Α΄ΔΕΣΜΗ

Α Ν Α Λ Υ Τ Ι Κ Η   Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α

- ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
- ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
- ΕΥΘΕΙΑ
- ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Α.Πιστοφίδης

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

<u>ΓΕΝΙΚΑ</u>: Μια διμελής σχέση σ σ' ένα σύνολο $E \neq \emptyset$ λέγεται:

1) Ανακλαστική, όταν $\forall x \in E$, $x\sigma x$ (Το x βρίσκεται σε σχέση σ με το x).

2) Συμμετρική, όταν $\forall x,y \in E : x\sigma y \Rightarrow y\sigma x$

3) Μεταβατική, όταν $\forall x,y,z \in E : x\sigma y \wedge y\sigma z \Rightarrow x\sigma z$.

<u>ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ</u> λέγεται κάθε σχέση που είναι: ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Συμβολισμός "$\sim$"

• Δύο στοιχεία $x,y \in E$ που συνδέονται με την $\sim$ λέγονται ισοδύναμα. ($x \sim y$).

<u>ΚΛΑΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ</u>: Αν $\alpha \in E$, τότε το σύνολο των στοιχείων του E που είναι ισοδύναμα με το α, λέγεται κλάση ισοδυναμίας του α. Συμβολισμός C_α ή $\tilde{\alpha}$. Δηλαδή $C_\alpha = \{x \in E : x \sim \alpha\}$

▼<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ</u>

1) Καμμιά κλάση ισοδυναμίας δεν είναι κενή. $\forall \alpha \in E$, $C_\alpha \neq \emptyset$.

2) Δύο στοιχεία είναι ισοδύναμα, αν και μόνο αν οι κλάσεις τους συμπίπτουν. $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow C_\alpha = C_\beta$.

3) Δύο μη ισοδύναμα στοιχεία αντιστοιχούν σε κλάσεις ξένες μεταξύ τους. $\alpha \nsim \beta \Leftrightarrow C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$.

4) Η ένωση $\cup$ όλων των κλάσεων ισοδυναμίας είναι το E.

• Μια Κ.Ι. ορίζεται από οποιοδήποτε στοιχείο της (π.χ) → Αντιπρόσωπός της.

• Μια Σ.Ι. $\sim$ δημιουργεί μια διαμέριση του E, δηλαδή ένα σύνολο μη κενών υποσυνόλων του E, ξένων μεταξύ τους ανά δύο, που έχουν ένωση το E.

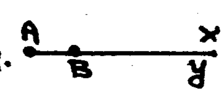
• Σύνολο-πηλίκο του E με την $\sim$, λέγεται το σύνολο των Κ.Ι. Συμβολισμός: $E/\sim$.

▼<u>Διεύθυνση ευθείας</u>: Στο σύνολο των ευθειών του χώρου ορίζουμε τη διμελή σχέση "//" ως εξής: $\varepsilon // \varepsilon' \Leftrightarrow$ Οι ε, ε' είναι // ή συμπίπτουν → Παραλληλία με ευρεία έννοια.
Η σχέση "//" είναι Σ.Ι. οπότε διαμερίζει το σύνολο των ευθειών σε κλάσεις.
Η κλάση της ε περιέχει την ε και όλες τις // προς αυτή → διεύθυνση της ε.

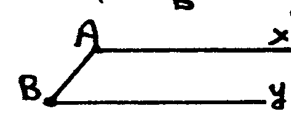
• Διεύθυνση ημιευθείας (ή ευθ. τμήμ.) είναι η διεύθυνση της ευθείας στην οποία ανήκει.

▼<u>Φορά ημιευθείας</u>: Στο σύνολο των ημιευθειών με ορισμένη διεύθυνση δ ορίζουμε τη διμ. σχ. "↑↑" ως εξής: $Ax \uparrow\uparrow By$ (Ax ομόρροπη προς τη By) ⇔

⇔ { Οι Ax και By ανήκουν στην ίδια ευθεία και η μια περιέχει την άλλη.



Οι Ax και By ανήκουν σε διαφορετικές ευθείες και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή AB.



Η σχέση ↑↑ είναι Σ.Ι. που διαμερίζει το σύνολο των ημιευθειών με διεύθ. δ σε 2 μόνο κλάσεις.
Η κλάση μιας ημιευθείας Ax → φορά της Ax. Η μια από τις 2 φορές χαρακτηρίζεται αυθαίρετα θετική και η άλλη αρνητική.

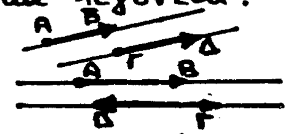
• Δύο ημιευθείες Ax, By με αντίθετες φορές λέγονται αντίρροπες → $Ax \uparrow\downarrow By$.

▼**ΕΦΑΡΜΟΣΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ** με αρχή Α και πέρας Β:
λέγεται ένα ζεύγος (Α,Β) σημείων του χώρου που ορίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του οποίου τα άκρα Α,Β θεωρούνται "διατεταγμένα" (Το Α πρώτο και το Β δεύτερο). Συμβολισμός: (Α,Β)
Η ευθεία ΑΒ (Α≠Β) λέγεται φορέας του διανύσματος (Α,Β).

- Διεύθυνση του (Α,Β) λέγεται η διεύθυνση του φορέα του.
- Φορά του (Α,Β) λέγεται η φορά της ημιευθείας ΑΒ.
- Μέτρο του (Α,Β) λέγεται ο θετικός αριθμός (ΑΒ) που εκφράζει το μήκος του ΑΒ. $\vec{AB} \parallel \vec{\Gamma\Delta}$

▼**ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ ή ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ** λέγονται δύο εφαρμοστά διανύσματα (Α,Β) και (Γ,Δ) που έχουν την ίδια διεύθυνση. Ειδικά λέγονται:

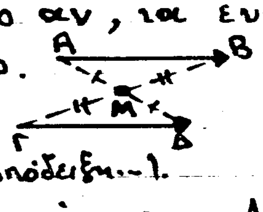
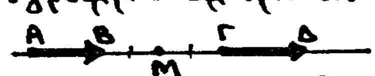
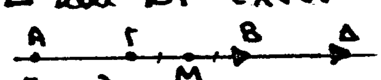
- Ομόρροπα, όταν οι ημιευθείες ΑΒ, ΓΔ είναι ομόρροπες.
- Αντίρροπα, " " " " " " αντίρροπες.



▼**ΜΗΔΕΝΙΚΟ** εφαρμοστό διάνυσμα, λέγεται ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το τέλος συμπίπτουν.
Έτσι, σε κάθε σημείο Α του χώρου αντιστοιχεί ένα μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα (Α,Α).
Σαν φορέας του (Α,Α) μπορεί να θεωρηθεί κάθε ευθεία που διέρχεται από το Α. Άρα, ένα μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα έχει διεύθυνση όχι μοναδικά ορισμένη.
Ως φορά του (Α,Α) μπορεί να θεωρηθεί η φορά κάθε ημιευθείας με αρχή Α. Έτσι, ένα μ.ε.δ. είναι συγγραμμικό και μάλιστα ομόρροπο προς κάθε εφαρμοστό διάνυσμα.
Το μέτρο κάθε μ.ε.δ. είναι μηδέν.

▼**ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.**
Στο σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου θεωρούμε τη δ.σ. ~ ως εξής: (Α,Β)~(Γ,Δ) ⟺ "τα (Α,Β),(Γ,Δ) έχουν ίδια διεύθυνση, φορά και μέτρο", που είναι σχέση ισοδυναμίας.

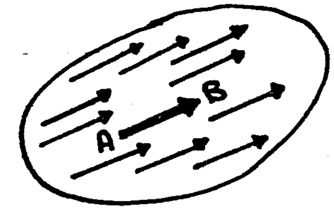
Θ. (**ΚΡΙΤΗΡΙΟ** για την ισοδυναμία εφαρμοστών διανυσμάτων)
Τα εφαρμοστά διανύσματα (Α,Β) και (Γ,Δ) είναι ισοδύναμα, αν και μόνο αν, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν το ίδιο μέσο.

(Απόδειξη...).

- Εφαρμογή: (Απόδειξη...).
  Το Μ είναι μέσο του ΑΒ ⟺ (Α,Μ)~(Μ,Β).

ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ



ΟΡΙΣΜΟΣ: Κάθε κλάση ισοδυναμίας που δημιουργείται με τη σχέση $\sim$ λέγεται ελεύθερο διάνυσμα.
Συμβολισμός: $\vec{AB}$.
Δηλαδή ελεύθερο διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας $C_{(A,B)}$ ενός εφαρμοστού διανύσματος (A,B) που περιέχει όλα τα ισοδύναμα προς το (A,B) εφαρμοστά διανύσματα.

ΑΡΑ:
- $\vec{AB}$ είναι το ελεύθερο διάνυσμα του οποίου ένας αντιπρόσωπος είναι το εφαρμοστό διάνυσμα (A,B).
- Επειδή $C_{(A,B)} = \vec{AB}$ και $C_{(\Gamma,\Delta)} = \vec{\Gamma\Delta}$ έχουμε:

$$\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow (A,B) \sim (\Gamma,\Delta).$$

► Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου E, συμβολίζεται με $\mathcal{E}$.
Τα ελεύθερα διανύσματα συμβολίζονται με $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}, \ldots$ όταν δεν καθορίζεται ένας συγκεκριμένος αντιπρόσωπός τους.

- Όλα τα μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα αποτελούν μια κλάση ισοδυναμίας που τη λέμε μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα. Συμβολισμός: $\vec{0}$.

Από δώ και κάτω, όποτε λέμε διάνυσμα, θα εννοούμε ελεύθερο διάνυσμα.

- Αν στην ισότητα $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ εναλλάξουμε τα "μέσα" ή "άκρα" ~~γράμματα~~ προκύπτει πάλι ισότητα. Δηλαδή: $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$ και $\vec{\Delta B} = \vec{\Gamma A}$.

▼ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

Διεύθυνση, φορά και μέτρο ενός ελεύθερου διανύσματος λέγεται η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο ενός οποιουδήποτε αντιπροσώπου του. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $|\vec{\alpha}|$.
Έτσι: $|\vec{\alpha}| = |\vec{AB}| = (AB)$.

- **ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ** λέγονται δύο ελεύθερα διανύσματα, όταν δύο οποιοιδήποτε αντιπρόσωποί τους είναι εφαρμοστά διανύσματα συγγραμμικά. Συμβολισμός: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

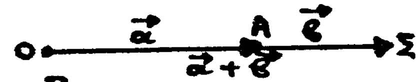
Ειδικά: $\begin{cases} \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ ομόρροπα.} \\ \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ αντίρροπα.} \end{cases}$

▼ ΜΙΑ ΒΑΣΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ.

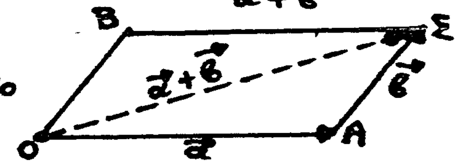
Θ. Αν O είναι ένα σημείο του χώρου E, τότε υπάρχει μια απεικόνιση "1-1 και επί" $\varphi_0 : \mathcal{E} \longrightarrow E$ η οποία σε κάθε $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}$ αντιστοιχίζει το σημείο $A \in E$ τέτοιο ώστε: $\vec{OA} = \vec{\alpha}$.

- ΕΤΣΙ, το σύνολο των διανυσμάτων του χώρου είναι: $\mathcal{E} = \{\vec{OM} : M \in E\}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.



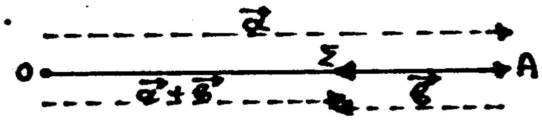
▼ΠΡΟΣΘΕΣΗ.



Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathcal{E}$ και $O\in E$, σύμφωνα με την απεικόνιση f_O ορίζονται τα σημεία A,Σ ώστε $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και $\vec{A\Sigma}=\vec{\beta}$.

Τότε το $\vec{\gamma}=\vec{O\Sigma}$ λέγεται __άθροισμα__ των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Συμβολισμός: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. ΑΡΑ: $\underline{\vec{O\Sigma}=\vec{OA}+\vec{A\Sigma}}$



● Αν $B\in E$: $\vec{OB}=\vec{\beta}\Rightarrow\vec{OB}=\vec{A\Sigma}\Rightarrow\underline{\vec{O\Sigma}=\vec{OA}+\vec{OB}}$,
δηλαδή το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι η διαγώνιος $O\Sigma$ του παρ/μου $OA\Sigma B$.

►Η πράξη με την οποία: $\forall(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}\longrightarrow\vec{\alpha}+\vec{\beta}\in\mathcal{E}$ λέγεται __πρόσθεση__.

__Ιδιότητες:__ $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathcal{E}$ ισχύουν:

1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$. (Αντιμεταθετική)

2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$. (Προσεταιριστική).

3) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$ (Το $\vec{0}$ ουδέτερο στοιχείο)

4) $\forall\vec{\alpha}\in\mathcal{E}, \exists\vec{\alpha}'\in\mathcal{E}: \vec{\alpha}+\vec{\alpha}'=\vec{\alpha}'+\vec{\alpha}=\vec{0}$ (Το $\vec{\alpha}'$ είναι μοναδικό $\leftrightarrow$ Αντίθετο του $\vec{\alpha}\leftrightarrow-\vec{\alpha}$).

● Το αντίθετο του $\vec{0}$ είναι το $\vec{0}$.

● Ισχύουν και όλες οι άλλες ιδιότητες της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$.

π.χ. i) $-(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=(-\vec{\alpha})+(-\vec{\beta})$ iii) $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}\Rightarrow\vec{x}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$.

ii) $\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{\beta}+\vec{x}\Rightarrow\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ (Νόμος διαγραφής).

▼ΜΕΤΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

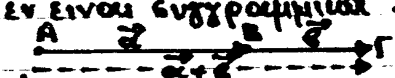
$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathcal{E}$ ισχύει:

$$\underline{\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}.\quad\text{(Απόδειξη...)}$$

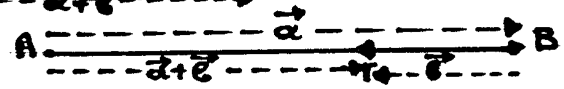
●₁ Οι ανισότητες ισχύουν αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά

(Τριγ.Ανισότητα)

●₂ Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ τότε: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$



●₃ Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ τότε: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|$.

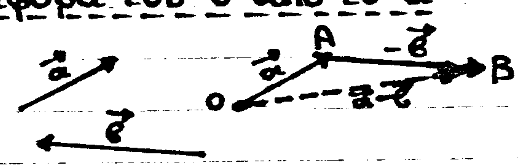


▼ΑΦΑΙΡΕΣΗ

● $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathcal{E}$ υπάρχει μοναδικό $\vec{x}\in\mathcal{E}$: $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$ (Απόδειξη...)

Το διάνυσμα αυτό $\vec{x}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ λέγεται __διαφορά του $\vec{\beta}$ απο το $\vec{\alpha}$__ και συμβολίζεται $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Δηλαδή, για να βρώ το $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, αρκεί στο $\vec{\alpha}$ να προσθέσω το αντίθετο του $\vec{\beta}$.



Η πράξη με την οποία $\forall(\vec{\alpha},\vec{\beta})\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}\longrightarrow\vec{\alpha}-\vec{\beta}\in\mathcal{E}$, λέγεται __αφαίρεση__.

● Είναι $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$ (Βλέπε σχήμα) $\Leftrightarrow$ $\underline{\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}}$

Έτσι, αν $\vec{A\Sigma}=\vec{OB}$ (Βλέπε παρ/μο πάνω)
η διαφορά $\vec{OB}-\vec{OA}$ ορίζεται απο την άλλη διαγώνιο AB του παρ/μου.

▼ΠΟΛ/ΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ.

Αν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\lambda\neq 0$, ονομάζεται <u>γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$</u> το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$.
πού: •1 Είναι συγγραμμικό με το $\vec{\alpha}$

•2 Είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda>0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda<0$.

•3 Έχει μέτρο $|\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|$. (Δηλαδή: $|\lambda\vec{\alpha}|=|\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|$).

Επειδή, όταν $\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ο αριθμός $|\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|=0$ ορίζουμε ακόμη ότι: $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$, $0\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}$.

Η πράξη με την οποία $\forall(\lambda,\vec{\alpha})\in\mathbb{R}\times\mathcal{E}\longrightarrow\lambda\vec{\alpha}\in\mathcal{E}$ λέγεται <u>πολ/μός αριθμού με διάνυσμα.</u>

• Έτσι, αν $\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\beta},\vec{\alpha}$ συγγραμμικά $\begin{cases}\rightarrow \text{ομόρροπα, αν } \lambda>0.\\ \rightarrow \text{αντίρροπα, αν } \lambda<0.\end{cases}$

<u>Ιδιότητες:</u> $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathcal{E}$ ισχύουν:

1) $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$. 2) $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$.

3) $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$. 4) $1\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$.

•Εφαρμογή: Για τη διάμεσο ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})$. (Απόδειξη)

• Ισχύουν ακόμη οι ιδιότητες:

1) $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$ 2) $(-\lambda)\vec{\alpha}=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$.

3) $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}\Rightarrow\lambda=\mu.\ (\vec{\alpha}\in\mathcal{E}^*)$ ← Ν. διαγραφής → 4) $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}=\vec{\beta}$. $(\lambda\in\mathbb{R}^*)$.

<u>Συνδυασμός πράξεων:</u> Οι ιδιότητες του πολ/μού αριθμού με διάνυσμα και της πρόσθεσης διανυσμάτων μας επιτρέπουν να κάνουμε "λογισμό" (πράξεις παραστάσεων — λύση εξισώσεων ...) ανάλογο με εκείνο των πραγματικών αριθμών.

▶<u>Διανυσματική ακτίνα</u> σημείου Α ως προς σημείο Ο, λέμε το $\vec{OA}\rightarrow\vec{r}_A$.
Έτσι, για το τυχαίο $\vec{AB}$, είναι: $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$.

▼ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ (για τις ασκήσεις).

1) $(A,B)\sim(\Gamma,\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}\rightarrow \text{Τα } (A,B),(\Gamma,\Delta) \text{ έχουν ίδια διεύθυνση, φορά, μέτρο.}\\ \rightarrow \text{Τα } A\Delta \text{ και } B\Gamma \text{ έχουν το ίδιο μέσο.}\\ \rightarrow \vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow\vec{A\Gamma}=\vec{B\Delta},\ \vec{\Delta B}=\vec{\Gamma A}.\end{cases}$

2) $\vec{O\Sigma}=\vec{OA}+\vec{A\Sigma}$. Γενικά: $\vec{O\Sigma}=\vec{OA_1}+\vec{A_1A_2}+\cdots+\vec{A_\nu\Sigma}$. Δηλαδή: κάθε διάνυσμα αναλύεται σε άθροισμα οσωνδήποτε άλλων διανυσμάτων.

3) $\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|\leq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

4) $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$, $\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}$.

5) $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{0}$ (διότι $\vec{BA}$ αντίθετο του $\vec{AB}\Leftrightarrow\vec{AB}=-\vec{BA}$).

Γενικά:

$$\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\cdots+\vec{A_\nu A_1}=\vec{A_1A_1}=\vec{0}.$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Το M είναι μέσο του $AB \Leftrightarrow (A,M) \sim (M,B)$ (Εφαρμογή Βιβλίου).

2. Η AM είναι διάμεσος στο $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{A\Gamma}=2\vec{AM}$ (,, ,,).

3. Για τις διαμέσους $A\Delta, BE, \Gamma Z$ τριγώνου $AB\Gamma$, ισχύει:
$$\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z}=\vec{0}$$ (Ασκηση 14Β.)

4. Αν Δ, E μέσα των $AB, A\Gamma$ στο τρίγωνο $AB\Gamma$, ισχύουν:
i) $\vec{\Delta E}=\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{A\Gamma})$. ii) $|\vec{\Delta E}|=\frac{1}{2}|\vec{B\Gamma}|$ (Εφαρμογή Βιβλίου).

5. Το G είναι βαρύκεντρο του $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \Leftrightarrow \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{G\Gamma}=\vec{0}$ (Εφαρμ.Β.Θεωρία).

6. Αν G, G' τα βαρύκεντρα δύο τριγώνων $\overset{\Delta}{AB\Gamma}, \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ του χώρου, ισχύει: $\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{\Gamma\Gamma'}=3\cdot\vec{GG'}$. (Ασκηση 20Β).

7. Αν G είναι το βαρύκεντρο τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, τότε για κάθε σημείο M του χώρου, ισχύει: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=3\vec{MG}$ (Να δειχτεί).

8. Αν M, N τα μέσα δύο τμημάτων $AB, \Gamma\Delta$ του χώρου, ισχύει: $2\vec{MN}=\vec{A\Gamma}+\vec{B\Delta}$ (Να δειχτεί).

9. Σε κάθε τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ισχύει: $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=\vec{0}$. (Γενικεύεται σε κάθε ν-γωνο).

Οι παραπάνω προτάσεις, εφαρμόζονται συχνά στις ασκήσεις, σε συνδυασμό και με τη μεθοδολογία που ακολουθεί. Οσες όμως απο αυτές, δεν είναι εφαρμογές του Βιβλίου, πρέπει να αποδειχτούν, αν εφαρμοστούν σε άσκηση.

- ΕΤΣΙ, πρέπει να μελετηθούν καλά και οι αποδείξεις τους. (Βλέπε τετράδιο).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ.

M₁ → Για να δείξω ότι: $(A,B)\sim(\Gamma,\Delta)$ δείχνω ένα από τα:

1) Τα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ έχουν το ίδιο μέσο.
2) $(\Delta,B)\sim(\Gamma,A)$ οπότε με εναλλαγή των άκρων γραμμάτων έχω το ζητούμενο.
3) $(A,\Gamma)\sim(B,\Delta)$ " " " " μέσων " " " ".
4) $(A,B)\sim(K,\Lambda)$ και $(K,\Lambda)\sim(\Gamma,\Delta)$, οπότε λόγω μεταβατικής " " " .
5) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$ ή $\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma A}$ οπότε: τα εφαρμοστά τους είναι ισοδύναμα

① Δίνεται παρ/μο $AB\Gamma\Delta$, τα σημεία E,Z της AB και το H της $B\Gamma$. Αν O το κέντρο του $AB\Gamma\Delta$ και οι EO, ZO, HO τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα E', Z', H' αντίστοιχα, δείξτε ότι: $(E,Z)\sim(Z',E')$ και $(Z,H)\sim(H',Z')$.

② Θεωρούμε ένα εφαρμοστό διάνυσμα (A,B), $A\neq B$ και δύο σταθερά σημεία O_1, O_2 του χώρου. Αν A_1, B_1 είναι τα συμμετρικά των A,B ως προς το O_1 και A_2, B_2 ως προς το O_2, δείξτε ότι: $(A_1,B_1)\sim(A_2,B_2)$.

③ Αν M,N είναι τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ και M_1 το συμμετρικό του M ως προς το N, δείξτε ότι: $(\Gamma,M_1)\sim(B,M)$.

④ Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προσδιορίστε δύο σημεία Δ και E ώστε: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Gamma B}$. Στη συνέχεια δείξτε ότι: το A είναι μέσο του ΔE.

M₂ → Για να δείξω ότι $M\equiv N$ δείχνω ένα από τα:

1) Το εφαρμοστό διάνυσμα (M,N) είναι το μηδενικό.
2) $\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.
3) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$ όπου O τυχαίο σημείου του χώρου.

Ειδικά: Αν τα M,N είναι μέσα των $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, δείχνω ένα από τα:

i) $(A,\Delta)\sim(\Gamma,B)$. ii) Τα $AB, \Gamma\Delta$ έχουν κοινό μέσο.

⑤ Στα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}=\vec{0}$. Δείξτε ότι τα βαρύκεντρά τους G, G' συμπίπτουν και αντίστροφα.

⑥ Αν $AB\Gamma\Delta EZ$ εξάγωνο του χώρου (στρεβλό) και K,Λ,M,N,P,Σ τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EZ, ZA$ αντίστοιχα, δείξτε ότι τα $\overset{\triangle}{KMP}$, $\overset{\triangle}{\Lambda N\Sigma}$ έχουν κοινό βαρύκεντρο.

⑦ Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ του χώρου ισχύει η σχέση: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$. Δείξτε ότι τα τμήματα $B\Gamma, \Delta E$ έχουν κοινό μέσο.

⑧ Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα συμμετρικά A', B', Γ' των A,B,Γ ως προς τα B,Γ,A αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

M_3 → **1)** Για να δείξω ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ ($\vec{AB} \parallel \vec{\Gamma\Delta}$), δηλαδή ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ($\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$) είναι συγγραμμικά, δείχνω ότι:

$\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{\Gamma\Delta}$).

Ειδικά: Αν θέλω να δείξω ότι

i) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ δείχνω ότι $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$.

ii) $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$,, ,, ,, ,, $\lambda \in \mathbb{R}^*_-$.

2) Για να δείξω ότι τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, δείχνω ότι:

$\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{B\Gamma}$ ή $\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{A\Gamma}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(9) Δείξτε ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παρ/μου.

(10) Δείξτε ότι η διάμεσος τραπεζίου είναι παρ/λη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

(11) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις:

$2\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = 2\vec{\beta} + 5\vec{\delta}$ και $5\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 5\vec{\delta} - \vec{\gamma}$.

Δείξτε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

(12) Αν B_1', Γ_1' είναι τα συμμετρικά των κορυφών Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ ως προς τα μέσα B_1, Γ_1 των πλευρών ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, δείξτε ότι: τα σημεία A, B_1', Γ_1' είναι συνευθειακά.

(13) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ του επιπέδου του.
Αν $\vec{AB} = \vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{A\Gamma} = 7\vec{u} - 28\vec{v}$, $\vec{AM} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ δείξτε ότι: τα Β, Γ, Μ είναι συνευθειακά.

M_4 → Για να δείξω μια σχέση της μορφής: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_\lambda = \lambda \cdot \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{N}$
(δηλαδή το πλήθος των προσθετέων να ισούται με το συντελεστή του $\vec{u}$)
δουλεύω με ένα από τους εξής 2 τρόπους:

α' τρόπος: Εκφράζω το $\vec{u}$, λ φορές συναρτήσει κάθε φορά ενός από τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_\lambda$ και προσθέτοντας έχω το ζητούμενο.

β' τρόπος: Εκφράζω τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_\lambda$ συναρτήσει του $\vec{u}$.
(Θυμήσου σχέση ενδ. τμημάτων – τόξων – γωνιών. Γεωμετρία Α' Λυκείου).

(14) Να αποδειχτούν οι προτάσεις 6-7-8 του §6.

(15) Αν τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ έχουν κοινό μέσο Ο, δείξτε ότι για το τυχαίο σημείο Μ ισχύει: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta} + \vec{ME} + \vec{MZ} = 6 \cdot \vec{MO}$.

(16) Αν Μ, Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΓΔ του χώρου, δείξτε ότι: $\vec{A\Delta} + \vec{B\Gamma} = 2\vec{MN}$.

M5 → Γενίκευση και της **M4**.
→ Για να δείξω μια διανυσματική ισότητα,

Θεωρώ ένα τυχαίο σημείο O του επιπέδου (γενικά του χώρου) και εκφράζω τα διάφορα διανύσματα σαν διαφορά των διανυσματικών ακτίνων. ($\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$).

Ειδικά: Αν θέλω να δείξω σχέση της μορφής: $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \dots + \vec{v_\lambda} = \vec{u_1} + \vec{u_2} + \dots + \vec{u_\lambda}$

δείχνω ένα από τα:

1) $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \dots + \vec{v_\lambda} - \vec{u_1} - \vec{u_2} - \dots - \vec{u_\lambda} = \vec{0}$.
2) Τα $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \dots + \vec{v_\lambda}$, $\vec{u_1} + \vec{u_2} + \dots + \vec{u_\lambda}$ είναι ίσα με ένα τρίτο διάνυσμα, συνήθως $\lambda\vec{\alpha}$.
3) Με $\Leftrightarrow$ φθάνω σε προφανή σχέση.
4) Με ευθεία απόδειξη: ξεκινώντας από γνωστές σχέσεις φθάνω στη ζητούμενη.

(Θυμήσου μεθοδολογία ταυτοτήτων Άλγεβρα Α΄ Λυκείου)

(17) Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (O,R) τέμνονται στο Μ. Δείξτε ότι: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta} = 2\cdot\vec{MO}$.

(18) Αν Α, Β, Γ, Δ συνευθειακά και Κ, Λ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα, δείξτε ότι: $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} = 2\cdot\vec{K\Lambda}$.

(19) Αν τα παρ/μα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν κοινό κέντρο Κ, δείξτε ότι: για το τυχαίο σημείο Μ ισχύει: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta} = \vec{MA'} + \vec{MB'} + \vec{M\Gamma'} + \vec{M\Delta'}$.

(20) Δίνεται παρ/μο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε: $\vec{P\Gamma} + 2\vec{PB} = \vec{0}$.
Δείξτε ότι:
1) το $P \in B\Gamma$
2) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{P\Delta} = 2\vec{BA}$.

(21) Αν τα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ έχουν κοινό μέσο Ο, δείξτε ότι: $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} + \vec{AE} + \vec{AZ} = 2\cdot\vec{A\Delta}$.

(22) Αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, ✓
δείξτε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ ισχύει:
$$\vec{MA} = \lambda\cdot\vec{MB} + (1-\lambda)\cdot\vec{M\Gamma}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(23) Δίνεται τετράεδρο (στρεβλό τετράπλευρο) ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ των ΑΒ, ΓΔ. Αν Ο είναι το μέσο της ΕΖ, δείξτε ότι:
1) $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} + \vec{A\Delta} = 4\cdot\vec{AO}$. ✓
2) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} + \vec{O\Delta} = \vec{0}$.

(24) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ.
1) Αν Μ το μέσο της ΑΓ δείξτε ότι: $\vec{MB} + \vec{M\Delta} = \vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma}$.
2) Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα, δείξτε ότι: $\vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} + 2\cdot\vec{\Lambda K} = \vec{0}$.

M6 → Για να <u>προσδιορίσω σημείο Σ που πληρεί μια διανυσματική σχέση $f(\Sigma)=\vec{0}$</u> δουλεύω ως εξής:
Από τη σχέση αυτή, υπολογίζω ένα διάνυσμα $\vec{A\Sigma}$ όπου A γνωστό σημείο, οπότε το $\vec{A\Sigma}$ κατασκευάζεται και άρα προσδιορίζεται το Σ.

(25) Αν ΑΒΓΔ παρ/μο, να βρεθεί σημείο Σ, ώστε:
$$\vec{\Sigma A}+\vec{\Sigma B}+\vec{\Sigma \Gamma}+\vec{\Sigma \Delta}=\vec{0}.$$

(26) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί σημείο Σ, ώστε:
$$\vec{A\Sigma}+3\cdot\vec{B\Sigma}-\vec{\Gamma\Sigma}=\vec{0}.$$

(27) Αν Η είναι το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί σημείο Σ ώστε: $\vec{H\Sigma}=\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{H\Gamma}$.

(28) Να <u>βρεθεί</u> σημείο Σ του <u>επιπέδου</u> ενός τριγώνου ΑΒΓ, ώστε:
$$\vec{\Sigma A}+2\cdot\vec{\Sigma B}+3\cdot\vec{\Sigma\Gamma}=\vec{0}.$$

(29) Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ. Σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα $f(M)=\vec{MA}+2\vec{MB}+3\vec{M\Gamma}$.
Να κατασκευαστούν τα σημεία A', B', Γ' του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $\vec{AA'}=f(A)$, $\vec{BB'}=f(B)$, $\vec{\Gamma\Gamma'}=f(\Gamma)$.

M7 → Για να <u>κατασκευάσω ένα γραμμικό συνδυασμό δοθέντων διανυσμάτων $\kappa_1\vec{v_1}+\kappa_2\vec{v_2}+\cdots+\kappa_\nu\vec{v_\nu}$</u> όπου $\kappa_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,\nu$.
δουλεύω <u>γραφικά</u>, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του αθροίσματος διανυσμάτων και του γινομένου αριθμού με διάνυσμα.

(30) Αν (Α,Β) είναι ένα εφαρμοστό διάνυσμα, να κατασκευαστούν πάνω στο φορέα του τα διανύσματα: $-2(A,B)$, $\frac{2}{5}(A,B)$, $\sqrt{3}(A,B)$.

(31) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$. Να κατασκευαστούν τα διανύσματα:
$\frac{1}{3}\vec{\alpha}$, $-2{,}7\vec{\beta}$, $\frac{1}{5}\vec{\alpha}-\frac{2}{3}\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$, $3(\vec{\alpha}-\vec{\beta})+\frac{3}{2}\vec{\gamma}$.

(32) Δίνονται τα μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.
Αν $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$, $\vec{v}=-\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{w}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ να υπολογιστεί συναρτήσει των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ το διάνυσμα $\vec{\gamma}=\vec{u}+2\vec{v}-3\vec{w}$ και να παρασταθεί γραφικά.

(33) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases}4\vec{x}+\vec{y}=2\vec{\alpha}\\3\vec{x}+\vec{y}=6\vec{\alpha}\end{cases}$ και η λύση του να παρασταθεί γραφικά.

(34) Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, δείξτε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$. (Ισχύει και το αντίστροφο → Πρόταση 9-§.6).

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

▼**Η ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ:** Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}^*$ και $\mathcal{A}$ το σύνολο των συγγραμμικών του διανυσμάτων, δηλαδή: $\mathcal{A} = \{\lambda\vec{\alpha} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Το $\vec{0} \in \mathcal{A}$, αφού $\vec{0} = 0 \cdot \vec{\alpha}$. Έστω Ο σημείο του χώρου και Α σημείο: $\vec{OA} = \vec{\alpha} \neq \vec{0}$

● Τα Ο, Α ορίζουν μια ευθεία **Δ**. Η εικόνα του $\mathcal{A}$ με την απεικόνιση φ_0 (Βας.Απ.) είναι η ευθεία Δ. (Απόδειξη ...).

Το σύνολο $\mathcal{A}$ → Διανυσματική ευθεία που παράγεται από το $\vec{\alpha}$,
● και το σύνολο $\{\vec{\alpha}\}$ είναι μια βάση της $\mathcal{A}$.

- Το $\vec{0}$ είναι το μοναδικό κοινό στοιχείο όλων των διανυσματικών ευθειών. ($\vec{0} = 0 \cdot \vec{\alpha}$)
- Για κάθε $\vec{\alpha}' \in \mathcal{A}$ ($\vec{\alpha}' \neq \vec{0}$) το σύνολο $\{\vec{\alpha}'\}$ είναι επίσης μια βάση της $\mathcal{A}$.
- Τα διανύσματα της ευθείας Δ, δηλαδή τα $\vec{AB}$ με $A, B \in \Delta$ σχηματίζουν τη **δ.ε.** $\mathcal{A}$ την οποία παράγει ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό από τα διανύσματα αυτά.

▼ **Γραμμική εξάρτηση δύο διανυσμάτων:** Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}$. Τότε:

1) $\vec{\alpha} /\!/ \vec{\beta} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$. Άρα τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ανήκουν στην ίδια δ.ε. $\mathcal{A}$, γι' αυτό:
Τα συγγραμμικά διανύσματα λέγονται χραμμικώς εξαρτημένα.

● Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} = 0\vec{\beta}$ ($\lambda = 0$) ⇒ Το $\vec{0}$ είναι γραμ. εξαρτημένο με οποιοδήποτε διάνυσμα

2) $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$ ή $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν ανήκουν στην ίδια δ.ε. $\mathcal{A}$, γι' αυτό: Δύο μη συγγραμμικά διανύσματα λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα.

▼**ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ:** Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}^*$.
Κάθε διάνυσμα $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με συντελεστές λ, μ. Γενικά: Κάθε $\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$ είναι γραμ. συνδ. του $\vec{\alpha}$ με συντελεστή $\lambda \in \mathbb{R}$.

● Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{A}$ (δηλ. γραμ. εξαρτ.) τότε κάθε γραμ. συνδυασμός τους $\vec{\gamma} \in \mathcal{A}$.

Έστω ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα και $\mathcal{P}$ το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, δηλαδή: $\mathcal{P} = \{\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Έστω Ο σημείο του χώρου και Α, Β σημεία: $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Προφανώς $B \notin OA$, αφού $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, άρα τα Ο, Α, Β ορίζουν επίπεδο **P**.

● Η εικόνα του $\mathcal{P}$ με την απεικόνιση φ_0 είναι το επίπεδο **P**. ← (Απόδειξη ...)

Το σύνολο $\mathcal{P}$ → Διανυσματικό επίπεδο που παράγεται από τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$,
● και το σύνολο $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{P}$, διότι $\forall \vec{\gamma} \in \mathcal{P}$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Έστω $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ ένα διάν. του $\mathcal{P}$. Οι συντελεστές λ, μ, λέγονται και συντεταγμένες του $\vec{\gamma}$ ως προς τα διαν. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ της βάσης.

- Το $\vec{0}$ είναι το μοναδικό κοινό στοιχείο όλων των διανυσματικών επιπέδων. ($\vec{0} = 0 \cdot \vec{\alpha} + 0 \cdot \vec{\beta}$)
- Αν $\vec{\alpha}', \vec{\beta}' \in \mathcal{P}$ ($\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ γρ. ανεξ.) το $\{\vec{\alpha}', \vec{\beta}'\}$ είναι επίσης μια βάση του $\mathcal{P}$ (Απόδειξη ...).
- Τα διαν. του επιπέδου **P**, δηλαδή τα $\vec{AB}$ με $A, B \in P$ σχηματίζουν το δ.ε. $\mathcal{P}$, το οποίο παράγουν δύο οποιαδήποτε γραμ. ανεξάρτητα από τα διανύσματα αυτά.

▼ <u>Γραμμική εξάρτηση τριών διανυσμάτων</u>: Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{E}$. Τότε:

1) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} + 0\cdot\vec{\gamma}$.

2) $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ και το $\vec{\gamma} \in \mathcal{P}$ των $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

Στις περιπτώσεις αυτές (1-2) ένα απο τα τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο. Άρα τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ανήκουν ή στην ίδια δ.ε. $\mathcal{A}$ (συγγραμμικά) ή στο ίδιο δ.ε. $\mathcal{P}$ (συνεπίπεδα) και λέγονται <u>γραμμικώς εξαρτημένα</u>.

3) $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ και το $\vec{\gamma} \notin \mathcal{P}$ των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Στη περίπτωση αυτή κανένα απο τα τρία διαν. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ δεν μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των άλλων 2. Δηλαδή τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ δεν ανήκουν ούτε στην ίδια δ.ε, ούτε στο ίδιο δ.ε. και λέγονται <u>γραμμικώς ανεξάρτητα</u>.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{E}$, λέγονται:

- ●₁ γραμμικώς εξαρτημένα, όταν ένα απο αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
- ●₂ γράμμικώς ανεξάρτητα, όταν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(ο ορισμός αυτός καλύπτει και τη περίπτωση δύο διανυσμάτων).

▼ <u>ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathcal{E}$</u>. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{E}^*$. Κάθε διάνυσμα $\vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} + \rho\vec{\gamma}$, $(\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R})$, λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με συντελεστές λ, μ, ρ.

- Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμ. εξαρτημένα $\Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{A} \vee \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{P}$ οπότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους $\vec{\delta} \in \mathcal{A} \vee \vec{\delta} \in \mathcal{P}$. ;)
- Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $\mathcal{E}_1$ το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών τους, τότε το $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$. Δηλαδή:

Το σύνολο $\mathcal{E}_1$ των γραμμικών συνδυασμών των γραμμικώς ανεξάρτητων διαν. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι το σύνολο $\mathcal{E}$ των ελεύθερων διαν. του χώρου (Απόδειξη...).

Το σύνολο $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}$ απο τα στοιχεία του οποίου παράγονται όλα τα διαν. του $\mathcal{E}$ λέγεται <u>βάση</u> του $\mathcal{E}$. Αν $\vec{\delta} \in \mathcal{E}$ με $\vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} + \nu\vec{\gamma}$ οι συντελεστές λ, μ, ρ λέγονται και <u>συντεταγμένες του $\vec{\delta}$ ως προς τα διαν. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ της βάσης</u> (και είναι μοναδικοί).

▼ <u>Γραμμική εξάρτηση τεσσάρων διανυσμάτων</u>. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathcal{E}$. Τότε:

1) <u>Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γραμ. εξαρτημένα</u>. Τότε θα είναι π.χ. $\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\gamma} + 0\vec{\delta}$.

2) <u>Τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γραμ. ανεξάρτητα</u> $\Rightarrow \exists \lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$ <u>μοναδικά</u> : $\vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} + \rho\vec{\gamma}$.

Δηλαδή: σε κάθε περίπτωση ένα απο τα 4 είναι γραμ. συνδυασμός των άλλων.

- ΑΡΑ: Τέσσερα διαν. του χώρου είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα.

Προφανώς: ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_\nu \in \mathcal{E}$ με $\nu > 4$ είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα.

▼ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Είδαμε ότι:

- ●₁ Στη διανυσματική ευθεία $\mathcal{A}$, κάθε διάνυσμά της ($\neq \vec{0}$) αποτελεί βάση της, ενώ δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
- ●₂ Στο διανυσματικό επίπεδο $\mathcal{P}$, δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματά του αποτελούν βάση του, ενώ τρία διαν. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathcal{P}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
- ●₃ Στο χώρο $\mathcal{E}$, τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματά του αποτελούν βάση του, ενώ τέσσερα ή περισσότερα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

►Το πλήθος των διανυσμάτων μιας βάσης των $\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{E}$ αντίστοιχα είναι 1-2-3, γι' αυτό λέμε ότι τα σύνολα αυτά έχουν διάσταση 1-2-3 αντίστοιχα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

(10) Αν για τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{O\Gamma}$ υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} |\kappa_1|+|\kappa_2|+|\kappa_3| \neq 0 \\ \kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0 \\ \kappa_1\cdot\vec{OA}+\kappa_2\cdot\vec{OB}+\kappa_3\cdot\vec{O\Gamma}=\vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow A, B, \Gamma \text{ συνευθειακά } (\text{Ασκ. 19Β.}).$$

Αντιστρόφως: Αν τα A, B, Γ είναι συνευθειακά, υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$ (όχι όλοι μηδέν) τέτοιοι ώστε $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0$ και $\kappa_1\vec{OA}+\kappa_2\vec{OB}+\kappa_3\vec{O\Gamma}=\vec{0}$ (όπου Ο τυχόν σημείο του χώρου).

(11) Αν για τα διανύσματα $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{O\Gamma}, \vec{O\Delta}$ υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} |\kappa_1|+|\kappa_2|+|\kappa_3|+|\kappa_4| \neq 0 \\ \kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4=0 \\ \kappa_1\cdot\vec{OA}+\kappa_2\cdot\vec{OB}+\kappa_3\cdot\vec{O\Gamma}+\kappa_4\cdot\vec{O\Delta}=\vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow A, B, \Gamma, \Delta \text{ συνεπίπεδα } (\text{Να δειχτεί}).$$

(12) Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται σημείο $P \in B\Gamma$: $\vec{AP} = \xi_1\vec{AB} + \xi_2\cdot\vec{A\Gamma}$.
Τότε: $\xi_1+\xi_2=1$. (Να δειχτεί).

(13) Σε τετράεδρο ΟΑΒΓ δίνεται σημείο $P \in (AB\Gamma)$ τέτοιο ώστε $\vec{OP} = \xi_1\cdot\vec{OA}+\xi_2\cdot\vec{OB}+\xi_3\cdot\vec{O\Gamma}$. Τότε: $\xi_1+\xi_2+\xi_3=1$. (Να δειχτεί).

Είναι φανερό, ότι οι παραπάνω προτάσεις, αν εφαρμοστούν σε άσκηση, πρέπει να αποδειχτούν, γι' αυτό πρέπει να μελετηθούν καλά και οι αποδείξεις τους. (Βλέπε τετράδιο).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΙ.

λ

M_8 → **1)** Για να δείξω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \dots, \vec{\alpha_\nu}$ ενός διανυσματικού χώρου (όχι του $\mathcal{E}$) είναι γραμμικώς

- ανεξάρτητα, δείχνω ότι: $\lambda_1\vec{\alpha_1}+\lambda_2\vec{\alpha_2}+\dots+\lambda_\nu\vec{\alpha_\nu}=\vec{0} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_\nu=0$.
- εξαρτημένα, ,, ,, : ,, $\Rightarrow$ Ένας τουλάχιστον από τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ είναι διάφορος του μηδενός.

2) Αν δοθεί ότι $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ γραμμικώς ανεξάρτητα και ζητείται να δείξω ότι τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή εξαρτημένα:
ξεκινώ από τη σχέση $\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}=\vec{0}$ και τη γράφω στη μορφή $f_1(\lambda_1,\lambda_2)\cdot\vec{\alpha}+f_2(\lambda_1,\lambda_2)\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$ οπότε (αφού $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ γραμμικώς ανεξάρτητα) έχω το ομογενές σύστημα: $\begin{cases} f_1(\lambda_1,\lambda_2)=0 \\ f_2(\lambda_1,\lambda_2)=0 \end{cases}$ το οποίο έχει λύση μόνο τη μηδενική (αν $D\neq 0$), ή και μη μηδενικές (αν $D=0$), οπότε έχω το ζητούμενο.

- Όμοια, εργάζομαι αν έχω τρία διανύσματα...

(35) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα διανύσματα: $\vec{x}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{y}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(36) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι και τα $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(37) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι και τα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$, $\vec{w}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(38) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι τα $\vec{u}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{v}=-\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{w}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
Ποιά σχέση τα συνδέει;

(39) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, εξετάστε τι είναι τα διανύσματα:
$\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{w}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}$.

(40) Αν τα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{E}$ είναι μη συνεπίπεδα, δείξτε ότι τα $\vec{x}$, $\vec{y}-\vec{x}$, $\vec{z}-\vec{x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(41) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, να βρεθεί ο $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u}=\mu\vec{\alpha}+(\mu-1)\vec{\beta}$, $\vec{v}=2\vec{\alpha}+(\mu-3)\vec{\beta}$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

M9 → Για να δείξω ότι:

1) Το $\vec{\alpha}\in\mathcal{A}$ αποτελεί βάση της $\mathcal{A}$, δείχνω ότι $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$.

2) Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathcal{P}$ αποτελούν βάση του $\mathcal{P}$, δείχνω ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

3) Τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathcal{E}$ αποτελούν βάση του $\mathcal{E}$, δείχνω ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Γενικά</u>: Για να δείξω ότι τα $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\dots,\vec{\alpha}_\nu\in V$ αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου V, δείχνω ότι τα $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\dots,\vec{\alpha}_\nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ότι $\forall\vec{u}\in V$ εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\dots,\vec{\alpha}_\nu$. Δηλαδή, $\exists\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\nu\in\mathbb{R}:\ \vec{u}=\lambda_1\vec{\alpha}_1+\lambda_2\vec{\alpha}_2+\dots+\lambda_\nu\vec{\alpha}_\nu$ (Βλέπε Μ6. Φ11 - Διαν. Χώροι).

● Για τα $\mathcal{A},\mathcal{P},\mathcal{E}$ το δεύτερο δεν χρειάζεται, γιατί είναι γνωστό ότι ισχύει.

(42) Αν $B_1=\{\vec{i},\vec{j}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{P}$, δείξτε ότι και το σύνολο $B_2=\{2\vec{i},\vec{i}+\vec{j}\}$ αποτελεί επίσης βάση του $\mathcal{P}$.

(43) Ομοια, αν $\{\vec{i},\vec{j}\}$ βάση του $\mathcal{P}\Rightarrow\{3\vec{i}-\vec{j},\ \vec{i}-2\vec{j}\}$ βάση του $\mathcal{P}$.

(44) Αν $B_1=\{\vec{i},\vec{j}\}$ βάση του $\mathcal{P}$, να εξεταστεί αν τα διανύσματα $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ και $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ αποτελούν βάση του $\mathcal{P}$.

(45) Αν $B_1=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, δείξτε ότι και το $B_2=\{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\ \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$.

M10 → Για να δείξω ότι:

1) <u>Τρία σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά</u>, δείχνω ότι: δύο από τα διανύσματα που ορίζουν τα Α,Β,Γ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

2) <u>Τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ είναι συνεπίπεδα</u>, δείχνω ότι: τρία από τα διανύσματα που ορίζουν τα Α,Β,Γ,Δ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(46) Να δείξτε τις προτάσεις 10 και 11 του Φ.13.

(47) Αν $3\cdot\vec{OA}+2\cdot\vec{OB}-5\cdot\vec{O\Gamma}=\vec{0}$ δείξτε ότι τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

(48) Αν $\vec{OA}-4\vec{OB}+4\vec{O\Gamma}-\vec{O\Delta}=\vec{0}$ " " " Α,Β,Γ,Δ " συνεπίπεδα.

(49) Αν $\vec{OA}-6\cdot\vec{OB}+2\vec{O\Gamma}+3\cdot\vec{O\Delta}=\vec{0}$ " " " " " " .

(50) Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1\}$ και $\vec{OM}=\dfrac{\vec{OA}+\lambda\cdot\vec{OB}}{1+\lambda}$, όπου Ο τυχαίο σημείο του χώρου, δείξτε ότι: τα Α,Β,Μ είναι συνευθειακά, και αντίστροφα: $\vec{AM}=\lambda\vec{MB},\ \lambda\neq-1\Rightarrow\vec{OM}=\dfrac{\vec{OA}+\lambda\vec{OB}}{1+\lambda}$

(51) Αν $\vec{OM}=\lambda_1\cdot\vec{OA}+\lambda_2\cdot\vec{OB}+\lambda_3\cdot\vec{O\Gamma}$ και $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ δείξτε ότι: τα Α,Β,Γ,Μ είναι συνεπίπεδα

M11 → <u>Για να βρώ τις συντεταγμένες του</u>:

1) <u>$\vec{x} \in \mathcal{P}$</u> <u>ως προς μια βάση $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$ του $\mathcal{P}$</u>, εκφράζω το $\vec{x}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, οπότε οι συντελεστές των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι οι συντεταγμένες του $\vec{x}$.

2) <u>$\vec{x} \in \mathcal{E}$</u> <u>ως προς μια βάση $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}$ του $\mathcal{E}$</u>, εκφράζω το $\vec{x}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, οπότε οι συντελεστές των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι οι συντεταγμένες του $\vec{x}$.

• ΕΤΣΙ: α) Αν $\vec{x} = \lambda_1\vec{\alpha} + \lambda_2\vec{\beta} \Rightarrow \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2)$.
β) Αν $\vec{x} = \lambda_1\vec{\alpha} + \lambda_2\vec{\beta} + \lambda_3\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{x}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

(52) Αν O είναι το κέντρο ενός παρ/μου ΑΒΓΔ, δείξτε ότι: 1) Το $\{\vec{AB}, \vec{A\Delta}\}$ βάση του $\mathcal{P}$. 2) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{O\Gamma}, \vec{O\Delta}$ ως προς τη βάση αυτή.

(53) Αν Κ,Λ,Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των $\vec{A\Lambda}, \vec{K\Gamma}, \vec{MB}$ ως προς τη βάση $\{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}\}$.

(54) Αν G το βαρύκεντρο του $\hat{AB\Gamma}$, να υπολογισούν οι συντεταγμένες: 1) Του $\vec{AG}$ ως προς τη βάση $\{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}\}$. 2) Του $\vec{GA}$ ως προς τη βάση $\{\vec{GB}, \vec{G\Gamma}\}$.

(55) Δίνεται τετράεδρο ΣΑΒΓ και G το βαρύκεντρο του $\hat{AB\Gamma}$. Αν Δ,Ε τα μέσα των ΣΑ, ΒΓ να βρεθούν οι συντεταγμένες των $\vec{\Sigma G}, \vec{\Delta E}$ ως προς τη βάση $\{\vec{\Sigma A}, \vec{\Sigma B}, \vec{\Sigma \Gamma}\}$. Γιατί η $\{\vec{\Sigma A}, \vec{\Sigma B}, \vec{\Sigma \Gamma}\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$;

M12 → Σε άσκηση που εμφανίζονται διανύσματα με εγγράμματους συντελεστές και ζητείται μια σχέση μεταξύ αυτών, τότε: 1) Αν η άσκηση δίνεται στο $\mathcal{P}$, θεωρώ μια βάση του $\mathcal{P}$ — Αν η άσκηση δίνεται στο $\mathcal{E}$, θεωρώ μια βάση του $\mathcal{E}$.
2) Εκφράζω τα διανύσματα της άσκησης σαν γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων των επιλεγμένων βάσεων.
3) Επειδή κάθε διάνυσμα εκφράζεται μονοσήμαντα από τα διανύσματα της βάσης του χώρου στον οποίο ανήκει, θα προκύψουν σχέσεις μεταξύ των συντελεστών, οπότε σύμφωνα και με τις προτάσεις 12-13. Φ.13 προκύπτει το ζητούμενο.

(56) Να δείξτε τις προτάσεις 12 και 13 του Φ.13

(57) Αν O εσωτερικό σημείο του $\hat{AB\Gamma}$ και $A'B'\Gamma'$ οι τομές των ΑΟ,ΒΟ,ΓΟ με τις ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ αντίστοιχα και $\vec{AO} = \lambda \cdot \vec{AA'}$, $\vec{BO} = \mu \cdot \vec{BB'}$, $\vec{\Gamma O} = \nu \cdot \vec{\Gamma\Gamma'}$ δείξτε ότι: $\lambda + \mu + \nu = 2$.

(58) Σε τετράεδρο ΟΑΒΓ ενώνουμε τις κορυφές του με το εσωτερικό του σημείο Κ και έστω O_1, A_1, B_1, Γ_1 οι τομές των ΟΚ,ΑΚ,ΒΚ,ΓΚ με τις απέναντι έδρες. Αν $\vec{OK} = \lambda \cdot \vec{OO_1}$, $\vec{AK} = \mu \cdot \vec{AA_1}$, $\vec{BK} = \nu \cdot \vec{BB_1}$, $\vec{\Gamma K} = \rho \cdot \vec{\Gamma\Gamma_1}$ δείξτε ότι: $\lambda + \mu + \nu + \rho = 3$.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Σε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι $\vec{AB}=\vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma}=\vec{\beta}$.
Δείξτε ότι: $\vec{\Gamma\Delta}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$.

② Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου του.
Δείξτε ότι το άθροισμα $\vec{MA}+\vec{MB}-2\vec{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

③ Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παρ/μου ΑΒΓΔ, θεωρούμε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ αντίστοιχα ώστε $\vec{AE}=\vec{H\Gamma}$ και $\vec{Z\Gamma}=\vec{A\Theta}$.
Δείξτε ότι τα ΕΗ, ΖΘ έχουν κοινό μέσο.

④ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί σημείο Σ ώστε: $\vec{A\Sigma}+2\vec{B\Sigma}+3\vec{\Gamma\Sigma}=\vec{0}$.

⑤ Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ.
Αν Μ είναι σταθερό σημείο της ευθείας (ε) που ορίζουν τα Κ, Λ, δείξτε ότι το σημείο Ν που καθορίζεται από τη σχέση:
$\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}$ είναι σημείο της (ε).

⑥ Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ. Δείξτε ότι:
αν υπάρχει σημείο Ρ ώστε $\vec{PA}+\vec{P\Gamma}=\vec{PB}+\vec{P\Delta}$, τότε το ΑΒΓΔ είναι παρ/μο.

⑦ Αν ΑΒΓΔ παρ/μο να βρεθεί σημείο Σ ώστε $\vec{\Sigma A}+\vec{\Sigma B}+\vec{\Sigma\Gamma}=\vec{\Sigma\Delta}$.

⑧ Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′, τα βαρύκεντρά τους G, G′ και τα μέσα Κ, Λ, Μ των ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ αντίστοιχα. Αν G″ το βαρύκεντρο του $\overset{\triangle}{K\Lambda M}$, δείξτε ότι το G″ είναι μέσο του GG′.

⑨ Δείξτε ότι: η διάμεσος τριγώνου διχοτομεί το τμήμα που συνδέει τα μέσα των δύο άλλων πλευρών του.

⑩ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και δύο σημεία Δ, Ε ώστε: $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{AE}$.
Δείξτε ότι τα ΒΓ και ΔΕ έχουν το ίδιο μέσο.

⑪ Σε παρ/μο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, δείξτε ότι: $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}+\vec{A\Delta}=4\cdot\vec{AO}$.

⑫ Μέσα σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ να βρεθεί σημείο Ρ ώστε:
$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{P\Gamma}+\vec{P\Delta}=\vec{0}$.

⑬ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ πάνω στις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα ώστε $\vec{A\Delta}=\lambda\cdot\vec{\Delta B}$, $\vec{BE}=\lambda\cdot\vec{E\Gamma}$, $\vec{\Gamma Z}=\lambda\cdot\vec{ZA}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*_+$.
Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

⑭ Αν ισχύει: $5\cdot\vec{OA}-3\cdot\vec{OB}-2\cdot\vec{O\Gamma}=\vec{0}$ δείξτε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

⑮ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τμήμα ΔΕ εκτός του επιπέδου του.
Να βρεθεί σημείο Ρ, ώστε: $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{P\Gamma}=\vec{P\Delta}+\vec{PE}$.

⑯ Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ώστε $\vec{AB}=\lambda\cdot\vec{A\Gamma}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\vec{A\Delta}=\frac{3}{4}\vec{A\Gamma}$ με $A\neq\Gamma$.
Δείξτε ότι τα Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά και βρείτε το λ ώστε: $\vec{AB}=2\cdot\vec{\Gamma\Delta}$.

(17) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathcal{E}$ και $\mu \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \vec{x} - (\mu-3)\vec{y} = \vec{\alpha} \\ (\mu+1)\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \end{cases}$.

(18) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα $\vec{u} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(19) Αν $\vec{u} = 3\vec{\alpha} + 6\vec{\beta} + \lambda\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 6\vec{\beta} + \mu\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{w} = 6\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + \rho\cdot\vec{\gamma}$, $\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{R}$, και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι: τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν $\lambda = \mu$.

(20) Αν $\vec{OA} - 7\cdot\vec{OB} + 2\cdot\vec{O\Gamma} + 4\cdot\vec{O\Delta} = \vec{0}$ δείξτε ότι τα A, B, Γ, Δ είναι ομοεπίπεδα.

(21) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{e_1} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$, $\vec{e_2} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$ του $\mathcal{E}$ με βάση $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Δείξτε ότι:

1) Τα $\vec{e_1}$, $\vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{e_1} - \vec{e_2}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

2) Τα $\vec{e_1}$, $\vec{e_1} - \vec{e_2}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(22) Αν $B_1 = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ βάση του $\mathcal{P}$, δείξτε ότι και το σύνολο $\{\vec{i} + \vec{j}, 2\vec{i} - \vec{j}\}$ είναι βάση του $\mathcal{P}$.

(23) Σε τρίγωνο OAB είναι $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Αν $\Gamma \in OA : \vec{O\Gamma} = \frac{3}{4}\vec{\alpha}$ και $\Delta \in OB : \vec{O\Delta} = \frac{1}{2}\vec{\beta}$ και $\Sigma = A\Delta \cap B\Gamma$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\vec{O\Sigma}$ ως προς τη βάση $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$.

(24) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τι συμβαίνει για τα διανύσματα: $\vec{u} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} + x\vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{w} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + x\vec{\gamma}$, όπου $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

(25) Στο πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}(\alpha, 1, \beta+1)$, $\vec{v}(2, \alpha-1, \beta)$ ως προς τη βάση $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε τα $\vec{u}, \vec{v}$ νάναι συγγραμμικά.

(26) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ γραμμικώς εξαρτημένα, δείξτε ότι: το $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(27) Έστω $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ μια βάση του $\mathcal{P}$. Αν $\vec{\alpha} = 1\cdot\vec{i} - 2\cdot\vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{k} = \vec{i} - 3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 5\vec{v} - 2\vec{k}$, τότε:

1) Δείξτε ότι το $\{\vec{v}, \vec{k}\}$ είναι επίσης μια βάση του $\mathcal{P}$.

2) Να εκφραστεί το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με βάση το $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ και μετά με βάση το $\{\vec{v}, \vec{k}\}$.

(28) Δίνεται το τετράεδρο $KAB\Gamma$ και σημείο M του χώρου ώστε $\vec{KM} = \dfrac{\vec{KA} + \mu\cdot\vec{KB} + \rho\cdot\vec{K\Gamma}}{\mu + \rho + 1}$, όπου $\mu, \rho \in \mathbb{R}$ και $\mu + \rho + 1 \neq 0$.

Δείξτε ότι το M βρίσκεται στο επίπεδο των σημείων A, B, Γ.

(29) ΘΕΜΑ '86. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$, $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$, $\vec{w} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.

▼ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

$\vec{i}=\vec{OI}$ το μοναδιαίο, δηλαδή διάνυσμα με θετική φορά και μέτρο τη μονάδα.
Ο άξονας $x'x$ είναι η διανυσματική ευθεία που παράγεται από το $\vec{i}$.
Κάθε διάνυσμα $\vec{AB}$ όπου $A,B\in x'x$ γράφεται: $\vec{AB}=\lambda\cdot\vec{i}$, $\lambda\in\mathbb{R}$
Ο αριθμός λ λέγεται αλγεβρική τιμή του $\vec{AB}$ και συμβολίζεται: $\overline{AB}$.

Δηλαδή: $\vec{AB}=\overline{AB}\cdot\vec{i}$.

- $\overline{AB}=0 \Leftrightarrow \vec{AB}=\vec{0}$. • $\overline{AB}=-\overline{BA}$.
- $\overline{AB}=|\vec{AB}| \Leftrightarrow$ το $\vec{AB}$ έχει τη θετική φορά (ομόρροπο του $\vec{i}$).
- $\overline{AB}=-|\vec{AB}| \Leftrightarrow$ το $\vec{AB}$ έχει την αρνητική φορά (αντίρροπο του $\vec{i}$).
- Για δύο διανύσματα $\vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta}$ του άξονα (δηλαδή συγγραμμικά) ισχύει: $\vec{AB}=\lambda\cdot\vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overline{AB}=\lambda\cdot\overline{\Gamma\Delta}$

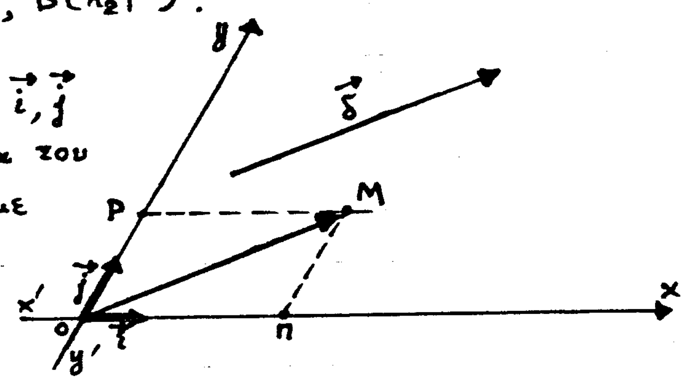
Θ. Chasles (Απόδειξη...)

Αν Α,Β,Γ είναι οποιαδήποτε σημεία ενός άξονα, ισχύει: $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=\overline{A\Gamma}$.
Γενικά: Για οποιαδήποτε $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ του άξονα, ισχύει: $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\dots+\overline{A_{\nu-1}A_\nu}=\overline{A_1A_\nu}$.

- Η αλγεβρική τιμή του $\vec{AB}$ προκύπτει, αν από τη τετμημένη του τέλους Β αφαιρεθεί η τετμημένη της αρχής Α. Δηλαδή: $\overline{AB}=x_2-x_1$ όπου x_1, x_2 οι τετμημένες των Α,Β.
(Δηλαδή $\vec{OA}=x_1\vec{i}$, $\vec{OB}=x_2\vec{i} \Leftrightarrow A(x_1)$, $B(x_2)$).

▼ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ.

Έστω $x'x$, $y'y$ δύο άξονες με κοινή αρχή Ο και $\vec{i},\vec{j}$ τα μοναδιαία τους διανύσματα. Τα διανύσματα του επιπέδου των αξόνων αποτελούν το δ.ε. $\mathbb{P}$ με βάση $\{\vec{i},\vec{j}\}$. Άρα $\forall\vec{\delta}\in\mathbb{P}$ γράφεται: $\vec{\delta}=x\vec{i}+y\vec{j}$ όπου $x,y\in\mathbb{R}$ οι συντεταγμένες του $\vec{\delta}$ ως προς τα $\vec{i},\vec{j}$. Συμβολικά: $\vec{\delta}(x,y)$.



Η διατεταγμένη τριάδα $(O,\vec{i},\vec{j})$ λέγεται σύστημα αναφοράς στο επίπεδο και όταν υπονοείται το $(\vec{i},\vec{j})$ συμβολίζεται απλά Oxy.

- Είναι $\vec{\delta}=\vec{OM}=\vec{O\Pi}+\vec{\Pi M}=\vec{O\Pi}+\vec{OP}=\overline{O\Pi}\cdot\vec{i}+\overline{OP}\cdot\vec{j}$. Άρα $x=\overline{O\Pi}$ και $y=\overline{OP}$.
- Αν $x'x\perp y'y$ το σύστημα xOy λέγεται ορθογώνιο (αλλιώς πλαγιογώνιο).
- Αν $x'x\perp y'y$ και $\vec{i}=\vec{j}$ το σύστημα xOy λέγεται ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς, και με τέτοιο σύστημα θα ασχολούμαστε στα επόμενα.
- Για το $\vec{0}$ και τα μοναδιαία $\vec{i},\vec{j}$ ισχύουν: $\vec{0}(0,0)$, $\vec{i}(1,0)$, $\vec{j}(0,1)$.
- Εφαρμογή: Αν Α(α), Β(β) και Μ(x) είναι σημεία ενός άξονα, τότε:
το Μ είναι μέσο του ΑΒ $\Leftrightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$. (Απόδειξη...).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΙ.

M_1 → **1)** Για να δείξω μια σχέση με αλγεβρικές τιμές διανυσμάτων, δουλεύω ως εξής: α΄ τρόπος: Αντικαθιστώ την αλγεβρική τιμή του κάθε διανύσματος με τη διαφορά της τετμημένης του πέρατος και της αρχής.
ΜΕ ευκολύνει πολύ να θεωρήσω σαν αρχή ένα οποιοδήποτε σημείο του άξονα.
β΄ τρόπος: Αναλύω την αλγεβρική τιμή ενός ή περισσοτέρων διανυσμάτων σε άθροισμα ή διαφορά αλγεβρικών τιμών άλλων διανυσμάτων (Σχέση Chasles).

2) Όταν δοθεί μια σχέση αλγεβρικών τιμών ή μέτρων διανυσμάτων πάνω σε άξονα και ζητηθεί να προσδιοριστεί σημείο $M(x_M)$ του άξονα που υπάρχει στη σχέση, τότε: Αντικαθιστώ τις αλγ. τιμές ή τα μέτρα με τα ίσα τους (π.χ. $\overline{AB}=x_B-x_A$, $|\vec{AB}|=|\overline{AB}|=|x_B-x_A|$), οπότε προκύπτει εξίσωση με άγνωστο το x_M, απ' όπου προσδιορίζεται το M.

① Πάνω σε άξονα $x'Ox$ βρίσκονται τα σημεία $A(4)$, $B(-3)$, $\Gamma(5)$.
1) Να υπολογιστούν οι αριθμοί $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$. 2) Αν πάρουμε ως αρχή το O' ώστε $\overline{OO'}=-1$, να βρεθούν οι νέες τετμημένες των σημείων A, B, Γ.

② Αν $A,B \in x'Ox$ και K το μέσο του AB, δείξτε ότι $\forall M \in x'Ox$ ισχύει:
$$|\vec{MA}|^2-|\vec{MB}|^2=2\overline{AB}\cdot\overline{KM}.$$

③ Αν A,B,Γ,M σημεία ενός άξονα, δείξτε ότι: $\overline{MA}\cdot\overline{B\Gamma}+\overline{MB}\cdot\overline{\Gamma A}+\overline{M\Gamma}\cdot\overline{AB}=0$.

④ Αν $A,B,\Gamma,\Delta \in x'Ox$ και K,Λ τα μέσα των AB, $\Gamma\Delta$ δείξτε ότι: $\overline{A\Gamma}+\overline{B\Delta}=\overline{A\Delta}+\overline{B\Gamma}=2\overline{K\Lambda}$.

⑤ Αν A,B,Γ σημεία ενός άξονα, τέτοια ώστε: $\overline{AB}^3+\overline{B\Gamma}^3+\overline{\Gamma A}^3=0$, δείξτε ότι δύο τουλάχιστον από τα A,B,Γ συμπίπτουν.

⑥ Αν $A(-4)$, $B(3)$ σημεία ενός άξονα, να βρεθεί σημείο M ώστε: $2\overline{MA}+3\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$.

⑦ Όμοια, αν $A(3)$, $B(-4)$ να βρεθεί το M ώστε: $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\dfrac{5}{4}$.

⑧ Όμοια, αν $A(-1)$, $B(3)$, $\Gamma(5)$ ώστε: 1) $\overline{MA}+3\overline{M\Gamma}=\overline{A\Gamma}$. 2) $|\vec{BM}|=4$.

⑨ Αν $A(6)$, $B(-2)$ να βρεθούν τα σημεία M,N ώστε: $\begin{cases}|\vec{MA}|^2+2\cdot|\vec{NB}|^2=18\\ \overline{MA}+\overline{NB}+\overline{MN}=0\end{cases}$.

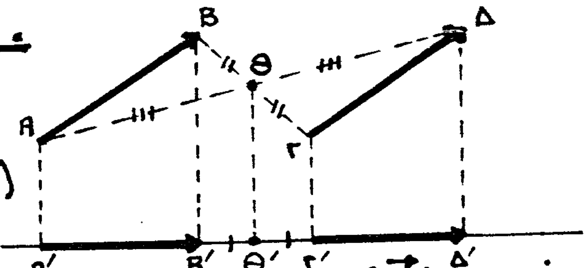
⑩ Αν $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $\Gamma(\gamma)$, $\Delta(\delta)$ σημεία ενός άξονα και $\dfrac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}}+\dfrac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}}=0$ δείξτε ότι: $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=2(\alpha\beta+\gamma\delta)$.

⑪ Αν $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $\Gamma(\gamma)$, $\Delta(\delta)$ δείξτε ότι: $\overline{AB}\cdot\overline{\Delta A}\cdot\overline{\Delta B}+\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Delta B}\cdot\overline{\Delta\Gamma}+\overline{\Gamma A}\cdot\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Delta A}+\overline{AB}\cdot\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}=0$.

⑫ Αν $A(\alpha)$, $B(\beta)$ με $\alpha+\beta\neq 0$, δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο G του άξονα ώστε: $\alpha\cdot\overline{GA}+\beta\cdot\overline{GB}=0$. Στη συνέχεια δείξτε ότι για τυχαίο σημείο M του άξονα ισχύει: $\alpha\cdot\overline{MA}^2+\beta\cdot\overline{MB}^2-(\alpha+\beta)\overline{MG}^2=\alpha\cdot\overline{GA}^2+\beta\cdot\overline{GB}^2$. (Leibniz).

⑬ Αν $A(-2)$, $B(2)$, $\Gamma(-1)$ και $\forall M \in x'x$ θέσουμε $f(M)=\overline{MA}+2\overline{MB}-\overline{M\Gamma}$ δείξτε ότι:
1) Υπάρχει ένα μόνο σημείο K του άξονα ώστε $f(K)=0$. 2) $f(M)=2\cdot\overline{MK}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.



ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΑΞΟΝΑ.

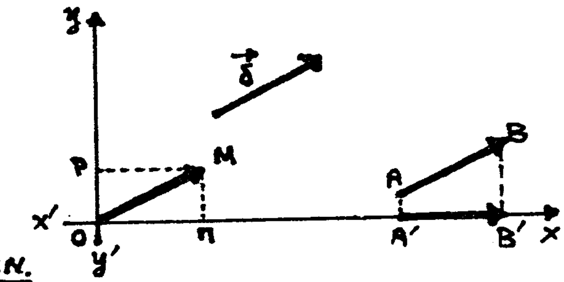
Το εφαρμοστό (A', B') λέγεται προβολή του (A, B).

● Ισχύει: $(A,B) \sim (\Gamma,\Delta) \Rightarrow (A',B') \sim (\Gamma',\Delta')$. (Απόδειξη...)

ή ισοδύναμα: $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \Rightarrow \vec{A'B'} = \vec{\Gamma'\Delta'}$.

Αρα: το $\vec{A'B'}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του αντιπροσώπου $(\vec{AB})$ ενός διανύσματος $\vec{\delta}$ και λέγεται προβολή του $\vec{\delta}$ στον $x'x$. ●→ $\text{προβ}_{x'x}\vec{\delta} = \vec{A'B'}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ $\vec{\delta}$.



Αν (A,B) ένας αντιπρόσωπος του $\vec{\delta}$ με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ τότε οι συντεταγμένες (x,y) του $\vec{\delta}$ είναι: $\underline{x = x_2 - x_1 \quad , \quad y = y_2 - y_1}$ (Απόδειξη).

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

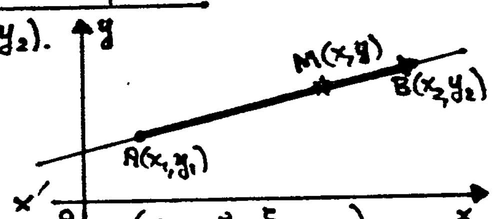
Εστω $\vec{\delta}_1(x_1, y_1)$ και $\vec{\delta}_2(x_2, y_2)$.

1) Οι συντεταγμένες του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσες με το άθροισμα των αντίστοιχων συντεταγμένων τους και αντίστροφα.
$\underline{\vec{\delta} = \vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow x = x_1 + x_2 \quad , \quad y = y_1 + y_2}$. (Απόδειξη...).

2) Οι συντεταγμένες του γινομένου πραγματικού αριθμού με διάνυσμα είναι ίσες με τα γινόμενα του αριθμού με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του διανύσματος και αντίστροφα. $\underline{\vec{\delta} = \lambda \cdot \vec{\delta}_1 \Leftrightarrow x = \lambda x_1 \ , \ y = \lambda y_1}$. (Απόδειξη...).

3) Οι συντεταγμένες κάθε γραμμικού συνδυασμού δύο διανυσμάτων είναι ίσες με τους ίδιους γραμμικούς συνδυασμούς των αντίστοιχων συντεταγμένων τους και αντίστροφα. $\underline{\vec{\delta} = \lambda_1\vec{\delta}_1 + \lambda_2\vec{\delta}_2 \Leftrightarrow x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ , \ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}$.

● Αν $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$: $\underline{\vec{\delta} = \vec{\delta}_1 \Leftrightarrow x = x_1 \ , \ y = y_1}$ (ισότης διανυσμάτων).



ΜΕΡΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ: Εστω εφαρμοστό (A,B) με $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.
Κάθε σημείο $M \neq B$ της ευθείας AB ορίζει το λόγο
$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda$ ●→ Μερικός λόγος της τριάδας (A,B,M).

Οι συντεταγμένες (x,y) του M δίνονται από τις σχέσεις:
Αν $\lambda \neq -1$ (δηλ. $A \neq B$) ●→ $\underline{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \ , \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$ (Απόδειξη...).

● Αν $\lambda = 1$ το M θα είναι μέσο του AB και: $\underline{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$.

▼ Η σχετική θέση των A, B, M καθορίζεται από τη τιμή του λόγου λ.

1) Αν $\lambda = 0 \Leftrightarrow M \equiv A$.

2) Αν $\lambda > 0 \Leftrightarrow (A,M), (M,B)$ ομόρροπα $\Leftrightarrow$ Το M είναι μεταξύ των A, B.

3) Αν $\lambda < 0 \Leftrightarrow (A,M), (M,B)$ αντίρροπα $\Leftrightarrow$ Το M εκτός των A,B: $\begin{cases} \lambda < -1 \Rightarrow \text{προς το μέρος του } B. \\ \lambda > -1 \Rightarrow \text{〃 〃 〃 〃 } A. \end{cases}$

4) $\nexists M$: $\lambda = (A,B,M) = -1$ με $A \neq B$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(14) Αν $\Sigma(\alpha,\beta)$ και $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ τα συμμετρικά του Σ ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και ως προς την αρχή O αντίστοιχα, τότε $\Sigma_1(\alpha,-\beta)$, $\Sigma_2(-\alpha,\beta)$, $\Sigma_3(-\alpha,-\beta)$.

(15) Αν $\Sigma(\alpha,\beta)$ και Σ' το συμμετρικό του Σ ως προς τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων, τότε $\Sigma'(\beta,\alpha)$.

(16) <u>ΒΑΣΙΚΗ:</u> Το βαρύκεντρο G τριγώνου ΑΒΓ με $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $\Gamma(x_\Gamma,y_\Gamma)$ έχει συντεταγμένες: $x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_\Gamma}{3}$, $y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_\Gamma}{3}$.

→ Εφ. **2** Β σελ. **49** - Θεωρία.

(17) Το βαρύκεντρο G τριγώνου ΑΒΓ με $A(2,-3)$, $B(-5,1)$, είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και η κορυφή του Γ πάνω στον άξονα $y'y$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των G, Γ.

(18) Αν $A(3,2)$, $B(-1,4)$ να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του P όταν:
1) $(A,B,P)=2$. 2) $(A,P,B)=-2$. 3) $(P,A,B)=\frac{1}{2}$.

(19) Αν ΑΒΓΔ παρ/μο με $A(3,-7)$, $B(5,-7)$, $\Gamma(-2,5)$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του Δ.

(20) Αν το $M(2,-1)$ χωρίζει το εφαρμοστό (A_1,A_2) σε λόγο -2 και οι συντεταγμένες του A_1 είναι $(6,2)$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του A_2.

(21) Αν $\vec{\alpha}(1,2)$, $\vec{\beta}(3,-4)$ να βρεθούν οι συντεταγμένες των $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

(22) Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα:
$\vec{\alpha}(\kappa^2+\kappa-2,\ 3\lambda-3)$ να είναι το $\vec{0}$.

(23) Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα:
$\vec{\alpha}(\kappa,\ 2\kappa-\lambda)$, $\vec{\beta}(2\lambda,4)$ να είναι ίσα.

(24) Να βρεθούν τα $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}+\nu\vec{\gamma}=\vec{0}$, όπου
$\vec{\alpha}(1,2)$, $\vec{\beta}(-1,2)$, $\vec{\gamma}(3,4)$.

(25) Κύκλος έχει κέντρο $K(-3,2)$ και διάμετρο AB με $A(1,3)$.
Να βρεθεί το B.

(26) Στον άξονα $x'x$ δίνονται τα σημεία $A(-2)$, $B(4)$, $\Gamma(6)$.
Να βρεθεί σημείο M του <u>άξονα</u> ώστε:
1) $(A,B,M)=4$. 2) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} \cdot \dfrac{\overline{\Gamma M}}{\overline{MA}} = -1$.

(27) Αν τα σημεία $\Delta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$, $E\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$, $Z(1,1)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB, $A\Gamma$, $B\Gamma$ τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα, να βρεθούν οι συντεταγμένες: των κορυφών του A,B,Γ και του βαρύκεντρου G.

▼ **ΣΥΝΘΗΚΗ ΣΥΓΓΡΑΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.** Έστω $\vec{\delta}_1(x_1,y_1)$, $\vec{\delta}_2(x_2,y_2)$.

$$\vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$ (Απόδειξη...)

• $\vec{\delta}_1 \nparallel \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2\}$ βάση του $\mathcal{P}$.

▼ **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ**

Έστω $\vec{\delta}(\alpha,\beta)$. Τότε ο συντελεστής διευθύνσεως του $\vec{\delta}$ είναι: $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$.

•₁ Αν $\beta=0 \Leftrightarrow \vec{\delta} \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda=0$.

•₂ Αν $\alpha=0 \Leftrightarrow \vec{\delta} \parallel y'y \Leftrightarrow$ το λ δεν ορίζεται ($\nexists \lambda \in \mathbb{R}$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΙ.

M₂ → **1)** Για να δείξω ότι δύο συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}_1(x_1,y_1)$, $\vec{\alpha}_2(x_2,y_2)$ είναι:
- → ομόρροπα, δείχνω ότι οι ομώνυμες συντεταγμένες τους, είναι ομόσημες.
- → αντίρροπα, " " " " " " ετερόσημες.

2) Για να δείξω ότι τα $\vec{\alpha}_1(x_1,y_1)$, $\vec{\alpha}_2(x_2,y_2)$ αποτελούν βάση του δ.ε. $\mathcal{P}$, δείχνω ότι $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (οπότε $\vec{\alpha}_1 \nparallel \vec{\alpha}_2 \Leftrightarrow$ γραμμικώς ανεξάρτητα).

• Η μέθοδος γενικεύεται και για διαν. του $\mathcal{E}$. Δηλαδή: $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3\}$ βάση $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

3) Για να δείξω ότι τρία σημεία Α, Β, Γ με γνωστές συντεταγμένες είναι συνευθειακά, δείχνω ότι 2 από τα διανύσματα που ορίζουν τα Α, Β, Γ (π.χ. τα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$) είναι συγγραμμικά (αφού βρω τις συντεταγμένες τους ... D=0).

(28) Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}(2,1)$, $\vec{\beta}(-3,0)$ είναι συγγραμμικά.

(29) Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{\beta}_1(-1,2)$, $\vec{\beta}_2(-1,-1)$ αποτελούν βάση του διανυσματικού επιπέδου $\mathcal{P}$. Στη συνέχεια να εκφραστεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}(1,-3)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$.

(30) Να υπολογιστεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα: $\vec{\alpha}(\lambda+2, \lambda-1)$, $\vec{\beta}(2, \lambda-2)$ νάναι συγγραμμικά.

(31) Δείξτε ότι τα σημεία $A(0,1)$, $B(2,-3)$, $\Gamma(-1,3)$ είναι συνευθειακά.

(32) Να υπολογιστεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία $A(-1,3)$, $B(\lambda,2)$, $\Gamma(-2,1)$ νάναι συνευθειακά.

(33) Δείξτε ότι τα $A(11,-3)$, $B(1,1)$, $\Gamma(-4,3)$ είναι συνευθειακά. Στη συνέχεια να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $\vec{A\Gamma} = \kappa \cdot \vec{\Gamma B}$ και $\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{A\Gamma}$.

(34) Αν $A(2,1)$, $B(3,5)$, $\Gamma(3,2)$, $\Delta(5,10)$, δείξτε ότι: τα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι ομόρροπα.

(35) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία $A(2,0)$, $B(0,1)$, $\Gamma(2\lambda, \lambda+3)$, $\Delta(5,2)$ είναι κορυφές τραπεζίου. (Δύο περιπτώσεις).

(36) Εστω $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ μια βάση του $\mathbb{P}$ και $\vec{u_1}(3,-2)$, $\vec{u_2}(2\alpha-\beta, \alpha+2\beta-4)$, $\vec{u_3}(\alpha-3\beta+2, -3\alpha+3\beta-2)$ διανύσματα του $\mathbb{P}$.

1) Υπολογίστε τις συντεταγμένες του $\vec{S} = \vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3}$

2) Βρείτε τη σχέση που συνδέει τα α, β, ώστε τα $\vec{S}$ και $\vec{v}(-3,4)$ νάναι συγγραμμικά.

(37) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}(\sigma\upsilon\nu 3t, \eta\mu 3t)$, $\vec{\beta}(\sigma\upsilon\nu 2t, \eta\mu 2t)$, $\vec{\gamma}(\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t)$ του δ.ε. $\mathbb{P}$. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(38) Αν $A(4, \lambda+3)$, $B(9, 4\lambda+1)$ να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα $\vec{AB}$ να είναι παρ/λο προς τον άξονα $x'x$.

(39) Αν $A(-\lambda, 4)$, $B(-2,5)$ να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το $\vec{AB}$ να είναι παρ/λο προς τον άξονα $y'y$.

(40) Να αναλυθεί το $\vec{\alpha}(9,4)$ κατά τις διευθύνσεις των $\vec{\beta}(2,-3)$, $\vec{\gamma}(1,2)$. (Δηλαδή να γραφεί το $\vec{\alpha}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η ανάλυση είναι δυνατή, αν και μόνο αν, τα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμ.ανεξάρτητα και γίνεται ως εξής:
Προσδιορίζω τους $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\vec{\alpha} = \lambda_1\vec{\beta} + \lambda_2\vec{\gamma}$.

(41) Να αναλυθεί το $\vec{\delta}(12,-4)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}(3,1)$, $\vec{\beta}(-2,2)$.

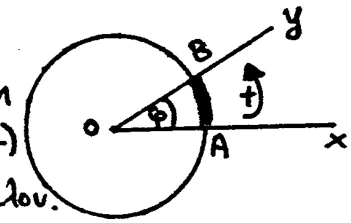
(42) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}(1,3)$, $\vec{\beta}(5,2)$. Να βρεθούν τα συγγραμμικά προς τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα που έχουν άθροισμα το διάνυσμα $\vec{\gamma}(11,7)$.

(43) Δίνονται τα $\vec{\alpha}(2,3)$, $\vec{\beta}(6,9)$, $\vec{\gamma}(10,15)$. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη (λ_1, λ_2) πραγματικών αριθμών που εκφράζουν το $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(44) Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}(12,8)$ δεν μπορεί να αναλυθεί κατά τις διευθύνσεις των $\vec{\alpha}(5,15)$ και $\vec{\beta}(-2,-6)$.

(45) Δείξτε ότι τα $\vec{\alpha}(3,8)$, $\vec{\beta}(2,-1)$, $\vec{\gamma}(2,5)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ανά δύο και γράψτε το $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

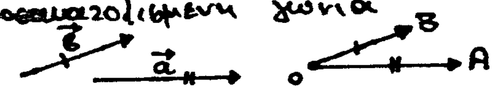
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ.



▼**Γωνία δύο ημιευθειών $(\widehat{Ox,Oy})$** → Κυρτή προσανατολισμένη γωνία με αρχική πλευρά Ox και τελική Oy. Η φορά της (+ ή −) συμπίπτει με τη φορά του τόξου AB ενός προσανατολισμένου κύκλου.
Η αλγεβρική της τιμή είναι η αλγεβρική τιμή του $\overset{\frown}{AB}$.

π.χ. $\hat{\varphi} = (\widehat{Ox,Oy}) = \overline{AB} = \frac{\pi}{3}$ ενώ $(\widehat{Oy,Ox}) = \overline{BA} = -\frac{\pi}{3}$ → $-\pi < \varphi \le \pi$ ←

▼**Γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$** → Κυρτή προσανατολισμένη γωνία $(\widehat{OA,OB}) = (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ όπου $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$.



- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 0$ • Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Rightarrow (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \pi$
- $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}) = -(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$. • Η γωνία που σχηματίζει το τυχαίο $\vec{\delta}$ με τον x'x γράφεται $(\widehat{\vec{i},\vec{\delta}})$, όπου $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του x'x.

Αλγεβρική τιμή προβολής διανύσματος $\vec{\alpha}$ στον x'x → $\text{προβ}_{x'x}\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \text{συν}(\widehat{\vec{i},\vec{\alpha}})$.
Αλγεβρική τιμή προβολής διανύσματος $\vec{\beta}$ σε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ →
$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = |\vec{\beta}| \cdot \text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ (Απόδειξη...).

▼ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τον αριθμό:

$$\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \begin{cases} |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) & , \text{ αν } \vec{\alpha}\neq\vec{0} \text{ και } \vec{\beta}\neq\vec{0}. \\ 0 & , \text{ αν } \vec{\alpha}=\vec{0} \text{ ή } \vec{\beta}=\vec{0}. \end{cases}}$$

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$. • $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta}) = \lambda\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$. • Γενικά: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} \neq \vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$.

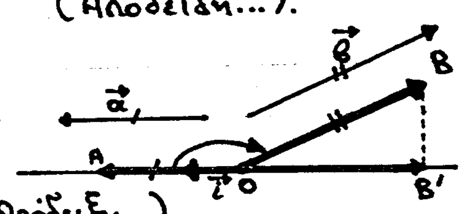
◉ Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ (Το αντίστροφο ισχύει όταν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$).

Εσωτερικό γινόμενο συγγραμμικών διανυσμάτων $(\vec{\alpha}\,/\!/\,\vec{\beta})$ → $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \overline{OA}\cdot\overline{OB}$
όπου $\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{OB} = \vec{\beta}$ πάνω στον άξονα x'x. (Απόδειξη...).

Εσωτερικό τετράγωνο → $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$.

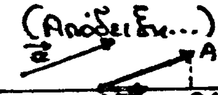
Θ. Το εσωτερικό τετράγωνο ενός διανύσματος είναι ίσο με το τετράγωνο του μέτρου του. Δηλαδή: $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$ (Απόδειξη...).

Άλλες μορφές του εσωτερικού γινομένου:
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \vec{OA}\cdot\vec{OB'} = \overline{OA}\cdot\overline{OB'}$ (Απόδειξη...).



Επιμεριστική ιδιότητα → $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (Απόδειξη...).

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{i} = \vec{OA}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{OA'} = 1\cdot\overline{OA'} = \overline{OA'}$.



▼**ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.** Έστω $\vec{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2)$ και $\vec{\beta}(\beta_1,\beta_2)$.

Θ. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους. Δηλαδή: $\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}$. (1) (Απόδειξη...).

- Για $\vec{\beta} = \vec{\alpha}$ η (1) δίνει την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού τετραγώνου: $\vec{\alpha}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, οπότε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$.

ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ → $\vec{\alpha}\neq\vec{0},\ \vec{\beta}\neq\vec{0}:\ \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

Θ. Δύο μη μηδενικά διανύσματα είναι κάθετα, αν και μόνο αν, το εσωτερικό γινόμενό τους είναι μηδέν. (Απόδειξη...)

• $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0$ • $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$: → $d(A,B)=|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ → $$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}.\quad(1)$$

• Από το $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ορίζεται το μέτρο της γεωμετρικής (μη προσανατολισμένης) γωνίας που σχηματίζεται από ημιευθείες ομόρροπες προς τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Η γεωμετρική αυτή γωνία είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία, αν το 2ο μέλος της (1) είναι αριθμός θετικός, μηδέν ή αρνητικός αντίστοιχα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ Για τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύουν: (Να δειχτούν...)

1) $(\vec{\alpha}\pm\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\pm2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2$. 2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2$. 3) $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

ΜΕΘΟΔΟΙ

M_3 → Για να δείξω ότι: **1)** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}:\ \vec{\alpha}\neq\vec{0},\ \vec{\beta}\neq\vec{0}$, δείχνω ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

Γενικά: Για να δείξω ότι δύο ευθείες είναι κάθετες, θεωρώ δύο μη μηδενικά διανύσματα που έχουν φορείς τις ευθείες αυτές και δείχνω ότι είναι κάθετα.

2) Δύο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά, δείχνω ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{OA}\cdot\vec{OB}$ όπου $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=\vec{\beta}$.

M_4 → Για να βρω: **1)** Το μέτρο $|\vec{\alpha}|$ ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ του οποίου δεν γνωρίζω τις συντεταγμένες, χρησιμοποιώ τη σχέση $|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$, εκφράζοντας το $\vec{\alpha}$ του 2ου μέλους με διανύσματα γνωστά.

• Το ίδιο κάνω, όταν θέλω να δείξω ότι το $|\vec{\alpha}|$ συνδέεται σε κάποια σχέση, με τα μέτρα ή τις αλγεβρικές τιμές ή τα εσωτερικά γινόμενα άλλων διανυσμάτων.

2) Τη γεωμετρική γωνία ω που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, χρησιμοποιώ τη σχέση
$$\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$$ όπου $0\leq\omega\leq\pi$ και βρίσκω την ω.

3) Τις συντεταγμένες (α_1,α_2) ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$, δουλεύω ως εξής:

i) Αν το $\vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικό με ένα διάνυσμα $\vec{\beta}(\beta_1,\beta_2)$, τότε $\vec{\alpha}=(\lambda\beta_1,\lambda\beta_2)$: $\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε αρκεί να υπολογιστεί το λ.

ii) Αν το $\vec{\alpha}$ σχηματίζει γνωστές γωνίες με δοσμένα διανύσματα, τότε παίρνω τα συνημίτονα των γωνιών αυτών συναρτήσει των συντεταγμένων των διανυσμάτων και από το σύστημα που προκύπτει βρίσκω τις συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(46) Δείξτε ότι: το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta} - \vec{x}$: $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, είναι κάθετο στο $\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

(47) Δείξτε ότι: τα ύψη τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(48) Δείξτε ότι: οι διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται κάθετα.

(49) Δείξτε ότι: στο ισοσκελές $\hat{A}B\Gamma$ $(AB=A\Gamma)$ η διάμεσος AM είναι κάθετη στη βάση $B\Gamma$.

(50) Δείξτε ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

(51) Να εξεταστεί: αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}(2,5)$, $\vec{\beta}(6,3)$ είναι κάθετα.

(52) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) + 3\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$.

(53) Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = -\frac{\pi}{3}$ να βρεθεί το μέτρο του $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

(54) Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και $|3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| = \sqrt{13}$ να βρεθεί το μέτρο του $\vec{\beta}$.

(55) Αν $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=4$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{2}$ να βρεθεί το μέτρο του $\vec{\gamma} = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha} + 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(56) Αν $\vec{\alpha}(1,2)$, $\vec{\beta}(-3,-4)$ να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta} \perp \vec{\beta}$.

(57) Αν $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=4$, $|\vec{\gamma}|=5$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ να βρεθεί το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

(58) Οι πλευρές ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν μήκος 2.
Αν $\vec{B\Gamma} = \vec{\alpha}$, $\vec{\Gamma A} = \vec{\beta}$, $\vec{AB} = \vec{\gamma}$, δείξτε ότι: $\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = -6$.

(59) Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$, δείξτε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} - \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = \frac{3}{2}$.

(60) Δείξτε ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

(61) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta} \perp 5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$,
να βρεθεί η γεωμετρική γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(62) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$, δείξτε ότι: $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = (\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}) = (\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}}) = \frac{2\pi}{3}$.

(63) Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\delta} = 3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ να βρεθεί η γεωμετρική γωνία των $\vec{\delta}, \vec{\alpha}$.

(64) Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\alpha} \in \mathbb{P}$ με μέτρο 1 που να σχηματίζει με τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ των αξόνων γωνίες $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{\pi}{3}$ αντίστοιχα.

(65) Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$ να υπολογιστεί το συν$(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\alpha}-\vec{\beta}})$.

(66) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}+5\vec{\beta}$, $\vec{\delta} = \vec{\beta}-5\vec{\alpha}$, δείξτε ότι:
τα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ είναι κάθετα και έχουν ίδια μέτρα.

(67) Για τα μη συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$ $\vec{\gamma}$ ισχύουν:
$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$, $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$, $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$.
Δείξτε ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| = 2$ και συν$(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(68) Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 2$, δείξτε ότι: $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

(69) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μοναδιαία διανύσματα και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \theta$, δείξτε ότι:
1) $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = 2\cdot|\eta\mu\frac{\theta}{2}|$. 2) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 2\cdot|\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}|$.

(70) Να υπολογιστεί το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ πλευράς α.

(71) Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $(\hat{A}=90^\circ)$ δείξτε ότι: 1) $\vec{AB}^2=\overline{B\Gamma}\cdot\overline{B\Delta}$. 2) $\vec{A\Delta}^2=\overline{B\Delta}\cdot\overline{\Delta\Gamma}$.

(72) Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:
$\alpha=\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\sigma\upsilon\nu B$.

(73) Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το ύψος ΑΔ και το ορθόκεντρο Η. Δείξτε ότι: $\overline{\Delta A}\cdot\overline{\Delta H}=\overline{\Delta B}\cdot\overline{\Gamma\Delta}$.

(74) Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ και ύψος ΑΔ, δείξτε ότι:
1) $\vec{AB}^2+\vec{A\Gamma}^2=2\vec{AM}^2+\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}^2$. 2) $\vec{AB}^2-\vec{A\Gamma}^2=2\overline{B\Gamma}\cdot\overline{M\Delta}$.

(75) Αν ΑΔ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ και $|\vec{AB}|=\kappa$, $|\vec{A\Gamma}|=\lambda$, $(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Delta}})=\vartheta$, δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\dfrac{\kappa+\lambda\sigma\upsilon\nu A}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2+2\kappa\lambda\sigma\upsilon\nu A}}$.

(76) Σε κανονικό τετράεδρο ΚΑΒΓ το μέτρο των πλευρών του είναι 1. Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι: $|\vec{K\Theta}|=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(77) Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ, παίρνουμε τμήματα ΒΚ=ΓΛ. Δείξτε ότι: $A\Lambda\perp\Delta K$.

M5 → Για να αναλύσω το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους $(\vec{p}\perp\vec{q})$ από τις οποίες η μία $(\vec{q})$ έχει τη διεύθυνση γνωστού διανύσματος $\vec{\alpha}$, δουλεύω με ένα από τους εξής 2 τρόπους:

α' τρόπος: $\vec{p}+\vec{q}=\vec{\beta} \overset{\vec{q}/\!/\vec{\alpha}}{\Longrightarrow} \vec{p}+\kappa\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Rightarrow (\vec{p}+\kappa\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{p}\vec{\alpha}+\kappa\vec{\alpha}^2=\vec{\alpha}\vec{\beta}$
$\overset{\vec{p}\perp\vec{\alpha}}{\Longrightarrow} 0+\kappa\vec{\alpha}^2=\vec{\alpha}\vec{\beta} \Rightarrow \kappa=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}$.
Έτσι βρίσκεται το κ, δηλαδή η συνιστώσα $\vec{q}=\kappa\vec{\alpha}$, άρα και η $\vec{p}=\vec{\beta}-\vec{q}$.
β' τρόπος: Με σύστημα υπολογίζω τις συντεταγμένες των $\vec{p},\vec{q}$.

(78) Το διάνυσμα $\vec{\beta}(8,1)$ να αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να'ναι παρ/λη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}(2,-3)$.

(79) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}(2,3)$ σε δύο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους, ώστε η μία να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}(1,-2)$.

(80) Αν $|\vec{\alpha}|=\frac{1}{4}$, $|\vec{\beta}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $|\vec{\gamma}|=12$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{3}$, $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$, να αναλυθεί το $\vec{\gamma}$, σύμφωνα με τις διευθύνσεις των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Στον άξονα $x'x$ παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ με τετμημένες ρ_1, ρ_2, ρ_3 αντίστοιχα, όπου ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες της εξίσωσης $x^3-3x^2-x+3=0$. $(\rho_1>\rho_2>\rho_3)$.
Να βρεθεί σημείο Μ του άξονα, ώστε: $\dfrac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}}+\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=0$.

② Στον άξονα $x'0x$ δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και θέτουμε:
$f(M)=\alpha\cdot\overline{MA}+\beta\cdot\overline{MB}+\gamma\cdot\overline{M\Gamma}$ όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Δείξτε ότι: 1) υπάρχει ένα μόνο σημείο Θ του $x'0x$ ώστε $f(\Theta)=0$ και
2) για κάθε Μ είναι: $f(M)=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\overline{M\Theta}$.

③ Στον άξονα $x'x$ δίνονται τα σημεία $A(-2)$, $B(3)$. Να βρεθεί σημείο Μ του άξονα, ώστε: 1) $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2-\overline{MA}\cdot\overline{MB}=31$. 2) $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}+\dfrac{\overline{BM}}{\overline{MA}}=-2$

④ Στον άξονα $x'x$ δίνονται τα σημεία $A(\alpha)$, $B(\beta)$ με $\alpha\neq\beta$ και Κ το μέσο του ΑΒ.
Δείξτε ότι: 1) $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MK}^2-\overline{KA}^2$. 2) $\overline{MA}^2-\overline{MB}^2=2\overline{AB}\cdot\overline{KM}$.

⑤ Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε: 1) Το διάνυσμα $\vec{\alpha}(\lambda^2-49,\lambda+7)$ να είναι το $\vec{0}$.
2) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}(\lambda^2-7\lambda+18, 5\lambda-4)$ και $\vec{\beta}(6,4\lambda-1)$ να είναι ίσα.

⑥ Αν $B(2,0)$ και $\Gamma(0,1)$ να βρεθούν τα σημεία $A(x,y)$ έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισόπλευρο.

⑦ Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ είναι τα σημεία $\Delta(4,5)$, $E(2,8)$, $Z(3,6)$ αντίστοιχα.
1) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του Α, Β, Γ.
2) Δείξτε ότι οι πλευρές του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι παράλληλες στις πλευρές του ΔΕΖ.

⑧ Αν $\vec{\alpha}(-2,3)$, $\vec{\beta}(4,-1)$, $\vec{u}(x+y,3y)$, $\vec{v}(5x+y-2,3y+4)$, να βρεθούν τα x,y ώστε: $\vec{\alpha}\parallel\vec{u}$ και $\vec{\beta}\parallel\vec{v}$.

⑨ Δίνονται τα σημεία $A(0,1)$, $B(2,-3)$, $\Gamma(-1,3)$.
1) Δείξτε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.
2) Να βρεθεί σημείο Ρ του επιπέδου, έτσι ώστε να είναι: $|\vec{PB}|=|\vec{P\Gamma}|$ και $|\vec{PA}|=5$.

⑩ Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-4\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2\sqrt{5}$,
δείξτε ότι: $|\vec{\alpha}|=4$ και $|\vec{\beta}|=2$.

⑪ Αν $|\vec{\alpha}|=4$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{2\pi}{3}$ να βρεθούν:
η $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ και η $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$

⑫ Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ σχηματίζουν ανά δύο γωνία $\dfrac{\pi}{3}$,
δείξτε ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=\sqrt{11}$.

⑬ Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$
και $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, δείξτε ότι: $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\alpha}})+(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}})=\pi$.

(14) Αν $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}+\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}-\vec{\beta}$, δείξτε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

(15) Αν το σύνολο $\{\vec{\alpha},\vec{\beta}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{P}$ και το διάνυσμα $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ είναι κάθετο στα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$, δείξτε ότι το $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του $\mathcal{P}$.

(16) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}(-2,2)$ και η διανυσματική ευθεία $\mathcal{A}$ που παράγεται από το $\vec{\beta}(-1,3)$. Να βρεθεί το σύνολο των διανυσμάτων $\vec{w} \in \mathcal{A}$, για τα οποία ισχύει: $|\vec{w}-\vec{\alpha}|=|\vec{\alpha}|$.

(17) Σε ορθοκανονικό σύστημα δίνονται τα σημεία $B(-1,2)$, $\Gamma(1,2)$. Να βρεθεί σημείο Α του επιπέδου έτσι ώστε το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ να είναι ορθογώνιο στο Α και ισοσκελές.

(18) Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(4,1)$. Να βρεθεί σημείο Μ πάνω στον άξονα $x'x$, έτσι ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο.

(19) Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}=3\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{\beta}=-\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{\gamma}=-2\vec{i}-\vec{j}$ σχηματίζουν τρίγωνο. (Βλέπε άσκηση 34.Φ – Διανύσματα).
Εξετάστε, αν το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

(20) Δείξτε ότι οι μεσοκάθετες των πλευρών τριγώνου, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(21) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\vec{AM}\cdot\vec{AB}+\vec{AM}\cdot\vec{A\Gamma}=0$

(22) Σε ορθοκανονικό σύστημα $(O,\vec{i},\vec{j})$ δίνονται τα σημεία $A(\alpha,\beta)$, $B(-\beta,\alpha)$ και $\Gamma(\beta,-\alpha)$. 1) Δείξτε ότι το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
2) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $|\vec{AB}|=12\sqrt{2}$ και η γωνία που σχηματίζει το $\vec{OA}$ με τον άξονα $x'x$ να είναι $\frac{\pi}{3}$.

(23) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{6}$ και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}-3\vec{\beta}$
δείξτε ότι: $|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=5$.

(24) Αν $\vec{\alpha}(4,\lambda,11)$, $\vec{\beta}(2,-3\lambda,-5)$, $\vec{\gamma}(\kappa,1,-1)$ να βρεθούν τα $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να είναι κάθετο στα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Αν $\vec{\alpha}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{\beta}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \in \mathcal{E}$ τότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

(25) Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha}(2,2,-1)$, $\vec{\beta}(1,-3,2)$, $\vec{\gamma}(1,1,-\frac{1}{2})$.
1) Να αναλυθεί το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$.
2) Δείξτε ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
3) Να εξηγήσετε γιατί το $\vec{\beta}$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$. (Βλέπε Ασκ. 402) (ΘΕΜΑ ° 81).

(26) Σε τετράεδρο ΟΑΒΓ δείξτε ότι: 1) Αν $\vec{OA}\cdot\vec{B\Gamma}=0$ και $\vec{OB}\cdot\vec{\Gamma A}=0$ τότε: $\vec{O\Gamma}\cdot\vec{AB}=0$.
2) Αν $\vec{OA}\cdot\vec{B\Gamma}=0$ και d_1 η απόσταση των μέσων των ΟΒ, ΓΑ και d_2 η απόσταση των μέσων των ΟΓ και ΑΒ, τότε: $d_1=d_2$. (ΘΕΜΑ ° 83).

Η ΕΥΘΕΙΑ.

Γράφημα G μιας συνάρτησης f ορισμένης στο A, λέμε το σύνολο των ζευγών $(x, f(x))$: $x \in A$. Κάθε ζεύγος $(x,y) \in G$ παριστάνεται με ένα σημείο M του επιπέδου xOy.

Γραφική παράσταση της f: λέμε το σύνολο C των σημείων $M(x,y)$: $(x,y) \in G$.

● → $M \in C \Leftrightarrow$ οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση $y=f(x)$, $x \in A$. Το σύνολο λύσεων της $y=f(x)$, λέγεται εξίσωση της C, διότι απο αυτό προσδιορίζεται η γραφική παράσταση C.

● Ευθεία $\varepsilon // y'y$ μπορεί να τέμνει τη C_f σε ένα το πολύ σημείο. (Αν τέμνει σε περισσότερα τότε η f δεν είναι συνάρτηση).

Εξίσωση γραμμής C: λέμε το σύνολο των σημείων που προσδιορίζονται απο το σύνολο λύσεων μιας εξίσωσης $\varphi(x,y)=0$.

● Οι συντεταγμένες x,y κάθε σημείου M της C επαληθεύουν τη $\varphi(x,y)=0$.

● Κάθε σημείο που οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη $\varphi(x,y)=0$ ανήκει στη C.

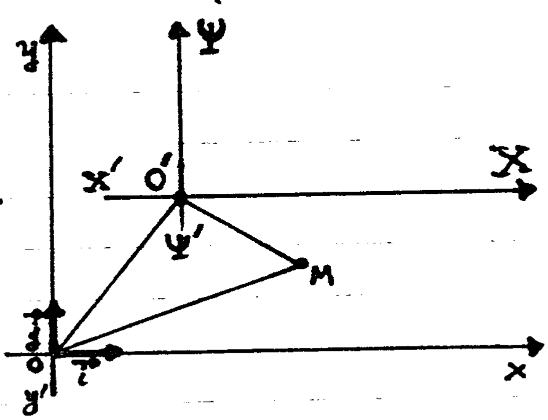
● → Για να βρώ τα σημεία τομής δύο γραμμών (γ_1): $\varphi_1(x,y)=0$ και (γ_2): $\varphi_2(x,y)=0$, λύνω το σύστημά τους και βρίσκω τις συντεταγμένες των σημείων τομής.

ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ.

Εστω (x,y) οι συντεταγμένες σημείου M ως προς ένα σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ και (X, Ψ) ως προς ένα νέο σύστημα $(O', \vec{i}, \vec{j})$ όπου $O'(x_0, y_0)$.

Τότε: $x = x_0 + X$ και $y = y_0 + \Psi$

● Αν $f(x,y)=0$ η εξίσωση μιας γραμμής C ως προς το $(O, \vec{i}, \vec{j})$ τότε η C ως προς το $(O', \vec{i}, \vec{j})$ είναι: $F(X,\Psi)=0$, όπου $X = x - x_0$, $\Psi = y - y_0$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Να βρεθούν τα σημεία τομής: 1) της ευθείας $x-y=0$ και του κύκλου $x^2+y^2=1$.
2) Των γραμμών (c_1): $2x^2-5y^2=27$ και (c_2): $x^2+y^2=17$.

② Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε): $(3\lambda+2)x-4\lambda y+5\lambda-1=0$ να διέρχεται απο τη τομή των ευθειών (ε_1): $3x-5y+9=0$ και (ε_2): $x+2y-8=0$.

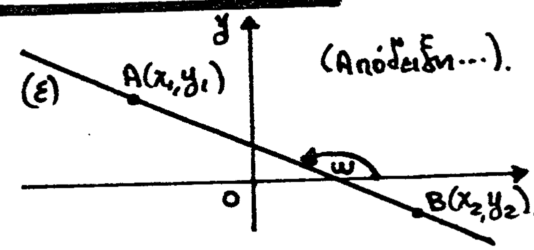
③ Να βρεθεί σημείο M που ισαπέχει απο τα σημεία $A(2,5)$, $B(7,4)$, $\Gamma(5,2)$.

④ Στο $(O, \vec{i}, \vec{j})$ δίνονται τα σημεία $O_1(3,-2)$, $O_2(4,3)$ και οι γραμμές (c_1): $4x+5y-7=0$, (c_2): $(x-1)^2+(y+6)^2=24$. Να βρεθούν οι εξισώσεις:
1) Της (c_1) ως προς το $(O_1, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Της (c_2) ως προς το $(O_2, \vec{i}, \vec{j})$.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

▼ **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΩΣ ΕΥΘΕΙΑΣ (ε)** ⟶ $\lambda = \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, όπου

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της (ε) και
ω η θετική κυρτή γωνία που σχηματίζει
η (ε) με τον $x'x$. ⟶ $0 \leq \omega < \pi$



(Απόδειξη...).

- $\omega = 0 \Leftrightarrow \varepsilon // x'x \Leftrightarrow \lambda = 0$.
- $\omega = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varepsilon // y'y \Leftrightarrow \lambda \notin \mathbb{R}$.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡ/ΛΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

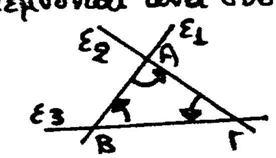
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. (Απόδειξη...).

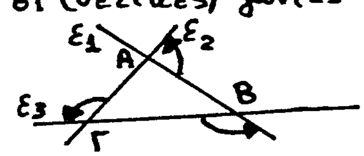
Εφαπτομένη γωνίας δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \not\parallel y'y$ ⟶ $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}$ (Απόδειξη...).

- Αν $\varepsilon_1 // y'y \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{1}{\lambda_2}$
- Αν $\varepsilon_2 // y'y \rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{1}{\lambda_1}$.

- Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ τρεις ευθείες που τέμνονται ανά δύο, τότε οι (θετικές) γωνίες $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2})$, $(\widehat{\varepsilon_2, \varepsilon_3})$, $(\widehat{\varepsilon_3, \varepsilon_1})$ θα είναι
ή και οι 3 εσωτερικές
ή και οι 3 εξωτερικές του
τριγώνου ΑΒΓ που σχηματίζουν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.





▼ **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ (ε).**

1) Η (ε) διέρχεται από σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι // προς διάνυσμα $\vec{\delta}(\alpha, \beta)$: $\vec{\delta} \neq \vec{0}$.

⟶ $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ (Απόδειξη...)

- Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ γράφεται: $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$.

2) Η (ε) διέρχεται από σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως λ.

⟶ $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$ (Απόδειξη...)

- Αν $\lambda = 0 \Leftrightarrow \varepsilon // x'x \Leftrightarrow y = y_0$.

Αν διέρχεται από το $B(0, \beta)$ ⟶ $y = \lambda x + \beta$. Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση: $y = 0$

Αν ,, ,, ,, $O(0,0)$ ⟶ $y = \lambda x$.

3) Η (ε) διέρχεται από δύο σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

⟶ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (Απόδειξη...)

- Αν $x_1 \neq x_2$ και $y_1 \neq y_2 \Leftrightarrow \varepsilon \not\parallel x'x, y'y$ ⟶ $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$.

- Αν διέρχεται από τα $A(\alpha, 0) \in x'x$, $B(0, \beta) \in y'y$ ⟶ $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} = 1$.

4) ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΥΘΕΙΑΣ $\to$ $\boxed{Ax+By+\Gamma=0 \quad \text{με} \quad |A|+|B|\neq 0}$

Κάθε εξίσωση της μορφής αυτής παριστάνει ευθεία. (Απόδειξη...)

- Αν $B\neq 0 \to \lambda=-\dfrac{A}{B}$ • Αν $\Gamma=0 \Leftrightarrow y=\lambda x$ (διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$).
- Αν $A=0 \Leftrightarrow y=y_0 \Leftrightarrow \varepsilon // x'x$.
- Αν $B=0 \Leftrightarrow x=x_0 \Leftrightarrow \varepsilon // y'y$. ← ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν είναι συνάρτηση.

Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση: $x=0$.

Διάνυσμα $\parallel$ ή $\perp$ σε ευθεία: Η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ με $|A|+|B|\neq 0$ είναι:

Παρ/λη προς το διάνυσμα: $\vec{\delta}(B,-A)$. (Απόδειξη...).
Κάθετη προς το διάνυσμα: $\vec{\delta}'(A,B)$.

▼ Εφαρμογή - θεωρία. (Απόδειξη...)

Τρείς ευθείες
$(\varepsilon_1): \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1=0$
$(\varepsilon_2): \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2=0$
$(\varepsilon_3): \alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3=0$
διέρχονται από το ίδιο σημείο αν και μόνο αν: $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=0$ και

$|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3|\neq 0$ όπου $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ οι ελάσσονες ορίζουσες των $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$.

▼ Εφαρμογή - θεωρία. (Απόδειξη...).

Τρία σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν: $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$.

▼ ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ $(\varepsilon_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ και $(\varepsilon_2): A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$.

1) $\varepsilon_1\cap\varepsilon_2=\{M\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$.

2) $\varepsilon_1//\varepsilon_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=0$ και $\left(\begin{vmatrix}A_1 & \Gamma_1\\ A_2 & \Gamma_2\end{vmatrix}\neq 0 \text{ ή } \begin{vmatrix}B_1 & \Gamma_1\\ B_2 & \Gamma_2\end{vmatrix}\neq 0\right)$.

3) $\varepsilon_1\equiv\varepsilon_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_1 & \Gamma_1\\ A_2 & \Gamma_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}B_1 & \Gamma_1\\ B_2 & \Gamma_2\end{vmatrix}=0$. (Απόδειξη...).

- Με το περιορισμό $A_2\cdot B_2\cdot\Gamma_2\neq 0$ οι συνθήκες αυτές γράφονται:

$\varepsilon_1\cap\varepsilon_2=\{M\} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$. $\varepsilon_1//\varepsilon_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$. $\varepsilon_1\equiv\varepsilon_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$.

▼ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ.

Έστω, ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ και σημείο $P(x_1,y_1)\notin(\varepsilon)$.

Τότε: $\to$ $d(P,\varepsilon)=\dfrac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

▼ Εφαρμογή - θεωρία. (Απόδειξη...).

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

από τις συντεταγμένες των κορυφών του $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ $\to$ $E=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|$.

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΕΥΘΕΙΩΝ.

Μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών, λέμε γενικά:
μια πρωτοβάθμια ως προς x και y εξίσωση που περιέχει μία παράμετρο, και η οποία για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου από το $\mathbb{R}$, ορίζει ένα σύνολο ευθειών.

Παραδείγματα:

1) Η $y=2x+\mu$ είναι μια οικογένεια της οποίας κάθε ευθεία μετατοπίζεται παρ/λα προς την ευθεία $y=2x$.
2) Η $y=\lambda x$ είναι μια οικογένεια της οποίας κάθε ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
3) Η $y=\lambda x+2$ είναι μια οικογένεια της οποίας κάθε ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

▼ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ.

Έστω ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, $(\varepsilon_2): A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ τέμνονται στο $P(x_0,y_0)$.
Τότε η εξίσωση: (1): $\varepsilon_1+\kappa\cdot\varepsilon_2=0$, $\forall\kappa\in\mathbb{R}$ που γράφεται ισοδύναμα $(A_1+\kappa\cdot A_2)x+(B_1+\kappa\cdot B_2)y+(\Gamma_1+\kappa\cdot\Gamma_2)=0$, είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών, που μαζί με την ε_2 * αποτελούν τη δέσμη των ευθειών με κέντρο το σημείο τομής P των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

● Η ίδια δέσμη ορίζεται από την ε_1 και την $\kappa\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\forall\kappa\in\mathbb{R}$.

* Δεν υπάρχει τιμή του κ για την οποία η (1) να δίνει την εξίσωση της (ε_2), ενώ για $\kappa=0$ δίνει την (ε_1). (Απόδειξη...).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ

M_1 → Για να βρω τις συντεταγμένες σημείου P, δουλεύω ως εξής:

1) Αν P μέσο $AB \Rightarrow P\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$
2) Αν $(A,B,P)=\lambda\neq-1 \Rightarrow P\left(\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}, \frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}\right)$.
3) Αν $P\in(c): f(x,y)=0$ και πληρεί μια σχέση (σ) $\Rightarrow \begin{cases} f(x_P,y_P)=0 \\ \sigma(x_P,y_P)=0 \end{cases} \Rightarrow$ Οι πραγματικές λύσεις του (Σ) είναι οι συντεταγ. του P.
4) Αν $P\in(c_1): f_1(x,y)=0$ και $P\in(c_2): f_2(x,y)=0$ $\Rightarrow$ Οι πραγματικές λύσεις του $(\Sigma): \begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$ είναι οι συντεταγμένες του P.

⑤ Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραμμών:
1) $(c_1): x+2y-7=0$, $(c_2): x^2+4y^2=25$.
2) $(c_1): x^2-y^2=7$, $(c_2): x^2+y^2=11$.

(6) Δίνονται τα σημεία $A(1,-3)$, $B(5,-1)$, $\Gamma(4,2)$ και η γραμμή $(c): x^2+y^2=5$.
Να βρεθεί σημείο P της (c) τέτοιο ώστε $P\Gamma // AB$.

(7) Να βρεθεί σημείο P της ευθείας $(\varepsilon): 2x-y+10=0$ που να ισαπέχει από τα σημεία $A(-5,-2)$, $B(3,6)$.

(8) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού A' του σημείου $A(1,5)$ ως προς την ευθεία $(\varepsilon): x-2y+2=0$.

(9) Να βρεθεί η προβολή K του σημείου $A(6,-6)$ στην ευθεία $(\varepsilon): 4x-5y+13=0$.

(10) Βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού M' του σημείου $M(8,-2)$ ως προς την ευθεία που ορίζουν τα σημεία $A(3,-4)$, $B(-1,-2)$.

(11) Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $A(1,-2)$, $B(2,3)$ και εμβαδόν $E=8$.
Να βρεθεί το Γ αν ξέρουμε ότι ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon): 2x+y-2=0$.

(12) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(0,2)$, $B(3,7)$, $\Gamma(5,1)$.
Να βρεθούν οι συντεταγμένες του:
1) Περικέντρου K. 2) Βαρύκεντρου G. 3) Ορθόκεντρου H.

(13) Να βρεθεί το σημείο τομής O των διαγωνίων τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ που έχει κορυφές $A(-3,1)$, $B(3,9)$, $\Gamma(7,6)$, $\Delta(-2,-6)$.

(14) Αν οι εξισώσεις των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ είναι
$AB: 5x-y=17$, $A\Gamma: 7x+4y=13$, $B\Gamma: 2x+5y=23$,
να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

(15) Αν $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $A(0,5)$ και δύο πλευρές του έχουν εξισώσεις $(\varepsilon_1): 3x-4y-3=0$, $(\varepsilon_2): 4x+3y-4=0$,
να βρεθούν οι συντεταγμένες των B, Γ, Δ.

(16) Σημείο $K(x,y)$ του επιπέδου κινείται έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου KAB με $A(-2,-1)$, $B(3,2)$ να είναι σταθερό και ίσο με 12. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου K.

(17) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.
Προεκτείνουμε τις πλευρές του AB, $B\Gamma$, ΓA κυκλικά, και στις προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα:
$BK=AB$, $\Gamma\Lambda=B\Gamma$, $AM=\Gamma A$.
Αν $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$ να βρεθούν:
1) Το βαρύκεντρο G του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.
2) Οι κορυφές K, Λ, M του $\overset{\triangle}{K\Lambda M}$.
3) Το βαρύκεντρο G' του $\overset{\triangle}{K\Lambda M}$.
Τι συμπεραίνετε για τα βαρύκεντρα G και G';

M₂ → Για να βρώ εξίσωση ευθείας (ε), δουλεύω ως εξής:

Γενικά: 1) Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ $\in(\varepsilon) \Rightarrow (\varepsilon)$: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$ ή $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}$: $x_1\neq x_2 \wedge y_1\neq y_2$.

• Αν $x_1=x_2 \Rightarrow (\varepsilon): x=x_1$.

• Αν $y_1=y_2 \Rightarrow (\varepsilon): y=y_1$.

2) Αν $A(x_0,y_0)\in(\varepsilon)$ και $\lambda_\varepsilon=\lambda$ $\Rightarrow (\varepsilon)$: $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.

Ειδικά:

i) Αν $\varepsilon \parallel \varepsilon'$ = γνωστή $\Rightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon'} \Rightarrow (\varepsilon): y=\lambda_\varepsilon x+K$ και προσπαθώ να βρώ το K

ii) Αν $\varepsilon \perp \varepsilon'$ = " $\Rightarrow \lambda_\varepsilon=-\dfrac{1}{\lambda_{\varepsilon'}} \Rightarrow (\varepsilon): y=-\dfrac{1}{\lambda_{\varepsilon'}}x+K$ " " " " " ".

iii) Αν $(\widehat{\varepsilon,\varepsilon'})=\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi=\dfrac{\lambda_\varepsilon-\lambda_{\varepsilon'}}{1+\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\varepsilon'}}$, οπότε βρίσκω το λ_ε και μετά την (ε).

iv) Αν η (ε) πρέπει να διέρχεται από γνωστό σημείο $P(x_0,y_0)$, επειδή οι ευθείες που διέρχονται από το P είναι οι: $x=x_0$ και $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, εξετάζω αρχικά αν η $x=x_0$ είναι η (ε) και στη συνέχεια από τα δοσμένα της άσκησης υπολογίζω το λ και άρα την (ε).

v) Αν η (ε) ανήκει στη γνωστή δέσμη: $(A_1x+B_1y+\Gamma_1)+K\cdot(A_2x+B_2y+\Gamma_2)=0, K\in\mathbb{R}$ δηλαδή σε μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών, τότε θα είναι της μορφής: $(A_1+KA_2)x+(B_1+KB_2)y+(\Gamma_1+K\Gamma_2)=0$ (1).

Στη συνέχεια από τα δοσμένα της άσκησης υπολογίζω το K και άρα την (ε) από την (1).

Το K μπορεί να βρεθεί και από το κέντρο της δέσμης, το οποίο θα επαληθεύει την (1). Δηλαδή βρίσκω από τα δοσμένα της άσκησης το κέντρο της δέσμης και από την (1) το K.

18 Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές $A(4,0)$, $B(1,3)$, $\Gamma(-4,-3)$.
Να βρεθούν οι εξισώσεις: 1) Των πλευρών του. 2) Των διαμέσων του 3) Των υψών του. 4) Των μεσοκαθέτων των πλευρών του.

19 Στο τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,-1)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,5)$ να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στη διάμεσο BM.

20 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που:

1) Διέρχεται από το $A(4,3)$ και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

2) Έχει συντεταγμένες επί την αρχή −4 και 7.

3) Διέρχεται από το $M(3,-7)$ και έχει ίσες συντεταγμένες επί την αρχή ($\neq 0$).

21 Τρίγωνο ΑΒΓ έχει: $A(-10,2)$, $B(6,4)$ και ορθόκεντρο $H(5,2)$.
Να βρεθούν: οι εξισώσεις των πλευρών του και οι συντεταγμένες του Γ.

22) Το σημείο $A(-4,5)$ είναι κορυφή τετραγώνου με μια διαγώνιο των $(\varepsilon): 7x-y+8=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

23) Τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,3)$ έχει δύο διαμέσους με εξισώσεις $(\varepsilon_1): x-2y+1=0$, $(\varepsilon_2): y-1=0$. Να βρεθούν οι πλευρές του.

24) Να βρεθεί η μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1): x-2y-4=0$, $(\varepsilon_2): x-2y+2=0$.

25) Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(1,1)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 2.

26) Οι εξισώσεις των πλευρών τριγώνου είναι: $3x-5y-15=0$, $x-2y-3=0$, $2x+2y-2=0$. Να βρεθεί το εμβαδόν του.

27) Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,3)$, $\Gamma(2,-4)$.
1) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους ΑΚ.
2) ,, ,, ,, ,, της διαμέσου ΒΜ.
3) ,, ,, το σημείο τομής των ΑΚ και ΒΜ. (ΘΕΜΑ' 80)

28) Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(2,1)$ και οι εξισώσεις $3x+y-11=0$, $x-y+3=0$ δύο υψών του.
Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του και τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ. (ΘΕΜΑ' 84)

29) Να βρεθεί η ευθεία που ανήκει στη δέσμη των ευθειών $(\varepsilon_1): 2x+3y-8=0$, $(\varepsilon_2): 3x+4y-11=0$ και περνά από το σημείο $M(5,-1)$.

30) Να βρεθεί ευθεία (ε) που διέρχεται από το $M(3,0)$ και τέμνει τις $(\varepsilon_1): 2x-y-3=0$, $(\varepsilon_2): x+y+3=0$ στα Α, Β, ώστε το Μ να 'ναι μέσο του ΑΒ.

31) Να βρεθεί ευθεία (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το μεταξύ των ευθειών $(\varepsilon_1): 2x-y+5=0$, $(\varepsilon_2): 2x-y+10=0$ τμήμα της έχει μέτρο $\sqrt{5}$. (Υπόδειξη: Οι ευθείες που διέρχονται από το $O(0,0)$ είναι οι: $x=0$, $y=\lambda x$).

32) Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης $(x+2y-4)+\kappa(x-y-1)=0$ που διέρχεται από το κέντρο βάρους του ΑΒΓ με $A(4,-4)$, $B(6,-1)$, $\Gamma(-1,2)$.

33) Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης $(x+y+1)+\kappa(2x-y+2)=0$, από την οποία ισαπέχουν τα σημεία $A(3,1)$, $B(1,-5)$.

34) Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης $(x-3y-3)+\kappa(x+y-2)=0$ που είναι:
1) Παρ/λη στην $(\varepsilon_1): y=5x$. 2) Κάθετη στην $(\varepsilon_2): x+y-4=0$.

35) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το $P(-2,3)$ και από τις οποίες ισαπέχουν τα σημεία $A(-6,1)$, $B(2,7)$.

36) Να βρεθούν οι ευθείες πού 'ναι παρ/λες στην $(\eta): 2x+3y+6=0$ και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνα εμβαδού 3.

M3 → Όταν η εξίσωση μιας ευθείας (ε) (ή περισσοτέρων) έχει συντελεστές που εκφράζονται με τη βοήθεια μιας (ή περισσοτέρων) παραμέτρου μ και ζητείται ο μ ώστε να πληρούται κάποια σχέση, τότε:

1) από τα δοσμένα της άσκησης κατασκευάζουμε εξίσωση με άγνωστο μ της οποίας η λύση μας δίνει το μ.

2) αν οι παράμετροι είναι περισσότερες, τότε κατασκευάζουμε σύστημα με αγνώστους τις παραμέτρους αυτές, το οποίο και επιλύουμε.

(37) Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ στις περιπτώσεις:
1) Η ευθεία $3\mu x+5y+\mu-2=0$ διέρχεται από το σημείο $A(-1,4)$.
2) ,, ,, $4x-\mu y-7=0$ έχει συντελεστή διευθύνσεως 3.
3) ,, ,, $\mu x-y=3\mu-6$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 5.

(38) Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία: $(\mu+2)x+(\mu^2-9)y+3\mu^2-8\mu+5=0$
1) Να είναι παρ/λη στον άξονα $x'x$. 2) Να είναι παρ/λη στον $y'y$.
3) Να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(39) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες: $4x-2y=1$, $3x+9y-12=0$, $(\lambda-1)x+(2\lambda+3)y-7\lambda+13=0$, να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(40) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1): $2x-y+5=0$, (ε_2): $\lambda x-y-2=0$ να τέμνονται στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων, (δ): $y=x$.

(41) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1): $(\lambda-4)x-\lambda y-2=0$, (ε_2): $3\lambda x-(3\lambda+4)y+2=0$, 1) να τέμνονται, 2) να είναι παρ/λες, 3) να είναι κάθετες.

(42) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, αν η αρχή των αξόνων απέχει από την ευθεία (ε): $\lambda x-y+10=0$ απόσταση $d=\sqrt{10}$.

(43) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα σημεία $A(\lambda+1,1)$, $B(1,3)$, $\Gamma(2,-1)$ να είναι συνευθειακά.

(44) Να βρείτε το σημείο $M(\lambda,\lambda)$ που βρίσκεται στην ευθεία AB: $A(1,-2)$, $B(2,4)$.

(45) Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1): $\mu x+(\mu-1)y-4=0$ και (ε_2): $(3\mu+1)x-2\mu y-7=0$ νάναι: 1) Κάθετες. 2) Παράλληλες.

(46) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες: $\alpha x+\beta y+4=0$, $3y=2x+5$ να συμπίπτουν.

(47) Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία: $(\kappa+1)x+(\lambda+1)y+2\kappa-3\lambda+1=0$ να διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(-1,1)$.

(48) Να βρεθούν τα $\mu,\nu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία: $(2\mu+\nu+1)x+(\mu+\nu-2)y+3\mu+\nu+2=0$ να είναι παρ/λη στον $x'x$ και να τέμνει τον $y'y$ στο 2.

M_4 → Αν δοθεί εξίσωση ευθείας (ε) της μορφής: $\varphi(\lambda)\cdot x+f(\lambda)\cdot y+g(\lambda)=0$ και ζητηθεί να δειχθεί ότι διέρχεται από σταθερό σημείο, τότε:

1) Αν οι συντελεστές $\varphi(\lambda)$, $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ είναι α' βάθμια πολυώνυμα του λ, δίνω στην (ε) μορφή εξίσωσης δέσμης, οπότε το σταθερό σημείο είναι το κέντρο της δέσμης. Δηλαδή: $(\varepsilon) \Leftrightarrow f_1(x,y)+\lambda\cdot f_2(x,y)=0$ όπου $f_1(x,y)=0 \to (\varepsilon_1)$ και $f_2(x,y) \to (\varepsilon_2)$. $\Rightarrow$ Το σταθερό σημείο είναι η τομή των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, δηλαδή η λύση του συστήματος: $\{f_1(x,y)=0,\ f_2(x,y)=0\}$.

2) Αν οι συντελεστές $\varphi(\lambda)$, $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ είναι ως προς λ πολυώνυμα βαθμού ≥ 2, τότε: απαιτώ η (ε) να διέρχεται από το $P(x_0,y_0)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και φτάνω σε μηδενικό πολυώνυμο ως προς λ, από το μηδενισμό των συντελεστών του οποίου βρίσκω τα x_0, y_0 και άρα το σταθερό P.

- Η 2η μέθοδος εφαρμόζεται και στη 1η περίπτωση.

(49) Δείξτε ότι η ευθεία (ε): $(2\lambda+1)x+(2\lambda-3)y+5\lambda-7=0$ διέρχεται από σταθερό σημείο, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(50) Όμοια, για την ευθεία (ε): $(4\lambda+5)x+(1-\lambda)y-2\lambda-7=0$.

(51) Όμοια, " " " ": $(2\lambda^2-\lambda-1)x-(\lambda^2-3\lambda+1)y-(\lambda^2+2\lambda-2)=0$.

(52) " , " " " ": $(\lambda^2+6\lambda-1)x-(2\lambda^2+18\lambda+2)y-3\lambda-2=0$.

(53) Δείξτε ότι η εξίσωση: $(\mu^2-1)x+(3\mu^2-2\mu-1)y-5\mu^2+5=0$ είναι ευθεία $\forall \mu \in \mathbb{R}$ εκτός από μία τιμή, και ότι διέρχεται από σταθερό σημείο.

M_5 → Για να δείξω αναλυτικά προτάσεις της Ευκλείδιας Γεωμετρίας (που αναφέρονται σε ιδιότητες υψών, διαμέσων, ... κ.λ.π.) επιλέγω αρχικά ένα σύστημα αξόνων με βασικό κριτήριο την εύκολη έκφραση με συντεταγμένες και εξισώσεις των στοιχείων της άσκησης.

► ΣΥΝΗΘΩΣ, θεωρώ σαν αρχή των αξόνων μια κορυφή του σχήματος και σαν άξονα $x'x$ μια πλευρά του.

(54) Δείξτε ότι τα ύψη τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (α' τρόπος: Πάρτε $B(0,0)$ και $B\Gamma \equiv x'x$. β' τρόπος: Πάρτε $B\Gamma \equiv x'x$ και $\upsilon_\alpha \equiv y'y$).

(55) Δείξτε ότι το μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου ΑΒΓ ισαπέχει από τις κορυφές του.

(56) Δείξτε ότι οι διαγώνιες ρόμβου είναι κάθετες.

(57) Δείξτε ότι η διάμεσος M_1M_2 τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι // με τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμα.

(58) Δείξτε ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών τριγώνου, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(59) Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο, $P \in B\Delta$, τυχόν, Η το συμμετρικό του Γ ως προς Ρ, $HE \perp AB$, $HZ \perp A\Delta$ δείξτε ότι τα Ρ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

•• Για τις ασκήσεις 54-56-57-58 βλέπε και άλλη λύση στις 47-48-Θ20 (ΚΕΦ.2ο) και 10 (ΚΕΦ.1ο)

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

* (1) Δείξτε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1): \alpha x+\beta y=\gamma$, $(\varepsilon_2): \beta x+\gamma y=\alpha$, $(\varepsilon_3): \gamma x+\alpha y=\beta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, αν και μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma \vee \alpha+\beta+\gamma=0$.

(2) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους και της διαμέσου από τη κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ με $A(5,-4)$, $B(-1,3)$, $\Gamma(-3,-2)$.

(3) Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$, $B(-1,0)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας:
1) που είναι κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Β.
2) που είναι παρ/λη στην ΑΒ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(4) Δείξτε ότι το τρίγωνο που έχει εξισώσεις πλευρών τις: $3x+4y-1=0$, $x-7y-17=0$, $7x+y+31=0$, είναι ισοσκελές.

(5) Αν $(\varepsilon_1): 2x-3y+5=0$, $(\varepsilon_2): 3x+2y-7=0$ είναι οι εξισώσεις δύο πλευρών ορθογωνίου ΑΒΓΔ με $A(2,-3)$, να βρεθούν οι άλλες δύο πλευρές.

(6) Αν $(\varepsilon_1): 3\kappa x-3y+5=0$ και $(\varepsilon_2): (1-\kappa)x+(\kappa+1)y+7=0$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$, να βρεθούν οι γωνίες $(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$ και $(\widehat{\varepsilon_2,\varepsilon_1})$.

(7) Δίνονται τα σημεία $A(2,2)$, $B(0,3)$ και η ευθεία $(\varepsilon): x+y-6=0$. Να βρεθεί σημείο Κ της (ε), έτσι ώστε $A\hat{K}B=\frac{\pi}{4}$.

(8) Σε ισόπλευρο τρίγωνο οι εξισώσεις των πλευρών του έχουν συντελεστές διευθύνσεως $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Δείξτε ότι: $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=-3$.

(9) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(3,4)$ και ύψη $B\Theta: x-3y+1=0$, $\Gamma H: x+y-3=0$. Να βρεθούν τα Β, Γ και το τρίτο ύψος ΑΚ.

(10) Αν οι εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι $AB: x+2y-4=0$, $A\Gamma: 3x-y-5=0$, $B\Gamma: 5x+3y+1=0$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου.

(11) Να βρεθεί η ευθεία (ε) που διέρχεται από το $K(4,0)$ και τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1): 2x-y-4=0$ και $(\varepsilon_2): 3x+y-3=0$ στα Α, Β, ώστε το Κ να είναι μέσο του ΑΒ.

(12) Να βρεθεί το μήκος του ύψους ΑΚ τριγώνου ΑΒΓ με $A(2,2)$, $B(4,5)$, $\Gamma(6,-8)$.

(13) Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών: $\kappa x-3y+\kappa+3=0$, $\kappa\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ποια από αυτές, απέχει από την αρχή των αξόνων, απόσταση ίση με 1.

(14) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παρ/λη προς την $(\varepsilon): 2x+7y-3=0$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 7.

(15) Να βρεθεί η μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών που είναι κάθετες στην $(\varepsilon): 4x-7y+5=0$

(15') Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $A(1,6)$, $B(3,5)$, $\Gamma(3,-4)$ να βρεθούν οι εξισώσεις των $\upsilon_\alpha, \mu_\beta, \delta_\gamma$.

(16) Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης: $(x+y-5)+\kappa\cdot(2x-y-1)=0$, $\kappa\in\mathbb{R}$ που είναι κάθετη στην ευθεία (η): $2x+4y-3=0$.

(17) Να βρεθεί η εξίσωση της δέσμης των ευθειών με κέντρο το σημείο τομής των ευθειών (ε_1): $3x+y-13=0$ και (ε_2): $x-2y-2=0$.
Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης που διχοτομεί το τμήμα AB με άκρα $A(3,-4)$, $B(-1,-2)$.

(18) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ορθόκεντρο την αρχή των αξόνων και με εξισώσεις των πλευρών AB: $x+3y-1=0$ και ΑΓ: $3x+5y-6=0$.
Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

(19) Να βρεθεί η απόσταση των παρ/λων ευθειών (ε_1): $6x+8y+7=0$, (ε_2): $6x+8y+3=0$ και η εξίσωση της μεσοπαράλληλης.

(20) Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A(1,1)$, $\Gamma(0,0)$ και το B ανήκει στην ευθεία (ε): $x+2y=0$. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι 9, να βρεθεί το B.

(21) Αν $A(0,1)$, $B(-2,1)$, $\Gamma(1,1)$, να βρεθεί σημείο M ώστε τα τρίγωνα ΜΟΑ και ΜΒΓ να είναι ισοσκελή (με κορυφή το M).

(22) Δίνονται οι εξισώσεις των γραμμών:
(ε_1): $2\lambda x-(\lambda+1)y-3\lambda+1=0$, (ε_2): $(3\lambda+1)x+(\lambda-1)y-6\lambda+2=0$

1) Δείξτε ότι οι (ε_1), (ε_2) είναι ευθείες.
2) Δείξτε ότι οι (ε_1), (ε_2) περνούν καθεμιά από ένα σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.
3) Να βρεθεί η γωνία των (ε_1), (ε_2).
4) Για ποιές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ευθείες της (ε_1) είναι παρ/λες με ευθείες της (ε_2).

(23) Στο τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,-2)$, $B(5,4)$, $\Gamma(-2,0)$ να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων (εσωτερικής-εξωτερικής) της γωνίας A και η απόσταση των ιχνών τους στη ΒΓ.

(24) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$), θεωρούμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ εξωτερικά του τριγώνου.
Δείξτε ότι το ύψος ΑΡ του ΑΒΓ και οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(25) Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ με (ε_1): $Ax+By+\Gamma_1=0$ και (ε_2): $Ax+By+\Gamma_2=0$ να δείξτε ότι:

1) Η απόστασή τους είναι: $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\dfrac{|\Gamma_1-\Gamma_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
2) Η μεσοπαράλληλη ευθεία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχει εξίσωση: $Ax+By+\dfrac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}=0$.

(26) ΘΕΜΑ° 87. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνονται τα σημεία A(4,2), B(3,-5). Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση: $7x+y-23=0$. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ.

ΚΥΚΛΟΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ με κέντρο
- $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ ⟶ $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2.}$
- την αρχή $O(0,0)$ και ακτίνα ρ ⟶ $\boxed{x^2+y^2=\rho^2.}$

Γενική μορφή: Η $\boxed{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}$ είναι εξίσωση κύκλου ⟺ $A^2+B^2-4\Gamma\geq 0$. (Απόδειξη...).

● Ο κύκλος αυτός έχει $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

▼ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$.

Αν ο κύκλος έχει κέντρο
- $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ ⟶ $(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=\rho^2.$
- $O(0,0)$ και ακτίνα ρ ⟶ $xx_1+yy_1=\rho^2.$ (Απόδειξη...).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ.

M_1 ⟶ Για να βρώ την εξίσωση κύκλου (c), πρέπει να προσδιορίσω:
ή το κέντρο του $K(\alpha,\beta)$ και την ακτίνα του ρ
ή τις σταθερές A,B,Γ στη γενική μορφή,
δηλαδή και στις δυο περιπτώσεις τρεις αγνώστους, τους (α,β,ρ) ή τους (A,B,Γ).

▼ Αν είναι γνωστό το κέντρο $K(\alpha,\beta)$, τότε η ρ προσδιορίζεται ως εξής:
1) Αν ο κύκλος διέρχεται απο το γνωστό σημείο A ⟹ $\rho=d(K,A)$.
2) Αν ο κύκλος εφάπτεται σε γνωστή ευθεία (ε) ⟹ $\rho=d(K,\varepsilon)$.

▼ Το κέντρο K προσδιορίζεται συνήθως σαν τομή δύο γραμμών (τόπων).
ΕΤΣΙ: 1) Αν ο κύκλος διέρχεται απο δύο σημεία A,B ⟹ $K\in(\varepsilon)\underset{\text{μεσο}}{\perp}AB$.
2) Αν ο κύκλος εφάπτεται ευθείας (δ) στο A ⟹ $K\in(\varepsilon)\perp(\delta)$ στο A.
3) Αν ο κύκλος εφάπτεται σε δύο ευθείες $(\delta_1),(\delta_2)$ ⟶ $d(K,\delta_1)=d(K,\delta_2)$ ⟶
αν οι ευθείες
- τέμνονται, το K είναι στη διχοτόμο (εσ.-εξ.) της γωνίας τους.
- είναι παρ/λες, το K είναι στη μεσοπαράλληλη των $(\delta_1),(\delta_2)$.

4) Αν ο κύκλος διέρχεται απο τρία σημεία P,Λ,M, τότε το κέντρο του K είναι:
i) η λύση του συστήματος $\{d(K,P)=d(K,\Lambda)=d(K,M)\}$. ή
ii) η τομή των μεσοκαθέτων των $P\Lambda$, PM.

⟶ Στη περίπτωση αυτή (4), μπορώ να υποθέσω ότι (c): $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ (1)
κι επειδή $P,\Lambda,M\in(c)$ ⟹ επαληθεύουν την (1) ⟹ προσδιορίζω τα A,B,Γ
απο το σύστημα (Γραμμικό 3x3) που προκύπτει ⟹ βρίσκω την εξίσωση
του κύκλου (c) απο την (1) και άρα το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και η $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

(Βλέπε Εφαρμ. 1B σελ.97).

1. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου στις περιπτώσεις που ο κύκλος:
   1) Έχει κέντρο το $K(-1,2)$ και διέρχεται από το $A(2,6)$.
   2) Έχει διάμετρο το AB με $A(3,2)$ και $B(-1,6)$.
   3) Έχει κέντρο το $K(-2,3)$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): x-y-2=0$.
   4) Διέρχεται από τα σημεία $A(3,1)$, $B(-1,3)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $(\delta): 3x-y-2=0$.
   5) Διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon): 2x-3y-18=0$ στο σημείο $B(3,-4)$ αυτής.
2. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα $A(1,1)$, $B(1,-1)$, $\Gamma(2,0)$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_1): x+y+13=0$ και στην ευθεία $(\varepsilon_2): 7x-y-5=0$ στο σημείο της $A(1,2)$.
4. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες $(\delta_1): x+2y=0$, $(\delta_2): x+2y-10=0$ και διέρχεται από το $A(1,2)$.
5. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(2,-2)$, ο οποίος αποκόπτει από την ευθεία $(\varepsilon): 3x-4y+6=0$ χορδή μήκους 12.
6. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τη τομή των ευθειών $(\delta_1): x+3y-6=0$, $(\delta_2): 5x-4y-11=0$ και είναι ομόκεντρος με το κύκλο $(c): x^2+y^2-8x-6y-11=0$.
7. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που έχει διάμετρο τη διάκεντρο των δύο κύκλων $(c_1): x^2+y^2+2x-6y+1=0$ και $(c_2): x^2+y^2+6x-6y-7=0$.
8. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που έχει το κέντρο του στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$, $B(4,5)$.
9. Δίνεται κύκλος $(c): x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\gamma=0$ με $\alpha^2+\beta^2+\gamma>0$, $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})$ και η ευθεία $(\varepsilon): \alpha x+\beta y=\kappa$, $(\kappa\in\mathbb{R})$. Δείξτε ότι: αν η (ε) είναι διάμετρος του (c), τότε $\alpha^2+\beta^2-\kappa=0$.
10. Αν η ευθεία $(\varepsilon): x-2y=0$ τέμνει το κύκλο $(c): x^2+y^2-8x+6y-15=0$ στα σημεία A,B, να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα A,B και $\Gamma(1,1)$.
11. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία $(\varepsilon): 4x+3y-2=0$ και εφάπτεται στις ευθείες $(\delta_1): x+y+4=0$ και $(\delta_2): 7x-y+4=0$.
12. Δίνεται η εξίσωση $(C_\kappa): (\kappa+2)x^2+(\kappa+2)y^2-2\kappa x+5y-(\kappa+2)=0$.
    1) Να βρεθεί ο $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η (C_κ) να είναι εξίσωση κύκλου.
    2) Να βρεθεί ο $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε ένας από τους κύκλους αυτούς να έχει ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$.
13. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου ο οποίος εφάπτεται στους άξονες $x'x$, $y'y$ και διέρχεται από το $A(1,4)$.

M₂ → Για να βρώ εξίσωση εφαπτομένης (ε) ενός κύκλου (c), τότε:

1) Αν ξέρω το σημείο επαφής $A(x_1,y_1)$ ⟶ $(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=\rho^2$.

2) Αν $A(x_1,y_1)\in(\varepsilon)$ αλλά δεν είναι το σημείο επαφής, τότε (ε): $y-y_1=\lambda(x-x_1)$

ή $d(K,\varepsilon)=\rho$ ⟶ λ

Το σύστημα των (ε), (c) πρέπει να έχει Μ.Μ.Λ. οπότε απο την αντίστοιχη συνθήκη $(\Delta=0)$ βρίσκω το λ και άρα την (ε). (Βλέπε και Φ.4)

3) Αν η (ε) σχηματίζει γνωστή γωνία με γνωστή ευθεία (δ), τότε:

i) υπολογίζω αρχικά το λ_ε απο το $\lambda\delta$. ... (αν ορίζεται το λ_ε...) *

έτσι: αν $\varepsilon /\!/ \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\delta$

αν $\varepsilon\perp\delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-\dfrac{1}{\lambda_\delta}$

αν $(\widehat{\delta,\varepsilon})=\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\lambda_\varepsilon-\lambda_\delta}{1+\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\delta} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon$ γνωστό

} ⟶ (ε): $\underline{y=\lambda_\varepsilon x+K}$

(Γενικός τρόπος: εφαρμόζεται και στη παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)

ii) υπολογίζω το K με ένα απο τους εξής δύο τρόπους:

α) (ε) εφάπτεται (c) $\Leftrightarrow d(K',\varepsilon)=\rho$ όπου K' το κέντρο του (c).

β) (ε) εφάπτεται (c) $\Leftrightarrow$ το (Σ) των (ε), (c) έχει Μ.Μ.Λ $\Leftrightarrow$ ... $\Delta=0$ ....

* Αν $\lambda_\varepsilon\notin\mathbb{R}$ τότε (ε): $x=K$ και (ε) εφάπτεται (c) ⟹ Μ.Μ.Λ ⟹ ... $\Delta=0$ ... ⟹ Βρίσκω το K.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1) Η εφαπτομένη (ε) του κύκλου (c): $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ στο σημείο $P(x_1,y_1)$ αυτού (σημείο επαφής), έχει εξίσωση:

$$xx_1+yy_1+A\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+B\cdot\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+\Gamma=0$$

(Να δειχτεί).

2) Η κοινή χορδή AB δύο κύκλων με εξισώσεις

(c_1): $x^2+y^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$, (c_2): $x^2+y^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$

έχει εξίσωση: $\underline{(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(\Gamma_1-\Gamma_2)=0}$ (Να δειχτεί).

3) Δίνεται ο κύκλος (c): $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ και το σημείο $P(x_0,y_0)\notin(c)$. Η ευθεία (ε) που διέρχεται απο τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που φέρονται απο το P προς το κύκλο (c), έχει εξίσωση:

$$x_0x+y_0y+\frac{A}{2}(x+x_0)+\frac{B}{2}(y+y_0)+\Gamma=0.$$

(Να δειχτεί).

Η ευθεία αυτή λέγεται πολική του σημείου P ως προς το κύκλο (c).

ή $\underline{(x-\alpha)(x_0-\alpha)+(y-\beta)(y_0-\beta)=\rho^2}$, όταν (c): $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$.

⟶ Είναι φανερό ότι οι παραπάνω προτάσεις, αν εφαρμοστούν σε άσκηση, πρέπει να αποδειχτούν, γι' αυτό πρέπει να μελετηθούν καλά και οι αποδείξεις τους. (Βλέπε τετράδιο).

• Απο τη (Π_3), αφού βρούμε τη πολική (AB), στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε τα A, B (απο το $\{(AB),(c)\}$), την $d(P,AB)=\upsilon_\rho$ και το $E(\widehat{PAB})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(14) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου (c): $x^2+y^2-4x-2y-4=0$, που είναι παράλληλες προς τον άξονα $y'y$.

(15) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου (c): $x^2+y^2-2x+4y=0$, που είναι κάθετες στην ευθεία (δ): $x-2y+9=0$.

(16) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου (c): $x^2+y^2-4x+2y-8=0$, που είναι παρ/λες στην ευθεία (δ): $2x+3y+1=0$.

(17) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου (c): $(x-1)^2+(y+2)^2=13$, που σχηματίζουν γωνία 45° με την ευθεία (δ): $x-5y+1=0$.

(18) Δείξτε ότι ο κύκλος (c): $x^2+y^2+8x+8y+16=0$ εφάπτεται των αξόνων $x'x$, $y'y$ και να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων επαφής.

(19) Δείξτε ότι η ευθεία (ε): $y=\alpha x+\beta$ εφάπτεται στο κύκλο (c): $x^2+y^2=\rho^2$, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\rho^2(1+\alpha^2)$.

(20) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων που φέρονται απο την αρχή των αξόνων στο κύκλο (c): $(x-3)^2+(y-1)^2=2$.

Για να βρώ τις εφαπτόμενες κύκλου (c) που φέρονται απο το σημείο $A(x_1,y_1)\notin(c)$, επειδή από το A διέρχεται και η ευθεία $x=x_1$ (της οποίας ο $\lambda\notin\mathbb{R}$), εξετάζω πρώτα αν η $x=x_1$ εφάπτεται του (c), δηλαδή αν το (Σ): $\{x=x_1,\ (c)\}$ έχει Μ.Μ.Λ και μετά εφαρμόζω τη $M2_2$ του Φ.3.

(21) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων που φέρονται απο το σημείο $A(1,6)$ στο κύκλο (c): $(x+1)^2+y^2=20$.

(22) Απο το $O(0,0)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες προς το κύκλο (c): $(x-3)^2+(y-2)^2=4$. Να βρεθεί η γωνία τους.

(23) Να βρεθεί η γωνία των εφαπτομένων που φέρονται απο το σημείο $P(3,6)$ προς το κύκλο (c): $(x-1)^2+y^2=4$.

(24) Απο το $P(6,1)$ φέρνουμε εφαπτόμενες PA, PB στο κύκλο (c): $(x+1)^2+(y-2)^2=4$. Να βρεθεί η εξίσωση της AB. (A, B τα σημεία επαφής).

(25) Απο την αρχή O των αξόνων φέρνουμε τις εφαπτόμενες OA, OB στο κύκλο (c): $(x-2)^2+(y-4)^2=4$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

(26) Απο το σημείο $M(3,-4)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB στο κύκλο (c): $x^2+y^2=9$. Να βρεθεί η απόσταση του M απο την AB και το εμβαδόν του τριγώνου AMB. Με αρέσε αυτή η άσκηση.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ευθεία (δ) και σημείο $E \notin (\delta)$.

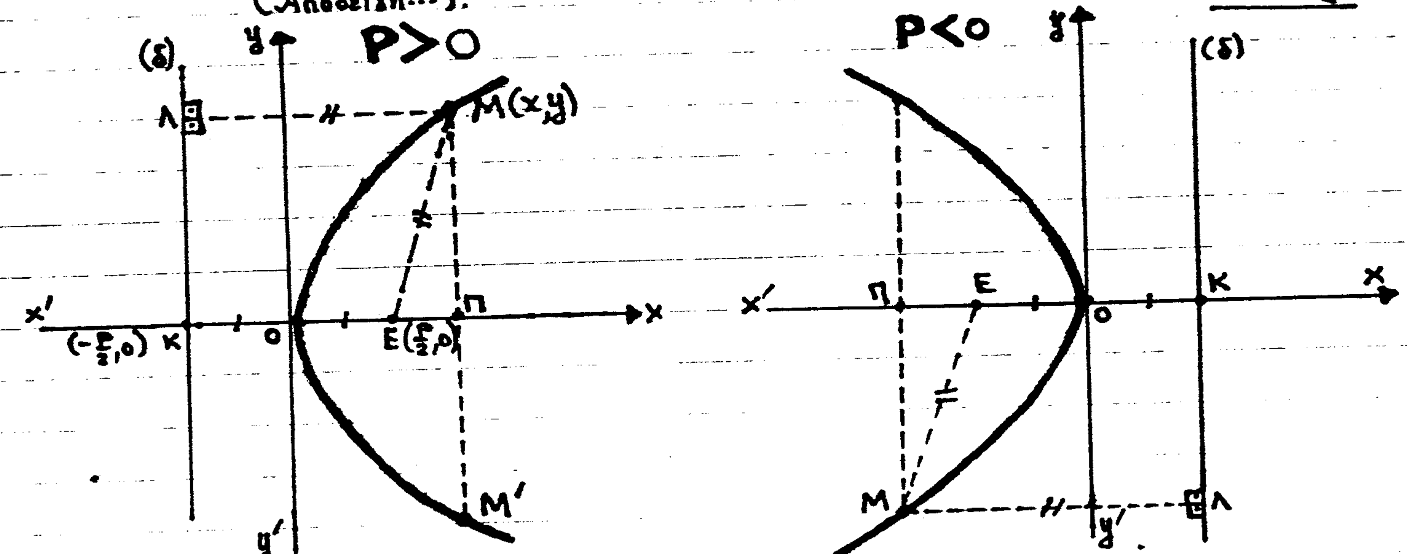
Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από το Ε και τη (δ), ονομάζεται παραβολή με εστία Ε και διευθετούσα (δ).

Ιδιότητα του Γεωμ. Τόπου: Σημείο Μ ανήκει στη παραβολή $\Leftrightarrow d(M,\delta)=d(M,E)$.

● Αν $EK \perp (\delta)$ τότε το μέσο Ο του ΕΚ ανήκει στη παραβολή και λέγεται κορυφή της.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ. ⟶ $\boxed{y^2=2Px}$ όπου $P=\overline{KE}$, με εστία $E(\frac{P}{2},0)$ και διευθετούσα (δ): $x=-\frac{P}{2}$

(Απόδειξη...).



▼ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον x'x. Δηλαδή: αν $M(x_1,y_1)\in(c) \Leftrightarrow M'(x_1,-y_1)\in(c)$.

2) Οι αριθμοί P, x είναι ομόσημοι. Δηλαδή: όλα τα σημεία της (c) είναι δεξιά του y'y αν $P>0$ και αριστερά του y'y αν $P<0$.

▼ΑΛΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ. (Με άλλο σύστημα αναφοράς)

1) Αν πάρουμε για αρχή τη κορυφή Ο της παραβολής και ο άξονας y'y να περιέχει την εστία Ε ⟶ $x^2=2Py$ ή $y=\frac{1}{2P}x^2$

όπου $E(0,\frac{P}{2})$ και (δ): $y=-\frac{P}{2}$.

2) Αν πάρουμε για αρχή ένα άλλο σημείο $O'(x_0,y_0)\neq O$ και ο άξονας συμμετρίας της παραβολής να είναι:

i) Παράλληλος προς τον x'x ⟶ $\boxed{(y-y_0)^2=2P(x-x_0)}$.

● Ως προς το xOy η $E(\frac{P}{2}+x_0,y_0)$ και η (δ): $x=-\frac{P}{2}+x_0$.

ii) Παράλληλος προς τον y'y. ⟶ $(x-x_0)^2=2P(y-y_0)$ ή $(y-y_0)=\frac{1}{2P}(x-x_0)^2$.

όπου $E(x_0,\frac{P}{2}+y_0)$ και (δ): $y=-\frac{P}{2}+y_0$.

● ⟶ Η (c): $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq0$ είναι παραβολή με κορυφή $O'\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και άξονα συμμετρίας // προς τον y'y.

M3 → Για να βρω εξίσωση παραβολής, αρκεί να προσδιορίσω το πραγματικό $p \neq 0$. (Δηλαδή τη παράμετρο της παραβολής).

→ Αν είναι γνωστή η εστία Ε και η διευθετούσα (δ), τότε η εξίσωσή της βρίσκεται άμεσα με βάση τον ορισμό, $M(x,y) \in (c) \Leftrightarrow d(M,\delta) = d(M,E) \Leftrightarrow (c)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

27. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει:
   1) $p=3$ και άξονα συμμετρίας τον $x'x$.
   2) Άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το $A(-1,3)$.
   3) » » » » » εστία $E(0,-3)$.
   4) Εστία $E(-6,0)$ και διευθετούσα (δ): $x-6=0$.
   5) Άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται στην (ε): $x-y+2=0$.

28. Να βρεθούν τα στοιχεία των παραβολών: 1) $y^2=14x$. 2) $x^2=-8y$.

29. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει:
   1) Εστία $E(10,0)$ και διευθετούσα (δ): $x+10=0$.
   2) Άξονα συμμετρίας παρ/λο προς τον $x'x$, κορυφή $O'(2,-3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(3,-5)$.
   3) Κορυφή το $O'(4,-4)$ και εστία $E(4,-5)$. Ποιά είναι η εξίσωση της διευθετούσας;
   4) Εστία $E(2,0)$ και διευθετούσα (δ): $x+y-3=0$.
   5) Εστία $E(-2,-2)$ » » : $y=6$.
   6) Κορυφή $O'(4,1)$, άξονα συμμετρίας παρ/λο προς τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(2,7)$.

30. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει:
   1) Εστία $E(-1,-1)$ και διευθετούσα (δ): $y=4$.
   2) Κορυφή $O'(3,2)$ και εστία $E(5,2)$.
   3) Κορυφή $O'(2,3)$, άξονα συμμετρίας παρ/λο προς τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,5)$.
   4) Κορυφή $O'(-3,1)$ και διευθετούσα (δ): $x=1$.

31. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν παραβολές και να βρεθούν τα στοιχεία τους: 1) $y^2-4x-6y+1=0$. 2) $x^2-6x-12y+21=0$.

32. Παραβολή (c) διέρχεται από τα $A\left(\frac{3}{2},1\right)$, $B(3,-5)$, η κορυφή της $O'(\kappa,\lambda)$ ανήκει στην (ε): $7x+3y=4$ και ο άξονάς της είναι // προς τον $x'x$. Να βρεθεί η εξίσωσή της.

33. Δείξτε ότι ο κύκλος $\cancel{(x-6)^2+}\,y^2=32$ εφάπτεται στη παραβολή $y^2=8x$ στο σημείο $A(2,4)$.

34. Δίνονται η παραβολή $y^2=4\kappa x$ και οι ευθείες (ε_1): $4x-2y+\kappa=0$, (ε_2): $x+2y+4\kappa=0$. Δείξτε ότι οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και η διευθετούσα (δ), διέρχονται από το ίδιο σημείο.

▼ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑ.

$$\left.\begin{array}{l}(c):\ y^2=2Px\\ (\varepsilon):\ y=\lambda x+K\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(\lambda x+K)^2=2Px\\ \longrightarrow\end{array}\right.\Leftrightarrow\quad \lambda^2x^2+2(\lambda K-P)x+K^2=0 \quad (1)$$

Τα κοινά σημεία της (c) και της (ε) καθορίζονται απο το πλήθος των ριζών της (1) ως εξής:

1) Αν $\lambda=0\Leftrightarrow(\varepsilon): y=K \parallel x'x \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2Px=K^2 \Leftrightarrow x=\frac{K^2}{2P} \Leftrightarrow$ 1 κοινό σημείο $M_1\left(\frac{K^2}{2P},K\right)$.

2) Αν $\lambda\neq 0$ η (1) είναι β΄βάθμια με $\underline{\Delta=4P(P-2\lambda K)}$ οπότε, αν :

• $P>0$ και $\begin{cases} P>2\lambda K \Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 2 \text{ κοινά σημεία} \\ \boxed{P=2\lambda K} \Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 1 \text{ διπλό κοινό σημείο } M\left(\frac{K}{\lambda},\frac{P}{\lambda}\right) \Leftrightarrow \underline{(\varepsilon) \text{ εφαπτομένη της } (c)} \\ P<2\lambda K \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow \text{Κανένα κοινό σημείο.} \end{cases}$ (Απόδειξη).

• $P<0$, οι προηγούμενες ανισοτικές σχέσεις αλλάζουν φορά.

▼ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ (c): $y^2=2Px$ στο σημείο της $A(x_1,y_1)$

$\boxed{yy_1=P(x+x_1)}$ • Συντελεστής διευθύνσεως εφαπτομένης $\rightarrow$ $\underline{\lambda_\varepsilon=\frac{P}{y_1}}$ (Απόδειξη...).

• Ο άξονας $y'y$ $(x=0)$ εφάπτεται της παραβολής $y^2=2Px$ στη κορυφή της O.

M4 $\rightarrow$ 1) Για να βρώ εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής $(c): y^2=2Px$

i) Με γνωστό σημείο επαφής $A(x_1,y_1) \rightarrow (\varepsilon)$: $\underline{yy_1=P(x+x_1)}$.

ii) Με γνωστό συντελεστή διευθύνσεως $\lambda_\varepsilon \rightarrow (\varepsilon)$: $\underline{y=\lambda x+K}$ και απο τη σχέση $\underline{P=2\lambda K}$ (αφού (ε),(c) εφάπτονται $\Leftrightarrow ...\Delta=0...$) βρίσκω το K και άρα την (ε).

2) Για να βρώ τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $(c): y^2=2Px$ που φέρονται απο το σημείο $A(x_1,y_1)\notin(c)$ θεωρώ (ε): $y-y_1=\lambda(x-x_1) \Leftrightarrow$ $y=\lambda x+(y_1-\lambda x_1)$ και απο τη σχέση $P=2\lambda K \Leftrightarrow P=2\lambda(y_1-\lambda x_1)$ προσδιορίζω τις δύο τιμές του λ.

• Επειδή απο το $A(x_1,y_1)$ διέρχεται και η ευθεία $x=x_1$ (της οποίας το $\lambda\notin\mathbb{R}$) εξετάζω πρώτα αν η $x=x_1$ εφάπτεται στη (c), δηλαδή αν το σύστημα $\{x=x_1,\ y^2=2Px\}$ έχει διπλή λύση και μετά εφαρμόζω τη $M4_2$.

(Η $M4_2$ είναι ίδια με τη $M2_2$ του κύκλου...Βλέπε Φ.3 και Φ.4).

④ → ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Δίνεται η παραβολή $(c): y^2=2Px$ και το σημείο $M(x_0,y_0)\notin(c)$.

Η ευθεία (ε) που διέρχεται απο τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που φέρονται απο το M προς τη παραβολή (c), έχει εξίσωση $\rightarrow$ $\underline{y_0y=P(x+x_0)}$. (Να δειχτεί).

Η ευθεία αυτή λέγεται <u>πολική του σημείου M ως προς τη παραβολή (c).</u>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(35) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής (c): $y^2=8x$ που είναι: 1) Παρ/λη στην ευθεία (ε): $2x+2y-3=0$.
2) Κάθετη στην ευθεία (δ): $2x+4y+7=0$.

(36) Αν η ευθεία (ε): $y=\lambda x+\mu$ εφάπτεται στη παραβολή (c): $y^2=4\alpha(x+\alpha)$ δείξτε ότι: $\mu\lambda=\alpha\cdot(\lambda^2+1)$.

(37) Δείξτε ότι το συμμετρικό της εστίας της παραβολής $y^2=2Px$ ✓ ως προς τυχαία εφαπτομένη της, είναι σημείο της διευθετούσας της.

(38) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της παραβολής (c): $y^2=8x$, που διέρχονται από το σημείο $A(5,-7)$.

(39) Δίνεται η παραβολή $y^2=36x$ και το σημείο $M(2,9)$.
1) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων MA, MB της παραβολής.
2) Να βρεθεί η απόσταση του M από την AB. (A,B τα σημεία επαφής).

(40) Από το σημείο $M(-3,2)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB στη παραβολή (c): $y^2=8x$. Να βρεθούν:
1) η $d(M,AB)$ 2) το εμβαδόν του $A\hat{M}B$.

(41) Από το σημείο $M(-9,6)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB στη παραβολή (c): $y^2=36x$. Δείξτε ότι: $MA\perp MB$.

(42) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε), που είναι κάθετη στην ευθεία (δ): $4x+4y-5=0$ και κάθετη στη παραβολή (c): $y^2=4x$.

➜ Κάθετη ευθεία σε μία παραβολή (γενικά σε μία καμπύλη) είναι η κάθετη στην εφαπτομένη της στο σημείο επαφής.

(43) Δείξτε ότι: οι εφαπτόμενες που φέρονται προς τη παραβολή (c): $y^2=2Px$ από τυχαίο σημείο της διευθετούσας της, είναι κάθετες. ✓

(44) Ευθεία ορίζεται από τυχαίο σημείο M της παραβολής (c): $y^2=2Px$ και από τη κορυφή της O. Αν A είναι η τομή της διευθετούσας (δ) με την OM και (ε) η εφαπτομένη της (c) στο M, ✓ δείξτε ότι: $(\varepsilon)\parallel EA$. (E η εστία της παραβολής).

(45) Στα σημεία $M(1,-4)$, $N(16,16)$ της παραβολής (c): $y^2=16x$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες και τις κάθετες της παραβολής. Αν A είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων και B είναι το σημείο τομής των καθέτων, δείξτε ότι: η AB είναι παρ/λη προς τον άξονα της παραβολής.

ΕΛΛΕΙΨΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζεται έλλειψη με εστίες E_1, E_2 ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από τα E_1, E_2 έχουν σταθερό άθροισμα 2α.

Ιδιότητα του Γεωμ. Τόπου: Σημείο Μ ανήκει στην έλλειψη $\Leftrightarrow$ $d(M,E_1)+d(M,E_2)=2\alpha$.

Εστιακή απόσταση $\longrightarrow$ $d(E_1,E_2)=2\gamma$: $E_1(-\gamma,0)$, $E_2(\gamma,0)$ οι εστίες.

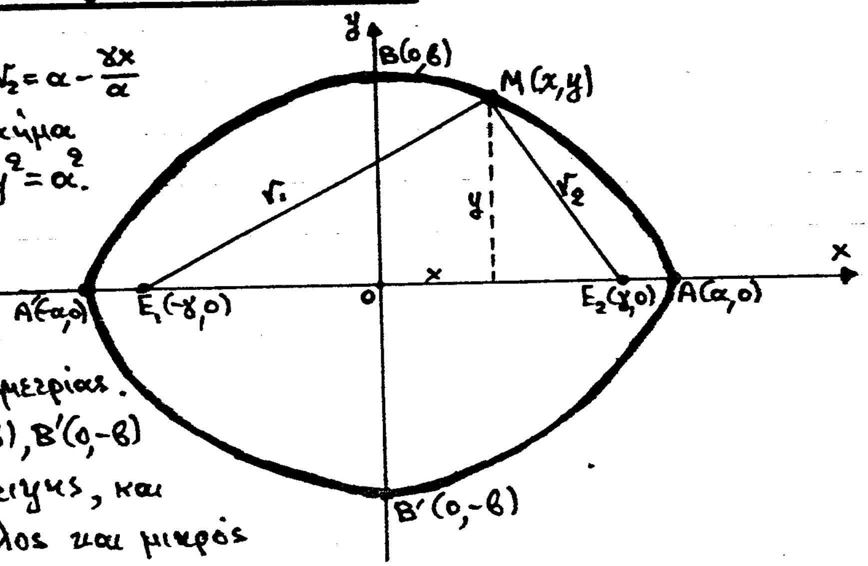
Εκκεντρότητα της έλλειψης $\longrightarrow$ $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$ • Είναι: $\frac{\gamma}{\alpha}<1$.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ με } \beta^2<\alpha^2}$ (Απόδειξη...)

• $\alpha^2-\gamma^2=\beta^2$.

Οι εστιακές ακτίνες: $r_1=\alpha+\frac{\gamma x}{\alpha}$, $r_2=\alpha-\frac{\gamma x}{\alpha}$

• Αν $\gamma=0 \Rightarrow E_1\equiv E_2\equiv O \Rightarrow$ Το σχήμα είναι κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=\alpha^2$.



▼ ΣΤΟΙΧΕΙΑ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.

1) Οι άξονες x'x, y'y είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης και η αρχή O είναι κέντρο συμμετρίας.

2) Τα σημεία $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$, $B(0,\beta)$, $B'(0,-\beta)$ λέγονται κορυφές της έλλειψης, και τα AA', BB' λέγονται μεγάλος και μικρός άξονας της έλλειψης.

3) Η έλλειψη περιέχεται μεταξύ των παρ/λων ευθειών $x=-\alpha$, $x=\alpha$ και μεταξύ των παρ/λων $y=-\beta$, $y=\beta$.

$\beta^2<\alpha^2$ ~~$\alpha^2<\beta^2$~~

▼ ΑΛΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ.

1) Αν $E_1,E_2\in y'y$ η έλλειψη έχει εξίσωση $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2} \text{ με } \beta^2>\alpha^2}$

• Οι εστίες: $E_1(0,-\gamma)$, $E_2(0,\gamma)$.

• Ο μεγάλος άξονας έχει κορυφές: $A'(0,-\alpha)$, $A(0,\alpha)$.

• Μια έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ έχει τις εστίες της: στον άξονα x'x όταν $\alpha^2>\beta^2$ ή στον άξονα y'y όταν $\alpha^2<\beta^2$

2) Αν $O'(x_0,y_0)$ είναι το κέντρο συμμετρίας της έλλειψης και ο μεγάλος άξονάς της A'A είναι // προς τον x'x $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}=1}$

• Οι εστίες: $E_1(x_0-\gamma,y_0)$, $E_2(x_0+\gamma,y_0)$.

• Ο μεγάλος άξονας έχει κορυφές: $A'(x_0-\alpha,y_0)$, $A(x_0+\alpha,y_0)$.

M5 → <u>Για να βρώ εξίσωση έλλειψης</u>, αρκεί να προσδιορίσω: το κέντρο της $O'(x_0, y_0)$, τη διεύθυνση των αξόνων συμμετρίας της και τους θετικούς α, β.

έτσι: αν οι E_1, E_2 βρίσκονται σε άξονα $\begin{cases} \parallel x'x \longrightarrow \dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1. \\ \parallel y'y \longrightarrow \dfrac{(x-x_0)^2}{\beta^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{\alpha^2} = 1. \end{cases}$

- Αν η εστιακή απόσταση $(E_1E_2) = 2\gamma$

τότε: $\begin{cases} \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2, \text{ αν } \alpha > \beta. \\ \gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2, \text{ αν } \alpha < \beta. \end{cases}$

- Ο μεγάλος άξονας $(AA') = 2\alpha$ και ο μικρός άξονας $(BB') = 2\beta$ (ανεξάρτητα αν οι εστίες E_1, E_2 βρίσκονται στον $x'x$ ή στον $y'y$.).
- <u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Τις εστίες $E_1 E_2$ τις φέρνει πάντα ο μεγάλος άξονας.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ.</u>

(46) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης της μορφής $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, στις εξής περιπτώσεις: 1) $\alpha = 2\beta$, $E(2\sqrt{3}, 0)$.
2) $\beta = 2\alpha$ και το σημείο $A(4,6)$ ανήκει στην έλλειψη.
3) Η έλλειψη διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$, $B\left(4, \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

(47) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, που έχει:
1) $O'(0,2)$, $E_1(0,0)$, $\alpha = 3$. 2) $O'(-3,0)$, $E_1(-3,-2)$, $\alpha = 4$.
3) $O'(2,2)$, $E_1(-1,2)$, $\alpha = \sqrt{10}$.

(48) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, που έχει:
1) Εστίες $E_1(-7,0)$, $E_2(7,0)$ και μεγάλο άξονα 26.
2) Μεγάλο άξονα 18 και εκκεντρότητα $5/9$.

(49) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες $E_1(-3,-4)$, $E_2(5,-4)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-5,-4)$ και $A(7,-4)$.

(50) Δίνεται η έλλειψη $25x^2 + 81y^2 = 2025$. Να βρεθούν:
1) τα μήκη των αξόνων. 2) Οι εστίες. 3) Η εκκεντρότητα.

(51) Δείξτε ότι οι ελλείψεις: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ και $\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{10} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες.

(52) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, που έχει: 1) $\alpha = 2\beta$, $E_2(4,0)$.
2) $\alpha = 2\beta$ και το σημείο $A(4,6)$ ανήκει στην έλλειψη.

(53) Δείξτε ότι η εξίσωση $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$ παριστάνει έλλειψη και βρείτε το κέντρο και τις εστίες της.

(54) Έλλειψη έχει: $E_1(-2,4)$, $E_2(6,4)$ και $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$. Να βρεθεί η εξίσωση της.

(55) Δίνεται η έλλειψη $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$. Να βρεθούν οι εστιακές ακτίνες του σημείου $M\left(2, -\dfrac{5}{3}\right)$ αυτής.

▼ ΕΛΛΕΙΨΗ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑ.

$$\left.\begin{array}{l}(c): \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1\\ (\varepsilon): \quad y=\lambda x+K\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(\beta^2+\lambda^2\alpha^2)x^2+2\alpha^2\lambda K x+\alpha^2(K^2-\beta^2)=0 \quad (1)\\ \text{με } \Delta=4\alpha^2\beta^2(\beta^2+\alpha^2\lambda^2-K^2).\end{array}\right.$$

Τα κοινά σημεία της (c) και της (ε) καθορίζονται από το πλήθος των ριζών της (1) ως εξής:

1) Αν $\beta^2+\alpha^2\lambda^2>K^2 \Leftrightarrow$ 2 κοινά σημεία.

2) Αν $\boxed{\beta^2+\alpha^2\lambda^2=K^2} \Leftrightarrow$ 1 κοινό σημείο $M\left(-\dfrac{\alpha^2\lambda}{K}, \dfrac{\beta^2}{K}\right) \longleftrightarrow$ <u>(ε) εφαπτομένη της (c).</u>

3) Αν $\beta^2+\alpha^2\lambda^2<K^2 \Leftrightarrow$ Κανένα κοινό σημείο.

▼ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$.

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1.}$$

(Απόδειξη...).

● Οι εφαπτόμενες της έλλειψης στις κορυφές της $A'(-\alpha,0)$, $A(\alpha,0)$ είναι οι $//: x=-\alpha, x=\alpha$,
ενώ " " " " " " $B'(0,-\beta)$, $B(0,\beta)$ είναι οι $//: y=-\beta, y=\beta$.

● Όταν η έλλειψη έχει κέντρο το $O'(x_0,y_0)$ και εξίσωση: $\dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{\beta^2}=1$, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $\dfrac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{\alpha^2}+\dfrac{(y-y_0)(y_1-y_0)}{\beta^2}=1$.

M6 → 1) <u>Για να βρω εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$</u>

i) Με γνωστό σημείο επαφής $M_1(x_1,y_1) \longrightarrow (\varepsilon)$: $\underline{\dfrac{xx_1}{\alpha^2}+\dfrac{yy_1}{\beta^2}=1}$.

ii) Με γνωστό συντελεστή διευθύνσεως $\lambda_\varepsilon \longrightarrow (\varepsilon)$: $\underline{y=\lambda x+K}$

και από τη σχέση $\underline{\beta^2+\alpha^2\lambda^2=K^2}$ (αφού (ε), (c) εφάπτονται $\Leftrightarrow \ldots \Delta=0\ldots$) βρίσκω το K και άρα την (ε).

2) Για να βρω τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που φέρονται από το σημείο $M(x_0,y_0)\notin(c)$, δουλεύω όπως στη $M4_2$.

● Οι μοναδικές <u>κατακόρυφες εφαπτόμενες</u> είναι οι: $\underline{x=\pm\alpha}$.

<u>ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ.</u>

(S) Δίνεται η έλλειψη (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και το σημείο $M(x_0,y_0)\notin(c)$.
Η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που φέρονται από το M προς την έλλειψη (c), έχει εξίσωση $\longrightarrow \underline{\dfrac{x_0x}{\alpha^2}+\dfrac{y_0y}{\beta^2}=1}$. (Να δειχτεί..)

Η ευθεία αυτή λέγεται:
<u>πολική του σημείου M ως προς την έλλειψη (c).</u>

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης (c): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία (δ): $4x+3y-1=0$.

57) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης (c): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ που είναι κάθετες στην ευθεία (δ): $x+y-5=0$.

58) Να βρεθεί το $K\in\mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (ε): $y=3x-K$ να εφάπτεται στην έλλειψη (c): $9x^2+16y^2=144$.

59) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, που έχει:
1) Εστίες $E_2(1,1)$, $E_1(-1,1)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
2) άξονες συμμετρίας τους άξονες συντεταγμένων, διέρχεται από το σημείο $P(2,-3)$ και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $x+6y-20=0$.

60) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης (c): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, που εφάπτεται στις ευθείες (ε_1): $x+y-5=0$, (ε_2): $x-4y-10=0$.

61) Από το σημείο $P(-4,5)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB στην έλλειψη (c): $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$.
Να υπολογιστεί η απόσταση $d(P,AB)$.

62) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει: εστιακή απόσταση $2\gamma=2\sqrt{30}$ και εφάπτεται στην ευθεία (ε): $x+6y-20=0$.

63) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, τις οποίες φέρνουμε από το σημείο $(3,4)$.

64) Να βρεθεί η εξίσωσης της κάθετης ευθείας στην έλλειψη (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ στο σημείο $M(x_1,y_1)$ αυτής.

65) Να βρεθεί η γωνία των εφαπτομένων της έλλειψης (c): $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$, που φέρονται από το σημείο $M(0,-4)$.

66) Από το σημείο $M(4,4)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες στην έλλειψη (c): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$. Να βρεθεί η γωνία τους.

67) Από το σημείο $P(-2,-1)$ φέρνουμε εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) προς την έλλειψη (c): $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$.
Δείξτε ότι: $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)$.

ΥΠΕΡΒΟΛΗ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζεται υπερβολή με εστίες E_1, E_2 ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από τα E_1, E_2 είναι, κατ' απόλυτη τιμή, σταθερή 2α.

Ιδιότητα του Γεωμ. τόπου: Σημείο Μ ανήκει στην υπερβολή $\Leftrightarrow$ $|d(M,E_1)-d(M,E_2)|=2\alpha$.

Εστιακή απόσταση $\to$ $d(E_1,E_2)=2\gamma$: $E_1(-\gamma,0)$, $E_2(\gamma,0)$ οι εστίες

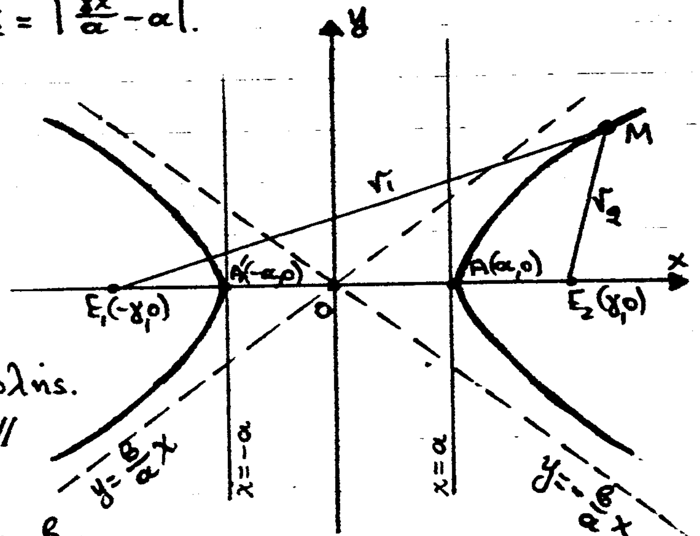
Εκκεντρότητα της υπερβολής $\to$ $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$ • Είναι : $\frac{\gamma}{\alpha}>1$.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ. $\to$ $\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \quad \text{με } \beta^2=\gamma^2-\alpha^2.}$ (Απόδειξη...).

• Αν $\alpha=\beta$ η υπερβολή λέγεται ισοσκελής και έχει εξίσωση: $x^2-y^2=\alpha^2$.

Οι εστιακές ακτίνες: $r_1=\left|\frac{\gamma x}{\alpha}+\alpha\right|$, $r_2=\left|\frac{\gamma x}{\alpha}-\alpha\right|$.

▼ **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**



1) Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής και η αρχή Ο κέντρο συμμετρίας της.

2) Τέμνει τον $x'x$ στα $A(\alpha,0)$ και $A'(-\alpha,0)$ ενώ δεν τέμνει τον $y'y$.
Τα σημεία A, A' $\to$ Κορυφές της υπερβολής.

3) Βρίσκεται έξω από τη ταινία των // ευθειών $x=-\alpha$ και $x=\alpha$.

Ασύμπτωτες $\to$ $(\varepsilon_1): y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $(\varepsilon_2): y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

• Στην ισοσκελή υπερβολή $x^2-y^2=\alpha^2$, ασύμπτωτες είναι οι διχοτόμοι $y=x$ και $y=-x$ των γωνιών των αξόνων.

▼ **ΑΛΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ.**

1) Αν $E_1, E_2 \in y'y$ η υπερβολή έχει εξίσωση $\to$ $\boxed{\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1 \quad \text{με } \beta^2=\gamma^2-\alpha^2.}$

• $E_1(0,-\gamma)$, $E_2(0,\gamma)$, $A'(0,-\alpha)$, $A(0,\alpha)$. • Ασύμπτωτες: $y=-\frac{\alpha}{\beta}x$, $y=\frac{\alpha}{\beta}x$.

• Οι υπερβολές με εξισώσεις $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1$ λέγονται συζυγείς και έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες: $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$, $y=\frac{\beta}{\alpha}x$.

2) Αν $O'(x_0,y_0)$ είναι το κέντρο συμμετρίας της υπερβολής και ο άξονάς της AA' είναι // προς τον $x'x$ $\to$ $\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}-\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}=1.}$

• $E_1(x_0-\gamma, y_0)$, $E_2(x_0+\gamma, y_0)$, $A'(x_0-\alpha, y_0)$, $A(x_0+\alpha, y_0)$.

• Ασύμπτωτες: $y-y_0=-\frac{\beta}{\alpha}(x-x_0)$, $y-y_0=\frac{\beta}{\alpha}(x-x_0)$.

▼ ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑ

$$\left.\begin{array}{l}(c):\ \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\\ (\varepsilon):\ y=\lambda x+\kappa\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(\beta^2-\alpha^2\lambda^2)x^2-2\alpha^2\lambda\kappa x-\alpha^2(\beta^2+\kappa^2)=0\quad(1)\\ \text{με}\quad \Delta=4\alpha^2\beta^2(\beta^2+\kappa^2-\alpha^2\lambda^2).\end{array}\right.$$

i) Αν $\beta^2=\alpha^2\lambda^2$ η (ε) είναι παρ/λη προς μια απο τις ασύμπτωτες και έχει ένα κοινό σημείο με την υπερβολή το $M\left(-\frac{\beta^2+\kappa^2}{2\lambda\kappa},-\frac{\beta^2-\kappa^2}{2\kappa}\right)$.

ii) Αν $\beta^2\neq\alpha^2\lambda^2$ τα κοινά σημεία των (c) και (ε) καθορίζονται απο το πλήθος των ριζών της (1) ως εξής: (Απόδειξη).

1) $\beta^2+\kappa^2>\alpha^2\lambda^2 \Leftrightarrow$ 2 κοινά σημεία.

2) $\boxed{\beta^2+\kappa^2=\alpha^2\lambda^2}\Leftrightarrow$ 1 κοινό σημείο $M\left(-\frac{\alpha^2\lambda}{\kappa},-\frac{\beta^2}{\kappa}\right)\Leftrightarrow$ (ε) εφαπτομένη της (c).

3) $\beta^2+\kappa^2<\alpha^2\lambda^2\Leftrightarrow$ Κανένα κοινό σημείο.

▼ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΤΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$.

$$\boxed{\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1.}\qquad \text{(Απόδειξη...)}.$$

- Οι εφαπτόμενες της υπερβολής στις κορυφές της $A'(-\alpha,0)$, $A(\alpha,0)$ είναι οι $//$: $x=-\alpha$, $x=\alpha$.
- Όταν η υπερβολή έχει κέντρο το $O'(x_0,y_0)$ και εξίσωση: $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2}-\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}=1$, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $\frac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{\alpha^2}-\frac{(y-y_0)(y_1-y_0)}{\beta^2}=1$.

▼ Εφαρμογή – Θεωρία (Απόδειξη...)

Το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής (c): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ απο τις ασύμπτωτές της, είναι σταθερό ίσο με $\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ.

ΓΕΝΙΚΑ: Στα θέματα με υπερβολή ακολουθούμε τις ίδιες μεθόδους (M_5-M_6) που ακολουθήσαμε στα θέματα με έλλειψη.

- **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Τις εστίες E_1,E_2 τις φέρνει πάντα ο θετικός όρος.

(68) Διάμετρο υπερβολής: λέμε κάθε τμήμα που έχει τα άκρα του στους δύο κλάδους της και διέρχεται απο το κέντρο της. Δείξτε ότι: η χορδή AB μιας υπερβολής είναι διάμετρος, άν και μόνο αν οι εφαπτόμενες στα A,B είναι παράλληλες.

(69) Να βρεθούν τα στοιχεία της υπερβολής $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

(70) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής με κέντρο $O(0,0)$ και εστίες $E_1,E_2\in x'x$, όταν: 1) $\beta=6$, $\gamma=10$. 2) $\alpha=4$, $\varepsilon=\sqrt{2}$. 3) $\beta=8$, $\varepsilon=\sqrt{2}$.

(71) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται απο τα $M\left(\frac{20}{3},8\right)$, $N\left(5,\frac{9}{2}\right)$.

(72) " " " " " " που έχει $\varepsilon=\frac{5}{4}$ και διέρχεται απο το $M\left(-5,\frac{9}{4}\right)$.

(73) " " " " " η με ασύμπτωτες $y=\pm\frac{1}{2}x$ αν διέρχεται απο το $M(10,-\sqrt{5})$.

74 Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής (c): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όταν:
1) Τα σημεία $K(6,-1)$, $\Lambda(-8, 2\sqrt{2})$ ανήκουν στην υπερβολή.
2) Το $M(-5,3)$ ανήκει στην υπερβολή και η εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{2}$.
3) Το $N(\frac{9}{2}, -1)$ ανήκει στην υπερβολή και οι ασύμπτωτες είναι οι: $y = \pm\frac{2}{3}x$.

75 Υπερβολή με $E_1(0,4)$, $E_2(0,0)$ διέρχεται από το $K(12,9)$. Να βρεθεί η εξίσωσή της.

76 Δίνεται η υπερβολή $4x^2 - 25y^2 = 100$. Να βρεθούν:
1) Τα μήκη των αξόνων. 2) Οι εστίες. 3) Η εκκεντρότητα.

77 Να βρεθεί η εξίσωση υπερβολής με $E_1(-4,4)$, $E_2(12,4)$, $A'(0,4)$, $A(8,4)$.

78 Δείξτε ότι η εξίσωση $9x^2 - 25y^2 - 18x - 150y - 441 = 0$ παριστάνει υπερβολή και βρείτε τα στοιχεία της και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της.

79 Αν (c): $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ να βρεθούν οι εστιακές ακτίνες του σημείου $M(10, \frac{9}{2})$.

80 Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής (c): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που εφάπτεται στις ευθείες (ε_1): $5x - 6y - 16 = 0$, (ε_2): $13x - 10y - 48 = 0$.

81 Βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής (c): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ που είναι:
1) παρ/λες στην (δ): $4x + 3y - 1 = 0$. 2) Κάθετες στην (η): $x - 2y + 1 = 0$.

82 Δείξτε ότι η ευθεία (ε) που διέρχεται από το $M(-\frac{4}{5}, 0)$ και είναι παρ/λη προς την (δ): $10x + 3y - 5 = 0$, εφάπτεται στην υπερβολή (c): $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

83 Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής (c): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ που φέρονται από το σημείο $M(3,4)$.

84 Να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης στην (c): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$.

85 Αν η τυχαία εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ έχει συντεταγμένες επί την αρχή γ και δ, δείξτε ότι: $9\delta^2 - 4\gamma^2 = \gamma^2 \cdot \delta^2$.

86 Από το $P(-2,-6)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB στη (c): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της AB (Πολική του P ως προς τη (c)), η $d(P, AB)$ και η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες PA, PB.

87 Θεωρούμε την υπερβολή (c): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και την εφαπτομένη της (ε) στο σημείο της P. Αν A, B είναι τα σημεία τομής της (ε) με τις ασύμπτωτες, δείξτε ότι: 1) Το P είναι μέσο του AB.
2) Το εμβαδόν του $O\hat{A}B$ είναι σταθερό όταν το P κινείται στη (c).

88 Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της υπερβολής (c): $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$, που είναι παρ/λες προς την ευθεία (δ): $2x - y - 1 = 0$.

89 Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $16x^2 + 25y^2 = 400$.

90 Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c): $16x^2 - 9y^2 = 144$ και από την ευθεία (δ): $2x + 3y - 6 = 0$.

90' Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $9x^2 - 16y^2 = 144$, εστίες E', E και σημείο $A(\lambda, \mu)$ πάνω στην υπερβολή.
α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία A, E' και της ευθείας που περνά από τα A, E. β) Να προσδιοριστούν τα σημεία A για τα οποία οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.
ΘΕΜΑ 2ο_81.

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ.

Εστω S η κωνική επιφάνεια με κορυφή O και οδηγό ένα κύκλο K τέτοιο ώστε η OK να είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου.
Οι τομές της S με επίπεδο q που δεν διέρχεται απο το O, δίνουν:
1) Έλλειψη, όταν το q τέμνει όλες τις γενέτειρες της S.
2) Υπερβολή, όταν το q είναι παρ/λο προς δύο γενέτειρες της S.
3) Παραβολή, όταν το q είναι παρ/λο προς μια μόνο γενέτειρα της S.

▼ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ: $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$ με $|A|+|B|\neq 0$ (1)

1) Αν $A\cdot B>0$ η (1) είναι εξίσωση έλλειψης (ή κύκλου ή σημείου) ή έχει γράφημα το $\emptyset$.
Ολα αυτά ανάλογα με το $K=\dfrac{B\cdot\Gamma^2+A\cdot\Delta^2-4A\cdot B\cdot E}{4A^2\cdot B^2}$ (Απόδειξη...)

2) Αν $A\cdot B<0$ η (1) είναι εξίσωση υπερβολής ή παριστάνει δύο ευθείες.

3) Αν $A\cdot B=0$ η (1) είναι εξίσωση παραβολής ή παριστάνει δύο (ή μια) ευθείες παράλληλες προς ένα απο τους άξονες ή έχει γράφημα το $\emptyset$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

91) Να βρεθεί η γραμμή (c) με εξίσωση: $\lambda x^2+(\lambda-1)y^2+(\lambda+1)x+1=0$.

92) Να βρεθεί το είδος της γραμμής που παριστάνει η εξίσωση $2\lambda x^2+(1-\lambda)y^2+\lambda(\lambda-1)=0$, για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ.

93) Ομοια, για τη γραμμή $\lambda x^2+y^2-2\lambda x-1=0$.

94) Δείξτε ότι η εξίσωση $5x^2+4y^2-10x-16y+1=0$ παριστάνει έλλειψη.

95) Δείξτε ότι η εξίσωση $5x^2-4y^2+10x+24y-51=0$ παριστάνει υπερβολή και να βρεθούν οι εστίες της.

96) Δείξτε ότι η εξίσωση $y^2+4x+4y+8=0$ παριστάνει παραβολή και να βρεθούν η εστία και η εξίσωση της διευθετούσας της.

▼ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ: $\boxed{Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0}$: $|A|+|B|\neq 0$

				▼Είδος κωνικής τομής
$AB\neq 0$	$AB>0$	$K\neq 0$	K ομόσημο A, B	Έλλειψη (κύκλος αν $A=B$)
			K ετερόσημο A, B	$\varnothing$ (Αδύνατη Εξίσωση)
		$K=0$		1 σημείο
	$AB<0$	$K\neq 0$		Υπερβολή.
		$K=0$		2 ευθείες.

$A\cdot B=0$	$A=0 \wedge B\neq 0$	$\Gamma\neq 0$		Παραβολή.
		$\Gamma=0$	$\Delta^2-4BE>0$	2 ευθείες $//x'x$.
			$\Delta^2-4BE=0$	1 ευθεία $//x'x$
			$\Delta^2-4BE<0$	$\varnothing$ (Αδύνατη Εξίσωση)
	$A\neq 0 \wedge B=0$	$\Delta\neq 0$		Παραβολή.
		$\Delta=0$	$\Gamma^2-4AE>0$	2 ευθείες $//y'y$
			$\Gamma^2-4AE=0$	1 ευθεία $//y'y$.
			$\Gamma^2-4AE<0$	$\varnothing$ (Αδύνατη Εξίσωση)

$$\boxed{K=\frac{B\cdot\Gamma^2+A\cdot\Delta^2-4\cdot A\cdot B\cdot E}{4A^2\cdot B^2}}$$

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Δίνονται οι κύκλοι $(c_1): (x+3)^2+(y+1)^2=50$, $(c_2): (x-5)^2+(y-5)^2=50$.
1) Να βρεθεί η εξίσωση της διακέντρου.
2) Να δείξτε ότι τέμνονται
3) Να βρεθεί το μήκος της κοινής χορδής.

② Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο τη κοινή χορδή των κύκλων
$(c_1): x^2+y^2-6x=0$ και $(c_2): x^2+y^2-6y=0$.

③ Να βρεθεί η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο που έχει πλευρές $(\varepsilon_1): x+5y-7=0$, $(\varepsilon_2): 3x-2y-4=0$, $(\varepsilon_3): 7x+y+19=0$.

④ Να βρεθεί η εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο που έχει πλευρές $(\varepsilon_1): x+5y-7=0$, $(\varepsilon_2): 3x-2y-4=0$, $(\varepsilon_3): 7x+y+19=0$.

⑤ Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων του κύκλου $(c_1): x^2+y^2=64$ και της παραβολής $(c_2): y^2=30x$.

⑥ Οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2=4x$ στα σημεία της $A(\kappa^2, 2\kappa)$, $B(\lambda^2, 2\lambda)$ με $\kappa\neq\lambda$ τέμνονται στο Γ. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Γ και να δείξτε ότι το εμβαδόν του $A\hat{B}\Gamma$ είναι: $E=\frac{1}{2}\cdot|\kappa-\lambda|^3$.

⑦ Από το σημείο $M(4,-1)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB στη παραβολή $(c): y^2=-4x$. Να βρεθεί το εμβαδόν του $E\hat{A}B$, όπου Ε είναι η εστία της παραβολής.

⑧ Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=2$ και η απόσταση του τυχαίου σημείου της $M(x_1,y_1)$ από την εστία E_2 είναι 8.
Να βρεθεί η απόσταση του M από την ευθεία $(\varepsilon): x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$.

⑨ Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει κορυφές τις εστίες της έλλειψης $(c): \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ και εστίες τις κύριες κορυφές A, A′ της έλλειψης.

⑩ Αν $|\lambda|>\frac{\beta}{\alpha}$ δείξτε ότι:
1) Οι εφαπτόμενες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ έχουν εξισώσεις:
$(\varepsilon_1): y=\lambda x+\sqrt{\alpha^2\lambda^2-\beta^2}$ και $(\varepsilon_2): y=\lambda x-\sqrt{\alpha^2\lambda^2-\beta^2}$.
2) $d_1\cdot d_2=\beta^2$, όπου d_1, d_2 οι αποστάσεις της εστίας $E_2(\gamma,0)$ από τις εφαπτόμενές της.
3) Για να εφάπτεται η ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ στη δοθείσα υπερβολή πρέπει να ισχύει: $\alpha^2\cdot A^2-\beta^2\cdot B^2=\Gamma^2$.

(11) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (ε) της έλλειψης (c): $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$ για τις οποίες ισχύει $(\hat{\delta,\varepsilon})=45^\circ$, όπου $(\delta): 2x-y+1=0$.

(12) Δίνονται η έλλειψη $(c_1): \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ και η υπερβολή $(c_2): \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. Δείξτε ότι:

τα σημεία τομής τους ορίζουν ορθογώνιο παρ/μο.

(13) Από το σημείο $P(-1,-3)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB στην έλλειψη (c): $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$.

Να βρεθεί η εξίσωση της AB.

(14) Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της υπερβολής (c): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ που έχει μέσο το σημείο $M(3,1)$.

(15) Δείξτε ότι το παρ/μο που σχηματίζεται από τις δύο ασύμπτωτες μιας υπερβολής και από τις παράλληλες προς αυτές από τυχαίο σημείο της υπερβολής, έχει σταθερό εμβαδόν.

(16) Να βρεθεί ο $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (ε): $y=\frac{3}{4}x-\frac{\mu}{4}$ και η υπερβολή (c): $\frac{x^2}{9}-y^2=1$ να έχουν:

1) Δύο κοινά σημεία.

2) Ένα κοινό σημείο στο οποίο εφάπτονται.

(17) Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $x^2-y^2=\alpha^2$ και τα σημεία της $A'(-\alpha,0)$, $A(\alpha,0)$, $B(\alpha\sqrt{2},\alpha)$. Δείξτε ότι:

το ορθόκεντρο H του $\overset{\triangle}{ABA'}$ είναι σημείο της υπερβολής.

(18) Δίνονται τα σταθερά σημεία O, A, τέτοια ώστε $|\vec{OA}|=3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $\vec{OM}\cdot(\vec{OM}-2\cdot\vec{OA})=7$. (ΘΕΜΑ '82)

(19) Από το σημείο $P(6,-8)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB προς το κύκλο (c): $x^2+y^2=25$. Να υπολογιστούν:

1) η απόσταση του P από την AB

2) Το εμβαδόν του τριγώνου PAB.

(20) Από το σημείο $P(4,2)$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB προς το κύκλο (c): $x^2+y^2=10$.

1) Δείξτε ότι το τρίγωνο APB είναι ορθογώνιο στο P.

2) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του $\overset{\triangle}{APB}$.

(21) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το $A(2,0)$ και από τα σημεία τομής των κύκλων $(c_1): x^2+y^2-8x-6y=0$, $(c_2): x^2+y^2+4x-6=0$.

(22) Δίνεται η παραβολή (c): $y^2=4x$. Να βρεθούν:

1) Η εξίσωση της εφαπτομένης της (c) που είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $3x+y+3=0$.

2) Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της (c) που φέρνουμε από το σημείο $(-2,1)$. (ΘΕΜΑ '88)

γ) Αν $A, B, \Gamma \in \Pi_\nu$: $AB = BA$, $B = \Gamma^2$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι $(A^{-1}\Gamma A)^2 = B$.

δ) Αν $A, B \in \Pi_\nu$ και $ABA = I_\nu$, δείξτε ότι:
i) $AB = BA$
ii) Υπάρχουν οι A^{-1}, B^{-1} και είναι $A^{-1} = AB$ και $B^{-1} = A^2$.
iii) Να λυθεί η εξίσωση $AXB = AB + AB^2$.

ε) Αν $A \in \Pi_\nu$ και $A^3 = 0$ δείξτε ότι ο πίνακας $I_\nu - A$ είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$.

στ) Αν $A, B \in \Pi_\nu$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι:

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

ζ) Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$A^2 = x \cdot A - y \cdot I \quad (1).$$

Μετά με χρήση μόνο της (1) να δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1}.

η) Αν $A \in \Pi_3$ και $A^2 - 2A + I_3 = 0$ δείξτε ότι:
i) ο A είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον A^{-1}.
ii) $A^\nu = \nu \cdot A - (\nu - 1) \cdot I_3$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

θ) Αν ο $A \in \Pi_\nu$ είναι λύση της εξίσωσης $X^2 + X + I = 0$
i) να βρεθεί (αν υπάρχει) ο A^{-1}.
ii) Δείξτε ότι:

$$A^{83} + A^{121} + I = 0 \quad \text{και} \quad A^{35} + (A^{-1})^{35} = -I.$$