο σ το όριό της, τότε το όριο αυτό αποκλείεται να είναι αρνητικό (θετικό), αλλά δεν αποκλείεται να είναι 0.

ii) Αν το όριο στο σ μιας συνάρτησης f είναι $\ell\in\mathbb{R}^*$, τότε όχι μόνο η f αλλά και η $\frac{1}{f}$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(16) Δείξτε (με τον ορισμό) ότι:

1) $\lim\limits_{x\to2}(4x+3)=11$. 2) $\lim\limits_{x\to3}(|x-3|+x)=3$. 3) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=10$.
4) $\lim\limits_{x\to4}\left[-\frac{1}{(x-4)^2}\right]=-\infty$ 5) $\lim\limits_{x\to4^-}\left(\frac{1}{x-4}\right)=-\infty$. 6) $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+1}=2$.

(17) Δείξτε (με τα κριτήρια σύγκλισης προς το 0) ότι:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu4x}{x^2+5}=0$. 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu5x}{x}$. 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x\sigma\upsilon\nu x}{x^2-9}=0$. 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2+2}=0$.
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2\eta\mu x}{x^3+2}=0$. 6) $\lim\limits_{x\to0}(x^3\cdot\eta\mu\frac{1}{x})=0$. 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^3}\cdot\sigma\upsilon\nu x)=0$. 8) $\lim\limits_{x\to1}[(x-1)\sigma\upsilon\nu3x]=0$.

(18) Δείξτε (με το κριτήριο μη σύγκλισης) ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν πεπερασμένο όριο:

1) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ όταν $x\to\pm\infty$. 2) $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}$ όταν $x\to0$.
3) $f(x)=\eta\mu x$ όταν $x\to+\infty$.

▼ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

Θ1. Έστω ότι οι συναρτήσεις f,g έχουν στο σ πεπερασμένα όρια. Τότε:

i) $\lim\limits_{\sigma}(f+g)=\lim\limits_{\sigma}f+\lim\limits_{\sigma}g$. ii) $\lim\limits_{\sigma}(fg)=(\lim\limits_{\sigma}f)\cdot(\lim\limits_{\sigma}g)$.

iii) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{\sigma}(\lambda f)=\lambda\cdot\lim\limits_{\sigma}f$. iv) Αν $\lim\limits_{\sigma}g\neq0$, τότε: $\lim\limits_{\sigma}\frac{1}{g}=\frac{1}{\lim\limits_{\sigma}g}$, $\lim\limits_{\sigma}\frac{f}{g}=\frac{\lim\limits_{\sigma}f}{\lim\limits_{\sigma}g}$.

v) Αν $\forall x\in A$, $f(x)\geq0$ και $\kappa\in\mathbb{N}^*$, τότε $\lim\limits_{\sigma}\sqrt[\kappa]{f}=\sqrt[\kappa]{\lim\limits_{\sigma}f}$. (Πρέπει $\lim\limits_{\sigma}f>0$).

Θ2. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει στο σ όριο $+\infty$. Τότε:

I) Αν η g είναι φραγμένη κάτω σε μια περιοχή του σ, θα είναι $\lim\limits_{\sigma}(f+g)=+\infty$.

II) ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, από θετικό αριθμό, θα είναι $\lim\limits_{\sigma}(fg)=+\infty$.

III) Αν η g είναι φραγμένη άνω σε μια περιοχή του σ από αρνητικό αριθμό, θα είναι $\lim\limits_{\sigma}(fg)=-\infty$. (Ανάλογη είναι η διατύπωση του Θ_2 όταν $\lim\limits_{\sigma}f=-\infty$).

• Το Θ_2 ισχύει ειδικότερα, αν η g έχει στο σ όριο L, και συγκεκριμένα:
Η I περίπτωση όταν $L\neq-\infty$. Η II περίπτωση όταν $L>0$ ή $L=+\infty$.
Η III ,, ,, $L<0$ ή $L=-\infty$.

Θ3. i) Αν $\lim\limits_{x\to\sigma}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)}=0$.

ii) Αν $\lim\limits_{x\to\sigma}f(x)=0$ και σε μια περιοχή του σ είναι:
$\bullet_1$ $f(x)>0$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)}=+\infty$. $\bullet_2$ $f(x)<0$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

▼ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ.

Θ1. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f και g σε μια περιοχή του σ είναι $f(x)\leq g(x)$.

$\bullet_1$ Αν οι f και g έχουν στο σ πεπερασμένα όρια, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}f(x)\leq\lim\limits_{x\to\sigma}g(x)$.

$\bullet_2$ Αν $\lim\limits_{x\to\sigma}f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}g(x)=+\infty$.

$\bullet_3$ Αν $\lim\limits_{x\to\sigma}g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\sigma}f(x)=-\infty$.

Θ2. Έστω ότι για τις συναρτήσεις f,t,g σε μια περιοχή του σ είναι $f(x)\leq t(x)\leq g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο σ όριο $\ell\in\mathbb{R}$, τότε και η t έχει στο σ όριο ℓ.

ΟΡΙΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0\in\mathbb{R}$. ⟶ $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

παραδείγματα: 1) $\lim\limits_{x\to1}(2x^3-x+5)=2\cdot1^3-1+5=6$. $A=\mathbb{R}$...

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to1}(x+3)}=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$. $A=\mathbb{R}-\{-3\}$...

3) $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)}=-\infty$ διότι $A=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)\Rightarrow\exists\Delta=(-\infty,-2)\subset A$ .... και
$x\in\Delta\Rightarrow x<-2\Rightarrow x+2<0$ και $\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)=0$. ($\Theta_{3ii}$).

ΜΕΘΟΔΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ (όταν $x\to x_0\in\mathbb{R}$).

$x\to x_0^+$ ή $x\to x_0^-$. Πρέπει (για να εξετάσω το όριο) να υπάρχει διάστημα της μορφής (x_0,β) ή (α,x_0) αντίστοιχα, οπότε εξετάζω το lim του περιορισμού f_1 της f στο διάστημα αυτό (Φυσικά αν χρειάζεται να την περιορίσω...)

(19) Δείξτε ότι:

1) $\lim\limits_{x\to3^+}(x^2+x+12)=24$. 2) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(x+\frac{|x|}{x}\right)=-1$. 3) $\lim\limits_{x\to1^+}(|x-1|+3)=3$.

4) $\lim\limits_{x\to5^+}(7+\sqrt{x-5})=7$. 5) $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{x^2-x}=0$. 6) $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2-x}=0$

7) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x}{|x|}=1$. 8) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=-2$. 9) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{|x-1|+x}{2x}=\frac{1}{2}$.

$x\to x_0$. Πρέπει να υπάρχει διάστημα της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)\subseteq A$,
ή της μορφής (α,x_0) οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\equiv\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,
ή " " (x_0,β) " $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\equiv\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

(20) Δείξτε ότι:

1) $\lim\limits_{x\to-1}(x^3-2)=-3$. 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+1}{2x-1}=1$. 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{x^2-4}=0$.

4) $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{x+3}=0$. 5) $\lim\limits_{x\to8}(\sqrt[3]{x}-2)=0$. 6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{4x^2+2x+10}-2x\right)=2$.

7) $\lim\limits_{x\to\sqrt3}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}=0$. 8) $\lim\limits_{x\to0}\left[(x-2)^2+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right]=4$. 9) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x^2-2}=-3$

ΑΟΡΙΣΤΙΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{0}{0}$.

Αυτό συμβαίνει σε συναρτήσεις του τύπου $f(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, όταν το x_0 είναι ρίζα αριθμητή και παρονομαστή. (Δηλαδή όταν $P_1(x_0)=P_2(x_0)=0$). Τότε κάνω ΑΡΣΗ ΑΟΡΙΣΤΙΑΣ, δηλαδή παραγοντοποιώ τα $P_1(x)$, $P_2(x)$ ($P_1(x)=(x-x_0)\cdot Q_1(x)$, $P_2(x)=(x-x_0)\cdot Q_2(x)$), απλοποιώ το κοινό παράγοντα $x-x_0$ και βρίσκω το όριο της νέας συνάρτησης $f(x)=\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$.
(Βλέπε και εφαρμογή 2.Β σελ. 126).

(21) Δείξτε ότι:

1) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=3$. 2) $\lim\limits_{x\to\sqrt2}\frac{x^4-4}{x^2-2}=4$. 3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+2x-3}{x-1}$.

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{3}{2}$. 5) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-2x+1}{|x|-1}=0$. 6) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-2x+1}{|x|-1}=0$.

7) $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}=5$. 8) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x^2-1)^2}{x^3-x^2-x+1}=2$. 9) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{3x^2-3}{|x+1|}=-6$.

10) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x^2-6x+9}{|x|-3}=0$. 11) $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=4$ όπου $f(x)=\begin{cases}3x-4, & \text{αν } x\le3\\ \frac{4x-12}{x-3}, & \text{αν } x>3\end{cases}$.

ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ (ή **με απόλυτα**) όταν $x \to x_0$, όπου **x_0 το συνοριακό σημείο** (δηλαδή το σημείο αλλαγής του τύπου...) πρέπει $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Γι' αυτό στις συναρτήσεις αυτές βρίσκω πλευρικά όρια. (Βλέπε Θ. Φυλ.6).

22 Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$. 2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{|x|-1}$. 3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6+|x-3|}{x-3}$. 5) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ όπου $f(x)=\begin{cases} x^3+x-2, & x\geq 2 \\ 2x+5, & x<2 \end{cases}$.

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{|x|-1}$. 7) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όπου $f(x)=\begin{cases} 5x^2-2, & x\leq 1 \\ 3x+8, & x>1 \end{cases}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|}$. 9) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όπου $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in(-\infty,1) \\ 4, & x=1 \\ -x^2+3, & x\in(1,+\infty) \end{cases}$.

10) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|+x^2-x-6}{x-3}$. 11) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ όπου $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$.

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{|x|}$. 13) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όπου $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-9}{x-5}, & x\in(-\infty,1] \\ \sqrt{x^2+x+2}, & x\in(1,+\infty) \end{cases}$.

Όταν ο Αριθμητής ή ο Παρονομαστής συνάρτησης είναι: **ΑΘΡΟΙΣΜΑ ή ΔΙΑΦΟΡΑ ΡΙΖΙΚΩΝ** **και το lim είναι $\frac{0}{0}$**, τότε δουλεύω όπως στη M_4. Φυλ.10 - Ακολουθίες ή στη Μορφή 2_{2-3}. Φυλ.5 - Συναρτήσεις και μετά κάνω άρση αοριστίας όπως στο Φυλ.9

23 Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$. 8) $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$. 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

24 Αν $f: f(x)=\dfrac{5x}{3x-1+\sqrt{9x^2+x+1}}$, να βρεθεί το Π.Ο. της f και το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

25 Αν $f: f(x)=\dfrac{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}-1}{x}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
(Υπόδειξη. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις: i) $\alpha=\beta=0$. ii) $\alpha\neq 0$ και $\beta=0$. iii) $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$. iv) $\alpha\cdot\beta\neq 0$.)

▼ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ.

Ισχύουν:

$\forall x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$.

$\forall x_0\in\mathbb{R}-\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi x_0$.

$\forall x_0\in\mathbb{R}-\{\kappa\pi\}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\varphi x=\sigma\varphi x_0$.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Τα όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (στο κεφάλαιο αυτό) υπολογίζονται:

1) Με τις ιδιότητες των ορίων και τους προηγούμενους τύπους

παράδειγμα: $\lim\limits_{x\to\pi/3}\left(\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=\frac{\lim(1-\eta\mu x)}{\lim\limits_{x\to\pi/3}\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\lim\eta\mu x}{\lim\limits_{x\to\pi/3}\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12}=2-\sqrt3$.

$A=\mathbb{R}-\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\}\ldots$

2) Με χρήση βοηθητικής αντικατάστασης (ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ) και τους τύπους:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=1$ ⟷ Σε ΜΟΡΦΗ $\frac00$. (Εφαρμογές Β. σελ. 114-115)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ ⟷ Σε ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΗ ΜΟΡΦΗ. (Μηδενική επί φραγμένη...)

Παραδείγματα: Δείξτε ότι: 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

Π.Ο. Πρέπει $\eta\mu\beta x\neq0\Leftrightarrow\beta x\neq\kappa\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\kappa\pi}{\beta}\Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{\frac{\kappa\pi}{\beta}\}\Rightarrow\exists\Delta=(-\frac{\pi}{\beta},0)\cup(0,\frac{\pi}{\beta})\subset A\ldots$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\eta\mu\alpha x}{x}}{\frac{\eta\mu\beta x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha\cdot\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\beta\cdot\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\frac{\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}}=$

$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}}=$ • Θέτω $\begin{cases}\alpha x=y & \text{οπότε } x\to0\Rightarrow\alpha\cdot x\to0\Rightarrow y\to0\\ \beta x=\omega & \text{›› ››}\Rightarrow\beta\cdot x\to0\Rightarrow\omega\to0\end{cases}$

$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\lim\limits_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y}}{\lim\limits_{\omega\to0}\frac{\eta\mu\omega}{\omega}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac11=\frac{\alpha}{\beta}$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\eta\mu\frac1x)=1$ Π.Ο. Πρέπει $x\neq0\Rightarrow A=\mathbb{R}^*\ldots$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\eta\mu\frac1x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac1x}{\frac1x}=$ • θέτω $\frac1x=y$ οπότε $x\to+\infty\Rightarrow\frac1x\to0\Rightarrow y\to0$.

$=\lim\limits_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(26) Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu4x}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\beta x}$. 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$. 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{x}$.

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu3x}{x\cdot\eta\mu3x}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$. 7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu2x}{\varepsilon\varphi x}$. 8) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

9) $\lim\limits_{x\to0}(x\cdot\eta\mu\frac1x)$. 10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu5x}{\varepsilon\varphi6x}$. 11) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x-\frac{\pi}{4}}$.

▼ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ, λέγεται **συνεχής στο $x_0 \in \Delta$**, όταν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

• Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός συνόλου, λέγεται συνεχής σ' αυτό.

Δηλαδή: μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ είναι συνεχής στο $x_0 \in \Delta$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \Delta,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

⇔ Όταν δεν ισχύει η σχέση $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, η f λέγεται ασυνεχής στο x_0.

Δηλαδή αν: δεν υπάρχει το $f(x_0)$
ή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
ή υπάρχουν και τα δύο, αλλά $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

$\Rightarrow$ **f ασυνεχής στο x_0.**

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

Θ. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g ορίζονται σ' ένα διάστημα Δ.
Αν οι f, g είναι συνεχείς στο $x_0 \in \Delta$ και είναι $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

- Οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, λf είναι συνεχείς στο x_0.
- Αν είναι $g(x_0) \neq 0$, τότε και οι συναρτήσεις $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι συνεχείς στο x_0.
- Αν για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) \geq 0$, τότε και η $\sqrt[\kappa]{f}$ ($\kappa \in \mathbb{N}^*$) είναι συνεχής στο x_0.

(Απόδειξη...)

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

I) Κάθε **πολυωνυμική** συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

II) Κάθε **ρητή** συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (ως πηλίκο συνεχών)

III) Η συνάρτηση **ημ** είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
» » **συν** » » » ».
» » **εφ** » » » $\mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}$.
» » **σφ** » » » $\mathbb{R} - \{\kappa\pi\}$.

(Απόδειξη...)

IV $y = \alpha^x$, $\alpha > 0$ συνεχής στο $A = \mathbb{R}$.

V $y = \log_\alpha x$, $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ συνεχής στο $A = \mathbb{R}^*$

ΠΛΕΥΡΙΚΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Τότε αν:

- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$, τότε η f λέγεται **συνεχής από αριστερά** στο x_0.
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, » » » » » **δεξιά** » ».

ΑΡΑ: μια συνάρτηση f ορισμένη στο $x_0 \in \Delta$ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, αν και μόνο αν είναι συνεχής από δεξιά και από αριστερά στο x_0.

⟶ Αν f συνεχής στο $A \Rightarrow$ και η $|f|$ είναι συνεχής στο A. (Βλέπε Φ.7 ιδιότητα 5)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27 Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια στα συνοριακά τους σημεία οι συναρτήσεις:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-9x+2}{x-2}, & x\neq 2\\ 7, & x=2\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 2, & x=1\\ 4-x, & x>1\end{cases}$.

3) $f(x)=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 5) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ x+2, & 1<x\le 2\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}$ 7) $f(x)=\begin{cases}|x|, & x<0\\ x, & 0\le x<2\\ x^2, & x\ge 2\end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

28 Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού τους οι συναρτήσεις:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-27}{x-3}, & x\neq 3\\ 9, & x=3\end{cases}$ 2) $f(x)=|x+3|-|5-x|$ 3) $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\le x<2\\ 2, & 2\le x<4\\ x-3, & 4\le x\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ 5) $f(x)=|x^2-2x|$ 6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|(x+1)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

29 Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στη θέση x_0= συν. σημείο

1) $f(x)=\begin{cases}x\,ημ\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 2) $g(x)=\begin{cases}x^2ημ\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 3) $r(x)=\begin{cases}συνx, & x\le\dfrac{\pi}{4}\\ ημx, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$.

4) $h(x)=\begin{cases}συνx, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$ 5) $s(x)=\begin{cases}ημx+\dfrac{\sqrt{1-συν2x}}{ημx}, & x\neq 0\\ \sqrt{2}, & x=0\end{cases}$ 6) $t(x)=\begin{cases}\dfrac{ημx}{|x|}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$.

30 Να βρεθεί ο α ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

1) $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\le x\le 1\\ 2αx+5, & 1<x\le 3\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le 1\\ αx^2-α^2x+7, & x>1\end{cases}$ 3) $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, & x\le 1\\ \dfrac{x^2+αx-3}{x+1}, & x>1\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}+x, & x\neq 0\\ α, & x=0\end{cases}$ 5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ημ3x}{x}, & x\neq 0\\ α, & x=0\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1\\ α, & x=1\end{cases}$.

31 Να βρεθούν τα $α,β\in\mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

1) $f(x)=\begin{cases}1+2ημx, & x<-\pi\\ ασυνx, & -\pi\le x<0\\ β-4συν^2x, & x\ge 0\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-ημ2x, & x\le-\dfrac{\pi}{4}\\ |αημx+β|, & -\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}\\ συν2x, & x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

32 Να βρεθεί ο $λ\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases}λημx+συνx, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\\ εφx+2λεφx, & x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$ να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ.

1) ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ασύμπτωτη του διαγράμματος C της f, λέμε την ευθεία:

$$y=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}.$$

- Αναζητούνται μόνο σε συναρτήσεις που ορίζονται σε περιοχή του $+\infty$ ή του $-\infty$.
- Αν η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο στο $+\infty$ απ' ότι στο $-\infty$, τότε θα βρω και το $\lim\limits_{+\infty} f$ και το $\lim\limits_{-\infty} f$, διότι μπορεί να έχω 2 οριζ. ασύμπτ.

2) ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ασύμπτωτη του διαγράμματος C της f, λέμε την ευθεία:

$$x=x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty.$$

- Αναζητούνται στα σημεία ασυνέχειας της f και στα σημεία συσσωρεύσεως του Π.Ο. της A που δεν ανήκουν στο A (δηλαδή σε ρίζες παρονομαστή...).

3) ΠΛΑΓΙΑ ασύμπτωτη του διαγράμματος C της f, λέμε την ευθεία:

$$y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda \ \text{ και } \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta \\ \text{ή} \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda \ \text{ και } \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta \end{cases} \quad : \lambda,\beta\in\mathbb{R}.$$

- Αναζητούνται (όπως και οι οριζόντιες) μόνο σε συναρτήσεις που ορίζονται στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.
- Αν $\lambda=0$ και $\beta\in\mathbb{R}$, τότε η $y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow y=\beta$, δηλαδή έχω οριζόντια ασύμπτ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(33) Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες των: 1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$. 2) $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<2\\ 1, & x=2\\ \dfrac{1}{x-2}-2, & x>2\end{cases}$

(34) » » » κατακόρυφες » »: 1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-2}, & x\neq 2\\ 3, & x=2\end{cases}$. 2) $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$.

(35) » » » πλάγιες » »: 1) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{3x}$ 2) $\varphi(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$
3) $g(x)=\sqrt{x^2-25}$.

(36) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f: f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}$

(37) Όμοια των συναρτήσεων: 1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ 2) $\varphi(x)=\sqrt{x^2-x+1}$. 3) $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$.

(38) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(6-\dfrac{|x+3|}{x}\right)$ και στη συνέχεια να διαπιστώσετε ότι οι ευθείες $y=5$ και $y=7$ είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C της f.

(39) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=x+1+\dfrac{4}{(x+\lambda)^2}$ με $x\neq\lambda$, έχει $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ την ίδια πλάγια ασύμπτωτη.

(40) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $f: f(x)=\dfrac{(x+2)^3}{8x^3}$

▼ ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΘΕΩΡΙΑ

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης Q με $Q(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{\alpha_\kappa x^\kappa+\alpha_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\lambda x^\lambda+\beta_{\lambda-1}x^{\lambda-1}+\dots+\beta_1 x+\beta_0}$, $\alpha_\kappa\cdot\beta_\lambda\neq 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $\kappa<\lambda$ η ευθεία $\boxed{y=0}$, δηλαδή ο $x'x$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C.

ii) Αν $\kappa=\lambda$ η ευθεία $\boxed{y=\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda}}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C.

iii) Αν $\kappa=\lambda+1$ η ευθεία $\boxed{y=\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda}\cdot x+g}$, όπου $g=\lim_{x\to\infty}\left(Q(x)-\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\lambda}\cdot x\right)$, είναι πλάγια ασύμπτωτη της C.

iv) Αν $\kappa>\lambda+1$ η C δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη, γιατί $\lim_{x\to\infty}\frac{Q(x)}{x}=\infty$.

→ Αν η Q δεν ορίζεται στο $x_0\in\mathbb{R}$, δηλαδή ο x_0 είναι ρίζα του $P_2(x)$ βαθμού πολλαπλότητας μ, τότε:

α) Αν το x_0 δεν είναι ρίζα του $P_1(x)$ ή είναι ρίζα του $P_1(x)$ με βαθμό πολλαπλότητας $<\mu$, τότε η ευθεία $\boxed{x=x_0}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C.

β) Αν το x_0 είναι ρίζα του $P_1(x)$ με βαθμό πολλαπλότητας $\geq\mu$, τότε η ευθεία $x=x_0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C.
(Μπορεί η C να έχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη, π.χ. την $x=x_1$, αν $P_2(x_1)=0$ και $P_1(x_1)\neq 0$)

ΑΣΚΗΣΗ: Να βρεθούν (με χρήση της ανωτέρω εφαρμογής) οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1) $f(x)=\frac{2}{x}$ 2) $f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$ 3) $f(x)=\frac{x^2+2}{x-3}$ 4) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x}$

▼ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Θ. Έστω ότι: • Η συνάρτηση g έχει στο σ όριο σ_1.
• Η » f » » σ_1 » L.

Αν σε μια περιοχή του σ ορίζεται η $f\circ g$ και είναι $g(x)\neq\sigma_1$, τότε $\lim_{\sigma} f\circ g = L$.

Πόρισμα: Αν μια συνάρτηση f με Π.Ο. A έχει στο σ όριο L, τότε για κάθε ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu\in A$, $\alpha_\nu\neq\sigma$ ($\nu>\kappa\in\mathbb{N}$) και $\lim\alpha_\nu=\sigma$, η αντίστοιχη ακολουθία $f(\alpha_\nu)$ των τιμών της συνάρτησης έχει επίσης όριο L.

• Αν $\sigma=+\infty$ και $\alpha_\nu=\nu$ το πόρισμα δίνει: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \Longrightarrow \lim f(\nu)=L$.

Εφαρμογή: Η συνάρτηση $y=$ συνx δεν έχει όριο στο $+\infty$. $\lim a_{2\nu}\neq\lim a_{2\nu+1}$ $\Downarrow$

Απόδειξη: Θεωρώ τις ακολουθίες $x_\nu=2\pi\nu$ και $x'_\nu=2\pi\nu+\frac{\pi}{2}$.

Είναι $\lim x_\nu=\lim x'_\nu=+\infty$, ενώ $\lim$ συν$(x_\nu)=1\neq\lim$ συν$(x'_\nu)=0$ (a_ν) αποκλίνουσα

Θ. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο σ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $g(\sigma)$, τότε και η σύνθεσή τους $f\circ g$ είναι συνεχής στο σ.

▼ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ.

ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (Bolzano-Weierstrass). Έστω ότι η συνάρτηση f:
• είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
• έχει τιμές ετερόσημες στα άκρα α και β, δηλαδή $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Τότε η f μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστο σημείο του (α,β).

↕ Αν η f είναι και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$, τότε έχει μια μόνο ρίζα στο (α,β).

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. Έστω ότι η συνάρτηση f:
• είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με (Απόδειξη...)
• $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

Πόρισμα: Μια μη σταθερή συνεχής συνάρτηση f απεικονίζει ένα οποιοδήποτε διάστημα Δ (όχι κατ' ανάγκη κλειστό ή φραγμένο) σε διάστημα.

Θ. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη, συνεχής και γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ, τότε: • είναι μια "1-1 και επί" απεικόνιση του Δ στο διάστημα $f(\Delta)$.
• η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως μονότονη (με το ίδιο είδος μονοτονίας) στο $f(\Delta)$.

Θ. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Τότε υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $f(\xi_1)\leq f(x)\leq f(\xi_2)$.

• Στο $[\alpha,\beta]$ η f παρουσιάζει μέγιστο $M=f(\xi_2)$ και ελάχιστο $\mu=f(\xi_1)$.
Αν $\mu\neq M$ η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ μ και M, άρα: η εικόνα του $[\alpha,\beta]$ με την f είναι το $[\mu,M]$.

Πόρισμα: Η εικόνα κλειστού διαστήματος με συνεχή συνάρτηση είναι κλειστό διάστημα.

• Αν $f:A=(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη (π.χ. $\uparrow$), τότε έχει όριο στο α και στο β, έστω $\lim_{\alpha} f=L_1$ και $\lim_{\beta} f=L_2$. Τότε το $f(A)=(L_1,L_2)$. ($\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{R}}$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(41) Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

1) $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ στο $[1,+\infty)$ 2) $g(x)=συν(2x^3+4x-5)$.

3) $t(x)=ημ(συνx+\sqrt{x})$ στο $[0,+\infty)$. 4) $w(x)=ημ\left(\frac{x^2+1}{x^4+2}\right)$.

5) $h(x)=ημ(συν5x)$.

(42) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=x^4-3x^2+x-1$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

(43) Δείξτε ότι η εξίσωση:

1) $ημx=0$ έχει μια τουλάχιστο λύση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

2) $ημ(συν3x)=0$ " " " " " $(0,\pi)$.

(44) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\alpha x^3+x^2+x-1$ με $\alpha\neq-1$.
Δείξτε ότι έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.
Τι συμβαίνει όταν $\alpha=-1$;

(45) Όμοια, για τη συνάρτηση $g: g(x)=x^3-x^2+\alpha x+1$ με $\alpha\neq-1$.

(46) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f: f(x)=\frac{x^3}{4}+ημ(\pi x)+3$ παίρνει τη τιμή $\frac{5}{3}$ μέσα στο διάστημα $(-2,2)$. (ή χρησιμοποιείστε το Θ. ενδιαμέσων τιμών)

Υπόδειξη: Θεωρείστε τη συνάρτηση $g: g(x)=f(x)-\frac{5}{3}$.

(47) Εξετάστε αν η συνάρτηση $h: h(x)=x^3-συν(\pi x)+1$ παίρνει τη τιμή 5 μέσα στο διάστημα $(-2,2)$.

(48) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$ που είναι συνεχής.
Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(49) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\frac{x^3}{16}-ημ(\pi x)+7$.
Να εξεταστεί αν η συνάρτηση f παίρνει τη τιμή $\frac{7}{2}$ στο διάστημα $[-4,4]$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

(50) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x\in[-3,0) \\ +x^2-3, & x\in[0,3]\end{cases}$.
Να εξεταστεί αν υπάρχει $x_0\in(-3,3)$ ώστε $f(x_0)=0$.

(51) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=εφx+x-1$

1) Είναι ↑ στο διάστημα $[0,1]$. (Βλέπε Εφαρμογή 1 - Φυλ.8 - Συναρτήσεις).

2) Έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(52) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=σφx-x+1$

1) Είναι ↓ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

1) Η εκθετική συνάρτηση α^x (άρα και η e^x) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Δηλαδή: $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha^x = \alpha^{x_0}$. • $\lim\limits_{x\to 0}\alpha^x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$.

2) Έστω (x_ν) μια συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε: $\forall \alpha>0$, $\lim \alpha^{x_\nu} = \alpha^{\lim x_\nu}$.

3) $\forall \alpha\in\mathbb{R}$: $\lim\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu = e^\alpha$. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

4) $\forall x\in\mathbb{R}$: $e^x \geq 1+x$

Εφαρμογές – Θεωρία

① i) Αν $\alpha>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = 0$. ② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. $\boxed{\%}$

ii) Αν $0<\alpha<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = +\infty$.

5) Η λογαριθμική συνάρτηση $\log_\alpha x$ (άρα και η $\ln x$) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+^*$.
Δηλαδή: $\lim\limits_{x\to x_0}\log_\alpha x = \log_\alpha x_0$. • $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $\ln x \leq x-1$.

Εφαρμογές-Θεωρία

① i) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$. ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$. ② $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$. $\boxed{\%}$

▼ ΟΡΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Τα όρια αυτά υπολογίζονται (στο κεφάλαιο αυτό):
1) Με βοηθητική αντικατάσταση
2) Με τη βοήθεια γνωστών ορίων (που αναφέρονται παραπάνω...).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1} = 1$.
Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1} = e\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$ Θέτω $x-1=y$ οπότε $x\to 1 \Rightarrow x-1\to 0 \Rightarrow y\to 0$.
$= e\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = e\cdot 1 = e$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$. Είναι: $f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(x^{1/2})^2}{x} = \frac{2\ln(x^{1/2})}{x} < \frac{2x^{1/2}}{x} = \frac{2}{x^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$
διότι $x>1 \Rightarrow 0<\ln x\leq x$ (2ο κεφ.) Ασκ. 29 β.
Αλλά η $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0$ όταν $x\to+\infty$.
Άρα και η $f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$.

▼ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥΣ ΠΕΡΙΕΧΕΙ $[x]$ • $\nexists \lim\limits_{x\to x_0}[x]$.

Για να υπολογίσω το όριο μιας τέτοιας συνάρτησης στο $\sigma\in\overline{\mathbb{R}}$, χρησιμοποιώ την ανισότητα $[x]\leq x<[x]+1$, σε συνδυασμό με την ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[[x]]{x}$, αν $x\in[1,+\infty)$.
Επειδή το $[x]$ είναι αριθμός ακέραιος και θετικός στο $[1,+\infty)$, θα είναι φυσικός.
Θέτω $[x]=\nu$ κι έχω $[x]\leq x<[x]+1 \Rightarrow \nu\leq x<\nu+1 \Rightarrow \sqrt[[x]]{\nu}\leq\sqrt[[x]]{x}<\sqrt[[x]]{\nu+1} \Rightarrow$
$\sqrt[\nu]{\nu}\leq\sqrt[[x]]{x}<\sqrt[\nu]{\nu+1}$
Αλλά $\lim\sqrt[\nu]{\nu} = \lim\sqrt[\nu]{\nu+1} = 1$ $\xRightarrow{\text{Θ.Ι.Σ.}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[[x]]{x} = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(53) Δείξτε ότι:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$. 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(5x+1)}{x}=5$. 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^4}-1}{ημ^4x}=1$.

(54) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. (Υπόδειξη: θέστε $x=-(y+1)$).

(55) Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}$. 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$. 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x$.

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{1/x}$. 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{x\cdot[\ln(1+x)-\ln x]\right\}$.

(56) Όμοια τα όρια

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x+4^x-2}{x}$. (Δείξτε πρώτα ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha^x-1}{x}=\ln\alpha$)

2) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$ (θέστε $\frac{x}{e}=y$). 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{ημx}$. 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{x}=\alpha$. (θέστε $e^{\alpha x}-1=\frac{1}{y}$)

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{4x}}{x}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-συνx}{x^2}$.

(57) Δείξτε ότι: 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{ημx}=2$. 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)\right]=1$.

(58) Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο της $f: f(x)=x-[x]$ στο σημείο $x_0=7$.

(59) Αν $f(x)=x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$ δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Για να δείξω ότι δεν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης, τότε:

1) Αν θέλω να δείξω ότι δεν έχει πεπερασμένο όριο, χρησιμοποιώ το κριτήριο μη σύγκλισης.

2) Αν θέλω να δείξω ότι δεν έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$, δείχνω ότι είναι φραγμένη.

3) Αν θέλω να δείξω ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ δείχνω ότι $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

(60) Αν $f(x)=\sqrt{x-[x]}$ δείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

(61) Δείξτε ότι το $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\cdot ημ\frac{1}{x}\right]$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

(62) Δείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, όπου $f(x)=\begin{cases}\frac{4x+3}{x}, & αν\ x<0\\ 1, & αν\ x=0\\ 3x-2, & αν\ x>0\end{cases}$.

(63) Αν $f: f(x)=\begin{cases}1-5x, & αν\ x\leq0\\ 8x^2+\alpha^2-15, & αν\ x>0\end{cases}$, να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

(64) Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις:

1) $f(x)=\begin{cases}\ln(x-2), & αν\ x\in(2,3]\\ e^{-\frac{x^4}{x-3}}, & αν\ x\in(3,+\infty)\end{cases}$. 2) $f(x)=\log\dfrac{e^x-1}{x}$ στο $(0,+\infty)$. 3) $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{3x}-1}{x}, & x\neq0\\ 3, & x=0\end{cases}$

(65) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$ είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\lambda}-1}{x^{\kappa}-1}$, $\lambda,\kappa\in\mathbb{N}^*$. 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+x+5}-4x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4}{x|x|}$. 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. 5) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$. 7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|+x^2-6x+8}{x-2}$. 8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x^2-x|+|x-4|-3x}{\sqrt{x-4}}$.

② Αν $f: f(x)=\sqrt{x^2+2x+8}+(\alpha-3)x$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

③ Αν $f: f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+4}-\alpha x-\beta$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

④ Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2\alpha x+\beta+5}{2x-4}=1$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

⑤ Να εξεταστεί αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+3}\right)$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*_-$.

⑥ Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{x^2}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x-\sigma\upsilon\nu 7x}{x\cdot\eta\mu x}$.

⑦ Δείξτε ότι:

1) η συνάρτηση $f: f(x)=(5x+3+\eta\mu x)^5$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2) » » $\varphi: \varphi(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+3\sqrt{x})$ » » » $[0,+\infty)$.

⑧ Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0=0$ η συνάρτηση

$$f: f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

⑨ Αν $f: f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+25}+2\beta, & \text{αν } x<0\\ x^2+\alpha, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$ και $f(1)=12$,

να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

⑩ Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση $f: f(x)=(-1)^{[x]}$.

⑪ Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu^2x-3\lambda x^2}{x^2}, & x<0\\ 2x^2-6\lambda+7, & x\geq 0\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

⑫ Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\pi-2x}+\alpha-x, & x<\frac{\pi}{2}\\ 3\alpha x-1, & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\pi/2$.

⑬ Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$f: f(x)=\begin{cases}2x-6+\log x, & x\in(1,3]\\ \log x, & x\in(3,+\infty).\end{cases}$$

(14) Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η $f: f(x)=\begin{cases} e^{5x}, & x\in[0,1] \\ \alpha\cdot\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x^2-6x+5}, & x\in(1,\pi] \end{cases}$ να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(15) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στο $[0,\pi/2]$ η συνάρτηση

$$f: f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

(16) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των συναρτήσεων: 1) $f(x)=\dfrac{(1+x)^3}{x^3}$. 2) $\varphi(x)=\dfrac{2+x^3}{3x}$ 3) $g(x)=\dfrac{5x}{2x^2+3}$. 4) $h(x)=\dfrac{5x-|x-2|}{x}$. 5) $s(x)=\sqrt{x^2-9}$.

(17) Δείξτε ότι:
η εξίσωση $x\cdot 3^x=1$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(18) Αν $f: f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x^3+5x+2}{\alpha x^2+3}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

(19) Αν για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει:
$\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}<f(x)<\dfrac{2x^3+x+5}{x^3+1}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

(20) Αν $f: f(x)=x^{2\nu}-2x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, να βρεθεί το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\alpha}{(x-1)^2}$. Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο αυτό.

(21) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0=0$ η συνάρτηση

$$f: f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu 6x-\eta\mu 4x}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 2, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

(22) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}, & x\neq0 \\ \dfrac{6\lambda-17}{2}, & x=0 \end{cases}$, να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(23) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $f: f(x)=\begin{cases} x^2+2x+\alpha-\beta-1, & \text{αν } x<0 \\ \sqrt{3x+4}+\alpha-2\beta, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και στο διάστημα $(-\infty,0)$ να έχει διπλή ρίζα.

(24) α) Αν $f: f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|(x-1)}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια και να γίνει η γραφική της παράσταση.

β) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$. ΘΕΜΑ 80.

(25) Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:
1) $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$. 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$ ΘΕΜΑ 81.

(26) Δίνεται η συνάρτηση $g: g(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^{2\nu+1}+x^2}{x^{2\nu}+1}$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$ και $x\in\mathbb{R}$.
Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $x=1$ και $x=-1$. ΘΕΜΑ 82.

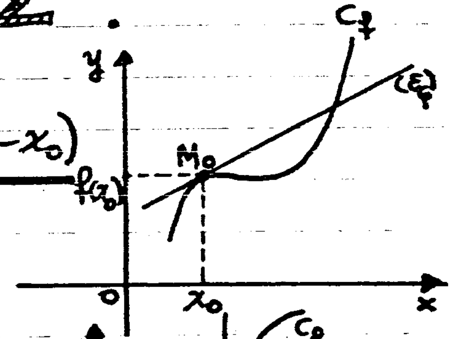
(27) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $f: f(x)=\begin{cases} 3\alpha e^{x+1}+x, & x\leq-1 \\ 2x^2-\alpha x+3\beta, & -1<x<0 \\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1, & 0\leq x \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. ΘΕΜΑ 86.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ.

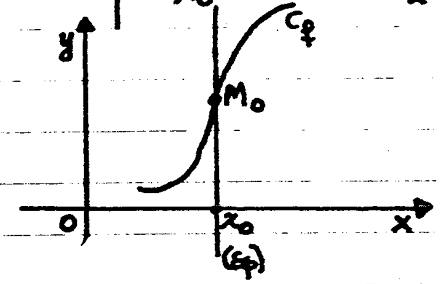
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ C_f ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $M_0(x_0, f(x_0))$. → $y - f(x_0) = \ell\cdot(x - x_0)$

όπου $\ell = \lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x) \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο) και

$\lambda(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ο λόγος μεταβολής της f μεταξύ x και x_0.



- Αν $\ell = +\infty$ ή $-\infty$, εφαπτομένη στο M_0 είναι η ευθεία $x = x_0$



▼ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0, όταν ο λόγος μεταβολής $\lambda(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ έχει πεπερασμένο όριο στο x_0.
Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος αριθμός της f στο x_0.

Έστω Δ' το σύνολο των $x \in \Delta$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Έστω $\Delta' \neq \varnothing$. Αν σε κάθε $x_0 \in \Delta'$ αντιστοιχίσουμε το παράγωγο αριθμό της f στο x_0, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση στο Δ', που λέγεται παράγωγος (συνάρτηση) της f. Συμβολισμός: f'

→ Έτσι, ο παράγωγος αριθμός της f στο x_0 είναι η τιμή της παραγώγου f' στο x_0. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- Ένας ισοδύναμος τρόπος για τον ορισμό της παραγώγου είναι ο τύπος: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, όπου $x = x_0 + h$.

→ ΑΡΑ, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$ αυτής, γίνεται: $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

- Μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα σύνολο, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου.

▼ ΠΛΕΥΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ.

Η f λέγεται <u>παραγωγίσιμη από αριστερά στο x_0</u>, όταν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0^-}\lambda(x)\in\mathbb{R}$.
Συμβολισμός: $f'_\alpha(x_0)$.
Η f λέγεται <u>παραγωγίσιμη από δεξιά στο x_0</u>, όταν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0^+}\lambda(x)\in\mathbb{R}$.
Συμβολισμός: $f'_\delta(x_0)$.

↕→ Έτσι, μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του Π.Ο. της, αν και μόνο αν υπάρχουν οι αριθμοί $f'_\alpha(x_0)$, $f'_\delta(x_0)$ και είναι:

$$f'_\alpha(x_0)=f'_\delta(x_0).$$

Οι ημιευθείες:
- $y-f(x_0)=f'_\alpha(x_0)\cdot(x-x_0)$ → ημιεφαπτόμενη από αριστερά.
- $y-f(x_0)=f'_\delta(x_0)\cdot(x-x_0)$ → ημιεφαπτόμενη από δεξιά.

● Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, οι παραπάνω ημιευθείες είναι αντικείμενες, δηλαδή η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

▼ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Η f' μιας συνάρτησης f είναι μια νέα συνάρτηση, που είναι δυνατό να είναι και αυτή παραγωγίσιμη σ' ένα υποσύνολο του Π.Ο. της. Έτσι, θα ορίζεται μια άλλη συνάρτηση, η παράγωγος της f', που λέγεται <u>δεύτερη παράγωγος της f</u> και συμβολίζεται <u>f''</u>. Όμοια, ορίζεται η <u>τρίτη παράγωγος f''' της f</u> και γενικά η <u>νιοστή παράγωγος της f</u> που συμβολίζεται <u>$f^{(\nu)}$, $\forall \nu\geq 4$.</u>

● Αν υπάρχει η $f^{(\nu)}$, λέμε ότι η f είναι ν φορές παραγωγίσιμη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο x_0:

1) $f(x)=2x^2+x+1$ στο $x_0=2$.
2) $g(x)=\sqrt[3]{x}$ στο $x_0=0$.
3) $h(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ στο $x_0=0$.
4) $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ στο $x_0=1$.
5) $r(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\leq 1\\ 2x+1, & x>1\end{cases}$ στο $x_0=1$.
6) $\varphi(x)=2|x|+3$ στο $x_0=0$.
7) $t(x)=\sqrt{2-x}$ στο $x_0=2$.
8) $\kappa(x)=\begin{cases}3x^2-4, & x\geq 3\\ \frac{1}{x-3}, & x<3\end{cases}$ στο $x_0=3$.

↕→ Όλες οι παραπάνω να γίνουν <u>με τον ορισμό.</u> Δηλαδή να βρείτε πρώτα το λόγο μεταβολής $\lambda(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ μεταξύ x και x_0 και μετά το $\lim_{x\to x_0}\lambda(x)$. Ειδικά, όταν το x_0 είναι <u>συνοριακό σημείο του Π.Ο. της f</u>, (όπως στις 3,4,5,6,8) η μέθοδος του ορισμού είναι και η μοναδική.

● Τι παρατηρείτε στις άρρητες συναρτήσεις 2 και 7;

(2) Ποιές από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, δέχονται εφαπτομένη στο αντίστοιχο σημείο x_0; Ποιά είναι η εφαπτομένη αυτή;

(3) Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2, & \text{αν } -1\leq x<1 \\ x^2-x+4, & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$.
Να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της

(4) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & \text{αν } x\geq 0 \\ x^2+x+1, & \text{αν } x<0 \end{cases}$.
Να εξεταστεί αν το διάγραμμα της f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

(5) Όμοια για τις συναρτήσεις:
1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ στο σημείο $x_0=0$. 3) $\varphi(x)=3+\sqrt{|x-3|}$ στο σημείο $(3,3)$.
2) $g(x)=\sqrt{|x|}$,, ,, ,, .

(6) Να εξεταστεί αν η $f: f(x)=x^2+|x+3|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-3$.

(7) Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο παράγωγος αριθμός της $f: f(x)=\begin{cases} 3x^2+5, & \text{αν } x\leq 1 \\ 6x+2, & \text{αν } x>1 \end{cases}$ στο σημείο $x_0=1$.

(8) Αν $f(x)=|x^2-3x+2|$ να βρεθεί ο $f'(0)$, και να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος της f στο σημείο 2.

(9) Να βρεθεί (με τον ορισμό) η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της $f: f(x)=5x^2+4x$.

▼ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ.

Θ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό. (Απόδειξη...)

Δηλαδή: <u>f παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής.</u>

ΠΡΟΣΟΧΗ:
1) Το αντίστροφο δεν ισχύει.
2) Ισχύει όμως το αντιστροφοαντίθετο, δηλαδή:

<u>f όχι συνεχής στο x_0 $\Rightarrow$ f όχι παραγωγίσιμη στο x_0</u>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(10) Δείξτε ότι η $f: f(x)=2|x|$ είναι συνεχής, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(11) Δείξτε ότι η $f: f(x)=\begin{cases} x^2+4x, & \text{αν } x\geq 0 \\ x^2-4x, & \text{αν } x<0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(12) Δείξτε ότι η $f: f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^3}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής ούτε παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(13) Δείξτε ότι η $f: f(x)=(x+|x|)^2$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(14) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $f: f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta, & x<3 \\ x^2, & x\geq 3 \end{cases}$ να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

(Απόδειξη...)

I) Παράγωγος ταυτοτικής.
Η $I: I(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\boxed{x'=1}$

II) Παράγωγος σταθερής.
Η $u: u(x)=c$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\boxed{c'=0}$

III) Παράγωγος δύναμης.
Η $f: f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\boxed{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}$

- Γενικά: Η συνάρτηση $f: f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Π.Ο. της A, εκτός από το 0 όταν $0<\alpha<1$ και $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$. (π.χ. η $f(x)=x^{2/3}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$. Το σημείο $x_0=0$ στο οποίο η f ορίζεται αλλά δεν παραγωγίζεται λέγεται σημείο ανάκαμψης.)

IV) Παράγωγος τετραγωνικής ρίζας.
Η $f: f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ και $\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

V) Παράγωγος ημιτόνου.
Η $f: f(x)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$

VI) Παράγωγος συνημιτόνου.
Η $f: f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$

VII) Παράγωγος εφαπτομένης. (Εφαρμογή-θεωρία)
Η $f: f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $A=\mathbb{R}-\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\}$ και $\boxed{(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$

VIII) Παράγωγος συνεφαπτομένης. (Να δειχτεί...)
Η $f: f(x)=\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $A=\mathbb{R}-\{\kappa\pi\}$ και $\boxed{(\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}}$

IX) Παράγωγος της e^x.
Η $f: f(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\boxed{(e^x)'=e^x}$

X) Παράγωγος της $\ln x$.
Η $f: f(x)=\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $A=\mathbb{R}_+^*$ και $\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$

- Η εκθετική συνάρτηση $f: f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\boxed{(\alpha^x)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha}$

- Η λογαριθμική συνάρτηση $f: f(x)=\log_\alpha x$, $\alpha>0 \land \alpha\neq 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $A=\mathbb{R}_+^*$ και $\boxed{(\log_\alpha x)'=\frac{1}{x\ln\alpha}}$

(Οι δύο τελευταίες παρατηρήσεις αποδεικνύονται μετά τους κανόνες παραγώγισης. Βλέπε Φ.5).

▼ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ.

Θ. Αν f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. (Απόδειξη...)

Πόρισμα: Αν οι $f, g, f_1, f_2, \dots, f_\kappa$ παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε και οι $f+g, f_1+f_2+\dots+f_\kappa$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ, και είναι:

$(f+g)' = f'+g'$, $(f_1+f_2+\dots+f_\kappa)' = f_1'+f_2'+\dots+f_\kappa'$ ⟷ $(c+f)' = f'$ $(c'=0)$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.

Θ. Αν f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$, τότε και η fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι: $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$. (Απόδειξη...)

Πόρισμα: Αν οι $f, g, f_1, f_2, \dots, f_\kappa$ παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$, τότε και οι fg, λf, $f_1 \cdot f_2 \cdots f_\kappa$, f^κ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι: $(fg)' = f'g + fg'$, $(f_1 f_2 \cdots f_\kappa)' = \sum_{i=1}^{\kappa} (f_1 \cdot f_2 \cdots f_{i-1} \cdot f_i' \cdot f_{i+1} \cdots f_\kappa)$,

$(\lambda f)' = \lambda f'$, $(f^\kappa)' = \kappa \cdot f^{\kappa-1} \cdot f'$. • Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \Rightarrow P^{(\nu)}(x) = \nu! \alpha_\nu$.

• Το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' ένα κοινό διάστημα Δ είναι διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του διανυσματικού χώρου F_Δ.
Το ίδιο σύνολο είναι δακτύλιος.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΗΛΙΚΟΥ.

Θ. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε και οι $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και είναι:

$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$. (Απόδειξη...)

Πόρισμα: Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και $\forall x \in \Delta$ είναι $g(x) \neq 0$, τότε και οι $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ και είναι:

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

▼ Εφαρμογή – Θεωρία: $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $(\log_\alpha x)' = \frac{1}{x \ln \alpha}$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Θ. Έστω g και f δυο συναρτήσεις από τις οποίες η g είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και η f είναι ορισμένη σε διάστημα $E \supseteq g(\Delta)$ και παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$. Τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

• Αν η g είναι παραγ. στο Δ και η f στο $g(\Delta)$, τότε η $f \circ g$ είναι παραγ. στο Δ και $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

Πορίσματα: 1) Η συνάρτηση α^x $(\alpha > 0)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$. (Απόδειξη)

2) Αν g παραγωγίσιμη στο Δ και $\forall x \in \Delta$ είναι $g(x) > 0$, τότε: $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$. (Απόδειξη...)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗΣ.

$f(x)$	$f'(x)$	ΓΕΝΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ Η f είναι συνάρτηση του x	ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΠΡΑΞΕΩΝ
x	1		$(f+g)'=f'+g' \longleftrightarrow (c+f)'=f'$
c	0		
x^{α}	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$\bullet (f^{\kappa})'=\kappa\cdot f^{\kappa-1}\cdot f'$	$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g' \longleftrightarrow (c\cdot f)'=c\cdot f'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{f})'=\frac{1}{2\sqrt{f}}\cdot f'$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2} \longleftrightarrow \left(\frac{c}{f}\right)'=-c\cdot\frac{f'}{f^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\bullet \left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{1}{f^2}\cdot f'$	Οι δυο πρώτοι τύποι γενικεύονται για κ παράγοντες.
$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu f)'=\sigma\upsilon\nu f\cdot f'$	$(f_1+f_2+\dots+f_{\kappa})'=f_1'+f_2'+\dots+f_{\kappa}'$
$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu f)'=-\eta\mu f\cdot f'$	
$\varepsilon\varphi x$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(\varepsilon\varphi f)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f}\cdot f'$	$(f_1 f_2\cdots f_{\kappa})'=\sum_{i=1}^{\kappa}(f_1\cdot f_2\cdots f_{i-1}\cdot f_i'\cdot f_{i+1}\cdots f_{\kappa})$
$\sigma\varphi x$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$(\sigma\varphi f)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 f}\cdot f'$	$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'$
e^x	e^x	$(e^f)'=e^f\cdot f'$	**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Συναρτήσεις του τύπου f^{φ} όπου f και φ συναρτήσεις του x, παραγωγίζονται ως εξής: $(f^{\varphi})'=(e^{\varphi\ln f})'=e^{\varphi\ln f}\cdot(\varphi\ln f)'=$ $=f^{\varphi}\cdot[\varphi'\ln f+\varphi(\ln f)']=\dots\dots$ διότι $\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$.
α^x	$\alpha^x\cdot\ln\alpha$	$(\alpha^f)'=\alpha^f\cdot\ln\alpha\cdot f'$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(\ln f)'=\frac{1}{f}\cdot f'$	
$\log_{\alpha}x$	$\frac{1}{x\cdot\ln\alpha}$	$(\log_{\alpha}f)'=\frac{1}{f\cdot\ln\alpha}\cdot f'$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(15) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

1) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+x$
2) $y=6x^{7/2}+4x^{5/2}+2x$
3) $y=2x^{1/2}+6x^{1/3}-2x^{3/2}$
4) $y=\alpha x+\beta$
5) $y=(x^2-3)^4$
6) $y=(5x^3-x^2+2x-3)^{30}$
7) $y=(1+2x)^3$
8) $y=(1-x^2)^2$
9) $y=(x+1)\cdot(x^2-x+1)$
10) $y=x^6\cdot(x-1)^3$
11) $y=(x^2+1)(3x^3-5)(2x+3)$
12) $y=(x^2+3x)\cdot\sqrt{x}$.

(16) Όμοια των συναρτήσεων:

1) $y=2x^5\cdot(x^3+2)^2$
2) $y=3x^3\cdot εφx$
3) $y=(x^2+1)ημx$
4) $y=(2x-3)συνx$
5) $y=2x^3\cdot e^x\cdot \ln x$
6) $y=x-ημ^2x\cdot συνx$
7) $y=(4x^2-3)ημx-(x^2+2)συνx$
8) $y=3x\cdot(2x^2-1)^4\cdot εφx$
9) $y=2^x\cdot\sqrt{x}\cdot εφ^3x$
10) $y=3\log^5 x\cdot 5^x$
11) $y=\log_3 x\cdot \ln^2 x$
12) $y=\frac{1}{x}\cdot εφ^2x\cdot συνx$

(17) Όμοια των συναρτήσεων:

1) $y=\frac{x^3-5x}{συνx}$
2) $y=\frac{x\,ημx}{x^2+1}$
3) $y=\frac{x^3-2x}{x+1}$
4) $y=\frac{εφx}{\sqrt{x}}$
5) $y=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}$
6) $y=\frac{x^3(x+2)^2}{x^2+3}$
7) $y=\frac{εφx+ημx}{x\,συνx}$
8) $y=\frac{x^2+συνx}{2x+3ημx}$
9) $y=\frac{ημx-συνx}{ημx+συνx}$
10) $y=\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}$
11) $y=5ημx+\frac{2x}{x^2+4}$
12) $y=\frac{x^2e^x συνx}{x+1}$

(18) Όμοια των συναρτήσεων:

1) $y=\frac{x^3συνx}{x^4+2}$
2) $y=(x^2+ημx-1)\cdot εφx$
3) $y=\frac{x\,συνx-ημx}{x}$
4) $y=\frac{1}{x^{3/4}}$
5) $y=\frac{3}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}$
6) $y=\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$
7) $y=x^4\cdot\ln x$
8) $y=\frac{7}{x^2}-3x^{1/3}-\frac{1}{\sqrt{x}}$
9) $y=\frac{\ln x}{e^x(x^2+1)}$
10) $y=ημx+\ln x+3e^x$
11) $y=2^x-\log_5^2 x+συν^3x$
12) $y=2εφ^3x-\frac{2}{x^3}+5\sqrt{x}$

(19) Να βρεθούν οι παράγωγοι που ζητούνται στις συναρτήσεις:

1) $y=(2x-3)^3\rightarrow y''$
2) $y=\frac{x}{(x-1)^3}\rightarrow y''$
3) $y=e^x\cdot συνx\rightarrow y'''$
4) $y=\frac{e^x}{x^3}\rightarrow y'''$
5) $y=4x^5-ημx\rightarrow y''$
6) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}\rightarrow y''$
7) $y=4^x-\ln x\rightarrow y^{(4)}$
8) $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\rightarrow y''$

(20) α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: f(x)=x^2+x^{-2}$ πληρεί τη σχέση:

$$x^2\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)-4\cdot f(x)=0.$$

β) Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της $\varphi: \varphi(x)=\frac{1}{8}(x-2)^2$ στα σημεία $A(4,\frac{1}{2})$, $B(-6,8)$ τέμνονται κάθετα πάνω στην ευθεία $(\delta): y=-2$.

21) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων: (Σύνθετες..)

1) $y=\sqrt{5x+1}$ 5) $y=ημ(3x^2+2)$ 9) $y=e^{συν^2(x+2)}$

2) $y=e^x\cdot ημ10x$ 6) $y=\sqrt{\ln x}$ 10) $y=x\cdot\sqrt[4]{x^4+1}$

3) $y=(3ημx+4)^5$ 7) $y=εφ\frac{1}{x}$ 11) $y=ημ^3(x^2+x-5)$

4) $y=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$ 8) $y=\frac{\ln(x^2+1)}{ημ(x+2)}$ 12) $y=\frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}$

22) Όμοια, των συναρτήσεων:

1) $y=συν\sqrt{x-1}$ 5) $y=\ln^2(x^2+5)$ 9) $y=ημ(σφ^2x)$

2) $y=ημ(εφx^2)$ 6) $y=\log_7\sqrt{1-2x^3}$ 10) $y=ημ\sqrt{2x+1}$

3) $y=\ln(x^2+2)^2$ 7) $y=συν(ημx^2)$ 11) $y=\ln\sqrt[3]{x^2+1}$

4) $y=\ln\left(\frac{x^2+2}{1-x}\right)$ 8) $y=\frac{ημ(4x-1)}{συν(5x+3)}$ 12) $y=\frac{ημ(x^2+1)}{(x-1)^2}$

23) Όμοια, των συναρτήσεων:

1) $y=x^x$ 3) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 5) $y=x^{\sqrt{x}}$

2) $y=(συνx)^{ημ2x}$ 4) $y=ημx^x$ 6) $y=x^{1/x}$.

24) Να βρεθούν οι παράγωγοι που ζητούνται στις συναρτήσεις:

1) $y=x^2\cdot συν3x \longrightarrow y''$ 6) $y=e^{-x}\cdot συνx \longrightarrow y^{(4)}$

2) $y=3^{3x} \longrightarrow y''$ 7) $y=\ln(ημx) \longrightarrow y''$

3) $y=e^{-x}\cdot ημx \longrightarrow y''$ 8) $y=x\cdot e^{x^2} \longrightarrow y''$

4) $y=x^2\cdot e^{2x} \longrightarrow y'''$ 9) $y=3x^2+ημ7x \longrightarrow y''$

5) $y=x\cdot e^{-x/2} \longrightarrow y'''$ 10) $y=\frac{2}{x}\cdot\sqrt{4-x^2} \longrightarrow y''$.

25) Δείξτε τις παρακάτω συνεπαγωγές:

1) $y=(x-ημx\cdot συνx)^2 \Longrightarrow y'=4ημ^2x(x-ημx\cdot συνx)$.

2) $y=3ημx\cdot\sqrt{συν2x} \Longrightarrow y'=\frac{3συν3x}{\sqrt{συν2x}}$

3) $y=\frac{x}{2}\left[ημ(\ln x)-συν(\ln x)\right] \Longrightarrow y'=ημ(\ln x)$.

4) $y=e^{\ln^2x} \Longrightarrow y'=\frac{2\ln x}{x}\cdot e^{\ln^2x}$.

26) Όμοια:

1) $y=αe^{-x}+βe^{-2x}$, $α,β\in\mathbb{R} \Longrightarrow y'''+3y''+2y'=0$.

2) $y=e^{-x}\cdot συνx \Longrightarrow y^{(4)}+4y=0$. 3) $y=xe^{-\frac{x}{2}} \Longrightarrow 4y'''-12y''-15y'-4y=0$.

27) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων: (Πολλαπλού τύπου)

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2}, & x\in(0,2]\\ \frac{9}{8}x+\frac{7}{4}, & x\in(2,+\infty).\end{cases}$ 3) $f(x)=\begin{cases}\ln(2x+1), & x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\\ 2x, & x\in[0,+\infty).\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(-\infty,2)\\ \frac{1}{συνx}, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\in(-\infty,0)\\ -x+1, & x\in(0,1)\\ (x-1)^2, & x\in[1,+\infty).\end{cases}$

5) $f(x)=|x^2-4|$.

(28) Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης:
$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } -1\leq x\leq 1 \\ x^4, & \text{αν } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty). \end{cases}$$

(29) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: f(x)=\dfrac{|x+1|}{|x|+2}$.

(30) Αν $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$, δείξτε ότι $f'(x)=\dfrac{1}{(1+|x|)^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(31) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.
Αν $f(1)=7$, $f'(0)=-1$, $f''(x)=6$, να βρεθούν τα α,β,γ.

(32) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu\omega}{x\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}$ με $0<\omega<\dfrac{\pi}{4}$.
Δείξτε ότι: $\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}=\dfrac{1}{x^2+1}$.

(33) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{αν } x\leq 0 \\ e^{-x}, & \text{αν } x>0 \end{cases}$.

(34) Αν $f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\kappa x)+\beta\eta\mu(\kappa x)$ με $\alpha,\beta,\kappa\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι:
$f''(x)+\kappa^2\cdot f(x)=0$.

(35) Δείξτε ότι:
1) $(\eta\mu x)^{(4\nu)}=\eta\mu x$ 2) $(\eta\mu x)^{(4\nu+1)}=\sigma\upsilon\nu x$.

(36) Να βρεθεί πολυώνυμο $f(x)$ 4ου βαθμού, αν ισχύει:
$f(x)-f'(x)=\dfrac{x^4}{12}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(37) Να βρεθεί πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού ≤ 5, τέτοιο ώστε:
$f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(0)=f''(0)=f'(1)=f''(1)=0$.

(38) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης
$f: f(x)=|x^3-x|$.

(39) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^2$.
Δείξτε ότι: $(1+x)^2\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)=4f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(40) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης
$$f: f(x)=\begin{cases} \ln(x+1), & \text{αν } -1<x\leq 0 \\ x, & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

(41) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια και παραγωγίσιμη $\forall x\in\mathbb{R}$ και για τη συνάρτηση g ισχύει $g(x)=(x^2+1)\cdot f(x)+8x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι $g'(0)=8$.

(42) Αν $P(1,3)$, $Q(2,6)$ είναι δυο σημεία της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης $f: f(x)=x^2+2$, να βρεθεί σημείο $M(x_0,y_0)\in C$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C στο M να είναι παράλληλη προς την ευθεία PQ.

(42)′ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_+^*$ και $f(x^2)=x^7$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, δείξτε ότι: $f'(4)=112$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ.

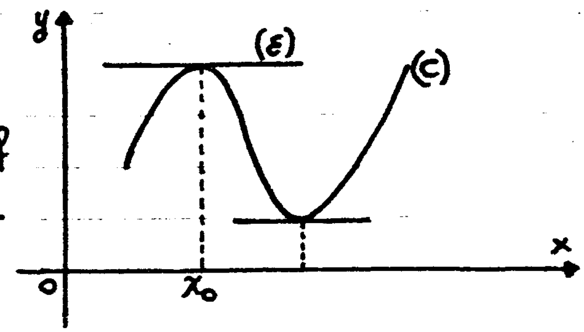
ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A.
Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει ή έχει τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο) σ' ένα σημείο $x_0 \in A$, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε:

$$\forall x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0). \quad [f(x) \geq f(x_0)]$$

Θ. (Fermat). Αν μια συνάρτηση f:
- ορίζεται σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ
- παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$
- είναι παραγωγίσιμη στο x_0

$\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$. (Απόδειξη...)

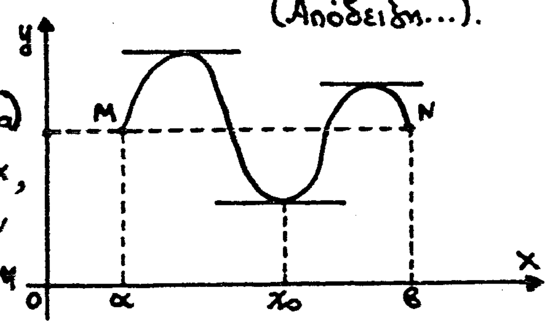


Γεωμετρική Ερμηνεία.
Επειδή $f'(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = 0$, δηλαδή:
η εφαπτομένη (ε) του διαγράμματος (c) της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι // στον άξονα Ox.
Δηλαδή, το διάγραμμα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης στα σημεία max ή min που δεν ταυτίζονται με τα άκρα του, δέχεται εφαπτομένη // προς τον Ox.

- •₁ Η υπόθεση ότι το x_0 είναι σημείο ανοικτού διαστήματος είναι αναγκαία.
- •₂ Ο μηδενισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακροτάτου στο σημείο αυτό. (Πιθανά ακρότατα)
- •₃ Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο του Π.Ο. της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. (Βλέπε παραδείγματα Βιβ.)

Θ. Rolle. Έστω η συνάρτηση f για την οποία υποθέτουμε ότι:
- είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- » παραγωγίσιμη » ανοικτό » (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

$\Longrightarrow \exists x_0 \in (\alpha, \beta):\ f'(x_0) = 0.$
(Απόδειξη...).



Γεωμετρική Ερμηνεία. Αν το γράφημα C_f δέχεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο (με εξαίρεση τα άκρα) και αν η ευθεία MN των άκρων είναι // προς τον Ox, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο του C_f (που δεν συμπίπτει με τα άκρα του) στο οποίο η εφαπτομένη είναι // προς τον άξονα Ox.

- Οι συνθήκες του Rolle είναι ικανές, όχι όμως και αναγκαίες για να $\exists x_0 \in (\alpha, \beta): f'(x_0) = 0$.

Εφαρμογή-Θεωρία: Η εξίσωση $x^{2\nu} + \alpha x + \beta = 0, \nu \in \mathbb{N}^*$, δεν έχει περισσότερες από δύο ρίζες $\rho_{1,2} \in \mathbb{R}$.
(Σελ. 188.Β).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

43 Να εξεταστεί αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle στις συναρτήσεις:
(● Οι τρείς συνθήκες του Θ. Rolle είναι ουσιαστικές και καμμιά τους δεν μπορεί να παραλειφθεί στις εφαρμογές του θεωρήματος).

1) $f(x)=x^2-5x+6$ στο διάστημα $[0,5]$.
2) $f(x)=x^3-9x+5$ „ „ $[-3,3]$.
3) $f(x)=|x|+1$ „ „ $[-2,2]$.
4) $f(x)=|x-1|^3$ „ „ $[0,2]$.
5) $f(x)=e^{|x|}$ „ „ $[-1,1]$
6) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ στο διάστημα $[0,2]$.
7) $f(x)=\begin{cases} 3x\ , & x\neq 2 \\ 3\ , & x=2 \end{cases}$ „ „ $[1,2]$.
8) $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{x}-1\ , & x\neq 0 \\ 0\ , & x=0 \end{cases}$ „ „ $[0,1]$.

44 Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\ln(|x|+1)$ ορισμένη στο $[-1,1]$. Δείξτε ότι:
1) Δεν εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.
2) Η f έχει ακρότατο στο $x_0=0$, ενώ δεν παραγωγίζεται στο 0.

45 Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases} x^2+\lambda x+\mu\ , & x\in[-1,0) \\ \kappa x^2+4x+4\ , & x\in[0,1] \end{cases}$.
Να βρεθούν οι $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.

46 Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
1) Αν $\nu=2\kappa$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο ρίζες $\rho_{1,2}\in\mathbb{R}$. (Εφαρμογή Φυλ. 10).
2) Αν $\nu=2\kappa+1$ „ „ „ „ „ „ τρείς „ $\rho_{1,2,3}\in\mathbb{R}$.

47 Δείξτε ότι: για τη συνάρτηση $f: f(x)=x\cdot|\eta\mu x|$, εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

48 Δείξτε ότι: η εξίσωση $x^5+2x^3+7x+12=0$ έχει μια πραγματική ρίζα και τέσσερις μιγαδικές.

49 Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=(x+4)(x-2)(3x-1)(x-6)$.
Να βρεθεί πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση $f'(x)=0$.

50 Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^3-3x+1$.
Δείξτε, χωρίς να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$, ότι αυτό έχει μια μόνο ρίζα ρ στο διάστημα $(-1,1)$.

51 Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=x\cdot e^x-e^x+1$. Δείξτε ότι:
1) Το 0 είναι ρίζα της $f(x)$.
2) Η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει άλλη ρίζα στο $\mathbb{R}$.

52 Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^3-48x+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
Δείξτε ότι δεν υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $f(x)=0$, να έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 τέτοιες ώστε $0<\rho_1<\rho_2<4$.

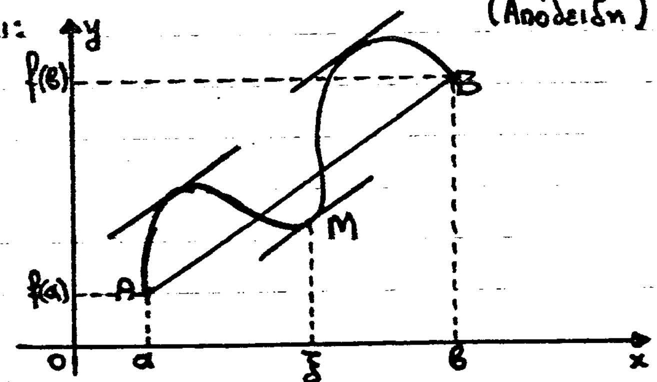
Θ. ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (Lagrange). Αν η συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό » (α,β)

$$\Longrightarrow \exists \xi\in(\alpha,\beta): f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (1)$$

(Απόδειξη)

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία.</u> Το Θ.Μ.Τ. λέει ότι: αν το γράφημα της f στο $[\alpha,\beta]$ δέχεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο (με εξαίρεση τα άκρα), υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο του γραφήματος (που δεν συμπίπτει με τα άκρα του) στο οποίο η εφαπτομένη είναι // προς τη χορδή AB που ενώνει τα άκρα.



- 1. Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε $f'(\xi)=0$, που σημαίνει ότι το Θ.Μ.Τ. είναι γενική περίπτωση του Θ. Rolle.
- 2. Η (1) γράφεται ισοδύναμα: $f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)\cdot f'(\xi)$.
- 3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό $[\alpha,\beta]$ τότε θα είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ (Θ. Φυλ.3), δηλαδή θα πληρούνται ταυτόχρονα οι δύο συνθήκες του Θ. Rolle και του Θ.Μ.Τ.

<u>ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ Θ.Μ.Τ.</u>

Θ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ. (Απόδειξη...)

<u>Πόρισμα:</u> Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

- είναι παραγωγίσιμες στο Δ
- $f'=g'$

$\Longrightarrow$ Υπάρχει σταθερή στο Δ συνάρτηση κ, τέτοια ώστε $f=g+\kappa$.

<u>Εφαρμογές - Θεωρία</u> (σελ.175Β).

1) Μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f'=f \Longleftrightarrow f(x)=ce^x.$$

2) <u>Θ. Cauchy.</u> Αν οι συναρτήσεις f,g είναι:

- συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (α,β)

$\Longrightarrow \exists \xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $[f(\beta)-f(\alpha)]g'(\xi)=[g(\beta)-g(\alpha)]f'(\xi)$.

ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ. Ονομάζουμε <u>παράγουσα (ή αρχική) συνάρτηση της f</u> κάθε συνάρτηση F ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ, για την οποία ισχύει: $F'=f$.

Θ. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ και F μια παράγουσά της.
Το σύνολο των παραγουσών της f το αποτελούν οι συναρτήσεις $F+u$, όπου u μια οποιαδήποτε σταθερή στο Δ συνάρτηση.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}+c$	e^x	e^x+c
1	$x+c$	$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x+c$	α^x	$\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c$
x^α όπου $\alpha\neq-1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x+c$	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+c$
		$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi x+c$	$1/x\ln\alpha$	$\log_\alpha\lvert x\rvert+c$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(53) Να εξεταστεί αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση:

1) $f(x)=x^2-x-2$ στο διάστημα $[1,3]$.
2) $f(x)=2x^3$ » » $[-1,1]$.
3) $f(x)=\frac{1}{x}$ » » $[1,4]$.
4) $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{αν } x\in[1,2] \\ \frac{x^2}{4}+1, & \text{αν } x\in(2,3] \end{cases}$ στο Π.Ο. της.
5) $f(x)=\begin{cases} 3x, & x\in[0,1) \\ 3, & x=1 \\ x^3+2, & x\in(1,2] \end{cases}$ στο Π.Ο. της.

(54) Δίνεται η συνάρτηση f: $f(x)=x\ln x$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*_+$ με $\alpha<\beta$.
Να βρεθεί $x_0\in(\alpha,\beta)$ για το οποίο ισχύει το Θ.Μ.Τ.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ Θ.Μ.Τ. ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.

Υπόδειξη: Θεωρείστε κατάλληλη συνάρτηση και εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ.

(55) Δείξτε ότι: 1) $\nu(\beta-\alpha)\alpha^{\nu-1}<\beta^\nu-\alpha^\nu<\nu(\beta-\alpha)\beta^{\nu-1}$ όπου $0<\alpha<\beta$, $\nu\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

2) $\frac{1}{\alpha+1}<\ln(\alpha+1)-\ln\alpha<\frac{1}{\alpha}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}^*_+$. → Αριθμός Euler γ: σελ. 142 β. παραγώγων.

3) $\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$ όπου $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

4) $|\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha|\leq\beta-\alpha$ όπου $\alpha<\beta$.

5) $1<\frac{e^x-1}{x}<e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$.

6) $\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)-\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta-\alpha}<\varepsilon\varphi\beta$ όπου $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

(56) Να βρεθεί το σημείο επαφής του διαγράμματος C_f της $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$, της εφαπτομένης που είναι // στη χορδή AB του C_f, όπου $A(1,1)$, $B(2,\frac{1}{2})$.

(57) Δείξτε ότι στη παραβολή $y=x^2+2x+4$ η χορδή που διέρχεται από τα σημεία με τετμημένες $x_1=2$ και $x_2=4$ είναι // με την εφαπτομένη στο $x_0=3$.

(58) Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η f: $f(x)=2x^3-\alpha x$ να δέχεται στο $x_0=1$ εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία (ε): $y=4x-5$, και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

(59) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του διαγράμματος C_f της f: $f(x)=x^2-x-12$ στα σημεία όπου αυτό τέμνει τους άξονες.

▼ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ — ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ DEL' HOSPITAL ▼

Θ. Εστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

- Σε μια περιοχή του x_0 είναι παραγωγίσιμες με $g'(x)\neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$
- Υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

→ Το **Θ.** ισχύει και για όρια των συναρτήσεων στο $+\infty$ ή $-\infty$.

Ετσι: σε μορφή $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ εφαρμόζω κατ' ευθείαν Del' Hospital.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

ΜΟΡΦΗ $\frac{0}{0}$.

1) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{[(x-1)\cdot\ln x]'} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1\cdot\ln x+\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-\frac{1}{x})'}{(\ln x+\frac{x-1}{x})'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1\cdot x-(x-1)\cdot 1}{x^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$. 56Β,1

ΜΟΡΦΗ $\frac{\infty}{\infty}$.

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+e^x}\cdot e^x}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$. 57.Β,3

→ ΟΙ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, με κατάλληλο τέχνασμα ανάγονται στις μορφές $0/0$ ή ∞/∞.

ΜΟΡΦΗ $\infty-\infty$ ⟷ Κάνω πράξεις και έρχεται στη μορφή $0/0$ ή ∞/∞.

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\eta\mu^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\eta\mu^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\eta\mu^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^4}\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)^2}_{1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{4x^3} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2x-\eta\mu 2x}{4x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2-2\sigma\upsilon\nu 2x}{12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{6x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{6x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{3} = \frac{1}{3}$. 58.Β

→ Απο το παράδειγμα αυτό φαίνεται ότι ο Del' Hospital συμπληρώνει και δεν καταργεί, όσα μάθαμε στο κεφάλαιο των ορίων.

ΜΟΡΦΗ $0\cdot\infty$ ⟷ Προκύπτει απο συνάρτηση του τύπου $f=\varphi\cdot g$ όπου $\lim\varphi=0$ και $\lim g=\infty$.

Κάνω το τέχνασμα:

$$f=\varphi\cdot g = \begin{cases} \frac{\varphi}{1/g} \longrightarrow \left(\frac{0}{0}\right) \\ \text{ή} \\ \frac{g}{1/\varphi} \longrightarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \end{cases}$$

4) $\lim_{x\to 0^+}\varepsilon\varphi x\cdot\ln x = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\eta\mu^2 x}} =$

$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}\cdot\lim_{x\to 0^+}\eta\mu x = -1\cdot 0 = 0$. 59.Β,2

ΜΟΡΦΗ 0^0 ⟷ Προκύπτει από συνάρτηση του τύπου $f=\varphi^g$ όπου $\lim\varphi=0=\lim g$.

Κάνω το τέχνασμα:

$$f=\varphi^g=e^{g\ln\varphi} \Longrightarrow \lim f=\lim e^{g\ln\varphi}=e^{\lim(g\ln\varphi)} \longrightarrow \left(\frac{0}{0}\right) \text{ ή } \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ ή } (0\cdot\infty)$$

$$5)\ \lim_{x\to0}\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)^{1/\ln x}=(0^0)=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)}{\ln x}}\to\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\eta\mu x}\to1}=e^1=e.$$,60.β

ΜΟΡΦΕΣ ∞^0, 1^∞ ⟷ Δουλεύω όπως στη μορφή 0^0.

$$6)\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=(1^\infty)=\lim_{x\to-\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\longrightarrow(\infty\cdot0)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+1/x}}=e^1=e.$$ 60 β, 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(60) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2x-\pi}$. 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu3x-1}{x^2}$. 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x-\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x^2}$. 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x}{x}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu2x}{x^2}$.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+\ln x}$. 8) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{x}\right)$. 9) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\frac{1}{x}\right)$.

10) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$. 11) $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$. 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/x}$.

13) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\eta\mu x}$. 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\right)\right]$. 15) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3e^x-e^{-x}}{2}\right)^{1/x}$.

16) $\lim\limits_{x\to0}(\eta\mu x\cdot\ln x)$. 17) $\lim\limits_{x\to0}(\eta\mu x)^{\eta\mu x}$. 18) $\lim\limits_{x\to0}(\eta\mu x)^x$.

19) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$. 20) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\sigma\varphi^2x\right)$. 21) $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x^2)^{\sigma\varphi x}$. 22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

▼ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ. ⟷ Εξαρτάται από το **ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f'** ως εξής:

Θ.1. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ.
Τότε η f είναι:
- αύξουσα στο Δ $\Longleftrightarrow \forall x \in \Delta,\ f'(x) \geq 0$. (Απόδ.)
- φθίνουσα στο Δ $\Longleftrightarrow \forall x \in \Delta,\ f'(x) \leq 0$

Θ.2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $\forall x \in \Delta$ είναι:
- $f'(x) > 0 \Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- $f'(x) < 0 \Rightarrow$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

(Το αντίστροφο του Θ.2 δεν αληθεύει.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(61) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

1) $f(x) = x^3 - 6x$. 2) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$. 3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

4) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$. 5) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$. 6) $f(x) = \sqrt{x^2}$.

7) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. 8) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$. 9) $f(x) = \ln(1-x^2)$.

(62) Όμοια, για τις συναρτήσεις:

1) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. 2) $f(x) = e^x + 5x$. 3) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

4) $f(x) = (x-1)\cdot e^{\frac{x}{x-1}}$. 5) $f(x) = x^{\alpha} \cdot e^{-x}$, όπου $\alpha > 0$.

(Βλέπε Φυλ. 17)

▼ ΑΚΡΟΤΑΤΑ. ⟷ Αναζητούνται σε 3 κατηγορίες σημείων του Π.Ο. της f.

Θ. 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ: Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και ότι στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ είναι $f'(x_0) = 0$.
Η f παρουσιάζει στο x_0:
1) Τοπικό μέγιστο, αν $\forall x \in (\alpha, x_0],\ f'(x) \geq 0$ και $\forall x \in [x_0, \beta),\ f'(x) \leq 0$.
2) Τοπικό ελάχιστο, » » , $f'(x) \leq 0$ » » , $f'(x) \geq 0$.

(Απόδειξη...)

- Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σ' ένα σημείο x_0 του Π.Ο. της, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Θ. 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ: Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ και ότι στο $x_0 \in \Delta$ είναι $f'(x_0) = 0$.
1) Αν $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.
2) Αν $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ » » » τοπικό μέγιστο » ».

- Η συνθήκη $f''(x_0) \neq 0$ είναι ικανή για την ύπαρξη ακροτάτου της f στο x_0, όχι όμως και αναγκαία.

⟷ έτσι, αν $f''(x_0) = 0$, δουλεύω με το 1ο κριτήριο.

- Τα παραπάνω κριτήρια αναφέρονται στις ρίζες της f'. (Αφού $f'(x_0)=0$)

▼ ΠΙΘΑΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Έστω συνάρτηση f με Π.Ο. μια ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων.

Αναζητούνται στις εξής 3 κατηγορίες σημείων του Π.Ο. της f:

(K_1) Στα σημεία ανάκαμψης, δηλαδή στα σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται αλλά είναι συνεχής.

(K_2) Στα άκρα κλειστών διαστημάτων, δηλαδή στα ακραία σημεία του Π.Ο.

(K_3) Στις ρίζες της f', που είναι εσωτερικά σημεία του Π.Ο. της f.

ΜΕΘΟΔΟΣ: Για να διαπιστώσω αν ένα πιθανό σημείο ακρότατου έστω x_0, είναι ή όχι ακρότατο, δουλεύω ως εξής:

Αν το $x_0 \in (K_1)$, η διαπίστωση γίνεται απο το πρόσημο της f' ή με τον ορισμό.

παράδειγμα: $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$. Είναι $A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, διότι $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x)=\left(x^{2/5}\right)'=\frac{2}{5}x^{-3/5}=\frac{2}{5x^{3/5}}=\begin{cases}\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, & x>0\\[2mm] -\dfrac{2}{5\sqrt[5]{|x|^3}}, & x<0\end{cases}$$

Σκέψη:
- $\bullet_1$ Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά όχι παραγωγίσιμη.
- $\bullet_2$ Το Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ δεν έχει ακραία σημεία
- $\bullet_3$ Η f' δεν έχει ρίζες. ($f'(x)\neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$)

→ Πιθανό ακρότατο έχω μόνο στο $x_0=0$. που είναι σημείο ανάκαμψης.

Διαπίστωση:

α' τρόπος: Απο το πρόσημο της f' και απο το ότι το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f	$+\infty$	↘	$\varepsilon=0$	↗	$+\infty$

συμπεραίνω ότι έχω (ολικό) min το $(0,0)$.

β' τρόπος: Με τον ορισμό, επειδή $f(0)=0\leq\sqrt[5]{x^2}=f(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(0)\leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Αρα στο $x_0=0$ η f έχει (ολικό) min το $(0,0)$.

Αν το $x_0\in(K_2)$, η διαπίστωση γίνεται απο το πρόσημο της f'.

παράδειγμα: Έστω η $f: f(x)=x^2-2x+3$ ορισμένη στο $A=[-1,0]\cup[2,4)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με $f'(x)=2x-2$.

Σκέψη:
- $\bullet_1$ $\nexists$ σημεία ανάκαμψης, αφού η f παραγωγίζεται σ' όλο το A.
- $\bullet_2$ Τα $-1, 0, 2$ είναι ακραία σημεία του A.
- $\bullet_3$ Η f' δεν έχει ρίζες στο A, διότι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1\notin A \Rightarrow f'(x)\neq 0, \forall x \in A$

→ Πιθανά ακρότατα έχω μόνο στα $-1, 0, 2$

Διαπίστωση: Απο το πρόσημο της f'

x		-1		0	1	2		4	
f'			$-$				$+$		
f		$\mu=6$	↘	$\varepsilon=3$		$\varepsilon=3$	↗		

$max = (-1,6)$.

$min = \begin{cases}(0,3)\\(2,3)\end{cases}$

Αν το $x_0\in(K_3)$, η διαπίστωση γίνεται με το 1ο κριτήριο (πρόσημο f') ή με το 2ο κριτήριο (αν το $f''(x_0)\neq 0$).

- Η περίπτωση αυτή είναι και η πιό συνηθισμένη στις ασκήσεις που ακολουθούν...

(παράδειγμα: Βλέπε τετράδιο άσκηση 63_1.Φ.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(63) Να βρεθούν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) των συναρτήσεων:

1) $f(x)=x^3-2x^2+5$. 2) $f(x)=2-3x^4$. 3) $f(x)=-2x^2+12x+3$

4) $f(x)=(x-2)^4+3$. 5) $f(x)=(x-1)^5$. 6) $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

7) $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$. 8) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$. 9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2}$

(64) Όμοια, για τις συναρτήσεις:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$. 3) $f(x)=x\cdot\sqrt{4-x^2}$.

4) $f(x)=x\cdot e^x$. 5) $f(x)=e^{\frac{x-2}{x}}$. 6) $f(x)=\ln(x-1)-x$

7) $f(x)=x\cdot\ln\frac{1}{x}$ 8) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$. 9) $f(x)=3|x|$.

(65) Όμοια, για τις συναρτήσεις:

1) $f(x)=(x-1)\cdot|x|$. 2) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$ 3) $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\in(-\infty,1]\\ -x+4, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

4) $f(x)=\eta\mu^2 x$. 5) $f(x)=2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 2x$ στο $(0,2\pi)$.

6) $f(x)=2\eta\mu^2 x-2\eta\mu x+3$ στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(66) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, ώστε η $f: f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $f(0)=3$ να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=\frac{1}{3}$.

(67) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η $f: f(x)=x^2+\alpha\ln x-\beta x$ να έχει ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$.

(68) Να βρεθεί το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η $f: f(x)=\frac{1}{3}\eta\mu 3x+\alpha\eta\mu x$ να έχει ακρότατο στο $x_0=\frac{\pi}{3}$.

▼ ΚΟΙΛΑ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Εξαρτώνται από το πρόσημο της f'', ως εξής:

1) Αν $\forall x\in\Delta$ είναι $f''(x)\geq 0$, λέμε ότι η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ. Δηλαδή η γραφική παράσταση της f είναι "πάνω" από την εφαπτομένη σ' οποιοδήποτε σημείο της. (ΚΥΡΤΗ $\cup$).

2) Αν $\forall x\in\Delta$ είναι $f''(x)\leq 0$, λέμε ότι η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ. Δηλαδή η γραφική παράσταση της f είναι "κάτω" από την εφαπτομένη σ' οποιοδήποτε σημείο της. (ΚΟΙΛΗ $\cap$).

●$_1$ Αν η f' είναι ↑ στο Δ, τότε η f είναι κυρτή. (διότι $f''(x)\geq 0$).

●$_2$ Αν η f' είναι ↓ στο Δ, τότε η f είναι κοίλη. (διότι $f''(x)\leq 0$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(69) Να μελετηθούν ως προς τη κοιλότητα οι συναρτήσεις:

1) $f(x)=x^4-2x^2+3$. 2) $f(x)=\frac{1}{x}$. 3) $f(x)=4x^3-8x^2+2$.

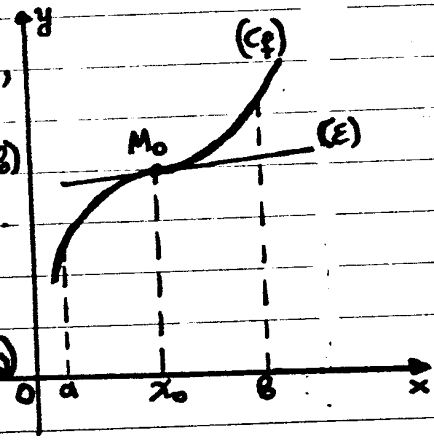
4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. 5) $f(x)=e^x-x$. 6) $f(x)=\ln x-x$.

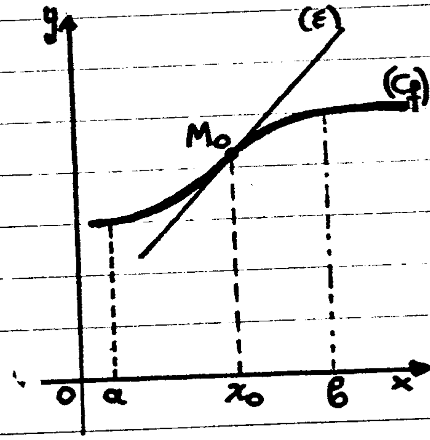
▼ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

Αναζητούνται στις ρίζες της f'' (και στα σημεία ανάκαμψης της f). ως εξής: Εστω ότι μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β). Αν η f'' μηδενίζεται σ' ένα σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ αλλάζοντας πρόσημο, τότε η f θα παρουσιάζει καμπή στο x_0.

Γεωμετρική Ερμηνεία.

Η γραφική παράσταση της f, στρέφει τα κοίλα: κάτω στο $(\alpha, x_0]$ και άνω στο $[x_0,\beta)$ ή άνω » » » κάτω » ». Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις η εφαπτομένη της (c) στο σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$ "διαπερνά" τη γραφική παράσταση της f.





● Η συνθήκη $f''(x_0)=0$ δεν είναι αρκετή για να είναι το x_0 σημείο καμπής. (Δηλαδή το x_0 είναι απλώς Πιθανό σημείο καμπής).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

69) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

1) $f(x)=4x^3-8x^2+2$. 2) $f(x)=x^3-2x^2+x-5$. 3) $f(x)=x^3$. 4) $f(x)=x^4$

5) $f(x)=(x-1)^5$. 6) $f(x)=(x-2)^5+3x+1$. 7) $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

8) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. 9) $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 10) $f(x)=-x\ln x$.

70) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η $f: f(x)=-x^3+3x^2+1$ είναι κυρτή ή κοίλη, καθώς και τα σημεία καμπής αυτής (αν υπάρχουν).

71) Αν η συνάρτηση $f: f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+2$ έχει σημεία καμπής, δείξτε ότι $3\alpha^2>8\beta$. $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

72) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=x^4-6x^2$.
Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, και τα σημεία καμπής αυτής (αν υπάρχουν).

73) Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη του διαγράμματος της $f: f(x)=x^3-\alpha x^2$ στο σημείο καμπής της να περνά από την αρχή των αξόνων. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ).

74) Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
Να μελετηθεί ως προς τη κοιλότητα και τα σημεία καμπής της.

▼ ΜΕΛΕΤΗ - ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη μελέτη και τη κατασκευή της καμπύλης που παριστάνει μια συνάρτηση f, δουλεύω ως εξής:

1) Βρίσκω το Πεδίο Ορισμού A (αν δεν δίνεται..)

- Η μελέτη "μπορεί" να περιοριστεί σ' ένα υποσύνολο του A.

Έτσι, αν η f είναι:
- περιοδική με περίοδο T, μπορώ να τη μελετήσω στο $[\alpha, \alpha+T]$.
- άρτια ή περιττή, μπορώ να τη μελετήσω στο $R_+ \cap A$.

2) Βρίσκω τις f' και f''.

3) Βρίσκω τις ρίζες της f' και f'', λύνοντας τις εξισώσεις $f'(x)=0$, $f''(x)=0$.

- Στις ρίζες της f' η f έχει Πιθανά Ακρότατα (και στις κατηγορίες (K_1), (K_2) - Φυλ.17)
- " " " f'' " " " " Σημεία Καμπής (και στα σημεία ανάκαμψης)

4) Κάνω πίνακα προσήμων για τις f', f'' και μεταβολής για την f.

- Από το πρόσημο της f' βρίσκω τη μονοτονία της f.
- " " " " f'' " " κοιλότητα " ".

5) Βρίσκω τις ασύμπτωτες (αν υπάρχουν).

6) Βρίσκω το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, δηλαδή το $f(0)$. (αν υπάρχει)

- Αν είναι εύκολο, βρίσκω και τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, που είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. (αν υπάρχουν).

7) Κατασκευάζω τη γραφική παράσταση της f.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

75 Να μελετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις και να γίνει η γραφική τους παράσταση:

1) $f(x)=x^3-3x^2$. 2) $f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2$. 3) $f(x)=x^4-8x^2+7$. 4) $f(x)=x^5-5x$.

Σε πολυωνυμική συνάρτηση που δεν δίνεται κάποιο ιδιαίτερο Π.Ο. "καλό είναι" να ξέρετε ότι έχει τα εξής σταθερά στοιχεία:

1) Το Π.Ο. $A=\mathbb{R}$. 2) Είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. 3) Δεν έχει ασύμπτωτες.

76 Όμοια, για τις συναρτήσεις:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$. 2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+4}$. 3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. 4) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+1}$.

Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα, απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή στις ασύμπτωτες. Έτσι "καλό είναι" να ξέρετε ότι:

(Βλέπε και Φ.14)

1) Αν $Q(\rho)=0 \wedge P(\rho)\neq 0$ τότε η ευθεία $x=\rho$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

2) Αν τα $P(x)$, $Q(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα (ανάγωγο κλάσμα), τότε:

i) Αν βαθμ.$P(x)$ < βαθμ.$Q(x)$ η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ $(y=0)$

ii) Αν βαθμ.$P(x)$ = βαθμ.$Q(x)$ " " " " " την $y=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ ...

iii) Αν βαθμ.$P(x)$ = βαθμ.$Q(x)+1$ " " " πλάγια ασύμπτωτη την $y=\alpha x+\beta$ όπου $\alpha x+\beta$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):Q(x)$.

(77) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f: f(x)=\frac{συνx}{1+συνx}$

Προσέξτε ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π, οπότε μπορεί να μελετηθεί στο $(-\pi,\pi)$, είναι όμως και άρτια, άρα αρκεί να μελετηθεί στο $[0,\pi)$.

(78) Ομοια, οι συναρτήσεις:
1) $f(x)=\frac{1-ημx}{ημx}$. 2) $f(x)=\frac{1-συνx}{συνx}$.

(79) Ομοια, οι συναρτήσεις:
1) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. 3) $f(x)=\sqrt{4x^2-3}$.

Γεωμετρικά max-min.

(80) Απο όλα τα ορθογώνια που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O,R), να βρεθεί ποιό έχει το μέγιστο εμβαδόν.

(81) Απο όλους τους κώνους που είναι εγγεγραμμένοι σε δοθείσα σφαίρα (O,R), να βρεθεί ποιός έχει το μέγιστο όγκο.

(82) Απο όλους τους κυλίνδρους που έχουν σταθερή ολική επιφάνεια $2\pi a^2$, να βρεθεί ποιός έχει το μέγιστο όγκο.

---

(83) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f: f(x)=\frac{2-\ln x}{x}$.

(84) Ομοια, η συνάρτηση $f: f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται <u>υπερβολικό συνημίτονο</u>.

(85) Ομοια, η συνάρτηση $f: f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται <u>υπερβολικό ημίτονο</u>.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες:
 1) $f(x)=x[x]$ στο $x_0=0$ 2) $\varphi(x)=x-[x]$ στο $x_0=\kappa\in\mathbb{Z}$.

② Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος C της $f: f(x)=x^4-31x$, αν σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

③ Δείξτε ότι η ευθεία $x+4y-10=0$ είναι κάθετη στη παραβολή $f: f(x)=x^2+6x+8$ στο σημείο $x_0=-1$ αυτής.

→ Ευθεία κάθετη σε καμπύλη, σημαίνει κάθετη στην εφαπτομένη της καμπύλης.

④ Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f: f(x)=3-x^2$ και $g: g(x)=\frac{3x-1}{x-3}$ στα σημεία τους με τεταγμένη $x_0=1$ είναι παράλληλες.

⑤ Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δείξτε ότι:
$$f^{(\nu)}(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\nu\cdot\frac{\pi}{2}+x\right),\quad \forall\nu\in\mathbb{N}^*.$$

⑥ Αν $f: f(x)=\ln(3x+2)$, δείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{(\nu-1)!\cdot 3^\nu}{(3x+2)^\nu}$.

⑦ Αν $f: f(x)=\begin{cases}5x+2\sqrt{x}, & x\geq 0\\ -3x, & x<0\end{cases}$ και $g: g(x)=\begin{cases}-2\sqrt{x}, & x\geq 0\\ 8x, & x<0\end{cases}$,

δείξτε ότι: οι f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$, ενώ η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

⑧ Αν ρ είναι κοινή ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και της παραγώγου του, δείξτε ότι το πολυώνυμο $(x-\rho)^2$ διαιρεί το $P(x)$.

⑨ Να εξετασθεί ποιές από τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle ισχύουν και ποιές δεν ισχύουν για τις συναρτήσεις:
 1) $f(x)=\sqrt[3]{(x+3)^2}$ στο $[-6,0]$. 2) $\varphi(x)=(x+1)^2$ στο $[2,3]$.

⑩ Δείξτε ότι για τη συνάρτηση $f: f(x)=\ln(\eta\mu x)$ ισχύει το Θ. Rolle στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ και να βρείτε $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right): f'(\xi)=0$

⑪ Να εξετασθεί αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τις συναρτήσεις:
 1) $f(x)=\ln x$ στο $[1,e]$. 2) $\varphi(x)=\begin{cases}2x+1, & x\in[-1,0]\\ 1-2x, & x\in(0,1]\end{cases}$ στο Π.Ο. της.

⑫ Αν $\nu>\theta^2$ όπου $\nu,\theta\in\mathbb{N}^*$, δείξτε ότι: $\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}<\frac{1}{2\theta}$.

⑬ Αν για τη συνάρτηση f ισχύει το Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$, δείξτε με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. ότι $\exists\, \xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta): f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

⑭ Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος C της $f: f(x)=\ln x$ είναι // προς την ευθεία AB, όπου $A(1,0)$, $B(e,1)$.

(15) Να βρεθούν τα όρια:

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2}$. 2) $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\varepsilon\varphi x}$. 3) $\lim_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right]$

(16) Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η $f: f(x)=\frac{1}{4}x^4-\alpha x^3+2x^2+5$ να είναι κυρτή $\forall x\in\mathbb{R}$. (Δηλαδή να στρέφει τα κοίλα άνω...).

(17) Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

1) $f(x)=x^3-3x+2$. 2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. 3) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$.

4) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$. 5) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. 6) $f(x)=\eta\mu^2 x$.

(18) Ομοια, η συνάρτηση $f: f(x)=x^x$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ).

(19) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η $f: f(x)=1+(x+2)^{4/5}$ στο $[-3,-1]$. Ποιό είναι το πεδίο τιμών της; (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ).

(20) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\alpha\ln x-\beta x^2-x-2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ορισμένη στο $(0,+\infty)$. Να προσδιοριστούν οι α,β ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0=1$ και η εφαπτομένη του διαγράμματος C της f στο σημείο $x_1=2$ να είναι παράλληλη με την ευθεία (ε): $y=-21x+1$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ).

(21) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $f: f(x)=x^2+\alpha\ln x-\beta x$ να έχει ακρότατα στα σημεία 1 και 2. Δείξτε ακόμη ότι το 2 είναι θέση τοπικού ελάχιστου και το 1 τοπικού μέγιστου. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ).

(22) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Δείξτε ότι:

1) Η f έχει ολικό μέγιστο. 2) $e^{\pi}>\pi^{e}$. (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ).

(23) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $f: f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-6x+1$ να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x=1$, $x=-2$. Να μελετηθεί η μονοτονία της f (αφού αντικατασταθούν τα α,β με τις τιμές τους). (ΘΕΜΑ '80).

(24) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=x^2(x-3)+4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Εστω x_1,x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 είναι το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Δείξτε ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, $(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά. (ΘΕΜΑ '85).

(25) Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=(\alpha-\frac{2}{3})x^3-(\alpha+\frac{1}{2})x^2-10x+7$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0=\frac{3}{2}$. Στη συνέχεια να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της f. (ΘΕΜΑ '86)

(26) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=x^4-14x^2+24x$. Εστω C η γραφική της παράσταση. Δείξτε ότι υπάρχουν τρία σημεία $A,B,\Gamma\in C$, τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα A,B,Γ να είναι // προς τον άξονα $x'x$. Δείξτε ακόμη ότι το βαρύκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$. (ΘΕΜΑ '87).

(27) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x<0\\ x^3+\alpha x+\beta, & x\geq 0\end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ.

$\int e^{x^2}dx = ;$

ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Το ζητούμενο είναι η τιμή ενός μεγέθους (έργο, εμβαδόν, ...).
Ξεκινάμε με μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Για τη λύση του προβλήματος (κατά Riemann):

● Θεωρούμε τη διαίρεση του $[\alpha,\beta]$ σε ν ίσα διαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa=1,2,\dots,\nu$, δηλαδή: $[\alpha=x_0, x_1]$, $[x_1,x_2]$, ..., $[x_{\nu-1}, x_\nu=\beta]$.

● Αν μ_κ και M_κ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, σχηματίζουμε τα αθροίσματα:

$$\underline{S_\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \mu_\kappa (x_\kappa - x_{\kappa-1}) \quad \text{και} \quad \overline{S_\nu} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} M_\kappa (x_\kappa - x_{\kappa-1}). \qquad (1)$$

● Διαπιστώνουμε ότι τα αθροίσματα αυτά αποτελούν προσεγγίσεις με έλλειψη και υπεροχή του ζητούμενου και ορίζονται $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

● Θεωρούμε τις ακολουθίες $\underline{S_1}, \underline{S_2}, \dots, \underline{S_\nu}, \dots$ και $\overline{S_1}, \overline{S_2}, \dots, \overline{S_\nu}, \dots$ που αντιστοιχούν σε διαιρέσεις με συνεχώς ελαττούμενο πλάτος διαστημάτων.

● Αποδεικνύουμε ότι τα παραπάνω αθροίσματα έχουν κοινό όριο το οποίο είναι και η λύση του προβλήματος.

→ Έστω γενικά μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
Με $\nu-1$ τυχαία σημεία μεταξύ α,β: $\alpha=x_0<x_1<x_2<\dots<x_\kappa<\dots<x_{\nu-1}<x_\nu=\beta$ ορίζουμε μια διαμέριση P_ν του $[\alpha,\beta]$. Τα διαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ δεν έχουν κατ' ανάγκη το ίδιο πλάτος.
Έτσι, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ ορίζονται με τις (1) τα αθροίσματα $\underline{S_\nu}$ και $\overline{S_\nu}$.
Έστω d_ν το μεγαλύτερο από τα πλάτη των διαστημάτων της P_ν.
Οι ακολουθίες $(\underline{S_\nu})$ και $(\overline{S_\nu})$ όταν $\lim d_\nu = 0$ έχουν κοινό όριο και μάλιστα ανεξάρτητο από την επιλογή των διαμερίσεων P_ν.
Έστω γενικά ξ_κ ένα οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$.
Θέτουμε $\delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}$ και $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\delta x_\kappa$.
Τότε, επειδή $\mu_\kappa \le f(\xi_\kappa) \le M_\kappa$ θα είναι $\underline{S_\nu} \le S_\nu \le \overline{S_\nu}$ και επομένως η (S_ν) συγκλίνει προς το κοινό όριο των $(\underline{S_\nu})$ και $(\overline{S_\nu})$.

ΑΡΑ: Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η ακολουθία (S_ν) των αθροισμάτων $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\delta x_\kappa$, όταν $\lim d_\nu = 0$, είναι συγκλίνουσα και το όριό της είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των διαμερίσεων P_ν και των σημείων ξ_κ. Το κοινό όριο όλων των ακολουθιών (S_ν) ονομάζεται <u>ολοκλήρωμα ή άθροισμα από α ως β της f</u> και συμβολίζεται: $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

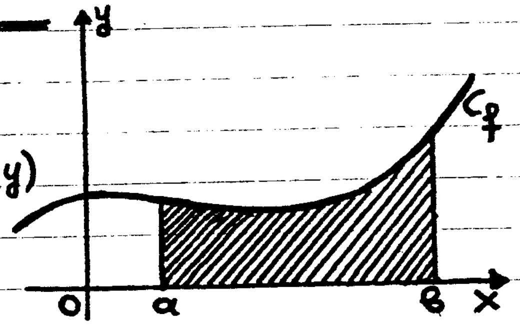
Γενικεύοντας ορίζουμε:

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0 \qquad \int_\beta^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

- Έστω μ και Μ η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α,β], τότε: $\mu\cdot(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M\cdot(\beta-\alpha)$.

- Έστω C_f το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης f με θετικές τιμές στο [α,β]. Το εμβαδόν Ε του χωρίου των σημείων M(x,y) με $\alpha\le x\le\beta$ και $0\le y\le f(x)$ είναι:

$$E=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$



▼ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ.

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β]. Θεωρούμε μια διαμέριση του [α,β] που ορίζει ν ίσα διαστήματα $[\alpha,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{\kappa-1},x_\kappa],\dots,[x_{\nu-1},x_\nu=\beta]$ κοινού πλάτους $\frac{\beta-\alpha}{\nu}$. Τότε το δεξιό άκρο κάθε διαστήματος είναι το $x_\kappa=\alpha+\kappa\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}$ $(\kappa=1,2,\dots,\nu)$ και άρα:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\left[\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}f\left(\alpha+\kappa\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\right].$$

Εφαρμογή-Θεωρία:
Για τη σταθερή συνάρτηση u με $u(x)=c$ είναι: $\int_\alpha^\beta u(x)dx=c(\beta-\alpha)$.

▼ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ.▼

1) $\int_\alpha^\beta[f(x)+g(x)]dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$ (Απόδειξη...)
(,,)

2) $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=\lambda\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx$

3) Αν $\gamma\in[\alpha,\beta]\Longrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$. (σχέση Chasles)

- $\int_\alpha^\beta[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\dots+\lambda_\kappa f_\kappa(x)]dx=\lambda_1\int_\alpha^\beta f_1(x)dx+\lambda_2\int_\alpha^\beta f_2(x)dx+\dots+\lambda_\kappa\int_\alpha^\beta f_\kappa(x)dx$

- Αν $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_\kappa\in[\alpha,\beta]\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^{\gamma_1}f(x)dx+\int_{\gamma_1}^{\gamma_2}f(x)dx+\dots+\int_{\gamma_\kappa}^\beta f(x)dx$.

4) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο [α,β].
Αν $\forall x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)\ge 0$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge 0$. (Απόδειξη...)

5) Έστω f,g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο [α,β].
Αν $\forall x\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(x)\le g(x)$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$. (Απόδειξη...)

6) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β], τότε:

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le\int_\alpha^\beta|f(x)|dx.$$ (Απόδειξη...)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ με το τύπο:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim\left[\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu} f\left(\alpha+\kappa\cdot\frac{\beta-\alpha}{\nu}\right)\right]$$

παράδειγμα: Δείξτε ότι: $\int_0^\beta x^2dx = \frac{\beta^3}{3}$.

Είναι $f(x)=x^2$ και $\alpha=0$,

οπότε: $\int_0^\beta x^2dx = \lim\left[\frac{\beta}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} f\left(\kappa\cdot\frac{\beta}{\nu}\right)\right] = \lim\left[\frac{\beta}{\nu}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\kappa^2\cdot\frac{\beta^2}{\nu^2}\right)\right] =$

$= \lim\left[\frac{\beta^3}{\nu^3}\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2\right] = \lim\left[\frac{\beta^3}{\nu^3}\cdot(1^2+2^2+\dots+\nu^2)\right] =$

$= \lim\left[\frac{\beta^3}{\nu^3}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}\right] = \frac{\beta^3}{6}\cdot\lim\frac{2\nu^2+3\nu+1}{\nu^2} = \frac{\beta^3}{3}$.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

- $1+2+3+\dots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.
- $1^2+2^2+3^2+\dots+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$.
- $1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3 = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$.

ΑΣΚΗΣΗ 1 Δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta x dx = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$. (Γενικά: $\int_\alpha^\beta \kappa x dx = \frac{\kappa}{2}(\beta^2-\alpha^2)$.) $\to$ 3.8.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ: $\mu(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M(\beta-\alpha)$, όπου

$\mu = \min$ της f στο $[\alpha,\beta]$ και $M=\max$ της f στο $[\alpha,\beta]$.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι: $10 \le \int_0^{10}(x^3+1)dx \le 10010$.

Η $f: f(x)=x^3+1$ έχει $f'(x)=3x^2 \ge 0 \Rightarrow f \uparrow$ στο $[0,10]$

f συνεχής ως πολυωνυμική $\Big\} \Rightarrow$

$\forall x\in[0,10]$ είναι $\begin{cases} \mu=\min f(x)=f(0)=1. \\ M=\max f(x)=f(10)=1001. \end{cases}$

Άρα: $1\cdot(10-0) \le \int_0^{10}(x^3+1)dx \le 1001\cdot(10-0) \Leftrightarrow 10 \le \int_0^{10}(x^3+1)dx \le 10010$.

ΑΣΚΗΣΗ 2 Δείξτε ότι: $4 \le \int_3^5 \sqrt{x^2-5}\,dx \le 4\sqrt{5}$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^2(5x^2-2x+3)dx$.

$\int_0^2(5x^2-2x+3)dx = (\text{Ιδιότ. } 1) = \int_0^2 5x^2dx + \int_0^2 -2xdx + \int_0^2 3dx = (\text{Ιδιότ. } 2) =$

$5\int_0^2 x^2dx - 2\cdot\int_0^2 xdx + \int_0^2 3dx = $ (παράδ. – Ασκ.1 – Εφαρμ.) $=$

$5\cdot\frac{2^3}{3} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 = \frac{40}{3}+2 = \frac{46}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1) $\int_0^2(4x^2+x+1)dx$. 2) $\int_0^4(3x-5)dx$. 3) $\int_0^4(4x^2+5)dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 4 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x^3+1} + \int_\alpha^\beta \frac{x^3}{x^3+1}dx$. 2) $\int_1^2 \frac{x^2+3}{x}dx + \int_2^3 \frac{x^2+3}{x}dx + \int_3^1 \frac{x^2+3}{x}dx$

3) $\int_\alpha^\beta \frac{x^2+1}{e^x}dx + \int_\beta^\gamma \frac{x^2+1}{e^x}dx + \int_\gamma^\alpha \frac{2e^x+x^2+1}{e^x}dx + \int_\alpha^\gamma dx$.

▼ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ.

Θ. μέσης τιμής. (του ολοκληρωτικού λογισμού).

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε $\exists \xi \in [\alpha,\beta]$: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$ (Απόδειξη...)

- Το ξ δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό.
- Το Θ. ισχύει και όταν $\alpha > \beta$. (διότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx = -f(\xi)(\alpha-\beta) = f(\xi)(\beta-\alpha)$).

Παράδειγμα: Δείξτε ότι: $5 \leq \int_0^1 (x^3+5)e^x dx \leq 6e$.

Η $f: f(x) = (x^3+5)\cdot e^x$ είναι συνεχής (γινόμενο συνεχών) στο $[0,1]$ $\xRightarrow{\text{Θ.Μ.Τ.}}$

$\exists \xi \in [0,1]$: $\int_0^1 (x^3+5)e^x dx = f(\xi)\cdot(1-0) = f(\xi)$. (1)

Αλλά $0 \leq \xi \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \xi^3 \leq 1 \\ e^0 \leq e^\xi \leq e^1 \text{ (διότι η } e^x \text{ είναι } \uparrow) \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5 \leq \xi^3+5 \leq 6 \\ 1 \leq e^\xi \leq e \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5 \leq (\xi^3+5)\cdot e^\xi \leq 6e \Rightarrow$

$5 \leq f(\xi) \leq 6e \xRightarrow{(1)} 5 \leq \int_0^1 (x^3+5)e^x dx \leq 6e$.

ΑΣΚΗΣΗ 5 Δείξτε ότι: $\frac{2}{e} \leq \int_{-1}^1 (x^2+e^x)dx \leq 2(e+1)$

ΑΣΚΗΣΗ 6 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 x^2 dx$ και στη συνέχεια να βρεθεί $\xi \in [-1,1]$ που να επαληθεύει το Θ.Μ.Τ. Πόσες τιμές παίρνει ο ξ;

▼ συνάρτηση οριζόμενη απο ολοκλήρωμα

Θ. Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε η συνάρτηση F με $F(x) = \int_\gamma^x f(t)dt$, $(\gamma \in [\alpha,\beta])$, είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $F'(x) = f(x)$. * (Απόδειξη...)

- Αν πάρουμε άλλο σημείο $\gamma \in [\alpha,\beta]$, ορίζουμε μια άλλη παράγουσα της f.

* Δηλαδή: $\left(\int_\gamma^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

▼ ΣΧΕΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

Θ. Εστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha,\beta \in \Delta$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$ (Απόδειξη...)

- Η διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ είναι ανεξάρτητη απο την εκλογή της παράγουσας F.

Το Θ. αυτό και ο πίνακας παραγουσών (Βλέπε Φυλ.13 - Παράγωγος) χρησιμοποιείται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

▼ ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ. ▼

1) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

•₁ $\int dx = x + c$. •₂ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$.

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3) $\int \eta\mu x\,dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Οι τύποι αυτοί προκύπτουν από το Θ_3 (φυλ.4)
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$.

4) $\int \sigma\upsilon\nu x\,dx = \eta\mu x + c$, ».

5) $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c$, ». $\left(\bullet \int (1+\varepsilon\varphi^2 x)dx = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \varepsilon\varphi x + c\right)$

6) $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c$, ». $\left(\bullet \int (1+\sigma\varphi^2 x)dx = \int \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx = -\sigma\varphi x + c\right)$

7) $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$, ». ⟷ $\int e^x dx = e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ο αριθμός $c \in \mathbb{R}$ βρίσκεται στους παραπάνω τύπους διότι οι τύποι αναφέρονται σε <u>αόριστα ολοκληρώματα</u>.
Έτσι, σε <u>ορισμένο ολοκλήρωμα</u> δεν υπάρχει το c και ο υπολογισμός γίνεται σύμφωνα με το τελευταίο Θ. (φυλ.4) → π.χ. $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x\,dx = [\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta} = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$

<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx$.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x\,dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu x\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\eta\mu x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} =$$
$$= -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu\frac{\pi}{3} - \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> 7 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1) $\int_{-1}^{1} x^3 dx$. 2) $\int_{-2}^{0} (x+e^x)dx$. 3) $\int_{1}^{4} (4x^5 + 2x^4 + 1)dx$.

4) $\int_{2}^{1} \sqrt{x}\,dx$. 5) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 6) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1}{\eta\mu^2 x}dx$ 7) $\int_{1/2}^{0} (e^x + xe^x)dx$

8) $\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x}dx$. 9) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1+\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$. 10) $\int_{1}^{2} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3}{x}dx$.

Οι κλασματικές με παρονομαστή μονώνυμο και αριθμητή πολυώνυμο υπολογίζονται με <u>διάσπαση</u>. (όπως οι: 8-9-10)

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ.

1) ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΤΥΠΟΣ → $\int_\alpha^\beta f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(y)dy$, όπου $y=g(x) \Rightarrow dy=g'(x)dx$

↳ Με το τύπο αυτό ανάγουμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος από α ως β μιας συνάρτησης της μορφής $(f\circ g)\cdot g'$ στον υπολογισμό ολοκληρώματος της f από $g(\alpha)$ ως $g(\beta)$.

• Ειδική περίπτωση: $\int_\alpha^\beta f(\lambda x+\mu)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\alpha+\mu}^{\lambda\beta+\mu} f(y)dy$, όπου $y=\lambda x+\mu \Rightarrow dy=\lambda dx$

Παραδείγματα:

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1(4x+2)^3dx$.

→ Θέτω $y=g(x)=4x+2 \Rightarrow dy=g'(x)dx=4dx \Rightarrow dx=\frac{1}{4}dy$.

Είναι: $g(0)=2$, $g(1)=6$, τα νέα όρια ολοκλήρωσης. (β' τρόπος: Υψώνω και μετά 1η Μορφή)

Άρα: $I=\frac{1}{4}\int_2^6 y^3dy=\frac{1}{4}\left[\frac{y^4}{4}\right]_2^6=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{6^4}{4}-\frac{2^4}{4}\right]=80$.

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{1/2}(2x-1)\cdot e^{x^2-x}dx$.

→ Θέτω $y=g(x)=x^2-x \Rightarrow \begin{cases} dy=(2x-1)dx \\ g(0)=0 \\ g(1/2)=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow I=\int_0^{-1/4}e^y dy=\left[e^y\right]_0^{-1/4}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}-1$.

3) Όμοια, το $I=\int_0^{\pi/2}(\eta\mu 3x)\cdot 2^{\sigma\upsilon\nu 3x}dx$.

→ Θέτω $y=g(x)=\sigma\upsilon\nu 3x \Rightarrow \begin{cases} dy=-3\eta\mu 3x\,dx \\ g(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1 \\ g(\pi/2)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}2^{\sigma\upsilon\nu 3x}\cdot(-3\eta\mu 3x)dx=-\frac{1}{3}\int_1^0 2^y dy=-\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2^y}{\ln 2}\right]_1^0=\frac{1}{3\ln 2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1) $\int_0^{-10}e^{x+5}dx$. 2) $\int_0^1\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$. 3) $\int_{-1}^0(2x+3)e^{x^2+3x+2}dx$.

4) $\int_0^1(5x-3)^5dx$. 5) $\int_1^2\sqrt[3]{x+1}\,dx$. 6) $\int_0^1\frac{dx}{3x+1}$. 7) $\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu(3x-\frac{\pi}{2})dx$.

8) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2(-4x)}$. 9) $\int_0^{e-1}\eta\mu(x+1)dx$. 10) $\int_0^{\sqrt[3]{2}}x^2\cdot e^{x^3}dx$. 11) $\int_0^{\sqrt{\pi}/2}x\cdot\eta\mu 4x^2dx$.

12) $\int_{-1}^1\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}$. 13) $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x\cdot 2^{\sigma\upsilon\nu^3x}dx$. 14) $\int_1^e\frac{e^{\ln x}}{x}dx$. 15) $\int_0^{\pi/4}\frac{e^{\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx$.

2) ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ.

ΤΥΠΟΣ ⟶ $\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)g(x)dx = \left[F(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F(x)g'(x)dx$

ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ: •₁ Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. (όπου $f: f(x)=F'(x)$)
•₂ Η F είναι μια παράγουσα της f.
•₃ Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο συνεχή στο $[\alpha,\beta]$.

Με το τύπο αυτό μπορούμε να ανάγουμε τον υπολογισμό του $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} F'(x)g(x)dx$ στον υπολογισμό του $\int_{\alpha}^{\beta} F(x)g'(x)dx$

που πιθανόν να είναι απλούστερος.

Παραδείγματα:

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_1^2 \ln x\,dx$.

$I=\int_1^2 1\cdot\ln x\,dx=\int_1^2 x'\ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^2-\int_1^2 x\cdot(\ln x)'dx=\left[x\cdot\ln x\right]_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=$

$=\left[x\ln x\right]_1^2-\left[x\right]_1^2=2\ln 2-1.$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^1 x\cdot 2^x dx$.

Επειδή $(2^x)'=2^x\ln 2 \Leftrightarrow 2^x=\frac{(2^x)'}{\ln 2}$ έχω: $I=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 x\cdot(2^x)'dx=$

$=\frac{1}{\ln 2}\cdot\left[\left[x\cdot 2^x\right]_0^1-\int_0^1 x'\cdot 2^x\cdot dx\right]=\frac{1}{\ln 2}\cdot\left[\left[x\cdot 2^x\right]_0^1-\int_0^1 2^x dx\right]=$

$=\frac{1}{\ln 2}\cdot\left[\left[x\cdot 2^x\right]_0^1-\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1\right]=\frac{1}{\ln 2}\cdot\left(2-\frac{1}{\ln 2}\right).$

Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\left[xf(x)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$ (Να δειχτεί).

ΑΣΚΗΣΗ 9 $_{\Pi}$ Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: 5η Μορφή

1) $I=\int_0^{\pi} e^x\text{συν}x\,dx$ ⟷ Εφαρμόστε διπλή παραγοντική ολοκλήρωση (Φνλ.10)

2) $\int_0^{\pi} x\cdot\eta\mu x\,dx$ 3) $\int_0^{\pi} x\cdot\text{συν}x\,dx$ 4) $\int_{-1}^{1} xe^x dx$.

5) $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx$ 6) $\int_0^{\pi} 3^x\cdot\text{συν}x\,dx$ 7) $\int_0^{t}(3x+2)e^x dx$

8) $\int_0^{\pi}\eta\mu^2 x\,dx$ 9) $\int_{\pi}^{2\pi}\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x\,dx$.

Βλέπε Φνλ 12 - Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα.

ΑΣΚΗΣΗ 10 Αν $I_\nu=\int_0^{t} x^\nu\text{συν}x\,dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, δείξτε ότι:

$(\nu+1)(\nu+2)\cdot I_\nu+I_{\nu+2}=t^{\nu+1}\cdot\left[t\eta\mu t+(\nu+2)\text{συν}t\right]$.

ΜΕΘΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ. (Αορίστων ολοκληρωμάτων).

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ.

1) Αν για τον προσδιορισμό ενός (αορίστου) ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης ακολουθήσουμε διαφορετικές μεθόδους, είναι πιθανόν να προκύψουν διαφορετικές συναρτήσεις (αποτελέσματα).

Τα αποτελέσματα αυτά θα είναι σωστά αν διαφέρουν κατά μια σταθερά.

π.χ.

$$I=\int(x+1)dx=\begin{cases}\int x dx+\int dx=\dfrac{x^2}{2}+x.\\ \text{Θέτω } y=x+1\Rightarrow dy=dx\Rightarrow I=\int y dy=\dfrac{y^2}{2}=\dfrac{(x+1)^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

2) Αν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής $I=\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Θέτω $y=f(x)\Rightarrow dy=f'(x)dx\Rightarrow$

$I=\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+c=\ln|f(x)|+c$. Δηλαδή: ● $\underline{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c}$

π.χ. $\int\frac{4x-3}{2x^2-3x+1}dx=\int\frac{(2x^2-3x+1)'}{2x^2-3x+1}dx=\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+c=\ln|2x^2-3x+1|+c.$

● Ανάλογα με το διάστημα ολοκλήρωσης (στα ορισμένα ολοκληρώματα) διαμορφώνεται και η απόλυτη τιμή του Β΄ μέλους.

3) Ομοια, αποδεικνύεται ότι ● $\underline{\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+c.}$

π.χ. $\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}dx=\int\frac{(x^2+3)'}{\sqrt{x^2+3}}dx=\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=2\sqrt{y}+c=2\sqrt{x^2+3}+c.$

ΜΕΘΟΔΟΙ

1η ΜΟΡΦΗ ●→ $\boxed{I=\int P(x)dx \text{ όπου } P(x) \text{ πολυώνυμο.}}$

Η ολοκλήρωση γίνεται άμεσα με την ιδιότητα 3●,-Φυλ.2 και το τύπο 1-Φυλ.5.

παράδειγμα: $\int(5x^3-2x^2+5)dx=5\int x^3dx-2\int x^2dx+5\int dx=5\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot x+c.$

2η ΜΟΡΦΗ ●→ $\boxed{I=\int(\alpha x+\beta)^\nu dx \text{ όπου } \alpha\in\mathbb{R}^*,\ \nu\in\mathbb{R}-\{1\}.}$

Θέτω $y=\alpha x+\beta\Rightarrow dy=(\alpha x+\beta)'dx\Rightarrow dy=\alpha dx\Rightarrow dx=\frac{1}{\alpha}dy$, οπότε:

$I=\frac{1}{\alpha}\int y^\nu dy=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{y^{\nu+1}}{\nu+1}+c=\frac{(\alpha x+\beta)^{\nu+1}}{\alpha(\nu+1)}+c.$

● Αν ο ν είναι μικρός φυσικός μπορώ να αναπτύξω το διώνυμο και μετά 1η μορφή.

Παράδειγμα: $I=\int\sqrt{2x-1}\,dx=\int(2x-1)^{1/2}dx$. Θέτω $y=2x-1\Rightarrow dy=2dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dy$,

οπότε: $I=\frac{1}{2}\int y^{1/2}dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^{3/2}}{3/2}+c=\frac{y^{3/2}}{3}+c=\frac{\sqrt{y^3}}{3}+c=\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}+c.$

(Σε ορισμένο ολοκλήρωμα θα αλλάξουν και τα όρια ολοκλήρωσης, σύμφωνα με το τύπο Φυλ.6.)

3η ΜΟΡΦΗ → $\boxed{I=\int \frac{\alpha}{(x-\rho)^{\nu}}dx \text{ , όπου } \alpha\in\mathbb{R}^*,\ \rho\in\mathbb{R}.}$

Θέτω $y=x-\rho \Rightarrow dy=dx$, οπότε:

i) Αν $\nu=1$ τότε: $I=\alpha\int\frac{dy}{y}=\alpha\ln|y|+c=\alpha\ln|x-\rho|+c$.

παράδειγμα: $\int\frac{5dx}{x-2}=5\int\frac{dy}{y}=5\ln|y|+c=5\ln|x-2|+c$

ii) Αν $\nu\neq1$ τότε: $I=\alpha\int(x-\rho)^{-\nu}dx=\alpha\int y^{-\nu}dy=\alpha\cdot\frac{y^{-\nu+1}}{-\nu+1}+c=\frac{\alpha(x-\rho)^{-\nu+1}}{1-\nu}+c$.

Παράδειγμα: $I=\int\frac{-2dx}{8x^3-12x^2+6x-1}=\int\frac{-2dx}{(2x-1)^3}=-2\int\frac{dx}{(2x-1)^3}=\left(\begin{array}{l}\text{Θέτω } y=2x-1\Rightarrow dy=2dx\\ \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dy\end{array}\right)$

$$=-2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^3}=-\int y^{-3}dy=-\frac{y^{-2}}{-2}+c=\frac{1}{2y^2}+c=\frac{1}{2(2x-1)^2}+c.$$

4η ΜΟΡΦΗ $\boxed{I=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx \text{ , όπου } \frac{P}{Q} \text{ ανάγωγο κλάσμα και το } Q \text{ έχει ρίζες} \in\mathbb{R}}$

Διακρίνονται σε δύο περιπτώσεις:

1) Οι ρίζες του Q είναι απλές
2) ,, ,, ,, ,, ,, πολλαπλές.

→ ΑΝΑΛΥΩ το κλάσμα σε ΑΘΡΟΙΣΜΑ απλών κλασμάτων, όπως στα παραδείγματα ανάλυσης ▼

1) $\frac{x}{x^2-7x+10}=\frac{x}{(x-5)(x-2)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}$. Στη συνέχεια μετά την απαλοιφή των παρονομαστών, βρίσκω τα Α,Β,Γ,Δ,... με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών

2) $\frac{1}{x^3(x+1)}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{\Gamma}{x}+\frac{\Delta}{x+1}$

→ Αν ο βαθμός του Αριθμητή P(x) είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του Παρονομαστή Q(x), τότε:
κάνω πρώτα τη διαίρεση $P(x):Q(x)$ οπότε το κλάσμα $\frac{P}{Q}$ γράφεται $\frac{P}{Q}=\pi+\frac{\upsilon}{Q}$ (π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο)
και συνεχίζω όπως στη μέθοδο με το κλάσμα $\frac{\upsilon}{Q}$.

παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I=\int\frac{dx}{x^2-9}$

Είναι: $\frac{\overset{1}{1}}{x^2-9}=\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{\overset{x+3}{A}}{x-3}+\frac{\overset{x-3}{B}}{x+3}\Leftrightarrow 1=A(x+3)+B(x-3)\Leftrightarrow$

$1=(A+B)x+3(A-B),\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-3,3\}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\3(A-B)=1\end{cases}\Leftrightarrow\dots\ \begin{array}{l}A=1/6\\B=-1/6\end{array}$

Άρα: $I=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+3}=(\text{Μορφή } 3i)=\frac{1}{6}\ln|x-3|-\frac{1}{6}\ln|x-3|+c=$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 11 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα (Αόριστα).

1) $\int \frac{dx}{x^2-1}$ 2) $\int \frac{dx}{4-x^2}$ 3) $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$ 4) $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$

5) $\int \frac{x^2}{x^2-4x+3}dx$ 6) $\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$ 7) $\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$ 8) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^2}$ 9) $\int \frac{x^3dx}{x^2-7x+10}$

5η ΜΟΡΦΗ → $\boxed{I=\int e^{\alpha x+\beta}\cdot \eta\mu(\kappa x+\lambda)dx \text{ ή } I=\int e^{\alpha x+\beta}\cdot \sigma\upsilon\nu(\kappa x+\lambda)dx}$

Εφαρμόζω διπλή παραγοντική ολοκλήρωση, βρίσκοντας μια παράγουσα του εκθετικού ή του τριγωνομετρικού παράγοντα.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I=\int e^{3x}\cdot\eta\mu 2x\,dx$. Είναι: $\eta\mu 2x = -\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 2x)'$.

Άρα: $I = -\frac{1}{2}\int e^{3x}(\sigma\upsilon\nu 2x)'dx = -\frac{1}{2}\left[e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x - \int (e^{3x})'\sigma\upsilon\nu 2x\,dx\right] =$

$= -\frac{1}{2}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\,dx =$ (Είναι: $\sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{2}(\eta\mu 2x)'$)

$= -\frac{1}{2}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{3}{4}\int e^{3x}(\eta\mu 2x)'dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{3}{4}\left[e^{3x}\eta\mu 2x - \int (e^{3x})'\eta\mu 2x\,dx\right] =$

$= -\frac{1}{2}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\eta\mu 2x - \frac{9}{4}\underbrace{\int e^{3x}\cdot\eta\mu 2x\,dx}_{I} \Leftrightarrow$

$I + \frac{9}{4}I = -\frac{1}{2}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\eta\mu 2x + c \Leftrightarrow \frac{13}{4}I = -\frac{1}{2}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\eta\mu 2x \Leftrightarrow$

$I = -\frac{2}{13}e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\eta\mu 2x + c$

6η Μορφή → $\boxed{I=\int P(x)\cdot e^{\alpha x+\beta}dx, \text{ όπου } P(x) \text{ πολυώνυμο}}$

Εφαρμόζω παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκοντας μια παράγουσα του $e^{\alpha x+\beta}$. • Είναι: $e^{\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x+\beta})'$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I=\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$. Είναι: $e^{-x} = -(e^{-x})'$.

Άρα: $I = -\int (x^2-2x+5)(e^{-x})'dx = -\left[(x^2-2x+5)e^{-x} - \int (x^2-2x+5)'\cdot e^{-x}dx\right] =$

$-(x^2-2x+5)e^{-x} + \int (2x-2)e^{-x}dx = -(x^2-2x+5)e^{-x} - \int (2x-2)\cdot(e^{-x})'dx =$

$-(x^2-2x+5)e^{-x} - \left[(2x-2)e^{-x} - \int (2x-2)'\cdot e^{-x}dx\right] =$

$-(x^2-2x+5)e^{-x} - (2x-2)e^{x} + 2\int e^{-x}dx =$ (Θέτω $-x=y \Rightarrow dy=-dx \Rightarrow dx=-dy$ $\Rightarrow \int e^{-x}dx = -\int e^{y}dy = -e^{y} = -e^{-x}+c$)

$-(x^2-2x+5)e^{-x} - (2x-2)e^{-x} - 2e^{-x} + c =$

$-e^{-x}(x^2-2x+5+2x-2+2) + c =$

$= -e^{-x}(x^2+5) + c.$

$7^{\text{η}}$ ΜΟΡΦΗ $\rightarrow$ $\boxed{I=\int P(x)\cdot \eta\mu(\alpha x+\beta)\,dx \;\text{ ή }\; I=\int P(x)\cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\,dx,\ \text{όπου } P(x) \text{ πολυώνυμο}}$

Εφαρμόζω παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκοντας μια παράγουσα του $\eta\mu(\alpha x+\beta)$ ή του $\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)$, αντίστοιχα.

• Είναι: $\eta\mu(\alpha x+\beta)=-\frac{1}{\alpha}\left[\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\right]'$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)=\frac{1}{\alpha}\left[\eta\mu(\alpha x+\beta)\right]'$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I=\int (x^3+1)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$.

$$I=\int(x^3+1)\cdot(\eta\mu x)'dx=\left[(x^3+1)\eta\mu x-\int(x^3+1)'\cdot\eta\mu x\,dx\right]=$$

$$(x^3+1)\eta\mu x-\int 3x^2\eta\mu x\,dx=(x^3+1)\eta\mu x+\int 3x^2(\sigma\upsilon\nu x)'dx=$$

$$(x^3+1)\eta\mu x+\left[3x^2\sigma\upsilon\nu x-\int(3x^2)'\sigma\upsilon\nu x\,dx\right]=$$

$$\cancel{(x^3+1)\eta\mu x+3x^2\sigma\upsilon\nu x-\int 6x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=}$$

$$(x^3+1)\eta\mu x+3x^2\sigma\upsilon\nu x-\int 6x(\eta\mu x)'dx=$$

$$(x^3+1)\eta\mu x+3x^2\sigma\upsilon\nu x-\left[6x\cdot\eta\mu x-\int(6x)'\eta\mu x\,dx\right]=$$

$$(x^3+1)\eta\mu x+3x^2\sigma\upsilon\nu x-6x\eta\mu x+6\int\eta\mu x\,dx=$$

$$(x^3+1)\eta\mu x+3x^2\sigma\upsilon\nu x-6x\eta\mu x-6\sigma\upsilon\nu x+c=$$

$$(x^3-6x+1)\eta\mu x+(3x^2-6)\sigma\upsilon\nu x+c.$$

$8^{\text{η}}$ ΜΟΡΦΗ. $\rightarrow$ $\boxed{I=\int P(x)\cdot\ln(f(x))\,dx,\ \text{όπου } P(x) \text{ πολυώνυμο}}$

Εφαρμόζω παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκοντας μια παράγουσα του $P(x)$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I=\int(3x-4)\cdot\ln x\,dx$.

Είναι: $3x-4=\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)'$.

Άρα: $I=\int\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)'\cdot\ln x\,dx=$

$$\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\cdot(\ln x)'dx=$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\ln x-\int\left(\frac{3}{2}x-4\right)dx=$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\ln x-\left[\frac{3}{2}\int x\,dx-4\int dx\right]=$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\ln x-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+4x+c=$$

$$\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\ln x-\frac{3}{4}x^2+4x+c.$$

9η ΜΟΡΦΗ → ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) $I=\int \eta\mu\alpha x\cdot \eta\mu\beta x\,dx$ ή $\int \sigma\upsilon\nu\alpha x\cdot\sigma\upsilon\nu\beta x\,dx$ ή $\int \eta\mu\alpha x\cdot\sigma\upsilon\nu\beta x\,dx$

Η ολοκλήρωση γίνεται άμεσα, αφού μετατρέψουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I=\int_0^{\pi}\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x\,dx$.

Είναι: $\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x=\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(2x-3x)-\sigma\upsilon\nu(2x+3x)\right]=\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 5x)$.

Άρα: $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu x\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu 5x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu 5x\cdot(5x)'dx=$

$$\frac{1}{2}\left[\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{10}\left[\eta\mu 5x\right]_0^{\pi}=\dots=0.$$

2) $I=\int \eta\mu^{\kappa}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}x\,dx$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}^*$.

i) Αν $\kappa=2\rho+1$ τότε: $I=\int \eta\mu^{2\rho+1}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}x\,dx=\int(\eta\mu^2x)^{\rho}\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}x\cdot\eta\mu x\,dx=$

$$=\int(1-\sigma\upsilon\nu^2x)^{\rho}\cdot\sigma\upsilon\nu^{\lambda}x\cdot\eta\mu x\,dx \quad \left(\text{Θέτω } y=\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow dy=-\eta\mu x\,dx\right)$$

$$=-\int(1-y^2)^{\rho}\cdot y^{\lambda}\,dy\dots \text{ κ.τ.λ.}$$

• Αν $\lambda=2\rho+1$ δουλεύω ανάλογα και θέτω $y=\eta\mu x$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I=\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^3x\,dx$

Είναι: $\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^3x=\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x\cdot\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu^2x\cdot(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\,\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu^2x\,\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^4x\,\eta\mu x$

Άρα: $I=\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^2x\,\eta\mu x\,dx-\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^4x\,\eta\mu x\,dx=$ (Θέτω $y=\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow dy=-\eta\mu x\,dx$)

$$=-\int_1^{-1}y^2dy+\int_1^{-1}y^4dy=-\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^{-1}+\left[\frac{y^5}{5}\right]_1^{-1}=\dots=\frac{4}{15}.$$

ii) Αν κ,λ άρτιοι τότε: $I=\int\eta\mu^{2\rho}x\cdot\sigma\upsilon\nu^{2\nu}x\,dx=\int(\eta\mu^2x)^{\rho}\cdot(\sigma\upsilon\nu^2x)^{\nu}dx=$

$$=\int\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^{\rho}\cdot\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^{\nu}dx=\dots \text{ κ.τ.λ.}$$

3) $I=\int\sqrt{1\pm\sigma\upsilon\nu\alpha x}\,dx$

Χρησιμοποιώ τους τύπους: $1+\sigma\upsilon\nu\alpha x=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha x}{2}$, $1-\sigma\upsilon\nu\alpha x=2\eta\mu^2\frac{\alpha x}{2}$.

οπότε η ολοκλήρωση απλοποιείται.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\,dx$.

$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2\eta\mu^2\frac{x}{2}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2}\cdot\left|\eta\mu\frac{x}{2}\right|dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2}\cdot\eta\mu\frac{x}{2}\,dx$ (διότι $x\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow\frac{x}{2}\in[0,\frac{\pi}{4}]\Rightarrow\eta\mu\frac{x}{2}>0$)

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\eta\mu\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'dx=2\sqrt{2}\left[-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2}=2\sqrt{2}-2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 12 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

1) $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi x\,dx$. 2) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sigma\varphi x\,dx$ → Βάλτε $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

3) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^3 x\,dx$. 4) $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x\,dx$. 5) $\int_0^{\pi} \eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$.

6) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}\,dx$. 7) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu^7 x\,dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 13 1) Δείξτε ότι: $\int \varepsilon\varphi x\,dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$.

2) Χρησιμοποιώντας την 1) δείξτε ότι: $\int_0^{\pi/4} \varepsilon\varphi^3 x\,dx = \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10η ΜΟΡΦΗ $\boxed{I = \int \sqrt{\lambda^2 - x^2}\,dx \text{, όπου } \lambda \in \mathbb{R}}$

Θέτω $x = g(t) = \lambda\eta\mu t$ με $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, (ή $x = \varphi(t) = \lambda\sigma\upsilon\nu t$ με $t \in [0, \pi]$).
οπότε $dx = \lambda\sigma\upsilon\nu t\,dt$.

Άρα: $I = \int \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2\eta\mu^2 t} \cdot \lambda\sigma\upsilon\nu t\,dt = \int \lambda^2 \cdot \sqrt{1-\eta\mu^2 t} \cdot \sigma\upsilon\nu t\,dt =$

$\lambda^2 \int |\sigma\upsilon\nu t| \cdot \sigma\upsilon\nu t\,dt = \lambda^2 \int \sigma\upsilon\nu^2 t\,dt =$ (διότι $\sigma\upsilon\nu t \geq 0$ στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

$\lambda^2 \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2}\,dt = \lambda^2\left(\frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2t\,dt\right) = \lambda^2 \cdot \left(\frac{1}{2}t + \int \sigma\upsilon\nu y\,dy\right) =$

$\lambda^2 \cdot \frac{1}{2}t + \lambda^2 \eta\mu y + c = \lambda^2 \cdot \frac{1}{2}t + \lambda^2 \cdot \eta\mu 2t + c$. (όπου $t = \eta\mu^{-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$).

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Θέτω $x = \eta\mu t$: $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow dx = \sigma\upsilon\nu t\,dt$, και για $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow \eta\mu t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \\ x = 1 \Rightarrow \eta\mu t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

οπότε: $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\eta\mu^2 t} \cdot \sigma\upsilon\nu t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sigma\upsilon\nu t| \cdot \sigma\upsilon\nu t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 t\,dt =$ (διότι $\sigma\upsilon\nu t \geq 0$ στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu 2t\,dt = \frac{1}{2}\left[t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4}\left[\eta\mu 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \dots = \frac{\pi}{2}$.

11η ΜΟΡΦΗ $\boxed{\text{ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ}}$

Κάνω τη συνάρτηση πολλαπλού τύπου και ανάλογα με τα διαστήματα στα οποία γίνεται η ολοκλήρωση, παίρνω και τον αντίστοιχο τύπο.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $I = \int_0^2 (|x-1| + x + 1)\,dx$.

Η $f: f(x) = |x-1| + x + 1 = \begin{cases} 2, & \text{αν } x < 1 \\ 2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και άρα:

$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 2\,dx + \int_1^2 2x\,dx = \left[2x\right]_0^1 + \left[x^2\right]_1^2 = 2 + 3 = 5$.

ΑΣΚΗΣΗ 14 Να υπολογιστεί το $I = \int_{-2}^{2} (|x^2 - 3x + 2| - x^2)\,dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 15 Δείξτε ότι:

1) $\int_0^1 \left(\frac{|x+1|}{x+1} + 2x + 1\right)dx = 3$. 2) $\int_{-1}^{1} (|x| + e^{2x})\,dx = \frac{e^4 + 2e^2 + 1}{2e^2}$.

Η Μεθοδολογία στην ολοκλήρωση (Ορισμένων ολοκληρωμάτων) είναι η ίδια με το αόριστο ολοκλήρωμα (ΦΥΛ. 8 έως 13) προσαρμοσμένη στις ιδιαιτερότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

16 Να υπολογιστούν τα:

1) $\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx \longrightarrow \frac{8}{3}$.

2) $\int_0^{\pi/2}\frac{1-ημx}{x+συνx}dx$.

3) $\int_0^1(2x-3)^5dx$

4) $\int_0^{\pi} ημ(3x+5)dx$

5) $\int_0^1 e^{4x-1}dx$

6) $\int_{-1}^{0}\frac{3dx}{9x^2-6x+1}$

7) $\int_0^1 xe^{-x}dx \longrightarrow \frac{e-2}{e}$.

8) $\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx \longrightarrow 1$.

9) $\int_0^{\pi/2} xσυνx\,dx \longrightarrow \frac{\pi}{2}-1$.

10) $\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx \longrightarrow \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

11) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx \longrightarrow \frac{3}{2}$.

12) $\int_{1/\pi}^{2/\pi}\frac{ημ\frac{1}{x}}{x^2}dx \longrightarrow 1$.

13) $\int_0^{\ln 3} e^{2x}dx \longrightarrow 4$.

14) $\int_2^4\frac{x^3-4x^2+x}{x^2}dx \longrightarrow \ln 2-2$.

15) $\int_0^{\pi/2} ημ^2x\,dx \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

16) $\int_0^{\pi}(συν2x+ημ2x)^2dx$

17) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+εφ^2x}{εφx}dx$

17 Δείξτε ότι:

1) $\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}(e^4-1)$.

2) $\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{x^5+3}}dx=\frac{2}{5}(2-\sqrt{3})$.

3) $\int_0^2 x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{8\sqrt{3}}{5}+\frac{4}{15}$.

4) $\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{1+συν2x}{2}}\,dx=2$.

5) $\int_0^2(3e^{x+1}+|1-x|)dx=3e^3-3e+1$.

6) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$.

7) $\int_0^{\pi/2}\frac{συνx\,dx}{6-5ημx+ημ^2x}=\ln\frac{4}{3}$.

8) $\int_0^{\pi} e^x ημx\,dx=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$.

9) $\int_0^{\pi/2}e^{ημx}\cdot συνx\,dx=e-1$.

10) $\int_1^5 f(x)dx=12$ όπου:

$f(x)=|x-3|+|1-x|$.

11) $\int_0^{\pi/2}x^2συνx\,dx=\frac{\pi^2}{4}-2$.

12) $\int_0^{\pi/2}ημ^3x\cdot συν^2x\,dx=$;

13) $\int_0^{2\pi}(2+συνx)dx=4\pi$.

18 Δείξτε ότι: α) Η f με $f(x)=\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.
β) Για $κ \geq 1$ είναι: $\sqrt{κ} \leq \int_κ^{κ+1}\sqrt{x}\,dx$ και $\int_{κ-1}^{κ}\sqrt{x}\,dx \leq \sqrt{κ}$ (ΘΕΜΑ '89 $Δ_δ$).

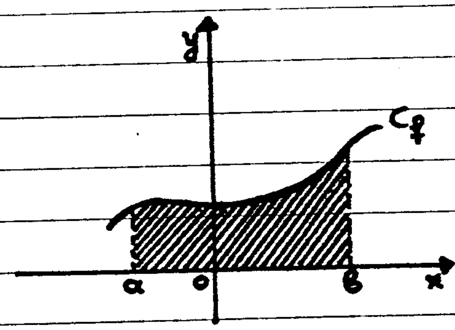
▼ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ.

● ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ

μεικτόγραμμων χωρίων σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

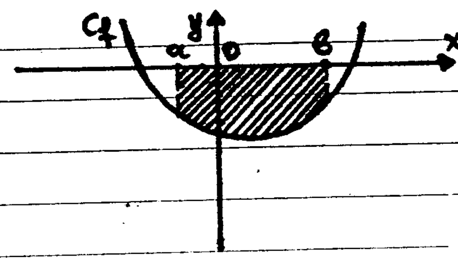
(I) Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται:

- από τη γραφική παράσταση C_f μιας συνεχούς στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτησης f,
- από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και
- από τον άξονα $x'x$.



i) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
$f(x)\geq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ (όπου $\alpha<\beta$)

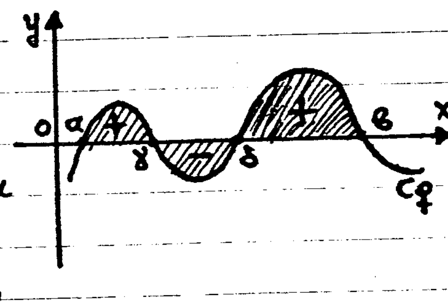
τότε: $$E=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$



ii) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
$f(x)\leq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ (όπου $\alpha<\beta$)

τότε: $$E=\int_\alpha^\beta(-f(x))\,dx=-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Γενικά: $$\boxed{E=\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx}$$



iii) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ αλλά δεν διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ τότε χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε υποδιαστήματα στα οποία η f έχει σταθερό πρόσημο.
Έτσι: στο διπλανό σχήμα είναι
$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx=\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx-\int_\gamma^\delta f(x)\,dx+\int_\delta^\beta f(x)\,dx$$

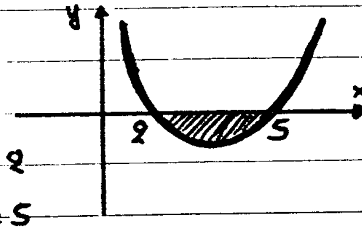
Τα σημεία $\gamma,\delta,\ldots$ βρίσκονται λύνοντας το σύστημα: $\begin{cases} y=f(x) & \text{της } f \\ y=0 & \text{του άξονα } x'x.\end{cases}$

Αν τα όρια α,β δεν δίνονται (δηλαδή όταν ζητείται το E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f και από τον άξονα $x'x$) τα βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=\beta \end{cases}$$ (Αν έχει και άλλες λύσεις τότε η f θα είναι της μορφής iii).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη παραβολή $y=x^2-7x+10$ και από τον άξονα $x'x$.



• Βρίσκω τα όρια: $\begin{cases} y=x^2-7x+10 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=5 \end{cases}$

• Βρίσκω πρόσημο της f στο $[2,5]$

α' τρόπος:

x		2		5	
$f(x)$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow f(x)\leq 0,\ \forall x\in[2,5]$.

β' τρόπος: Κάνω το σχήμα, από το οποίο φαίνεται ότι $f(x)\leq 0,\ \forall x\in[2,5]$.

Άρα: $E=-\int_2^5 f(x)dx=-\int_2^5 (x^2-7x+10)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-7\cdot\frac{x^2}{2}+10x\right]_2^5=\dots=\frac{9}{2}$.

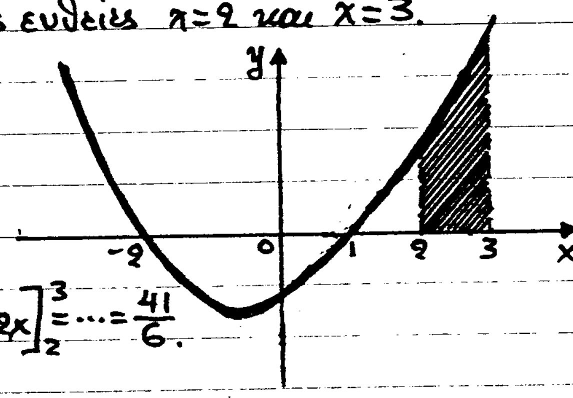
* Φυσικά μπορούμε να παίρνουμε το τύπο $E=\int_a^\beta |f(x)|dx$, ώστε το E να βγαίνει πάντα θετικό.

Έτσι: $E=\int_2^5 |x^2-7x+10|dx=\int_2^5 -(x^2-7x+10)dx=-\int_2^5 (x^2-7x+10)dx=\dots=\frac{9}{2}$.

2) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη παραβολή $y=x^2+x-2$, από τον άξονα $x'x$ και από τις ευθείες $x=2$ και $x=3$.

Πρόσημο:

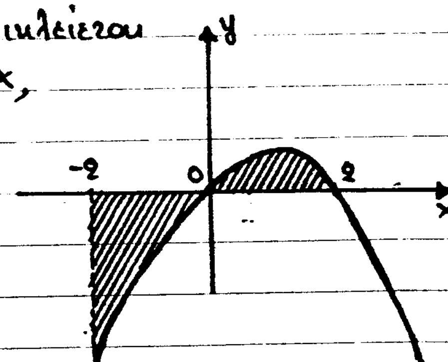
x		−2		1		2	3
y	+	0	−	0	+		



Άρα $f(x)>0,\ \forall x\in[2,3]$, οπότε:

$$E=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 (x^2+x-2)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=\dots=\frac{41}{6}.$$

3) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f: $f(x)=-x^2+2x$, από τον άξονα $x'x$ και από την ευθεία $x=-2$.



Πρόσημο:

x	−2		0		2	
$f(x)$		−	0	+	0	−

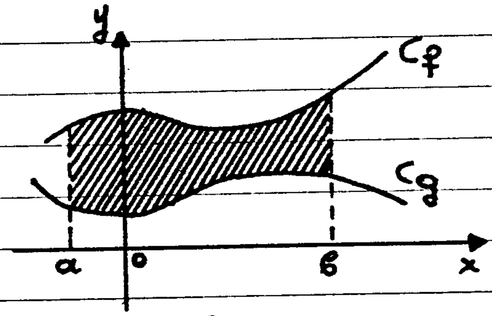
δηλαδή,

$\begin{cases} f(x)\leq 0, & \forall x\in[-2,0] \\ f(x)\geq 0, & \forall x\in[0,2] \end{cases}$

Άρα: $E=-\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx=-\left[-\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0+\left[-\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\dots=8.$

(ΙΙ) Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται:

- από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δύο συνεχών στο $[\alpha,\beta]$ συναρτήσεων f, g και
- από τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.



__Γενικά:__ Αν για δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, είναι

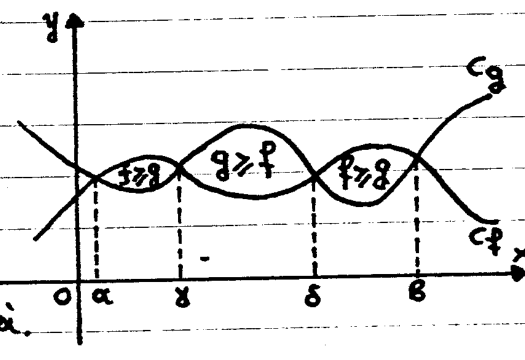
$\underline{g(x) \leq f(x)}$, $\underline{\forall x \in [\alpha,\beta]}$

τότε το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις $x=\alpha, x=\beta$ έχει $E = \int_\alpha^\beta [f(x)-g(x)]\,dx$ (όπου $\alpha<\beta$)

- Αν $\underline{f(x) \leq g(x), \forall x \in [\alpha,\beta]}$ τότε $E = \int_\alpha^\beta [g(x)-f(x)]\,dx$

↳ ΑΡΑ: η πρώτη μας δουλειά, για να βρούμε ένα τέτοιο εμβαδόν, είναι να υπολογίσουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$, δηλαδή να βρούμε την ανισωτική σχέση μεταξύ των $f(x), g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$.

- Αν η συνάρτηση $f-g$ __δεν διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$__ τότε χωρίζουμε το $[\alpha,\beta]$ σε υποδιαστήματα στα οποία η $f-g$ διατηρεί πρόσημο και υπολογίζουμε τα επί μέρους εμβαδά.



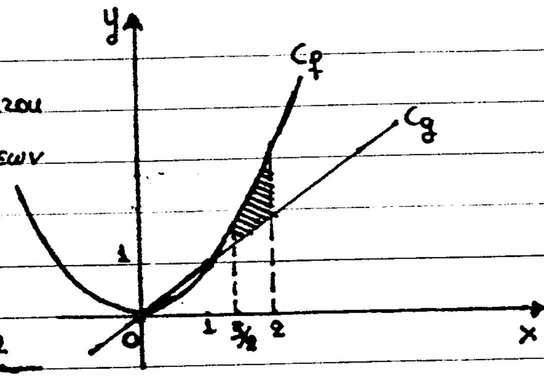
- __Αν δεν δίνονται τα α,β__, δηλαδή όταν ζητείται το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των C_f, C_g, τότε βρίσκω τα όρια α,β λύνοντας το σύστημα: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow$

$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=\beta \end{cases}$. (Έτσι βρίσκω και το πρόσημο της $f-g$).

Αν η εξίσωση $f(x)-g(x)=0$ έχει περισσότερες από 2 λύσεις τότε θα βρούμε και τα γ, δ...

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f: f(x)=x^2$, $g: g(x)=x$ και από τις ευθείες $x=\frac{3}{2}$ και $x=2$.



• Βρίσκω το πρόσημο της $f-g$.

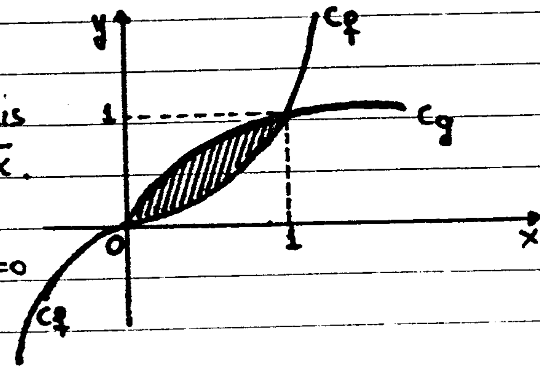
Είναι: $f(x)-g(x)=x^2-x$

x		0		1	$3/2$	2
$(f-g)(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $f(x)-g(x)>0$, $\forall x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$ οπότε:

$$E=\int_{3/2}^{2}[f(x)-g(x)]dx=\int_{3/2}^{2}(x^2-x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{3/2}^{2}=\cdots=\frac{2}{3}.$$

2) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f: f(x)=x^3$ και $g: g(x)=\sqrt{x}$.



• Βρίσκω τα όρια:

$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow x^3=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^6=x \Leftrightarrow x^6-x=0 \Leftrightarrow x(x^5-1)=0$$

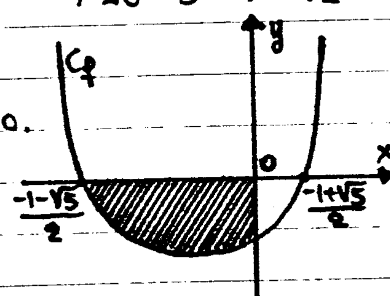
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1.$$

• Βρίσκω το πρόσημο της $f-g$.

Είναι $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in[0,1]$ (από το σχήμα) $\Leftrightarrow f(x)-g(x)\le 0$, $\forall x\in[0,1]$.

Άρα: $$E=\int_0^1[g(x)-f(x)]dx=\int_0^1[\sqrt{x}-x^3]dx=\left[\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

3) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη παραβολή $y=x^2+x-1$ και από τις ευθείες $y=0, x=0$.



• Βρίσκω το αριστερό όριο:

$$\begin{cases} y=x^2+x-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>0 \\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

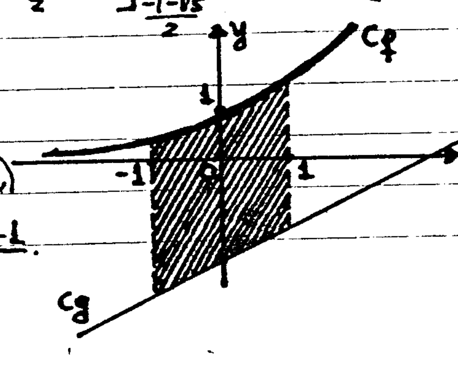
• Βρίσκω το πρόσημο της $f-g$.

$f(x)-\underbrace{\cancel{g(x)}}_{0}=x^2+x-1\le 0$, $\forall x\in\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},0\right]$ διότι:

x		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	
$(f-g)(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα: $$E=-\int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{0}f(x)dx=-\int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{0}(x^2+x-1)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{0}=\cdots=\frac{23+13\sqrt{5}}{12}.$$

4) Να βρεθεί το E του χωρίου που περικλείεται από την $f: f(x)=e^x$ και τις ευθείες $g: g(x)=\frac{1}{2}x-2$, $x=-1$, $x=1$.



• Πρόσημο της $f-g$: Είναι $f(x)>g(x)$, $\forall x\in[-1,1]$. (από το σχήμα)

Άρα: $$E=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^{1}\left(e^x-\frac{1}{2}x+2\right)dx=\cdots=\frac{e^2+4e-1}{e}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(19) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση της $f: f(x) = -\frac{1}{x^2}$, απο τον άξονα $x'x$ και απο τις ευθείες $x=-3$ και $x=-1$. $(E = 2/3)$.

(20) Ομοια, απο την $f: f(x)=x^2-5x+4$, τον $x'x$ και τις $x=2, x=3$. $(E=13/6)$.

(21) ,, ,, τις $f: f(x)=e^x$, $x'x$, $x=0, x=2$. $(E=e^2-1)$.

(22) ,, ,, ,, $f: f(x)=x^3-4x$, $y=0$. $(E=8)$.

(23) ,, ,, ,, σχέσεις: $1 \le x \le 3$ και $0 \le y \le e^x$ $(E=e^3-e)$.

(24) ,, ,, ,, ,, : $0 \le x \le 2$ και $0 \le y \le x+1$ $(E=4)$.

(25) ,, ,, ,, $f: f(x)=-x^2+3x$ και τον $x'x$ $(E=9/2)$.

(26) ,, ,, ,, $f: f(x)=x^3-3x$ και $g: g(x)=x^2-3$ $(E=22/3)$.

(27) ,, ,, ,, $f: f(x)=x^3$, $g: g(x)=x^2-3x+3$, $x=1, x=2$ $(E=35/12)$.

(28) ,, ,, ,, $f: f(x)=x^2-2$, $g: g(x)=-x^2+4$. $(E=8\sqrt{3})$.

(29) ,, ,, ,, $y=x^2$, $y=0$, $x=2$. $(E=8/3)$.

(30) ,, ,, ,, $y=x^2+1$, $y=-x^2+2$ $(E=2\sqrt{2}/3)$.

(31) ,, ,, ,, $f: f(x)=1+\ln x$, $g: g(x)=1$, $x=e$. (Βλέπε παρ.1-Φυλ.7). $(E=1)$.

(32) ,, ,, ,, $y=\ln x$, $x=2e$, $y=1$. $(E=e(\ln 4-1))$.

(33) ,, ,, ,, $y=x^3$, $y=x$. $(E=1/2)$.

(34) ,, ,, ,, $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$. $(E=14/3)$.

(35) ,, ,, ,, $y=0$, $x=-1$, $x=2$, $y=\frac{1}{3}x^3$. $(E=17/12)$.

(36) ,, ,, ,, $y=0$, $y=\frac{1}{2}x+2$, $y=-x+5$ $(E=27/2)$.

(37) ,, ,, ,, $y=\frac{7}{9}x^2+1$, $y=\frac{5}{9}x^2+3$. $(E=8)$.

(38) ,, ,, ,, $x=-1$, $x=1$, $y=x$, $y=x^2$. $(E=1)$.

(39) ,, ,, ,, $y=x^3$, $y=x^3+x^2-x-2$. $(E=9/2)$.

(40) ,, ,, ,, $y=0$, $y=x^3-6x^2+8x$. $(E=8)$.

(41) ,, ,, ,, $y=\eta\mu x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$. $(E=2)$.

(42) ,, ,, ,, $x=0$, $x=\pi/2$, $y=\eta\mu x$, $y=\sigma\upsilon\nu x$ $(E=2\sqrt{2}-2)$.

(43) ,, ,, ,, $x=0$, $x=4-y^2$ $(E=32/3)$.

Η ολοκλήρωση (μπορεί) να γίνει και ως προς τους δύο άξονες.

(44) Ομοια απο τη παραβολή $y^2=2Px$: $P>0$ και τη $x=1$. $\left(E=\frac{4\sqrt{2P}}{3}\right)$.

(45) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+1+\frac{1}{x+1}$.

1) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.

2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση C της f, τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=2$, $x=5$.

(ΘΕΜΑ '88)

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$I_1=\int_1^8\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$, $I_2=\int_1^2\frac{7x^2-4x+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, $I_3=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x}dx$

(Απάντηση: $I_1=2\sqrt{2}$, $I_2=9\sqrt[3]{2}-3$, $I_3=\frac{2\sqrt{3}}{3}$).

② Όμοια, τα: $I_1=\int_{-1}^1 x^2e^{x^3}dx$, $I_2=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx$, $I_3=\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x\cdot\sqrt{\eta\mu x}\,dx$.

(Απάντηση: $I_1=\frac{e^2-1}{3e}$, $I_2=\frac{1}{2}\ln 2$, $I_3=\frac{2}{3}$)

③ Δείξτε ότι:

1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\frac{e^{\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx=1-\frac{1}{e}$. 2) $\int_1^e\frac{\ln^2x}{x}dx=\frac{1}{3}$. 3) $\int_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

4) $\int_0^\pi\eta\mu^2\frac{x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}dx=\frac{2}{3}$. 5) $\int_{-1}^0\frac{dx}{(x-1)^4}=\frac{7}{24}$. 6) $\int_{-2}^{-1}\sqrt[3]{x+2}\,dx=\frac{3}{4}$.

④ Όμοια:

1) $\int_0^{\pi/2}(\eta\mu 2x)\cdot 3^{\sigma\upsilon\nu 2x}dx=\frac{4}{3\ln 3}$. 2) $\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx=1$. 3) $\int_{-1}^1 e^{2x-1}dx=\frac{e^4-1}{2e^3}$.

⑤ Όμοια:

1) $\int_0^\alpha xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha}-\frac{1}{4}e^{2\alpha}+\frac{1}{4}$. 2) $\int_0^1 x\cdot 3^x dx=\frac{3}{\ln 3}-\frac{2}{\ln^2 3}$.

3) $\int_0^\pi e^{3x}\cdot\eta\mu 2x\,dx=\frac{2(1-e^{3\pi})}{13}$. 4) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{e^{2x}}dx=\frac{2-3e^{-\pi}}{13}$.

5) $\int_1^{e^\pi}\eta\mu(\ln x)dx=\frac{e^\pi+1}{2}$. 6) $\int_0^{\pi/2}x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=\frac{\pi^2-8}{4}$. 7) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3}(2x+3)\cdot\eta\mu 3x\,dx=-\frac{\pi+4}{4}$

⑥ Όμοια:

1) $\int_1^2(2x+1)\cdot\ln x\,dx=6\ln 2-\frac{5}{2}$. 2) $\int_1^2(3x^2-4x+1)\cdot\ln 2x\,dx=4\ln 2-\frac{1}{3}$

⑦ Όμοια:

1) $\int_0^2\frac{dx}{x^2+4x+4}=\frac{1}{4}$. 2) $\int_3^4\frac{x^2-4x+2}{(x-2)^3}dx=\ln 2-\frac{3}{4}$. 3) $\int_2^3\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx=-\frac{5}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+\ln 5$

4) $\int_{-1}^0\frac{x}{(x-1)(x-2)^2}dx=-2\ln 2+\ln 3+\frac{1}{3}$. 5) $\int_0^1\frac{x^3}{x^2-4}dx=\frac{1}{2}-4\ln 2+2\ln 3$.

6) $\int_{-1}^0\frac{x^2-x-2}{x^2-4x+3}dx=1-5\ln 2+2\ln 3$. 7) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\frac{1}{2}\ln 2$.

⑧ Όμοια:

1) $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu^2x}dx=\frac{1}{2}$. 2) $\int_{\pi/2}^{\pi}\eta\mu^3x\cdot\sigma\upsilon\nu^5x\,dx=-\frac{1}{24}$. 3) $\int_0^{\pi/3}\eta\mu^2 3x\,dx=\frac{\pi}{6}$.

4) $\int_0^{\pi/8}\sigma\upsilon\nu^3 4x\,dx=\frac{1}{6}$. 5) $\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^3x\cdot\eta\mu 2x\,dx=\frac{2}{5}$. 6) $\int_0^{\pi/4}\eta\mu^2 3x\cdot\sigma\upsilon\nu 4x\,dx=-\frac{3}{20}$.

7) $\int_0^\pi 2x\cdot\eta\mu 3x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\,dx=\frac{6\pi}{5}$. 8) $\int_0^\pi\sqrt{\eta\mu^2x+(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}\,dx=4$.

⑨ Αν $f(x)=|x^2-3x+2|-x^2$ να υπολογιστεί το $I=\int_1^3 f(x)dx$.

⑩ Δίνεται η συνάρτηση f: $f(x)=\min\{x^2+x-1,\ 2x+1\}$.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^3 f(x)dx$.

⑩ Αν $I=\int_0^{\pi/4}\eta\mu^2x\,dx$ και $J=\int_0^{\pi/4}\sigma\upsilon\nu^2x\,dx$ να υπολογιστούν τα $I+J$, $I-J$, I και J.

(11) Να βρεθεί το $\alpha\in(1,+\infty)$ και το $\beta\in(0,\pi)$ έτσι ώστε να ισχύει:
1) $\int_{\frac{1}{\ln\alpha}}^{1}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx=2e$ 2) $\int_0^{\sqrt{\beta}} x\cdot ημ2x^2\,dx=\frac{1}{2}$.

(12) Αν $I=\int_0^{\pi/2}\frac{συνx}{ημx+συνx}dx$ και $J=\int_0^{\pi/2}\frac{ημx}{ημx+συνx}dx$
να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα: 1) $I+J$. 2) $I-J$. 3) I και J.

(13) Δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta\left[x\cdot f''(x)+f'(x)\right]dx=\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)$.

(14) 1) Να υπολογισθούν οι πραγματικοί A, B, Γ έτσι ώστε: $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$.
2) Να υπολογισθεί το $\int_1^2\frac{dx}{x(x^2+1)}$

(15) 1) Να υπολογισθούν οι πραγματικοί A,B,Γ ώστε: $\frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2-x+1}$.
2) Να υπολογισθεί το $\int_0^1\frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$

(16) Αν f: $f(x)=x^{[x]}+x$, να υπολογισθεί το $\int_0^{\sqrt2}f(x)dx$.
(17) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f με $f(x)=\int_1^x\frac{1-\ln t}{t}dt$, $x>0$.
(18) Να βρεθούν τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x)=\int_0^x(t^4-2t^2)dt$.
(19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x(\alpha συν\pi t+\beta ημ\pi t)dx$.
Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει: $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{\pi}$ και $f'(2)=2$.
(20) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (α_ν) με τύπο:
$$\alpha_\nu=\frac{4}{\nu}+\frac{4}{\nu+1}+\frac{4}{\nu+2}+\dots+\frac{4}{\nu+(\nu-1)}.$$

(21) Να υπολογισθεί το εμβαδόν $E\lambda$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$, $(\lambda>0)$.
Στη συνέχεια να βρεθούν τα όρια: 1) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E\lambda$. 2) $\lim\limits_{\lambda\to1}E\lambda$. 3) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E\lambda$.

(22) Να υπολογισθεί το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=|x^2+x-2|$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-3$ και $x=2$.
(23) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\alpha x}$ $(\alpha>0)$, την εφαπτομένη της f στο σημείο $A(\alpha,\alpha)$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=4\alpha$.
(24) Να υπολογισθεί το εμβαδό της επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ των διαγραμμάτων των συναρτήσεων $f(x)=\alpha^2-x^2$, $g(x)=2\alpha^2$, $(\alpha>0)$ στο διάστημα που είναι $f(x)\geq0$.
(25) Να βρεθεί το εμβαδό $E\lambda$ της επιφάνειας που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f: $f(x)=\frac{1}{x^3}$, g: $g(x)=-\frac{1}{x^2}$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda>1$. Στη συνέχεια να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E\lambda$.

ΚΥΚΛΙΚΕΣ (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

νάδες μετρήσεως τόξων: Μοίρα (μ), βαθμός (β), ακτίνιο (α) → $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$

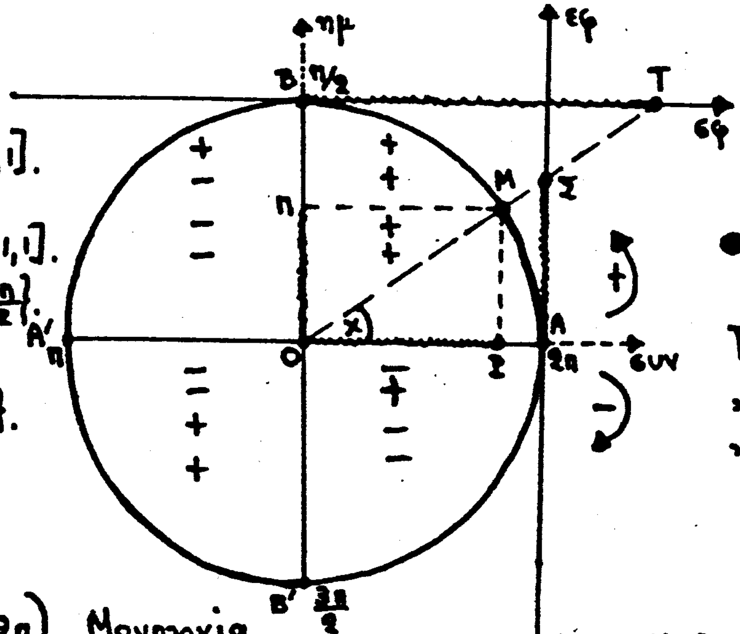
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ: είναι ένας προσανατολισμένος κύκλος με $\rho = 1$, ιον οποίο έχει ορισθεί η αρχή A και η φορά $(+,-)$ διαγραφής των τόξων.

$\mu x = \overline{O\Pi}$: $A = \mathbb{R}$, $f(A) = [-1,1]$.

$\upsilon\nu x = \overline{OP}$: $A = \mathbb{R}$, $f(A) = [-1,1]$.

$\varphi x = \overline{A\Sigma}$: $A = \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}$, $f(A) = \mathbb{R}$.

$\varphi x = \overline{BT}$: $A = \mathbb{R} - \{\kappa\pi\}$, $f(A) = \mathbb{R}$.



- Τόξα x και x' με το ίδιο πέρας πληρούν τη σχέση $x = x' + 2\kappa\pi$: $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- Τα τόξα $2\kappa\pi$ έχουν πέρας → A.

Τα τόξα $(2\kappa+1)\pi$ → A'.
 ,, ,, $2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ → B.
 ,, ,, $(2\kappa+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ → B'.

μεταβολή στο $[0, 2\pi)$ _ Μονοτονία

x	0	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$
μx	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	1 ↘	0 ↘	−1 ↗
νx	1 ↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	−1 ↗	0 ↗
φx	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗	1 ↗	$\sqrt{3}$ ↗	$+\infty$ // $-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$ // $-\infty$
σφx	$-\infty$ // $+\infty$ ↘	$\sqrt{3}$ ↘	1 ↘	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↘	0 ↘	$-\infty$ // $+\infty$ ↘	0 ↘

ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ.

(Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο).

- 1. Στο 90 και 270° το ημ γίνεται συν και αντίστροφα
  η εφ ,, σφ ,, ,, .
- 2. Στο 180° και 360° παραμένουν τα ίδια.

Το ΠΡΟΣΗΜΟ στα παραπάνω εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει το τόξο που δίδεται.

π.χ. $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sigma\varphi x$, $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\varphi(2\pi + x) = \sigma\varphi x$.

Τόξα αντίθετα $(x, -x)$ έχουν το ίδιο συν και αντίθετους τους άλλους τριγωνομ. αριθμούς: $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ → $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$, $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$.

$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ ⇒ $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$.

$1 + \varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$

$1 + \sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

1) $\eta\mu x = \eta\mu\tau \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \tau \lor x = (2\kappa+1)\pi - \tau$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

2) $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\tau \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \tau$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3) $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\tau \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \tau$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

4) $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\tau \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \tau$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

- $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, κ
- $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi$, $\kappa \in$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

$\boxed{\alpha\pm\beta}$

$$\eta\mu(\alpha\pm\beta)=\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\pm\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha\pm\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\mp\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta.$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha\pm\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\pm\varepsilon\varphi\beta}{1\mp\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha\pm\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta\mp1}{\sigma\varphi\beta\pm\sigma\varphi\alpha}\quad !!!$$

$\boxed{2\alpha}$

$$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \rightarrow \eta\mu\omega=2\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}.$$

$$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha. \quad \rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}-\eta\mu^2\frac{\omega}{2}$$

$$=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1. \qquad =2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}-1$$

$$=1-2\eta\mu^2\alpha. \qquad =1-2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}.$$

$$\varepsilon\varphi2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \rightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\omega}{2}}.$$

$$\sigma\varphi2\alpha=\frac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha} \quad \rightarrow \sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\varphi^2\frac{\omega}{2}-1}{2\sigma\varphi\frac{\omega}{2}}.$$

- $\rightarrow \eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta.$
- $\rightarrow \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$

$\boxed{3\alpha}$

$$\eta\mu3\alpha=3\eta\mu\alpha-4\eta\mu^3\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu3\alpha=4\sigma\upsilon\nu^3\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\varepsilon\varphi3\alpha=\frac{3\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}.$$

$$\sigma\varphi3\alpha=\frac{\sigma\varphi^3\alpha-3\sigma\varphi\alpha}{3\sigma\varphi^2\alpha-1}.$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

$\boxed{\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

$$\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}. \qquad \sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}.$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}. \qquad \sigma\varphi^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}.$$

$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}$

$$\eta\mu\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad \sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad \sigma\varphi\alpha=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}.$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$$\eta\mu A\pm\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A\pm B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A\mp B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\cdot\eta\mu\frac{B-A}{2}\quad !!!$$

$$\varepsilon\varphi A\pm\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu(A\pm B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\varphi A\pm\sigma\varphi B=\frac{\eta\mu(B\pm A)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}\quad !!!$$

- $_1$. $1+\eta\mu A=\eta\mu\frac{\pi}{2}+\eta\mu A=\dots$

  $\sqrt{3}+\varepsilon\varphi A=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}+\varepsilon\varphi A=\dots$
- $_2$ $\eta\mu A+\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu A+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\dots$

ΣΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ

$$2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta).$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta).$$

$$2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta).$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΝΘΗΚΗ.

- Σε μη ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Longrightarrow \varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\cdot\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma.$
- Αν $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Longrightarrow \sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\gamma\,\sigma\varphi\alpha=1.$
- Σε κάθε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Longrightarrow \eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$