Α΄ΔΕΣΜΗ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

- ΠΙΝΑΚΕΣ-ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ-ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ
- ΟΜΑΔΕΣ-ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ -ΣΩΜΑΤΑ
- ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ
- ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Α.Πιστοφίδης

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ.

1) ΠΡΟΣΘΕΣΗ: Γίνεται ΜΟΝΟ μεταξύ πινάκων του ίδιου τύπου (ν,μ) ως εξής: $A+B=[\alpha_{ij}]+[\beta_{ij}]=[\alpha_{ij}+\beta_{ij}]=[\gamma_{ij}]=\Gamma$.

Δηλαδή: $\forall i,j,\quad \gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$.

Ιδιότητες: $\forall A,B,\Gamma\in \Pi_{\nu\times\mu}$ ισχύουν: ← ΟΧΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1) Αντιμεταθετική: $A+B=B+A$
2) Προσεταιριστική: $(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma)$
3) Ουδέτερο στοιχείο ο $\mathbf{0}$: $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$ (ο $\mathbf{0}$ είναι μοναδικός)
4) Αντίθετο » του A: $A+A'=A'+A=\mathbf{0}$. (Συμβολισμός: $A'=-A$).

● → **ΑΦΑΙΡΕΣΗ:** Το άθροισμα $A+(-B)$ λέγεται διαφορά του B από τον A και συμβολίζεται $A-B$.

Δηλαδή: $A-B=[\alpha_{ij}]-[\beta_{ij}]=[\alpha_{ij}-\beta_{ij}]$

Βασικές εφαρμογές:

i) $A+\Gamma=B+\Gamma \Leftrightarrow A=B$, ii) $A+B=\Gamma \Leftrightarrow A=\Gamma-B$, iii) $-(A+B)=(-A)+(-B)$.

Αποδείξεις...

2) ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΑ $A\in\Pi_{\nu\times\mu}$ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟ $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γίνεται ΠΑΝΤΟΤΕ ως εξής: $\lambda\cdot A=\lambda\cdot[\alpha_{ij}]=[\lambda\cdot\alpha_{ij}]$

- Αν $\lambda=-1 \Rightarrow (-1)\cdot A=-A \to$ Αντίθετος πίνακας του A.
- $\forall \lambda\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, $\lambda A=A+A+\dots+A$ (λ προσθετέοι).

Ιδιότητες: $\forall \lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$ και $\forall A,B\in\Pi_{\nu\times\mu}$ ισχύουν:

1) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
2) $\lambda(\lambda' A)=(\lambda\lambda')A$
3) $(\lambda+\lambda')A=\lambda A+\lambda' A$
4) $1\cdot A=A$.

ΟΧΙ Αποδείξεις

- $\lambda\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $(-1)\cdot A=-A$.

3) ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Γίνεται ΜΟΝΟ μεταξύ πινάκων $A=[\alpha_{ij}]$, $B=[\beta_{jk}]$ με την ιδιότητα: το πλήθος των στηλών του A να ισούται με το πλήθος των γραμμών του B. Δηλαδή αν $A\in\Pi_{\nu\times\mu}$ πρέπει $B\in\Pi_{\mu\times\rho}$, οπότε ο πολ/μός ορίζεται ως εξής:

i) Πολ/μός "γραμμή" επί "στήλη" $A_{1\times\mu}\cdot B_{\mu\times 1}=\Gamma_{1\times 1}$

$$A\cdot B=[\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_\mu]\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_\mu\end{bmatrix}=[\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\dots+\alpha_\mu\beta_\mu].$$

Δηλαδή το γινόμενο είναι πίνακας στοιχείο. $((1,\mu)\times(\mu,1)=(1,1))$.

ii) Πολ/μός "πινάκων" $A_{\nu\times\mu}\cdot B_{\mu\times\rho}=\Gamma_{\nu\times\rho}$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\mu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\mu}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\mu}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1\rho}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2\rho}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta_{\mu 1} & \beta_{\mu 2} & \cdots & \beta_{\mu\rho}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1\rho}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2\rho}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{\nu 1} & \gamma_{\nu 2} & \cdots & \gamma_{\nu\rho}\end{bmatrix}$$

όπου: $\gamma_{ik}=\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\dots+\alpha_{i\mu}\beta_{\mu k}$

Δηλαδή: κάθε στοιχείο γ_{ik} του γινομένου προκύπτει από τον πολ/μό της i γραμμής του A επί την K στήλη του B, όπως στη περίπτωση (i).

Ιδιότητες

1) Προσεταιριστική: $(AB)\cdot\Gamma=A(B\Gamma)$
2) Επιμεριστική: $A(B+\Gamma)=AB+A\Gamma$ και $(B+\Gamma)\cdot A=BA+\Gamma A$.
3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
4) $A\cdot I_\nu=I_\nu\cdot A=A$
5) $O\cdot A=A\cdot O=O$
6) $A^\nu=A\cdot A\cdots A$ (ν παράγοντες)
7) $A^\nu\cdot A^\mu=A^{\nu+\mu}$.
8) $(A^\nu)^\mu=A^{\nu\cdot\mu}$.

● ΠΡΟΣΟΧΗ: ΔΕΝ ισχύουν (εν γένει) οι ιδιότητες

α) Αντιμεταθετική $AB=BA$ ● Αν ισχύει τότε οι $A,B\rightarrow$ Αντιμεταθετοί.

β) $A\cdot B=O\Rightarrow A=O\vee B=O$

γ) $\left.\begin{matrix}A\Gamma=B\Gamma \text{ ή } \Gamma A=\Gamma B\\ \Gamma\neq O\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=B.$ ● Ισχύει μόνο αν ο Γ είναι αντιστρέψιμος πίνακας (εφ3Β)

δ) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

Έτσι, οι γνωστές ταυτότητες του Newton δεν ισχύουν (εν γένει), γι'αυτό όταν θέλουμε να υψώσουμε άθροισμα ή διαφορά σε δύναμη δουλεύουμε με τον ορισμό της δύναμης και την επιμεριστική ιδιότητα

π.χ. $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A(A+B)+B(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$.

ε) $(A\cdot B)^\nu=A^\nu\cdot B^\nu$. Το σωστό είναι: $(AB)^\nu=(AB)(AB)\cdots(AB)$. ($\nu$ παράγοντες

▼ **Αντιστρέψιμος πίνακας**

Αν $A\in\Pi_\nu$ είναι δυνατόν να υπάρχει πίνακας $A'\in\Pi_\nu$:

$$AA'=A'A=I_\nu$$

Ο A' λέγεται αντίστροφος του A, και συμβολίζεται A^{-1}.

● Αν υπάρχει ο A' είναι μοναδικός (απόδειξη σελ. 23 Β)

Άρα, όταν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος ισχύει: $AA^{-1}=A^{-1}A=I_\nu$

● $(A^{-1})^{-1}=A$. $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$ (εφαρμ. 2 Β σελ. 25).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Να γραφούν οι τετραγωνικοί πίνακες τάξεως 4, που ορίζονται ως εξής: i) $\alpha_{ij}=i^j$. ii) $\beta_{ij}=i-j$. iii) $\gamma_{ij}=\begin{cases}-2, & \text{αν } i=j\\ 1, & \text{αν } i\neq j\end{cases}$

iv) $\delta_{ij}=\begin{cases}-1, & \text{αν } i=j-1\\ 0, & \text{αν } i+1\neq j\end{cases}$ v) $\varepsilon_{ij}=(-2)^{i+j}$. vi) $\alpha_{ij}=i-2j$

② Δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\begin{pmatrix}\sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi\\ -\eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi\end{pmatrix}+\eta\mu\varphi\cdot\begin{pmatrix}\eta\mu\varphi & -\sigma\upsilon\nu\varphi\\ \sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi\end{pmatrix}=I_2$.

③ Αν $A=[\alpha_{ij}]\in\Pi_2$: $\alpha_{ij}=\begin{cases}i-2j, & \text{αν } i\leq j\\ i+j, & \text{αν } i>j\end{cases}$ και

$B=\begin{bmatrix}x+y & 2x+y-3\\ x-y & x+2y+1\end{bmatrix}$, να βρεθούν τα $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε $A=B$.

④ Να βρεθούν τα $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2x+y & 3x+y-10 & -x+y-2\\ x+y & x+2y & 2x-y\\ 2x+y-1 & -x+2y+3 & x+y+1\end{bmatrix}$ να είναι: α) Κάτω τριγωνικός β) Άνω τριγωνικός.

⑤ Αν $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 1 & -7 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 5\\ 2 & 3 & -7\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\ 6 & 2 & 5\end{bmatrix}$, να υπολογιστούν οι πίνακες: α) $A-B+\Gamma$. β) $-2A+3B-\Gamma$

⑥ Να λυθεί η εξίσωση: $3\cdot X-2\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 1\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

⑦ Αν $A=\begin{bmatrix}-\sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta\\ -\eta\mu\theta & -\sigma\upsilon\nu\theta\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}\eta\mu\theta & -\sigma\upsilon\nu\theta\\ \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta\end{bmatrix}$, να βρεθούν τα $\theta\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $\eta\mu\theta\cdot A+\sigma\upsilon\nu\theta\cdot B=\mathbb{O}$

⑧ Να λυθεί η εξίσωση: $-2\begin{bmatrix}x & -y\\ z-2 & -\omega+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y & x-2\\ x & y+\omega\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & y\\ 3z & 2\end{bmatrix}$.

⑨ Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 9\\ 6 & 7\end{bmatrix}$.
Δείξτε ότι: $AB\neq BA$ χωρίς να κάνετε τις πράξεις.

⑩ Δείξτε ότι: α) Οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ δεν είναι αντιμεταθετοί. β) Οι πίνακες $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\Delta=\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ είναι αντιμεταθετοί.

⑪ Αν $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ να βρεθεί το $A\cdot B$. Τι παρατηρείτε;

⑫ Στο Π_2 να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases}3X+4\Psi=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -12 & 9\end{pmatrix}\\ -2X+3\Psi=\begin{pmatrix}8 & -7\\ -9 & -6\end{pmatrix}\end{cases}$.

(13) Αν $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$ δείξτε ότι: α) $AB=BA$. β) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$.

(14) Αν $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ δείξτε ότι: $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$.

(15) Αν $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ να βρεθούν οι πίνακες: A^2, A^3, A^4, A^ν, $(\nu\in\mathbb{N}^*)$

(16) Αν $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ δείξτε ότι: $A^\nu=\begin{bmatrix}\nu+1 & -\nu\\ \nu & -\nu+1\end{bmatrix}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

(17) Αν $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, δείξτε ότι: $A^\nu=A$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$. ($A\rightarrow$ Αδύναμος πίνακας)

(18) Δείξτε ότι ο $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ είναι λύση της εξίσωσης: $X^2-2X-3I_2=\mathbb{O}$

(19) Αν $\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -3/2\\ -3/2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\mathbb{O}\Rightarrow x=y \vee x=\frac{y}{2}$.

(20) Αν $f(x)=\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu x & -\eta\mu x\\ \eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x\end{bmatrix}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=f(x_1+x_2)$

(21) α) Αν $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A^\nu=;$. β) Αν $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, να βρεθεί ο B^{1985}

(22) Αν $A=\begin{pmatrix}-2 & -9\\ 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow A^\nu=\begin{pmatrix}1-3\nu & -9\nu\\ \nu & 1+3\nu\end{pmatrix}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\geq 2$.

(23) Αν $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ και $B=A-I$, να υπολογιστεί ο B^ν, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

(24) Αν $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -\eta\mu\theta\\ -1 & 0 & \sigma\upsilon\nu\theta\\ -\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta & 0\end{bmatrix}$ δείξτε ότι: α) $A^3=\mathbb{O}$. β) $A^\nu=\mathbb{O}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}, \nu>3$.

(25) Αν $A=\begin{bmatrix}0 & -16\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ να βρεθούν τα $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε: $(A-xI)(A-yI)=\mathbb{O}$

(26) Αν $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{bmatrix}$, δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πίνακες X της μορφής $X=\begin{bmatrix}x & y\\ z & 1\end{bmatrix}$ για τους οποίους ισχύει: $A\cdot X=X\cdot A$.

(27) Αν $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -\alpha\\ -1 & 0 & \beta\\ -\alpha & \beta & 0\end{bmatrix}$ και $\alpha^2+\beta^2=1$ δείξτε ότι: $A^3=\mathbb{O}$

(28) α) Αν $A=\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu\alpha & -\eta\mu\alpha\\ \eta\mu\alpha & \sigma\upsilon\nu\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow A^\nu=\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha) & -\eta\mu(\nu\alpha)\\ \eta\mu(\nu\alpha) & \sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)\end{bmatrix}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

β) Αν $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ και $f(x)=\begin{bmatrix}\sigma\upsilon\nu x & \eta\mu x\\ -\eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x\end{bmatrix}$ δείξτε ότι:

i) $B^2=-I$. ii) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot I+\eta\mu x\cdot B$. iii) $f(\alpha)\cdot f(\beta)=f(\alpha+\beta)$.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

1) Γραμμική εξίσωση

α) με ένα άγνωστο ⟶ $\underline{\alpha x = \beta}$

- Αν $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ Μ.Μ.Λ. $x = \frac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha = 0$ και
  - $\beta \neq 0 \rightarrow$ Αδύνατη
  - $\beta = 0 \rightarrow$ ταυτότης.

β) με μ αγνώστους ⟶ $\underline{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_\mu x_\mu = \beta}$

2) Γραμμικό σύστημα: είναι σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων με μ αγνώστους. ⟶

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1\mu}x_\mu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2\mu}x_\mu = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{\nu 1}x_1 + \alpha_{\nu 2}x_2 + \cdots + \alpha_{\nu\mu}x_\mu = \beta_\nu . \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Αυτό γράφεται σαν εξίσωση πινάκων $\boxed{A \cdot X = B}$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & & \alpha_{\nu\mu} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

Ο $\nu \times \mu$ πίνακας A λέγεται πίνακας του συστήματος, ενώ ο $\nu \times (\mu+1)$ πίνακας ⟶ $E = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\mu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\mu} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\mu} & \beta_\nu \end{array}\right]$ λέγεται <u>επαυξημένος</u> πίνακας του (Σ)

● Αν $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_\nu = 0$ το (Σ) λέγεται <u>ομογενές</u>

<u>Λύση</u> ενός τέτοιου (Σ) είναι κάθε μ-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ που το επαληθεύει. Έστω S το σύνολο λύσεων του (Σ). Τότε:

- ●₁ Αν $S = \emptyset$ το (Σ) είναι <u>αδύνατο</u>
- ●₂ Αν $S \neq \emptyset$ τότε $\exists$ λύση και το (Σ) είναι <u>συμβιβαστό</u>.

Παρατηρήσεις

1) Το ομογενές (Σ) έχει προφανή λύση τη μηδενική $(0, 0, \ldots, 0)$ και άρα είναι συμβιβαστό

2) Αν τα $\alpha_{ij} = 0$ για κάποιο άγνωστο, ο άγνωστος αυτός παραλείπεται.

3) Αν $\alpha_{ij} = 0$, $\forall i,j$ κάποιας εξίσωσης, τότε:

i) αν ο σταθερός όρος αυτής είναι διάφορος του μηδενός, αυτή είναι αδύνατη $\Rightarrow (\Sigma)$ αδύνατο.

ii) αν ο σταθερός όρος αυτής είναι ίσος με μηδέν, αυτή είναι ταυτότης και άρα μπορεί να παραλειφθεί.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.

Στηρίζεται στη μετατροπή του (Σ) σε άλλα ισοδύναμα (Σ) και τελικά σε (Σ) με προφανείς λύσεις. Η μετατροπή αυτή γίνεται

- 1. Με αντιμετάθεση 2 εξισώσεων του (Σ). $\varepsilon_i \longleftrightarrow \varepsilon_j$.
- 2. Με αντικατάσταση μιας εξίσωσης ε_i του (Σ) με τη $\lambda\cdot\varepsilon_i$. $\varepsilon_i \longleftrightarrow \lambda\cdot\varepsilon_i$
- 3. " " " " " " " " " $\varepsilon_i+\lambda\varepsilon_j$. $\varepsilon_i \longleftrightarrow \varepsilon_i+\lambda\varepsilon_j$

Στα παραπάνω στηρίζεται η <u>ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΑΠΑΛΟΙΦΩΝ</u> που οδηγεί στη παρακάτω:

→ ΛΥΣΗ ΤΟΥ (Σ) ΜΕ ΤΟΝ ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΑ ▼ ΜΕΘΟΔΟΣ

1) Παράδειγμα $\boxed{\nu\times\nu}$ → $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

$$E=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] (-2),(-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \cdot\left(-\tfrac{1}{5}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] (-2)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow (x,y,z)=(-2,2,2).$$

Το (Σ) ύστερα απ' όλες αυτές τις μετατροπές έχει γίνει:

$$\begin{cases} 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=-2 \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=2 \\ 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-2. \\ y=2. \\ z=2. \end{cases}$$

• <u>ΒΑΣΙΚΟΣ ΣΚΟΠΟΣ</u> είναι ο πίνακας A του συστήματος να γίνει <u>μοναδιαίος</u> I_ν. Αυτό γίνεται με τα εξής <u>βήματα</u>:

1) Κάνω το $\alpha_{11}=1$ μεταθέτοντας δύο γραμμές του E ή πολ/ντας τη 1η γραμμή με τον αντίστροφο του α_{11}.

2) Κάνω τα $\nu-1$ στοιχεία κάτω του $\alpha_{11}=1$ μηδενικά, πολ/ντας τη 1η γραμμή με τους αντίθετους των στοιχείων $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{\nu 1}$ και προσθέτοντας στις επόμενες γραμμές...

3) Κάνω το $\alpha_{22}=1$ και συνεχίζω όμοια μετά το $\alpha_{33}=1$ .... κ.ο.κ. ώστε ο E να γίνει <u>ΚΑΤΩ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΣ</u>

4) Κάνω το $\alpha_{\nu\nu}=1$ και δουλεύοντας αντίστροφα κάνω τον E και <u>ΑΝΩ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ</u>, δηλαδή I_ν οπότε έχω τη λύση, μετά τη διευκρινισμένη γραμμ

→ Αν κατά τη διαδικασία αυτή, παρουσιαστεί γραμμή της μορφής

$$0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \;\vdots\; \alpha$$

τότε αν
- $\alpha\neq 0$ η αντίστοιχη εξίσωση είναι αδύνατη $\Longrightarrow$ <u>(Σ) ΑΔΥΝΑΤΟ.</u>
- $\alpha=0$ η αντίστοιχη εξίσωση είναι ταυτότης και <u>η γραμμή παραλείπεται</u>

2) Παράδειγμα $\boxed{\nu\times\mu}$

i) $\underline{\nu>\mu} \longrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=3 \\ 3x+y=0 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΣ

1) Δουλεύω όπως στο $\nu\times\nu$ με σκοπό να κάνω τον A κάτω κλιμακωτό.

2) Έτσι, οι $\nu-\mu$ τελευταίες γραμμές θα γίνουν της μορφής $0\ 0 \dots 0 \mid \alpha$ οπότε αν $\alpha=0$, παραλείπονται και συνεχίζω όπως στο $\nu\times\nu$.

* Αν σε μια από αυτές είναι $\alpha\neq 0$, τότε το (Σ) είναι αδύνατο.

$$E=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] (-2),(-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right] \cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right] \cdot 2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & -17/3 \end{array}\right]$$ → Η αντίστοιχη εξίσωση είναι αδύνατη $\Longrightarrow$ (Σ) αδύνατο.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ένα τέτοιο σύστημα λύνεται και ως εξής: Λύνω το $\mu\times\mu$ και τη λύση που βρίσκω (αν έχει λύση) εξετάζω αν επαληθεύει και τις $\nu-\mu$ υπόλοιπες εξισώσεις.

ii) $\underline{\nu<\mu} \longrightarrow \begin{cases} x \quad\ \ + z + 4\omega + 2\varphi = 3 \\ \quad y \quad + 2\omega - \varphi = -1 \\ -x+3y+2z \qquad = -2 \end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΣ

1) Όμοια με τη προηγούμενη περίπτωση 1.

2) Κάνω τον $\nu\times\nu$ πίνακα Μοναδιαίο.

3) Βρίσκω τους ν κύριους αγνώστους συναρτήσει των $\mu-\nu$ ελευθέρων αγνώστων.

$$E=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right] (-3)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right] \cdot\tfrac{1}{3} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] (-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{14\omega}{3} - \tfrac{\varphi}{3} \\ y &= -1 - 2\omega + \varphi \\ z &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{2\omega}{3} - \tfrac{5\varphi}{3} \end{aligned}$$

Δηλαδή το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής: $\left(\frac{5-14\omega-\varphi}{3}, -1-2\omega+\varphi, \frac{4+2\omega-5\varphi}{3}, \omega, \varphi\right) : \omega,\varphi\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή οι λύσεις προκύπτουν αν οι δύο $(\mu-\nu)$ ελεύθεροι άγνωστοι ω,φ πάρουν αυθαίρετες τιμές.

● → Η ΜΕΘΟΔΟΣ που αναφέρθηκε εφαρμόζεται και για ΟΜΟΓΕΝΗ γραμμικά συστήματα.

ΑΣΚΗΣΗ

29 Να λυθούν με τον ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟ πίνακα τα συστήματα:

α) ν×ν

1) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ $(-2,2,2)$

2) $\begin{cases} 3x-y+3z=1 \\ -x+2y-z=-7 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=-\frac{5}{3} \end{cases}$ $(-2,-4,1)$.

β) ν×μ

i) ν>μ

3) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x+y=9 \\ x+5y=17 \end{cases}$ $(2,3)$.

4) $\begin{cases} x-5y=0 \\ x=y+4 \\ 3x-7y=8 \end{cases}$ $(5,1)$.

5) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-5y=-7 \\ x+y=3 \\ 6x-7y=8 \end{cases}$ (Αδύνατο)

6) $\begin{cases} x+z=4 \\ 2x-y+3z=9 \\ 2y-z=1 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$ $(1,2,3)$.

7) $\begin{cases} x-2y+z=-3 \\ -2x+4y-2z=6 \\ 3x-6y+3z=-9 \\ 7x-14y+7z=-21 \end{cases}$ $(-3+2y-z,\ y,\ z):\ y,z\in\mathbb{R}$.

ii) ν<μ

8) $\begin{cases} x-y-2z=6 \\ 3x-3y-6z=1 \end{cases}$ (Αδύνατο)

9) $\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ 2x+4y+z=3 \end{cases}$ $(2-2y,\ y,\ -$ $y\in\mathbb{R}$.

10) $\begin{cases} x+y+w=4 \\ y+w+z=-2 \\ x+w+z=1 \end{cases}$ $(z+6,\ z+3,\ -2z-5,\ z)$ $z\in\mathbb{R}$

11) $\begin{cases} x-3y+3z+w+\varphi=34 \\ 2x-6y-z-2w-5\varphi=-8 \\ 3x-9y-5z+w-11\varphi=-20 \end{cases}$

$(5+3y+2\varphi,\ y,\ 8-\varphi,\ 5,\ \varphi):\ y,\varphi\in\mathbb{R}$.

γ) ΟΜΟΓΕΝΗ • Προφανής λύση η μηδενική, άρα αποκλείεται να βγει αδύνατο.

12) $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ $(0,0)$

13) $\begin{cases} x+y-w=0 \\ 2x-y+4w=0 \\ x-3y+w=0 \end{cases}$ $(0,0,0)$

14) $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ y-2z=0 \\ x+8z=0 \end{cases}$ $(-8z,\ 2z,\ z):\ z\in\mathbb{R}$.

15) $\begin{cases} -5x+4y+3w=0 \\ x-2y+w=0 \\ -10x+8y+6w=0 \end{cases}$ $\left(\frac{5}{3}w,\ \frac{4}{3}w,\ w\right):$ $w\in\mathbb{R}$.

16) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ $\left(\frac{z}{5},\ \frac{2z}{5},\ z\right):\ z\in\mathbb{R}$.

17) $\begin{cases} 6x-y-w=0 \\ 3x+4y-2w=0 \end{cases}$ $\left(\frac{2w}{9},\ \frac{w}{3},\ w\right):$ $w\in\mathbb{R}$.

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ.

<u>Γενικά</u>: Θεωρούμε $\nu\cdot\nu$ στοιχεία $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$: $\nu\in\mathbb{N}^*$, $i,j\in\{1,2,\dots,\nu\}$, διατεταγμένα σε ν γραμμές και ν στήλες, έτσι ώστε το στοιχείο $\alpha_{\kappa\lambda}$ να είναι στη κ γραμμή και στη λ στήλη.

Δηλαδή: $$D=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \dots & \alpha_{\nu\nu}\end{vmatrix}$$ ← Ορίζουσα ν τάξης.

▼ <u>Γνωστοί υπολογισμοί της $D\in\mathbb{R}$.</u>

1) Ορίζουσα $1^{ης}$ τάξης $(\nu=1)$ ⟶ $D=|\alpha_{11}|=\alpha_{11}$

2) ,, $2^{ας}$,, $(\nu=2)$ ⟶ $D=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}$

3) ,, $3^{ης}$,, $(\nu=3)$ ⟶ Υπολογίζεται με το κανόνα Sarrus

(Sarrus marrus cucunarus)

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{matrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} -\alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}-\alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11}-\alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΙ</u>: Ονομάζουμε:

1) "ΕΛΑΣΣΟΝΑ" ορίζουσα του στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$ της D, την ορίζουσα που προκύπτει από τη D, αν διαγράψουμε τη κ γραμμή και τη λ στήλη στις οποίες ανήκει το $\alpha_{\kappa\lambda}$. Συμβολίζεται με $A_{\kappa\lambda}$.

Έτσι π.χ. στη $D=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}$ η $A_{23}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{vmatrix}$.

2) "ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ" του στοιχείου $\alpha_{\kappa\lambda}$, το γινόμενο $(-1)^{\kappa+\lambda}\cdot A_{\kappa\lambda}$.

3) "ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ" ορίζουσας D, το άθροισμα των γινομένων όλων των στοιχείων μιας γραμμής (ή στήλης) με τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα.

↕→ Κάθε τέτοιο άθροισμα εκφράζει τη D, βάσει του θεωρήματος του Laplace:

Έτσι, αν $\kappa+1$ άρτιος → $D=\alpha_{\kappa1}\cdot A_{\kappa1}-\alpha_{\kappa2}A_{\kappa2}+\dots-(-1)^{\nu}\alpha_{\kappa\nu}A_{\kappa\nu}$ (Κατά τη κ γραμμή)

αν $1+\lambda$ περιττός → $D=-\alpha_{1\lambda}\cdot A_{1\lambda}+\alpha_{2\lambda}\cdot A_{2\lambda}-\dots+(-1)^{\nu}\alpha_{\nu\lambda}\cdot A_{\nu\lambda}$ (,, ,, λ στήλη)

Το ανάπτυγμα ορίζουσας τάξης ν έχει $\nu!$ όρους. $\nu!=1\cdot2\cdot3\cdots\nu$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

1) Η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται, αν οι γραμμές γίνουν στήλες με την ίδια διάταξη. π.χ. $D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$

2) Αν εναλλάξουμε τη θέση δύο γραμμών (ή στηλών) μιας ορίζουσας, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. π.χ. $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12+2=14$, $D'=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow D=-D'$

3) Αν τα αντίστοιχα στοιχεία δύο γραμμών (ή στηλών) μιας ορίζουσας D είναι ίσα ή ανάλογα, τότε η ορίζουσα είναι μηδέν. π.χ. $D_1=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0$, $D_2=\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & -9 & 12 \end{vmatrix} = 0$.

4) Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) μιας ορίζουσας με τον αριθμό λ, τότε η ορίζουσα πολ/ται με λ.

$$\text{π.χ.}\quad \lambda\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda\beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \lambda\beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \lambda\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1 & \lambda\gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

• $_1$ Μπορούμε να βγάζουμε κοινό παράγοντα από τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης). π.χ. $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & -1 \\ 8 & -8 & 12 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 8 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 8\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

• $_2$ Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) είναι 0, τότε $D=0$.

• $_3$ Αν πολ/με με λ όλα τα στοιχεία μιας ορίζουσας D, τότε η D πολ/ται με λ^ν (ν η τάξη της)

π.χ. $D'=\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{vmatrix} = \lambda^2\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \Rightarrow D'=\lambda^2\cdot D$ όπου $D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.

5) Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή στήλης) μιας ορίζουσας D είναι άθροισμα δύο προσθετέων, τότε η D ανάγεται σε άθροισμα δύο οριζουσών.

$$\text{π.χ.}\quad D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2+\alpha_2' & \beta_2+\beta_2' & \gamma_2+\gamma_2' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2' \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

6) Αν στα στοιχεία μιας γραμμής (ή στήλης) προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) πολλαπλασιασμένα με αριθμό λ η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται.

$$\text{π.χ.}\quad D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2+\lambda\alpha_1 & \beta_2+\lambda\beta_1 & \gamma_2+\lambda\gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

● Το ίδιο συμβαίνει αν προσθέσουμε τα στοιχεία των υπολοίπων γραμμών (ή στηλών) σε μια γραμμή (στήλ

7) Αν τα στοιχεία τα πάνω ή κάτω της κυρίας διαγωνίου είναι όλα 0, (Τριγωνική μορφή) τότε η τιμή της ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου. π.χ. $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -24$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30 Να υπολογιστούν οι ορίζουσες:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 35 & 23 \\ 1 & 37 & 26 \\ 1 & 34 & 25 \end{vmatrix}$ ← Βλέπε σχόλιο 1.

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ← Βλέπε σχόλιο 2.

7) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+3 \\ y & y+1 & y+3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ← Βλέπε σχόλιο 3

31 Δείξτε ότι:

1) $\begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)^3.$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta+\gamma \\ 1 & \beta & \gamma+\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} = 0$

3) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha^3-1)^2.$ 4) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma.$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$ 6) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \\ 1 & -x & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha x+\beta & \beta x+\gamma \\ \beta x+\gamma & \gamma x+\delta \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$ όπου $\alpha\beta\gamma \neq 0$. 8) $\begin{vmatrix} 1 & \text{συν}\omega & \text{συν}2\omega \\ \text{συν}\omega & \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega \\ \text{συν}2\omega & \text{συν}3\omega & \text{συν}4\omega \end{vmatrix} = 0$

32 Δείξτε ότι η $D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$ διαιρείται με $\alpha+3$ και $\alpha-1$.

33 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{vmatrix}.$ 2) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -2 \\ -3 & x & 4 \\ -2 & 5 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & x+1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & x+2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$ 4) $\begin{vmatrix} x & x+6 & x+1 \\ x+5 & x & x+2 \\ x+3 & x+4 & x \end{vmatrix} = 0.$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ → A^{-1}.

● **Γενικά για $\nu\times\nu$.** Υπολογίζω το πιθανό αντίστροφο A' του A από τη σχέση $A\cdot A'=I$. Αν αυτός πληρεί και τη σχέση $A'\cdot A=I$, τότε ο $A^{-1}=A'$

● **Ειδικά για 2×2.** (Απόδειξη § 1.18).

Αν $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ και $D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow$ υπάρχει ο $A^{-1}=\frac{1}{D}\cdot\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}$

● **Όμοια για 3×3.** (Απόδειξη § 1.26)

Αν $M=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{bmatrix}$ και $D(M)\neq 0 \Leftrightarrow$ υπάρχει ο $M^{-1}=\frac{1}{D}\cdot\begin{bmatrix}A_1 & -A_2 & A_3\\ -B_1 & B_2 & -B_3\\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3\end{bmatrix}$

όπου A_i, B_i, Γ_i $(i=1,2,3)$ οι ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ της D.

→ Ο τελευταίος τύπος ισχύει και για $\nu\times\nu$ (εφ' όσον $D\neq 0$).

▼ ΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΙΝΑΚΑ

$$\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1\nu}x_\nu=\beta_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2\nu}x_\nu=\beta_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{\nu1}x_1+\alpha_{\nu2}x_2+\cdots+\alpha_{\nu\nu}x_\nu=\beta_\nu\end{cases} \Longleftrightarrow A\cdot X=B \text{ όπου } A=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\,\alpha_{12}\cdots\alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21}\,\alpha_{22}\cdots\alpha_{2\nu}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{\nu1}\,\alpha_{\nu2}\cdots\alpha_{\nu\nu}\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_\nu\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_\nu\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$X=A^{-1}\cdot B \quad \text{(Απόδειξη § 1.19)}$$

→ ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν δοθεί $X\cdot A=B \Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

34 Να βρεθούν οι αντίστροφοι (αν υπάρχουν) των πινάκων:

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -6 & 3\end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

35 Δείξτε ότι οι πίνακες A, B είναι αντίστροφοι, όπου:

$A=\begin{bmatrix}5 & -4 & 2\\ -4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1/3 & -2/3 & 0\\ -2/3 & -1 & -1/3\\ 0 & -1/3 & -2/3\end{bmatrix}$ ↔ Αρκεί: $A\cdot B=B\cdot A=I$.

36 Να λυθούν (με χρήση του αντίστροφου) οι εξισώσεις:

1) $\begin{bmatrix}1 & -5\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-6\\ 6\end{bmatrix}$. 2) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$. 3) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

150

3) $X\cdot\begin{bmatrix}-6 & 5\\ -4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$. 4) $A\cdot X\cdot B=\Gamma$, αν οι $A, B\in\Pi_\nu$ είναι αντιστρέψιμοι.

37 Να λυθούν (με τον αντίστροφο πίνακα) τα συστήματα:

1) $\begin{cases}2x+3y=-11\\ x-y=7\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+3y=5\\ 3x-2y=1\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y-z=5\\ 2x+y=10\\ x=-3\end{cases}$

38 Δείξτε ότι ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2\\ -1 & \lambda\end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

39 α) Αν $A, B\in\Pi_\nu$ που πληρούν την σχέση $AB=BA$ και ισχύει $I_\nu+A+A\cdot B=0$ να βρεθεί (αν υπάρχει) ο A^{-1}.

β) Αν $I+A+A^2+A^3+\cdots+A^\nu=0$ και $A\in\Pi_\nu$, δείξτε ότι $A^{-1}=A^\nu$.

→ Λύνω ως προς I_ν και βγάζω κοινό παράγοντα το A από αριστερά και δεξιά χρησιμοποιώντας προσεταιριστική ή επιμεριστική από αριστερά ή δεξιό

ΛΥΣΗ-ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ.

1α) **2x1**: Έστω $\begin{cases} \alpha_1 x = \beta_1 \\ \alpha_2 x = \beta_2 \end{cases}$ (1) και $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ η ορίζουσα του επαυξημένου πινακά του $M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$.

- **ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ.** Αν το (1) είναι συμβιβαστό, τότε $D=0$ (Απόδ. §1.17).
- Η συνθήκη δεν είναι και ικανή.
- Αντιθετοαντίστροφα: Αν $D \neq 0$ τότε το (1) είναι ασυμβίβαστο (Αδύνατο).

1β) **3x2**: Έστω $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y = \gamma_3 \end{cases}$ (2) και $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ η ορίζουσα του επαυξημένου πινακά του M.

- **ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ.** Αν το (2) είναι συμβιβαστό, τότε $D=0$ (Απόδ. §1.21).
- Η συνθήκη δεν είναι και ικανή.
- Αντιθετοαντίστροφα: Αν $D \neq 0$ τότε το (2) είναι ασυμβίβαστο (Αδύνατο) (Απόδ. §1.22)

ΓΕΝΙΚΑ: Τα παραπάνω ισχύουν και για σύστημα $(\nu+1)\times\nu$.

2α) **2x2**: Έστω $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ και $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $D \neq 0 \Leftrightarrow$ Μια Μόνο Λύση: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$ όπου $D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$.

ii) $D=0$:
- $D_x \neq 0 \lor D_y \neq 0 \Rightarrow$ ΑΔΥΝΑΤΟ
- $D_x = D_y = 0$:
  - $|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta_1|+|\beta_2| \neq 0 \Rightarrow$ ΑΟΡΙΣΤΟ (ΑΠΛΩΣ). Δηλαδή άπειρες λύσεις με ένα ελεύθερο άγνωστο.
  - $|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta_1|+|\beta_2| = 0$:
    - $|\gamma_1|+|\gamma_2| \neq 0 \Rightarrow$ ΑΔΥΝΑΤΟ.
    - $|\gamma_1|+|\gamma_2| = 0 \Rightarrow$ ΑΟΡΙΣΤΟ (ΔΙΠΛΩΣ)-ΤΑΥΤΟΤΙΚ

2β) **3x3**: Έστω $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \omega = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 \omega = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 \omega = \delta_3 \end{cases}$ και $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων.

i) $D \neq 0 \Leftrightarrow$ Μια Μόνο Λύση: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $\omega = \frac{D_\omega}{D}$. (Απόδ. §1.25).

ii) $D=0 \Rightarrow$ ΑΔΥΝΑΤΟ ή ΑΟΡΙΣΤΟ (Αυτό φαίνεται από τον επαυξημένο πίνακα).

Γενικά: Τα παραπάνω ισχύουν και για σύστημα $\nu\times\nu$.

3) **ΟΜΟΓΕΝΕΣ $\nu\times\nu$**: Είναι Συμβιβαστό, διότι έχει πάντα μια τουλάχιστον λύση τη μηδενική

i) $D \neq 0 \Leftrightarrow$ Μια μόνο λύση, τη μηδενική.

ii) $D = 0 \Leftrightarrow$ ΑΟΡΙΣΤΟ (Άπειρες λύσεις που τις βρίσκουμε με τον επαυξημένο).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

40) Να επιλυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2 \end{cases} : \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R}$ στις εξής περιπτώσεις:

1) $\gamma_1=\gamma_2=0 \wedge \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$
2) $(\alpha_1\neq 0 \vee \beta_1\neq 0) \wedge \alpha_2=\beta_2=0 \wedge \gamma_2\neq 0$
3) $\beta_1=\beta_2=0 \wedge \alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1\neq 0$.
4) $\alpha_1=\beta_1=0 \wedge (\alpha_2\neq 0 \vee \beta_2\neq 0)$
5) $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0 \wedge (\gamma_1\neq 0 \vee \gamma_2\neq 0)$.
6) $\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0$.
7) $\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0 \wedge (\alpha_1\neq 0 \vee \beta_1\neq 0)$.

41) Να λυθούν (με ορίζουσες) τα συστήματα:

1) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -x+2y+z=6 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y-z=0 \\ 4x+y+5z=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x-7=-y \\ x-y=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \\ 3x+2y=5. \end{cases}$

42) α) Να λυθούν και να διερευνηθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} 2\alpha x+(\alpha-3)y=\alpha-1. \\ (\alpha-3)x+2\alpha y=\alpha-\alpha^2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+(\lambda+1)y=2 \\ (\lambda+2)x-(\lambda^2-1)y=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \mu x-y=1-\mu \\ x-\mu y=\mu-\mu^2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+\mu y-1=0 \\ (\mu+1)x-y-2=0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} (\kappa+2)x+\kappa y=1 \\ 3x+(2-\kappa)y=1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (\lambda^2-1)x-(\lambda-1)y-\lambda=0 \\ (\lambda-1)^2x+(\lambda-1)y-(\lambda+1)=0. \end{cases}$

β) Όμοια, τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ \lambda x+4y+z=5 \\ 6x+(\lambda+2)y+2z=13 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=\alpha \\ 2x+3y+\alpha z=-1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+\lambda z=-1. \\ x+\lambda y-z=1 \end{cases}$

43) Για ποιές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ τα παρακάτω συστήματα είναι αδύνατα:

1) $\begin{cases} \lambda x+y=1 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (\lambda+2)x+(\lambda-7)y=7 \\ 4x-5y=8+\lambda \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=\lambda \\ \lambda x+y=1 \end{cases}$

44) Για ποιές τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ το σύστημα 1) $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\beta+4 \\ 2x+y=\alpha+8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (2\alpha-1)x+(4\beta+1)y=3 \\ (\alpha+1)x+(\beta-2)y=3 \end{cases}$ είναι αόριστο.

45) Για ποιά $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ είναι συγχρόνως αδύνατα τα συστήματα:

$(\Sigma_1): \begin{cases} (\lambda-1)x+2y=-1 \\ (\mu+1)x+y=1 \end{cases}$ $(\Sigma_2): \begin{cases} (\lambda-2)x+(2\mu-1)y=5 \\ x+3y=1 \end{cases}$

46) Αν τα παρακάτω συστήματα είναι συμβιβαστά, να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$:

1) $\begin{cases} -\lambda x+y=1 \\ x-\lambda y=1 \\ x+y=-\lambda. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lambda x+y=1 \\ x+y=2 \\ x-y=\lambda. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (2\lambda+5)x+(3\lambda+1)y=-3 \\ (\lambda+5)x+(2\lambda+3)y=18 \\ -2x+y=0. \end{cases}$

47) Δείξτε ότι $\forall \alpha\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+y+z=\alpha \\ \alpha x+\alpha y+z=1 \\ x+\alpha y+\alpha z=1 \\ x+y+\alpha z=\alpha \end{cases}$ είναι συμβιβαστό.
Τι συμβαίνει όταν $\alpha=1 \vee \alpha=-1$.

48) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε: 1) το σύστημα: $\begin{cases} 3x+2\lambda y=0 \\ 4x-(\lambda+1)y=0 \end{cases}$ να έχει άπειρες λύσεις. 2) το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x+3y=x \\ 3x+\lambda y=y \end{cases}$ να έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής.

(49) Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=1 \\ \alpha y+\beta x=\alpha\beta \\ x+y=\alpha+\beta \end{cases}$ είναι συμβιβαστό και $\alpha\neq\beta$, δείξτε ότι: $(\alpha+\beta)^2=\alpha\beta+1$.

(50) Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2z=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής, δείξτε ότι: $\alpha=\beta \vee \beta=\gamma \vee \gamma=\alpha$.

(51) Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \\ \beta x+\gamma y+\alpha z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, δείξτε ότι: $\alpha=\beta=\gamma$.

(52) Αν $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ και το σύστημα $\begin{cases} \alpha^3+\kappa\alpha+\lambda=0 \\ \beta^3+\kappa\beta+\lambda=0 \\ \gamma^3+\kappa\gamma+\lambda=0 \end{cases}$ είναι συμβιβαστό (ως προς κ,λ) δείξτε ότι: $\alpha+\beta+\gamma=0$.

(53) Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x+2y+3\omega=0 \\ 4x+(\lambda+3)y+6\omega=0 \\ 5x+4y+(\lambda+1)\omega=0 \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

β) Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος, όταν ο λ ισούται με τη μικρότερη τιμή. (ΘΕΜΑ ’85)

(54) Αν το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=\alpha \\ \lambda x+y=\beta \\ x+\lambda y=\lambda \end{cases}$ είναι συμβιβαστό $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(55) Να λυθούν και να διερευνηθούν τα συστήματα

1) $\begin{cases} (\lambda-2)x=\lambda^2 \\ (\lambda-2)x=-\lambda(\lambda+1) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=-\lambda \\ \lambda x+y=\lambda \\ \lambda x+3y=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+3y+5z=0 \\ x+\kappa y+(2\kappa+1)z=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y+z=\lambda x \\ z+x=\lambda y \\ x+y=\lambda z \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+\lambda y+z=0 \\ (\lambda-1)x-3y-3z=0 \\ 2x-y-\lambda z=0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2\lambda x+y=\lambda \\ x+(\lambda-1)y=1 \\ (3\lambda+2)x+y=2(\lambda+1) \end{cases}$

(56) α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+(\lambda+4)y=4 \\ 3x+(\lambda+2)y=3 \end{cases}$ να έχει άπειρες λύσεις. Στη συνέχεια να βρεθούν οι λύσεις αυτές.

β) Όμοια για το σύστημα: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ \lambda x+\lambda y+z=\lambda+1 \\ \lambda x+2y+2z=2 \end{cases}$

(57) α) Αν $A,B\in\Pi_\nu$: $A^2=A$ και $AB+BA=0$ δείξτε ότι $AB=BA=\mathbf{0}$.

β) Αν $A,B,\Gamma\in\Pi_\nu$: $AB=\Gamma A=I$, δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και $A^{-1}=B=\Gamma$.

γ) Αν $A,B\in\Pi_\nu$ και ο B αντιστρέφεται, δείξτε ότι $\forall\kappa\in\mathbb{Z}^*_+$ ισχύει: $(BAB^{-1})^\kappa=BA^\kappa B^{-1}$.

(ΘΕΜΑ ’90).

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Θεωρούμε τους πίνακες: $H(x)=\begin{bmatrix}\frac{συνx}{\sqrt{2}} & \frac{ημx}{\sqrt{2}}\\ \frac{ημx}{\sqrt{2}} & \frac{συνx}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ και $Σ(x)=\begin{bmatrix}\frac{συνx}{\sqrt{2}} & -\frac{ημx}{\sqrt{2}}\\ -\frac{ημx}{\sqrt{2}} & \frac{συνx}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

α) Δείξτε ότι: $H^2(x)+Σ^2(x)=I$.

β) Να λυθεί η εξίσωση: $Σ^2(x)-H^2(x)=0$. Θέμα 86 4η δέσμη

② Αν $A=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}3&5\\x&y\end{bmatrix}$, να βρεθούν τα $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε $A\cdot X=X\cdot A$.
Δείξτε ακόμη, ότι: $A^ν=\begin{bmatrix}1&3ν\\0&1\end{bmatrix}$, $\forall ν\in\mathbb{N}^*$.

③ Αν $A\in Π_2$: $A^2=A$, δείξτε ότι $A^ν=A$, $\forall ν\in\mathbb{N}, ν\geq 2$.
Στη συνέχεια αν $B=2A-I$ δείξτε ότι: $B^2=I$.

④ Αν $X=\begin{bmatrix}x&y\\0&x\end{bmatrix}$ και $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πίνακες X που πληρούν τη σχέση $A\cdot X=X\cdot A$.

⑤ α) Αν $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$ να βρείτε τους πίνακες A^3, A^{70}, A^{101}, $A^ν: ν\in\mathbb{N}^*$.

β) Αν $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ να βρείτε τον πίνακα B^{1986}.

⑥ Αν $A\in Π_2$: $A^2=0$, δείξτε ότι: $A\cdot(I+A)^ν=A$, $\forall ν\in\mathbb{N}^*$.

⑦ α) Αν $A,B\in Π_2$ είναι δύο αντιστρέψιμοι πίνακες, τέτοιοι ώστε $A^{-1}\cdot B^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$ και ο $B=\begin{bmatrix}2&1\\4&-2\end{bmatrix}$, να βρείτε τον A.

β) Αν $Γ,Δ\in Π_ν$ αντιστρέψιμοι και $Γ\cdot Δ=Δ\cdot Γ$ δείξτε ότι:
$Γ\cdot Δ^{-1}=Δ^{-1}\cdot Γ$ και $Γ^{-1}\cdot Δ=Δ\cdot Γ^{-1}$.

⑧ α) Αν $A\in Π_ν$ και υπάρχουν $α,β,γ\in\mathbb{R}$ με $γ\neq 0$ για τους οποίους ισχύει $αA^3-βA+γI=0$ όπου $I,0\in Π_ν$, δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

β) Αν $A=\begin{bmatrix}2&4\\-1&3\end{bmatrix}$ και $I,0\in Π_2$ να βρείτε όλες τις τριάδες $(κ,λ,μ)$ πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει: $κA^2+3λA-μI=0$ (ΘΕΜΑ '90Δ

⑨ α) Αν $A,B\in Π_2$ δείξτε ότι $D(A\cdot B)=D(A)\cdot D(B)$. Στη συνέχεια να βρεθούν τα $λ\in\mathbb{R}$ αν $A\cdot B=\begin{bmatrix}2&7\\λ-1&3\end{bmatrix}$ και $B\cdot A=\begin{bmatrix}-1&4\\5&λ+2\end{bmatrix}$.

β) Αν $A=\begin{bmatrix}1&1\\συνx&ημx\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}συνx&1\\1&0\end{bmatrix}$ δείξτε ότι: $D(A\cdot B)=-D(A)$.

γ) Δείξτε ότι: $(Γ+Δ)^2=Γ+Δ$, όπου $Γ=\begin{bmatrix}1&-1\\2&-1\end{bmatrix}$ και $Δ=\begin{bmatrix}1&1\\4&-1\end{bmatrix}$.

⑩ Δείξτε ότι:

1) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&α+1&1&1\\1&1&β+1&1\\1&1&1&γ+1\end{vmatrix}=αβγ$.

2) $\begin{vmatrix}α&x&x&β\\x&α&β&x\\x&β&α&x\\β&x&x&α\end{vmatrix}=(α-β)^2\cdot\left[(α+β)^2-4x^2\right]$.

(11) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 4$. 2) $\begin{vmatrix} x & 0 & 3 & -1 \\ x & x & 1 & 4 \\ x & x & x & -2 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$. 3) $\begin{vmatrix} 7 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2+x & x^2+7 & x+7 \end{vmatrix} = 0$.

4) $\begin{vmatrix} \lambda & \lambda+3 & \lambda \\ \lambda+x & \lambda & \lambda+5 \\ \lambda & \lambda+x & \lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$. 5) $\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & x & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & x & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & x \end{vmatrix} = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

6) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$. 7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 \cdot X = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(12) Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x-3y-z=0 \\ 5x-3y-2z=9 \\ 3x+2y+2z=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ 3x+2y-4z=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (\lambda^2+3\lambda-4)x+(1-\lambda^2)y=2\lambda^2-3\lambda+1 \\ (\lambda^2-\lambda)x+(1-\lambda)y=\lambda-1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \lambda x+y+z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \\ \lambda x+(\lambda+1)y+z=0 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x+\lambda(y+z)=0 \\ -2y+z=\lambda x \\ \lambda x+y=-z \end{cases}$ (ΘΕΜΑ '89)

8) $\begin{cases} (\lambda+3)x+2\lambda y=3\lambda-1 \\ x+5y=1 \\ -3x+2(\lambda-3)y=-\lambda-1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} (\lambda+1)x+y=\lambda+1 \\ x+(\lambda+1)y=1 \\ x+y=2\lambda+1 \end{cases}$ (ΘΕΜΑ '88)

(13) Αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0$, δείξτε ότι: $\alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=\beta=\gamma$.

(14) Αν το σύστημα $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0 \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z=0 \end{cases}$ είναι αόριστο και $\alpha\neq\beta$, δείξτε ότι: $\alpha=\gamma \vee \beta=\gamma$.

(15) Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha^2 x+\beta^2 y=\gamma^2 \\ \alpha^3 x+\beta^3 y=\gamma^3 \end{cases}$ είναι συμβιβαστό και $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ δείξτε ότι: $\alpha=0 \vee \beta=0 \vee \gamma=0$.

(16) Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y+z=0 \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+z=0 \\ \alpha^3 x+\beta^3 y+z=0 \end{cases}$ με $\alpha\cdot\beta\neq0$ έχει λύση διάφορο της μηδενικής, δείξτε ότι: $\alpha=1 \vee \beta=1 \vee \alpha=\beta$.

(17) Αν $A\in\Pi_\nu$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}^*$ και $\alpha A^2+\beta A+\gamma\cdot I=O$ δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται.

Γενικεύεται για κάθε πολυώνυμο $\alpha_\nu A^\nu+\alpha_{\nu-1}A^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 A+\alpha_0 I=O$ με $\alpha_0\neq$

(18) Αν $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ και $D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$, δείξτε ότι: $A^2-(\alpha+\delta)A+D\cdot I=O$.

Αν $D\neq0$, δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται.

ΔΟΜΕΣ

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΠΡΑΞΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν E ένα μη κενό σύνολο, τότε κάθε απεικόνιση του $E\times E$ στο E ονομάζεται εσωτερική πράξη στο E ή απλούστερα πράξη στο E.

Η εικόνα του $(\alpha,\beta)\in E\times E$ λέγεται εξαγόμενο ή αποτέλεσμα της πράξης και συμβολίζεται $\alpha f \beta$ όπου f σύμβολο δηλωτικό της πράξης.

π.χ. $\alpha+\beta, \alpha\beta, \alpha^{\beta}, \alpha*\beta, \alpha\circ\beta, \ldots$ (Το f μπορεί και να παραλείπεται..).

● $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha*\gamma=\beta*\gamma$ ●₂ $\alpha=\beta \Rightarrow \gamma*\alpha=\gamma*\beta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $*$ μια πράξη στο E. Ένα μη κενό σύνολο $E_1\subseteq E$ θα λέγεται κλειστό ως προς την πράξη $*$, όταν:

$$\forall(\alpha,\beta)\in E_1\times E_1 \text{ είναι } \alpha*\beta\in E_1.$$

Γενικά: Κάθε απεικόνιση του $A\times B$ σ' ένα σύνολο E λέγεται πράξη.

Ειδικά: Κάθε πράξη του $E\times E$ στο E λέγεται εσωτερική πράξη στο E.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΗΣ.

Μια πράξη $*$ στο E λέγεται:
- ●₁ Προσεταιριστική, όταν $\forall \alpha,\beta,\gamma\in E$, $(\alpha*\beta)*\gamma=\alpha*(\beta*\gamma)$
- ●₂ Αντιμεταθετική, όταν $\forall \alpha,\beta\in E$, $\alpha*\beta=\beta*\alpha$.

Ουδέτερο στοιχείο: Το $e\in E$ θα λέγεται ουδέτερο στοιχείο ως προς τη πράξη $*$ του E, όταν $\forall \alpha\in E$, $\alpha*e=e*\alpha=\alpha$.

Θ Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e ως προς τη πράξη $*$ στο E, τότε αυτό είναι μοναδικό. (Απόδειξη §2.6 Β)

► Το e ως προς μία
- προσθετική πράξη λέγεται μηδενικό και συμβολίζεται με 0.
- πολλαπλασιαστική " " μοναδιαίο " " " 1.

Συμμετρικά στοιχεία: Δύο στοιχεία $\alpha,\alpha'\in E$ θα λέγονται συμμετρικά ως προς τη πράξη $*$ του E, όταν υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο $e\in E$ ως προς τη πράξη αυτή και είναι: $\alpha*\alpha'=\alpha'*\alpha=e$.

• Το e (αν υπάρχει) έχει συμμετρικό το e, γιατί $e*e=e$.

Θ Έστω $*$ μια πράξη προσεταιριστική στο E με ουδέτερο στοιχείο e. Αν υπάρχει το συμμετρικό $\alpha'\in E$ ενός στοιχείου $\alpha\in E$, τότε αυτό είναι μοναδικό. (Απόδειξη §2.7 Β)

► Το α' ως προς μια
- Προσθετική πράξη λέγεται αντίθετο του α και συμβολίζεται $-\alpha$.
- Πολλ/κή " " αντίστροφο " " " " α^{-1}.

Έτσι: $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$, $-(-\alpha)=\alpha$, $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\cdot\alpha=1$, $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$.

● Έστω $*$ μια πράξη στο E προσεταιριστική και με ουδέτερο στοιχείο το e. Αν υπάρχουν τα συμμετρικά $\alpha',\beta'\in E$ των $\alpha,\beta\in E$, τότε: $(\alpha*\beta)'=\beta'*\alpha'$ (Εφαρμ. 1 Β σελ. 67)

Είναι αυτονόητο ότι ένα σύνολο E είναι κλειστό ως προς μια πράξη την οποία έχουμε ορίσει σ' αυτό. Επομένως η αναζήτηση της "κλειστότητας" έχει νόημα μόνο για γνήσια υποσύνολά του.

ΜΕΘΟΔΟΣ. Για να δείξω ότι:

1) Ένα μη κενό σύνολο $A \subset E$ είναι "κλειστό" ως προς μια πράξη $*$ του E, (δηλαδή ότι η $*$ είναι εσωτερική στο A), δείχνω ότι:

$$\forall (\alpha, \beta) \in A \times A \Rightarrow \alpha * \beta \in A.$$

2) Ένα μη κενό σύνολο $A \subset E$ "δεν είναι κλειστό" ως προς μια πράξη $*$ του E, δείχνω ότι: $\exists (\alpha,\beta) \in A \times A : \alpha * \beta \notin A$ (Μέθοδος αντιπαραδείγματος).

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία: $\overline{\forall x : P(x)} \Leftrightarrow \exists x : \overline{P}(x)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $*$ και $\circ$ δύο πράξεις στο E που ορίζονται από τους τύπους: $x*y = 3x+2y$, $x \circ y = \dfrac{3xy}{x^2-y^2}$. Δείξτε ότι η $*$ είναι εσωτερική στο $\mathbb{R}$, ενώ η $\circ$ όχι. ($\mathbb{R} \subset E$)

2. Έστω $*, \circ$ δύο πράξεις στο $\mathbb{R}$ με $x*y = 2x+y^3$ και $x \circ y = \dfrac{3x}{2+y^2}$. Εξετάστε αν το $\mathbb{N}$ είναι ή όχι κλειστό ως προς τις πράξεις αυτές.

3. Έστω $*, \circ$ δύο πράξεις στο $\mathbb{R}$ με $\alpha * \beta = \alpha^2 + \beta^2$ και $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + 3$.
   i) Δείξτε ότι οι πράξεις αυτές είναι εσωτερικές στο $\mathbb{R}$.
   ii) Εξετάστε αν το σύνολο A των άρτιων ακεραίων αριθμών είναι ή όχι κλειστό ως προς τις πράξεις αυτές.
   iii) Όμοια, για το σύνολο Π των περιττών ακεραίων αριθμών.

4. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^* \right\}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλ/μό των πινάκων.

5. Έστω σύνολο $A = \{(x+y\sqrt{2}) : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Δίνονται οι πράξεις $*, \circ$ στο $\mathbb{R}$ με $\alpha * \beta = \alpha\beta$ και $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta\sqrt{3}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι πράξεις αυτές είναι εσωτερικές στο A.

6. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{(x+y\sqrt{2}) : x, y \in \mathbb{Z} \wedge x^2 - 2y^2 = \pm 1\}$ είναι κλειστό ως προς τον πολλ/μό πραγματικών αριθμών.

7. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1\}$ είναι κλειστό ως προς τη πράξη $\alpha * \beta = \alpha + \beta - \alpha\beta$, που ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

8. Έστω A το σύνολο των άρτιων και P των περιττών συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν τα A, P είναι κλειστά ως προς την πρόσθεση και τον πολλ/μό των συναρτήσεων.

9. Αν $A = \{1,3\}$ και $\mathcal{P}(A)$ το δυναμοσύνολο του A (δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A), δείξτε ότι η πράξη ένωση "$\cup$" είναι εσωτερική στο $\mathcal{P}(A)$.
   Όμοια για τη πράξη τομή "$\cap$".

▼ΜΕΘΟΔΟΣ Για να δείξω οποιαδήποτε από τις ιδιότητες των πράξεων ότι ισχύει σ' ένα σύνολο Ε, δείχνω πρώτα ότι το "Ε είναι κλειστό".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(10) Δείξτε ότι το σύνολο $A=\{2^0,2^1,2^2,2^3,\ldots,2^\nu,\ldots\}:\nu\in\mathbb{N}$ είναι κλειστό ως προς τη πράξη του πολ/μού στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει στο A ουδέτερο στοιχείο;

(11) Δίνεται το σύνολο $\Pi=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 2\alpha & 0\end{bmatrix}:\alpha\in\mathbb{R}\right\}$. Δείξτε ότι στο Π ουδέτερο στοιχείο ως προς τον πολ/μό είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$.

● Ένα σύνολο $E_1\subset E$ κλειστό ως προς μια πράξη $*$ του E, μπορεί να έχει ουδέτερο στοιχείο διαφορετικό από το ουδέτερο στοιχείο του E.

(12) Δείξτε ότι στο σύνολο $\mathbb{Z}$ η πράξη $*$ με $\alpha * \beta=\alpha+\beta+5$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

(13) Δείξτε ότι στο $\mathbb{Z}$ η $\circ$ με $\alpha\circ\beta=(\alpha+\beta)^2$ είναι αντιμεταθετική και δεν έχει ουδέτερο στοιχείο.

(14) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $\alpha*\beta=\alpha\beta+\alpha+\beta$. Δείξτε ότι:
1) Η $*$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.
2) Να βρεθεί το ουδέτερο στοιχείο της $*$.
3) Να εξεταστεί ποιά στοιχεία του $\mathbb{R}$ έχουν συμμετρικό ως προς την $*$.
4) Να λυθεί η εξίσωση $x*2=1$ (Με τον ορισμό της $*$ και με τις ιδιότητες της $*$)

(15) Στο σύνολο $\mathbb{Q}$ θεωρούμε τις πράξεις $*$, $\circ$ με:
$x*y=x^2y^2$ και $x\circ y=y(x+y)$. Εξετάστε:
1) Αν οι πράξεις είναι αντιμεταθετικές, προσεταιριστικές.
2) Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο και συμμετρικό στοιχείο $\forall x\in\mathbb{Q}$.

(16) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $x*y=x+y+3$.
Να βρεθούν (αν υπάρχουν): 1) Το ουδέτερο στοιχείο. 2) Το συμμετρικό στοιχείο $\forall x\in\mathbb{R}$.

(17) Στο σύνολο $\mathbb{Q}_+^*$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $x*y=\frac{x\cdot y}{x+y}$. Δείξτε ότι:
1) Η $*$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.
2) $\frac{1}{x}*\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$, $\forall x,y\in\mathbb{Q}_+^*$.

(18) Στο $\mathbb{R}_+$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.
1) Δείξτε ότι η $*$ είναι αντιμεταθετική με ουδέτερο στοιχείο.
2) Να βρεθούν ποιά στοιχεία του $\mathbb{R}_+$ έχουν συμμετρικό.

(19) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $\alpha*\beta=(\alpha-1)\beta^2-(\alpha-1)+\alpha\beta$.
Να βρεθεί (αν υπάρχει) το ουδέτερο στοιχείο ως προς τη πράξη αυτή.

(20) Σε σύνολο A με εσωτερική πράξη $*$ και ουδέτερο στοιχείο e ισχύει $\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta\in A$: $(\alpha*\beta)*(\gamma*\delta)=(\alpha*\gamma)*(\beta*\delta)$.
Δείξτε ότι η $*$ είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική.

ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ Σ ΚΑΙ Π.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ των α_i απο 1 έως ν $\longrightarrow \sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu$.

ΓΙΝΟΜΕΝΟ » » » » » » $\longrightarrow \prod_{i=1}^{\nu}\alpha_i=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu$.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ.

Έστω σύνολο E εφοδιασμένο με μια προσεταιριστική πράξη και $\alpha\in E$.
Αν η πράξη αυτή σημειώνεται αντίστοιχα:

πολλαπλασιαστικά	προσθετικά
τότε ορίζουμε	
τη δύναμη $\alpha^\nu=\begin{cases}\alpha, & \text{αν } \nu=1\\ \alpha^{\nu-1}\cdot\alpha=\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha, & \text{αν } \nu>1\end{cases}$	το ν-πλάσιο του α, $\nu\alpha=\begin{cases}\alpha, & \text{αν } \nu=1\\ (\nu-1)\alpha+\alpha=\alpha+\alpha+\cdots+\alpha & \text{αν } \nu>1\end{cases}$
• $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$. • $(\alpha^\nu)^\mu=\alpha^{\mu\nu}$.	• $\mu\alpha+\nu\alpha=(\mu+\nu)\alpha$. • $\mu(\nu\alpha)=(\mu\nu)\alpha$.

Αν η πράξη στο E είναι και αντιμεταθετική, τότε $\forall \alpha,\beta\in E,\ \nu\in\mathbb{N}^*$

• $(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu$	• $\nu(\alpha+\beta)=\nu\alpha+\nu\beta$

Αν υπάρχει στο E το μοναδιαίο **1** (το μηδενικό **0**) στοιχείο της πράξης τότε:

• $\alpha^0=1$	• $0\cdot\alpha=0$

Αν υπάρχει ο αντίστροφος α^{-1} (ή ο αντίθετος $-\alpha$) του $\alpha\in E$, τότε υπάρχει ο αντίστροφος του α^ν (ή ο αντίθετος του $\nu\alpha$) και είναι $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$:

• $\alpha^{-\nu}=(\alpha^\nu)^{-1}=(\alpha^{-1})^\nu$	• $(-\nu)\alpha=-(\nu\alpha)=\nu(-\alpha)$

• Αν $*$ προσεταιριστική στο E με ουδέτερο στοιχείο e και $\alpha',\beta'\in E$ τα συμμετρικά των $\alpha,\beta\in E$ τότε $(\alpha*\beta)'=\beta'*\alpha'$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21 Δείξτε ότι:

1) $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda+\alpha_i)=\nu\lambda+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i$ $\qquad$ 2) $\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda\alpha_i)=\lambda\cdot\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i$

3) $\sum_{i=1}^{\nu}\left[(x_i+1)^2-x_i^2\right]=\nu+2\sum_{i=1}^{\nu}x_i$ $\qquad$ 4) $\sum_{i=1}^{\nu-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)=\alpha_\nu-\alpha_1$.

22 Αν $\sum_{i=1}^{5}x_i=3$ και $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=23$ να υπολογιστούν

1) $\sum_{i=1}^{5}(x_i+10)$. $\qquad$ 2) $\sum_{i=1}^{5}(2x_i+3)^2$. $\qquad$ 3) $\sum_{i=1}^{5}(2x_i-1)(2x_i+1)$.

23 Δείξτε ότι: $$\frac{\sum_{k=1}^{\nu}k^2\cdot\sum_{k=1}^{\nu}k^3}{\left(\sum_{k=1}^{\nu}k\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{\nu}(k^2+k)}=\frac{2\nu+1}{2(\nu+2)}.$$

ΟΜΑΔΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ενα σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη $*$ λέγεται ομάδα, όταν η πράξη αυτή είναι προσεταιριστική, υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο του G έχει συμμετρικό στοιχείο.

- → Το G πρέπει να είναι κλειστό ως προς την $*$. Δηλ. $\forall \alpha, \beta \in G \Rightarrow (\alpha * \beta) \in G$.
- Αν η $*$ είναι μόνο προσεταιριστική στο G, τότε το G → ημιομάδα.
- → Αν η $*$ είναι και αντιμεταθετική στο G, τότε η G → Αντιμεταθετική ομάδα.
- → Αν η $*$ στο G συμβολίζεται προσθετικά (+), τότε η G → Προσθετική ομάδα.
- → " " " " " " πολλαπλασιαστικά $(\cdot)$, " " → Πολ/κή ομάδα.

Νόμος διαγραφής: Κάθε στοιχείο ομάδας είναι απλοποιήσιμο, διότι

Θ. Αν α, β, γ είναι στοιχεία της ομάδας G, τότε

$\alpha * \gamma = \beta * \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ και $\gamma * \alpha = \gamma * \beta \Rightarrow \alpha = \beta$. (Απόδειξη-)

Οι εξισώσεις $x * \beta = \alpha$ και $\beta * x = \alpha$.

Θ. Αν το σύνολο G εφοδιασμένο με τη πράξη $*$ είναι ομάδα, τότε καθεμιά απο τις εξισώσεις: $x * \beta = \alpha$ και $\beta * x = \alpha$ με $\alpha, \beta \in G$, έχει μοναδική λύση στο G. (Απόδειξη...).

- Αν η G είναι αντιμεταθετική, τότε οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες και έχουν μοναδική λύση τη $x = \alpha * \beta' = \beta' * \alpha$.
- Αν η G είναι προσθετική τότε $x * \beta = \alpha \Leftrightarrow x + \beta = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + (-\beta) \Leftrightarrow x = \alpha - \beta$
- " " " " πολ/κή " " $\Leftrightarrow x \cdot \beta = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha \cdot \beta^{-1} \Leftrightarrow x = \alpha : \beta$

Η έννοια της υποομάδας.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ενα υποσύνολο G_1 μιας ομάδας G λέγεται υποομάδα της G, όταν το G_1 είναι το ίδιο ομάδα ως προς τη πράξη της G (που περιορίζεται στο G_1).

- Το ουδέτερο στοιχείο e μιας ομάδας G είναι και ουδέτερο στοιχείο κάθε υποομάδας της.

▼ **ΚΡΙΤΗΡΙΟ**: Ενα υποσύνολο G_1 μιας ομάδας G είναι υποομάδα της G, αν και μόνο αν: 1) Το G_1 είναι κλειστό ως προς τη πράξη της G.
2) Το συμμετρικό κάθε στοιχείου του G_1 ανήκει στο G_1. (Απόδειξη)

▼ **ΜΕΘΟΔΟΣ**: Για να δείξω ότι το G με τη $*$ είναι "ομάδα" του E, δείχνω ότι:

Ημιομάδα:
- $●_1$ Το G είναι κλειστό ως προς την $*$. (Δηλ. η $*$ είναι εσωτερική στο G).
- $●_2$ $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in G$ (Προσεταιριστική).
- $●_3$ $\forall \alpha \in G, \exists e \in G: \alpha * e = e * \alpha = \alpha$. (Ουδέτερο στοιχείο).
- $●_4$ $\forall \alpha \in G, \exists \alpha' \in G: \alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = \alpha$. (Συμμετρικό στοιχείο).

ή ότι το G είναι υποομάδα της ομάδας $(E, *)$

- Αν e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G, τότε το $\{e\}$ είναι υποομάδα της G.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(24) Στο $\mathbb{N}$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $\alpha*\beta=\alpha+\beta+\alpha\beta$.
Δείξτε ότι η δομή $(\mathbb{N},*)$ είναι ημιομάδα.

(25) Αν $(G,*)$ ημιομάδα, που έχει ουδέτερο στοιχείο το $e\in G$ και για τα στοιχεία α,β,γ του G ισχύουν:
$\beta*\alpha=e$ και $\gamma*\beta=e$, δείξτε ότι $\alpha=\gamma$.

(26) Στο $\mathbb{Z}$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $x*y=x+y+1$.
Δείξτε ότι είναι ομάδα.

(27) Στο $A=\{x\in\mathbb{R}: -1<x<1\}$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $\alpha*\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}$.
Εξετάστε, αν η δομή $(A,*)$ είναι ομάδα.

(28) Στο $G=\{x\in\mathbb{R}: -1<x<1\}$ θεωρούμε τη πράξη $*$ με $\alpha*\beta=\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$.
Δείξτε ότι η δομή $(G,*)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα ή Αβελιανή.

(29) Αν $(G,*)$ ομάδα και για δύο στοιχεία $x,y\in G$ ισχύει $x*y=y$, δείξτε ότι $x=e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας.

(30) Αν $(G,\cdot)$ ομάδα και $\forall\alpha,\beta\in G$ ισχύει:
1) $\alpha^{-1}\cdot\beta\cdot\alpha=\beta$ τότε η ομάδα είναι αντιμεταθετική.
2) $\beta^{-1}\cdot\alpha^{-1}\cdot\beta\cdot\alpha=e$ " " " " " .

(31) Αν $(G,\cdot)$ ομάδα, δείξτε ότι:
$$(\alpha^{-1}\beta\alpha)^{\nu}=\alpha^{-1}\beta^{\nu}\alpha, \quad \forall\nu\in\mathbb{N}^*.$$

(32) Αν σε μια ομάδα $(A,\cdot)$ ισχύει $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2$ $\forall\alpha,\beta\in A$, δείξτε ότι η ομάδα είναι αντιμεταθετική και ότι $(\alpha\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\beta^{\nu}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$. **(ΘΕΜΑ '82)**

(33) Αν $A=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}$ δείξτε ότι ο τύπος $x*y=x-3xy+y$ ορίζει μια εσωτερική πράξη στο A.
Δείξτε ακόμη ότι η δομή $(A,*)$ είναι Αβελιανή ομάδα.

(34) 1) Δείξτε ότι:
το σύνολο Σ των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix}1 & 3\kappa\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, ως προς τη πράξη του πολ/μού πινάκων, είναι ομάδα αντιμεταθετική.
2) Να λυθεί στο Σ η εξίσωση: $\begin{bmatrix}1 & 3\alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}1 & 3\beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

(35) Αν $(\mathbb{R}-\{1\},*)$ ομάδα με $\alpha*\beta=\alpha+\beta-\alpha\beta$ να λυθούν στο $\mathbb{R}-\{1\}$ οι εξισώσεις: 1) $3*x=-2$. 2) $x*2x=-2$. 3) $x^2*x=1$.

(36) Αν $(G,*)$ αντιμεταθετική ομάδα, να λυθεί στο G το σύστημα: $\begin{cases}x*\alpha=y*y\\ x*\beta=y*\alpha'\end{cases}$ όπου α' είναι το συμμετρικό του α.

ΣΥΝΟΛΑ ΕΦΟΔΙΑΣΜΕΝΑ ΜΕ ΔΥΟ ΠΡΑΞΕΙΣ.

ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ.

Εστω ένα σύνολο Ε εφοδιασμένο με δύο πράξεις $*$, $\circ$.

Η πράξη $\circ$ λέγεται επιμεριστική ως προς την $*$, όταν

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in E$ είναι:
$\alpha\circ(\beta*\gamma)=(\alpha\circ\beta)*(\alpha\circ\gamma)$ ⟷ Αριστερά επιμεριστική (1).
και
$(\beta*\gamma)\circ\alpha=(\beta\circ\alpha)*(\gamma\circ\alpha)$ ⟷ Δεξιά επιμεριστική (2).

- Αν η πράξη $\circ$ είναι αντιμεταθετική, τότε αρκεί να ισχύει μία από τις (1), (2) ώστε η $\circ$ να είναι επιμεριστική ως προς την $*$.

ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ενα μη κενό σύνολο A εφοδιασμένο με πρόσθεση και πολ/μό λέγεται δακτύλιος όταν:

1) Είναι (αντιμεταθετική) προσθετική ομάδα $*$ και
2) Ο πολ/μός είναι προσεταιριστικός, έχει μοναδιαίο στοιχείο και είναι επιμεριστικός ως προς τη πρόσθεση.

$*$→ Στο 1) η αντιμεταθετική μπορεί και να παραλειφθεί, γιατί προκύπτει από το 2) ως εξής: $\forall \alpha,\beta \in A$, $1 \in A$ έχουμε:

$(1+1)(\alpha+\beta)=1(\alpha+\beta)+1(\alpha+\beta)=1\cdot\alpha+1\cdot\beta+1\cdot\alpha+1\cdot\beta=\alpha+\beta+\alpha+\beta$

$(1+1)(\alpha+\beta)=(1+1)\alpha+(1+1)\beta=1\cdot\alpha+1\cdot\alpha+1\cdot\beta+1\cdot\beta=\alpha+\alpha+\beta+\beta$

$\Rightarrow \cancel{\alpha}+\beta+\alpha+\cancel{\beta}=\cancel{\alpha}+\alpha+\beta+\cancel{\beta} \Rightarrow \beta+\alpha=\alpha+\beta.$

- Αν ο πολ/μός είναι αντιμεταθετικός, τότε το A λέγεται αντιμεταθετικός δακτύλιος.

- → Ενα μονομελές σύνολο π.χ. το $A=\{\alpha\}$ αν το εφοδιάσουμε με τις μόνες δυνατές πράξεις $\alpha+\alpha=\alpha$, $\alpha\cdot\alpha=\alpha$, τότε το A είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μηδενικό και μοναδιαίο στοιχείο το α $(0=1=\alpha)$. Ενας τέτοιος δακτύλιος χαρακτηρίζεται ως μηδενικός δακτύλιος. Στα επόμενα όταν λέμε "δακτύλιος" θα εννοούμε "μη μηδενικός".

Το 0 ως απορροφητικό στοιχείο.

Θ. Σε κάθε δακτύλιο A, ισχύει: $\forall \alpha \in A$, $\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$. (Απόδειξη...)

Κανόνας προσήμων.

Θ. Σε κάθε δακτύλιο A και $\forall \alpha,\beta \in A$ είναι:

i) $(-\alpha)\cdot\beta=\alpha\cdot(-\beta)=-(\alpha\cdot\beta)$. ii) $(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\cdot\beta$.

▼ **ΜΕΘΟΔΟΣ**: Για να δείξω ότι η δομή $(A,*,\circ)$ είναι "δακτύλιος" δείχνω ότι:

- $_1$ Η δομή $(A,*)$ είναι (αντιμεταθετική) ομάδα
- $_2$ Η δομή $(A,\circ)$ είναι ημιομάδα, με μοναδιαίο στοιχείο (ουδέτερο).
- $_3$ Η πράξη $\circ$ είναι επιμεριστική ως προς τη πράξη $*$.

$*$ Αν $(A,+,\cdot)$ αντιμεταθετικός δακτύλιος, τότε $\forall \alpha,\beta,\gamma\in A$ ισχύουν οι γνωστές ταυτότητες:
$(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$, $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$, $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$, ... κ.λ.π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(37) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τις πράξεις $\circ$ και $*$ με τύπους: $\alpha \circ \beta = \lambda\alpha\beta$ και $\alpha * \beta = \alpha + \lambda\beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Δείξτε ότι η $\circ$ είναι επιμεριστική προς την $*$.

(38) Στο $\mathbb{N}$ να εξεταστεί αν η πράξη $\circ$ με $\alpha \circ \beta = \alpha\beta$ είναι επιμεριστική ως προς τη πράξη $*$ με $\alpha * \beta = \alpha^\beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{N})$.

(39) Στο $\mathbb{Z}$ δίνονται δύο εσωτερικές πράξεις $*$ και $\circ$ ως εξής:

$$\alpha * \beta = \alpha + \beta - 1 \quad \text{και} \quad \alpha \circ \beta = \alpha + \beta - \alpha\beta.$$

Να εξεταστεί αν η δομή $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ αποτελεί δακτύλιο.

(40) Στο $\mathbb{Z}$ δείξτε ότι η πράξη $*$ με $x * y = -x - y$ δεν είναι επιμεριστική ως προς τη πράξη της πρόσθεσης στο $\mathbb{Z}$.

(41) Στο σύνολο A των περιττών ακέραιων θεωρούμε τις πράξεις $*$ και $\circ$ ώστε: $x * y = x + y - 1$ και $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$. Δείξτε ότι η δομή $(A, *, \circ)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

(42) Δείξτε ότι το σύνολο $A = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{Z} \right\}$ με πράξεις τη πρόσθεση και το πολ/μό πινάκων είναι δακτύλιος αντιμεταθετικός.

(43) Δείξτε ότι ένας δακτύλιος $(A, +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικός αν και μόνο αν $(x+y)^2 = x^2 + 2(xy) + y^2$, $\forall x, y \in A$.

(44) Αν $(A, +, \cdot)$ είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος και $\alpha^2 = \alpha$, $\beta^2 = \beta$, $\forall \alpha, \beta \in A$ δείξτε ότι:

1) $(1-\alpha)^2 = 1 - \alpha$ και $(1-\beta)^2 = 1 - \beta$.
2) $\alpha\beta(1-\alpha) = \alpha\beta(1-\beta) = 0$.

(45) Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{\alpha + \beta\sqrt{5} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ με πράξεις τις συνήθεις πράξεις $+$ και $\cdot$ στο $\mathbb{R}$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος. Δείξτε ακόμη ότι στο δακτύλιο αυτό ισχύει: $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$, $\forall x, y \in A$.

(46) Δείξτε ότι η δομή $(A, +, \cdot)$ όπου $A = \{x = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

(47) Στο σύνολο $\mathbb{C} = \{z = (\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ορίζουμε δυο εσωτερικές πράξεις $+$ και $\cdot$ ως εξής: $(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$ και $(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \alpha\delta + \beta\gamma)$, $\forall (\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in \mathbb{C}$.
Δείξτε ότι η δομή $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος.

(48) Σε ένα δακτύλιο $\mathcal{A}$ με μονάδα $1 \neq 0$ ισχύει για κάποιο στοιχείο του α ότι: $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Δείξτε ότι:
1) $\alpha^3 = 1$. 2) Το α αντιστρέφεται στο $\mathcal{A}$.

ΣΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ενας αντιμεταθετικός δακτύλιος F λέγεται σώμα όταν κάθε $\alpha \in F^*$ έχει αντίστροφο.

Δηλαδή, ένα σύνολο F εφοδιασμένο με πρόσθεση και πολ/μό θα είναι σώμα, όταν:

- $\bullet_1$ Είναι (αντιμεταθετική) προσθετική ομάδα.
- $\bullet_2$ Το F^* είναι αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα.
- $\bullet_3$ Ο πολ/μός είναι επιμεριστικός ως προς τη πρόσθεση.

▼ΑΡΑ η δομή $(F,+,\cdot)$ είναι σώμα, όταν:

1) Είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος και
2) $\forall \alpha \in F^*$ υπάρχει το $\alpha^{-1} \in F^*$: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$.

Μια βασική ιδιότητα του σώματος.

Θ. Αν α και β είναι στοιχεία ενός σώματος F, τότε:

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$ (Απόδειξη...).

▼ Επειδή, κάθε σώμα F είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα και το F^* είναι αντιμεταθετική πολλαπλασιαστική ομάδα:

i) Οι εξισώσεις: $\begin{cases} \beta + x = \alpha \\ \beta \cdot x = \alpha, \ \beta \neq 0 \end{cases}$ έχουν μοναδική λύση $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ x = \alpha \cdot \beta^{-1} \end{cases}$.

ii) Ισχύουν οι νόμοι της διαγραφής: $\begin{cases} \alpha + x = \alpha + y \Rightarrow x = y \\ \alpha x = \alpha y, \ \alpha \neq 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$.

iii) Ορίζονται οι πράξεις "αφαίρεση" και "διαίρεση" με διαιρέτη $\neq 0$.

ΒΑΣΙΚΑ ΣΩΜΑΤΑ είναι το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}$. Σε κάθε σώμα F ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ξέρουμε για το $\mathbb{R}$. (Να μελετηθεί ο πίνακας σελ. 83 Β)

Εφαρμογή 3; Β - Θεωρία. (Απόδειξη σελ. 84)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(49) Δείξτε ότι στον αντιμεταθετικό δακτύλιο της άσκησης 45.Φ ισχύουν: 1) $\alpha + \beta\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$. 2) Η δομή αυτή είναι σώμα.

(50) Στο $\mathbb{Q}$ θεωρούμε τις πράξεις $*$ και $\circ$ ώστε $x * y = x + y + 2$ και $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, $x, y \in \mathbb{Q}$.
Δείξτε ότι η δομή $(\mathbb{Q}, *, \circ)$ είναι σώμα.

(51) Αν $(F, *, \circ)$ είναι σώμα και $x^2 = x \circ x$, $\forall x \in F$, δείξτε ότι:

$$(\alpha * \beta)^2 = \alpha^2 * \beta^2 * (\alpha \circ \beta) * (\beta \circ \alpha), \ \forall \alpha, \beta \in F.$$

(52) Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τις πράξεις $*$ και $\circ$ από τους τύπους: $(x,y) * (\alpha,\beta) = (x+\alpha, y+\beta)$ και $(x,y) \circ (\alpha,\beta) = (x\alpha, y\beta)$, $\forall (x,y), (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
~~Δείξτε~~ ότι η δομή $(\mathbb{R}^2, *, \circ)$ είναι σώμα.
Εξετάσετε.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Δίνεται το σύνολο $A=\{\xi=\alpha+\beta\sqrt{5} : \alpha,\beta\in Q$ και $\alpha^2-5\beta^2=1\}$.
Δείξτε ότι το A είναι κλειστό ως προς το πολ/μό στο $\mathbb{R}$.

② Στο $\mathbb{R}$ η σχέση $x*y=2xy+\alpha(x+y)+1$ ορίζει μια εσωτερική πράξη.
1) Να βρεθεί ο α ώστε η πράξη να είναι προσεταιριστική.
2) Για τις τιμές του α που θα βρείτε να εξετάσετε την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου.

③ Αν $(G,*)$ είναι ομάδα, δείξτε ότι:
1) $(\alpha*\beta)'=\beta'*\alpha'$, $\forall\alpha,\beta\in G$. 2) $(\alpha')'=\alpha$, $\forall\alpha\in G$.

④ Μέσα σε μια αβελιανή πολ/κή ομάδα G να λυθεί η εξίσωση: $x\cdot\alpha\cdot\beta\cdot x\cdot\gamma=\beta\cdot x\cdot\alpha$, $\alpha,\beta,\gamma\in G$.

⑤ Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα πολ/κή με ουδέτερο στοιχείο το e και τέτοια ώστε: $x^2=e$, $\forall x\in G$.
Δείξτε ότι η ομάδα είναι αβελιανή.

⑥ Αν $(G,+)$ είναι ομάδα και A ένα μη κενό υποσύνολο του G με την ιδιότητα $x,y\in A\Rightarrow(x-y)\in A$, δείξτε ότι η δομή $(A,+)$ είναι ομάδα.

⑦ Έστω E ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια πράξη $*$ ως προς την οποία υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e\in E$, και ισχύει:
$$(\alpha*\beta)*(\gamma*\delta)=(\alpha*\gamma)*(\beta*\delta),\quad \forall\alpha,\beta,\gamma,\delta\in E.$$
1) Δείξτε ότι η $*$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.
2) Αν $\alpha*\alpha=\alpha$ και $\beta*\beta=\beta$ τότε $(\alpha*\beta)*(\alpha*\beta)=\alpha*\beta$.

⑧ Αν $(A,+,\cdot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, δείξτε ότι:
1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$. 2) $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.

⑨ Μέσα στο Q ορίζουμε τις πράξεις $*$ και $\circ$ με τις σχέσεις:
$$\alpha*\beta=\alpha+\beta-1 \quad \text{και} \quad \alpha\circ\beta=\alpha+\beta-\alpha\beta.$$
Δείξτε ότι η δομή $(Q,*,\circ)$ είναι σώμα.

⑩ Αν $(A,+,\cdot)$ είναι σώμα, δείξτε ότι:
1) $x^2-\alpha^2=0\Leftrightarrow x=\alpha \vee x=-\alpha$.
2) $x^3-\alpha^3=0\Leftrightarrow x=\alpha \vee x^2+x\alpha+\alpha^2=0$.

⑪ Δίνονται τα στοιχεία α,β ενός δακτυλίου $\mathcal{A}$ ώστε: $\alpha^2=0$ και $\beta=\alpha+1$.
Δείξτε ότι: 1) Το β είναι αντιστρέψιμο. 2) $\beta^\nu=\nu\alpha+1$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$.

⑫ Δείξτε ότι το σύνολο S των πινάκων 2×2 της μορφής $\begin{bmatrix} x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$ όπου $x,y\in Q$, με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ στο Π_2 είναι σώμα.

⑬ Αν F σώμα και $x\in F^*$, $\alpha,\beta,\gamma\in F$, δείξτε ότι:
1) $(-x)^{-1}=-x^{-1}$. 2) $\alpha\beta=\alpha\gamma\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\beta=\gamma$.

⑭ Δείξτε ότι το σύνολο $A=\left\{\frac{4\kappa+1}{5-4\lambda} : \kappa,\lambda\in\mathbb{Z}\right\}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη πράξη του πολ/μού κλασμάτων στο $\mathbb{R}$, είναι πολ/κή ομάδα. (ΘΕΜΑ '88)

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ.

<u>ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΠΡΑΞΗ:</u>
Αν A και E είναι δύο μη κενά σύνολα, τότε κάθε απεικόνιση του καρτεσιανού γινομένου $A\times E$ στο E λέγεται εξωτερική πράξη στο E με <u>συντελεστές (ή τελεστές)</u> από το σύνολο A.

- Μια εσωτερική πράξη στο E (δηλ. μια απεικόνιση του $E\times E$ στο E) μπορεί να θεωρηθεί ως εξωτερική πράξη στο E με συντελεστές από το E.
- Έστω $\bullet$ μια εξωτερική πράξη στο E με συντελεστές από το A. Ένα μη κενό σύνολο $E_1\subseteq E$ λέγεται κλειστό ως προς τη πράξη $\bullet$, όταν: $\forall(\lambda,x)\in A\times E_1$ είναι $\lambda\cdot x\in E_1$.

<u>Έννοια διανυσματικού χώρου.</u> Είδαμε στην Αναλυτική Γεωμετρία ότι το $\mathcal{E}$ είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα ($(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$) και ότι σ' αυτό έχει οριστεί μια εξωτερική πράξη, ο πολ/μός με πραγματικό αριθμό τέτοια ώστε: $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$, $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$, $1\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Όμοια το σύνολο F_A είναι αντιμεταθετική προσθετική ομάδα και ο πολ/μός $\lambda\cdot f$ $(\lambda\in\mathbb{R}, f\in F_A)$ είναι εξωτερική πράξη στο F_A με τις ίδιες ιδιότητες. Τέτοια σύνολα λέγονται "διανυσματικοί χώροι".

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ένα σύνολο V στο οποίο έχει οριστεί μια εσωτερική πράξη $+$ και μια εξωτερική πράξη $\bullet$ με συντελεστές πραγματικούς, λέγεται <u>πραγματικός διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος</u> όταν

- $\bullet_1$ ως προς την εσωτερική πράξη είναι αντιμεταθετική ομάδα και
- $\bullet_2$ ως προς την εξωτερική πράξη ισχύουν τα εξής:
  - i) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall v,u\in V$, $\lambda\cdot(v+u)=\lambda\cdot v+\lambda\cdot u$.
  - ii) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\forall v\in V$, $(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$
  - iii) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\forall v\in V$, $\lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\mu)\cdot v$
  - iv) $\forall v\in V$, $1\cdot v=v$

  Το άθροισμα $\lambda+\mu$ και το γινόμενο $\lambda\cdot\mu$ αναφέρονται στις γνωστές πράξεις στο $\mathbb{R}$.

► Τα στοιχεία του V λέγονται "διανύσματα", αλλά εδώ ο όρος "διάνυσμα" έχει ευρύτερη σημασία, δηλαδή δεν είναι μόνο ένα ελεύθερο διάνυσμα του $\mathcal{E}$, αλλά και μια συνάρτηση, ένας πίνακας ... κ.τ.λ.

<u>Ιδιότητες</u>: **Θ.** Αν V είναι ένας διαν. χώρος, τότε $\forall v\in V$ και $\forall\lambda\in\mathbb{R}$:
1) $\lambda\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$. 2) $0\cdot v=\mathbf{0}$. 3) $\lambda\cdot v=\mathbf{0}\Rightarrow\lambda=0$ ή $v=\mathbf{0}$. 4) $(-\lambda)\cdot v=\lambda(-v)=-(\lambda\cdot v)$.
(Απόδειξη ...)

<u>Πορίσματα</u>: 1) $\forall v\in V$, $(-1)\cdot v=-v$
2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\forall v,u\in V$, $\lambda\cdot v=\lambda\cdot u\Rightarrow v=u$ (Ν. διαγραφής συντελεστού).
3) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\forall v\in V^*$, $\lambda\cdot v=\mu\cdot v\Rightarrow\lambda=\mu$. (Ν. διαγραφής διανύσματος).

▼ Στο παρακάτω πίνακα είναι οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν ένα **δ.χ. V**

Το V αντιμεταθετική ομάδα	Το V εφοδιασμένο με εξωτερική πράξη
1. $(v+u)+w=v+(u+w)$.	I. $\lambda(v+u)=\lambda\cdot v+\lambda\cdot u$.
2. $v+u=u+v$	II. $(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$.
3. $v+\mathbf{0}=v$	III. $\lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\mu)\cdot v$.
4. $v+(-v)=\mathbf{0}$	IV. $1\cdot v=v$.

Ο χώρος $\mathbb{R}^\nu$.

Γενικά: Αν θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{R}^\nu$ των "ν-άδων" πραγματ. αριθμών και για οποιαδήποτε στοιχεία του $(x_1,x_2,\dots,x_\nu),(y_1,y_2,\dots,y_\nu)$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, ορίσουμε τις πράξεις: $(x_1,x_2,\dots,x_\nu)+(y_1,y_2,\dots,y_\nu)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_\nu+y_\nu)$

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,\dots,x_\nu)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_\nu)$$

τότε το $\mathbb{R}^\nu$ είναι ένας δ.χ. με μηδενικό στοιχείο το $\mathbf{0}=(0,0,\dots,0)$.

Αντίθετο του διανύσματος $v=(x_1,x_2,\dots,x_\nu)$ είναι το $-v=(-x_1,-x_2,\dots,-x_\nu)$.

● Ο λογισμός στο $\mathcal{P}$ με τα παραπάνω μεταφέρεται σε αντίστοιχο λογισμό στο $\mathbb{R}^2$. Έτσι οι δ.χ. $\mathcal{P}$ και $\mathbb{R}^2$ μπορούν να θεωρηθούν <u>ταυτιζόμενοι</u>.

Δηλαδή: $\forall$ζεύγος $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ θεωρείται ως το διάνυσμα του $\mathcal{P}$ με συντεταγμένες x_1,x_2.

Όμοια: $\forall$τριάδα $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ " " " " " $\mathcal{E}$ " " x_1,x_2,x_3.

Γενικά: $\forall$ν-άδα $(x_1,x_2,\dots,x_\nu)\in\mathbb{R}^\nu$ " " " " " " $x_1,x_2,\dots,x_\nu$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο $V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ορίζουμε $\forall v=(x_1,x_2),\ u=(y_1,y_2)\in V$ και $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ τις πράξεις $+$ και $\cdot$ ώστε: $v+u=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ και $\lambda\cdot v=(\lambda x_1,0)$.
Δείξτε ότι το V δεν είναι διανυσματικός χώρος.

2. Έστω $V=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ένας δ.χ. στο $\mathbb{R}$. Αν $\alpha,\beta\in V$: $\alpha=(2\lambda+1,\lambda-1)$ και $\beta=(\lambda-2,4-2\lambda)$ να βρεθεί ο λ ώστε: $(\lambda^2-1)\cdot\alpha=0 \vee (4\lambda^2-2)\cdot\beta=0$.

3. Στο $A=\{x+y\sqrt7 : x,y\in\mathbb{Q}\}$ ορίζουμε την εσωτερική πράξη $+$ και την εξωτερική πράξη $\cdot$ ώστε: $(x_1+y_1\sqrt7)+(x_2+y_2\sqrt7)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\sqrt7$ και $\lambda\cdot(x+y\sqrt7)=\lambda x+\lambda y\sqrt7$, $\lambda\in\mathbb{Q}$. Δείξτε ότι το A είναι διανυσ. χώρος.

4. Στο $A=\{\alpha\sqrt2+\beta\sqrt3 : \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$ ορίζουμε τις πράξεις $+$ και $\cdot$ ώστε:
$(\alpha\sqrt2+\beta\sqrt3)+(\gamma\sqrt2+\delta\sqrt3)=(\alpha+\gamma)\sqrt2+(\beta+\delta)\sqrt3$ και
$\lambda\cdot(\alpha\sqrt2+\beta\sqrt3)=(\lambda\alpha)\sqrt2+(\lambda\beta)\sqrt3$, $\lambda\in\mathbb{Q}$.
Δείξτε ότι το A είναι διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{Q}$.

5. Στο σύνολο A των ακολουθιών πραγμ. αριθμών θεωρούμε τις πράξεις πρόσθεση ακολουθιών και πολ/μό πραγμ. αριθμού με ακολουθία.
Δείξτε ότι το A είναι διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{R}$.

6. Στο σύνολο $A=\{\alpha\}$ ορίζουμε τις πράξεις + και • ώστε : $\alpha+\alpha=\alpha$ και $\lambda\cdot\alpha=\alpha$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το A είναι δ.χ. στο $\mathbb{R}$.
7. Στο σύνολο $V=\mathbb{R}^2$ ορίζουμε $\forall(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\in V$ και $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ τις πράξεις + και • ώστε : $(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)=(\alpha+\gamma,\ \beta+\delta)$ και $\lambda(\alpha,\beta)=(2\alpha\lambda,-\lambda\beta)$. Δείξτε ότι το V δεν είναι διανυσμ. χώρος.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΧΩΡΟΣ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα υποσύνολο V_1 ενός διαν. χώρου V λέγεται διανυσματικός υπόχωρος ή απλά υπόχωρος του V, όταν το ίδιο το V_1 είναι διανυσμ. χώρος ως προς τις πράξεις του V (που περιορίζονται φυσικά στα στοιχεία του V_1). • $V_1\neq\varnothing$ αφού είναι διανυσμ. χώρος.

Θ. Το υποσύνολο V_1 ενός διαν. χώρου V είναι διαν. υπόχωρος του V, αν και μόνο αν το V_1 είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V. (Απόδειξη...).

- Το μηδενικό στοιχείο του V ανήκει σε κάθε διαν. υπόχωρο V_1. ΑΡΑ, αν $A\subseteq V$ και $0\notin A \Rightarrow$ το A δεν είναι υπόχωρος του V.
- Το σύνολο $\{0\}$ είναι υπόχωρος του V.

▼ Εφαρμογές Βιβλίου - Θεωρία (σελ. 98) - (Απόδειξη...)

1) Ένα μη κενό σύνολο $V_1\subseteq V$ είναι υπόχωρος του διαν. χώρου V, αν και μόνο αν $\forall v_1,v_2\in V_1,\ \forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}:\ \lambda_1v_1+\lambda_2v_2\in V_1$
2) Αν $V_1,V_2\neq\varnothing$ είναι υπόχωροι του δ.χ. $V\Rightarrow$ το $V_1\cap V_2\neq\varnothing$ είναι υπόχωρος του V.

Υπόχωρος παραγόμενος από K διανύσματα

Γενικά: Έστω $v_1,v_2,\dots,v_k\in V$

Κάθε διάνυσμα της μορφής $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_kv_k$ με $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $v_1,v_2,\dots,v_k$ με συντελεστές $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$

Θ. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $v_1,v_2,\dots,v_k\in V$. Το σύνολο V_K των γραμμικών συνδυασμών των $v_1,v_2,\dots,v_k$ με συντελεστές πραγματικούς είναι ένας υπόχωρος του V. (Απόδειξη...).

• → Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $v_1,v_2,\dots,v_k\in V$ παράγουν τον υπόχωρο V_K του V.

▼ ΕΤΣΙ, για να διαπιστώσω αν ένα διάνυσμα $v\in V$ ανήκει στον υπόχωρο V_K που παράγουν τα $v_1,v_2,\dots,v_k$, δείχνω ότι υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ ώστε: $\underline{v=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_kv_k}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(8) Δείξτε ότι το $A=\{(\alpha,\alpha) \ : \ \alpha\in\mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του δ.χ. $V=\mathbb{R}^2$

(9) Να εξεταστεί αν το $V=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : 4x_1+x_2=1\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

(10) Αν $(V,+,\cdot)$ είναι ένας δ.χ. στο $\mathbb{R}$ και $x_1,x_2,\dots,x_\nu\in V$, δείξτε ότι το $A=\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_\nu x_\nu : \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\nu\in\mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του V.

(11) Θεωρούμε τον πραγματικό δ.χ. $\mathbb{R}^2$ και τα σύνολα
$V_1=\{(x,2x) : x\in\mathbb{R}\}$, $V_2=\{(x,y) : x,y\in\mathbb{R}$ και $2x+y=1\}$.
Να εξεταστεί ποιό από αυτά είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

(12) Αν $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ είναι ένας δ.χ. στο $\mathbb{R}$ και $A\subset\mathbb{R}^3$ με $A=\{(x,x+y,x-y) : x,y\in\mathbb{R}\}$ δείξτε ότι το A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(13) Να βρεθεί ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, που παράγεται από τα στοιχεία $v=(1,-1,2)$ και $u=(6,-2,0)$. Δείξτε ότι το $w=(-3,1,0)$ ανήκει στον υπόχωρο αυτό.

(14) Να εξεταστεί αν τα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$, $V_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0\}$ και $V_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=3\}$ είναι διαν. υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

(15) Να εξεταστεί αν το στοιχείο $v=(3,9,-4,-2)$ του $\mathbb{R}^4$ ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ που παράγουν τα διανύσματα:
$\alpha=(1,-2,0,3)$, $\beta=(2,3,0,-1)$, $\gamma=(2,-1,2,1)$.

(16) Να βρεθεί η τομή A, όλων των διαν. υπόχωρων ενός δ.χ. V.

(17) Αν $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-3y+z=0,\ y+2z=0,\ x-y+7z=0\}$, να εξεταστεί αν το A είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(18) Όμοια για το σύνολο
$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+4z=0,\ x+3y+3z=0,\ x+5y+z=0\}$.

→ Χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 1 του Φ.3 να δείξτε τις παρακάτω ασκήσεις, 19-20-21. (Να γίνουν και με τη (Μ3) 1σ-Φυλ.10).

(19) Αν το $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι το A είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(20) Αν $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-5z=0\}$, δείξτε ότι:
1) Το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.
2) Το A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(21) Αν το $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0$ και $y+7z=0\}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι το A είναι διαν. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(22) Δείξτε ότι το σύνολο $A=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3 : 2\beta+\gamma-\alpha=0,\ \beta+\gamma-2\alpha=0\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του χώρου $\mathbb{R}^3$.

(23) Δείξτε ότι το σύνολο A των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} x+z=2y \\ y+\omega=z \\ z+\varphi=2\omega \end{cases}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ $(k \geq 2)$ του δ.χ. V λέγονται <u>γραμμικώς εξαρτημένα</u>, όταν ένα τουλάχιστον από αυτά ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα υπόλοιπα.
Διανύσματα που δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα λέγονται <u>γραμ. ανεξάρτητα</u>

Θ. Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ του δ.χ. V είναι <u>γραμμικώς εξαρτημένα</u> αν και μόνο αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι:
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$ και $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$. (Απόδειξη...)

- Το $\mathbf{0}$ θεωρείται γραμμικώς εξαρτημένο, διότι για $k=1$ πληρεί το Θ.

Θ. Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ του δ.χ. V είναι <u>γραμμικώς ανεξάρτητα</u>, αν και μόνο αν: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = (0, 0, \dots, 0)$. (Απόδειξη)

- "Ένα" διάνυσμα $v \neq \mathbf{0}$ θεωρείται γραμμικώς ανεξάρτητο, διότι αν $\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

▼ <u>Βασικές ιδιότητες γραμμικής εξάρτησης.</u>

I) Αν p διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_p$ ενός δ.χ. V είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και τα $k > p$ διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_k$ είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένα.

- Ειδικά αν ένα από τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι το $\mathbf{0}$ τότε τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

II) Αν k διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και οποιαδήποτε από αυτά είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

III) Αν τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ενώ τα $v_1, v_2, \dots, v_k, u$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε το u ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$. (Απόδειξη...).

▼ <u>Συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων του $\mathbb{R}^\nu$.</u>

Θ. p διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ με $p \leq \nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον υποπίνακας $p \times p$ του πίνακα που έχει στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αυτών, έχει ορίζουσα διαφορετική από το 0.

<u>Ειδικά</u>: Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_\nu$ του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνο αν:

$$|v_1 \; v_2 \cdots v_\nu| \neq 0 \longleftarrow \text{Ορίζουσα } \nu \text{ τάξης.}$$

<u>Πόρισμα</u>: Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_p$ $(p \leq \nu)$ του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνο αν όλοι οι υποπίνακες $p \times p$ του πίνακα των συντεταγμένων των $v_1, v_2, \dots, v_p$ έχουν ορίζουσα μηδέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(24) Αν x,y,z είναι τρία γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία ενός δ.χ. V, δείξτε ότι και τα στοιχεία $x, y-x, z-x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(25) Στο δ.χ. $\mathbb{R}^2$ δείξτε ότι:
1) Τα στοιχεία του $v_1=(1,2)$, $v_2=(-1,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
2) ,, ,, ,, $u_1=(2,2)$, $u_2=(-2,-2)$,, ,, εξαρτημένα.

(26) Στο δ.χ. $\mathbb{R}^2$ το στοιχείο του $v=(x,y)$ να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $u_1=(1,1)$ και $u_2=(1,0)$.

(27) Θεωρούμε το δ.χ. $V=\{\varphi(x)=\alpha x+\beta \ : \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι τα στοιχεία του $\varphi_1(x)=x+1$, $\varphi_2(x)=2x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(28) Δείξτε ότι τα διανύσματα $v=(3,0,0)$, $u=(0,4,5)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμ. ανεξάρτητα

(29) Δείξτε ότι τα διανύσματα $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(2,3,1)$, $v_3=(-1,6,2)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ($v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^3$), και να γραφεί το v_1 σαν γραμμ. συνδυασμός των v_2, v_3

(30) Αν τα διανύσματα v_1, v_2 του δ.χ. V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι και τα $5v_1+v_2$, v_1+4v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(31) Έστω $v_1=(1,3,-1)$, $v_2=(1,x,4)$, $v_3=(3,-2,y)$ με $x,y\in\mathbb{R}$ στοιχεία του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των x,y, ώστε τα v_1,v_2,v_3 να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(32) Αν Π_2 είναι ο δ.χ. των πινάκων 2×2, δείξτε ότι οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}0&2\\0&-1\end{bmatrix}$ του Π_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι.

(33) Τα διανύσματα x,y,z ενός δ.χ. V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Να βρεθεί ο $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $v_1=\mu x+y+z$, $v_2=x+\mu y+z$, $v_3=x+y+\mu z$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(34) Να εξεταστεί αν το διάνυσμα $v=(5,9,10)$ του $\mathbb{R}^3$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των διαν. $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(4,8,12)$, $v_3=(-3,-6,-9)$ του $\mathbb{R}^3$.

(35) Δείξτε ότι τα διανύσματα $(1,3,5,x)$, $(\alpha,3\alpha,5\alpha,y)$, $(-\beta,-3\beta,-5\beta,z)$ του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(36) Σε ένα χώρο V του $\mathbb{R}$ δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα x,y,z. Αν τα x,y είναι γραμμικώς εξαρτημένα και τα x,z γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι τα y,z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(37) Δίνονται τα διανύσματα x,y,z,ω του δ.χ. V με $x\neq 0$. Αν τα x,y καθώς και τα x,z είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δείξτε ότι και τα y,z,ω είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(38) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,\lambda,-1)$, $v_3=(\lambda,1,1)$ του $\mathbb{R}^3$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_\mu\}$ λέγεται βάση του δ.χ. V, όταν τα $v_1, v_2, \dots, v_\mu$ •$_1$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V
και •$_2$ παράγουν το χώρο V.

Θ. Αν $\{v_1, v_2, \dots, v_\mu\}$ είναι μια βάση του δ.χ. V, τότε κάθε διάνυσμα $v \in V$ εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης αυτής του V.
(Απόδειξη...).

- Δηλαδή $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_\mu v_\mu$.

Η μ-άδα $(x_1, x_2, \dots, x_\mu)$ λέγεται μ-άδα των συντεταγμένων του διανύσματος $v \in V$ ως προς τη μ-άδα $(v_1, v_2, \dots, v_\mu)$ των διανυσμάτων της βάσης του V.

▼ Κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

Τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, ..., $e_\nu = (0,0,\dots,0,1)$ του χώρου $\mathbb{R}^\nu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^\nu$. Άρα το σύνολο $\{e_1, e_2, \dots, e_\nu\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^\nu$ που λέγεται κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

▼ Διάσταση δ.χ.

Γενικά: Αν $\{v_1, v_2, \dots, v_\mu\}$ είναι μια βάση του δ.χ. V, τότε:

- περισσότερα από μ διανύσματα του V είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα και άρα
- κάθε άλλη βάση του V έχει επίσης μ στοιχεία.

Αντίστροφα: Οποιαδήποτε μ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V αποτελούν βάση του.

Ο χαρακτηριστικός αυτός αριθμός μ λέγεται διάσταση του V.

- Ο χώρος $\mathbb{R}^\nu$ έχει διάσταση ν.

▼ Διάσταση υπόχωρου παραγόμενου από K διανύσματα.

Θ. Αν από τα K διανύσματα τα οποία παράγουν ένα υπόχωρο V_K του V υπάρχουν ρ γραμμικώς ανεξάρτητα, $1 \le \rho < K$, τα οποία μαζί με καθένα από τα υπόλοιπα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε ο V_K έχει διάσταση ρ.
(Απόδειξη...).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(39) Να εξεταστεί αν το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ με $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,1,2)$, $v_3=(1,2,3)$ είναι μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$.

(40) Δείξτε ότι το σύνολο $A=\{(3,2),(4,1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ και να γραφτεί το $v=(1,4)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

(41) Δείξτε ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ με $v_1=(3,1,5)$, $v_2=(3,6,2)$, $v_3=(-1,0,1)$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $x=(1,0,2)$ ως προς τη βάση αυτή.

(42) Να εξεταστεί αν το διάνυσμα $v=(-1,-8,5)$ ανήκει στον υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1=(-1,1,2)$, $v_2=(-1,-2,3)$, $v_3=(-2,-1,5)$ και να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου V.

(43) Να βρεθεί ο υπόχωρος V του $\mathbb{R}^3$ που παράγουν τα διανύσματα $v_1=(1,2,0)$, $v_2=(3,-5,0)$, $v_3=(-4,1,0)$.

(44) Δείξτε ότι το σύνολο P όλων των πινάκων 2×2 της μορφής $\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$ είναι υπόχωρος του δ.χ. Π_2 και να βρεθεί μια βάση και η διάστασή του. $(\alpha\in\mathbb{R})$.

(45) Να βρεθεί ο υπόχωρος V του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1=(1,2,2,1)$, $v_2=(0,1,0,2)$, $v_3=(2,0,1,1)$, $v_4=(0,2,0,1)$.

(46) Αν V είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1=(1,4,2,6)$, $v_2=(0,4,2,6)$, $v_3=(2,6,3,9)$ να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του V.

(47) Αν $\alpha=x_1v+y_1u$ και $\beta=x_2v+y_2u$ είναι δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ και $\{v,u\}$ μια βάση του, δείξτε ότι το σύνολο $A=\{\alpha,\beta\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$ αν $x_1y_2\neq x_2y_1$.

(48) Στο δ.χ. $\mathbb{R}^3$ με βάση $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ θεωρούμε τα διανύσματα $\alpha=(2,1,-3)$, $\beta=(3,2,-5)$, $\gamma=(1,-1,1)$.

1) Δείξτε ότι τα α,β,γ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

2) Να οριστούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\delta=(5,3,-2)$ με βάση την $\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

(49) Έστω ότι τα διανύσματα x,y,z,ω αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^4$ και για το στοιχείο α του $\mathbb{R}^4$ ισχύει: $\alpha=\lambda_1x+\lambda_2y+\lambda_3z+\lambda_4\omega$ όπου $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$ και $\lambda_4\neq0$. Δείξτε ότι τα διαν. x,y,z,α αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

▼ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

(M$_1$) → Γενικά στους διανυσματικούς χώρους.

1) Σε ένα δ.χ. V η εσωτερική του πράξη (+) του δίνει δομή αντιμεταθετικής ομάδας (προσθετικής). Άρα ο δ.χ. V έχει τις ιδιότητες μιας αντιμεταθετικής ομάδας. Ακόμη με τη πράξη του πολ/μού (εξωτερική) και τις ιδιότητές της έχουμε κάποια "ανάλογη συμπεριφορά" του δ.χ. V με το $\mathbb{R}$.

2) Για να δείξω ότι ένα σύνολο V είναι δ.χ, δουλεύω: με τον ορισμό ή δείχνω ότι το V είναι υπόχωρος ενός γνωστού δχ

- Τα σύνολα $\Pi_{\nu\chi\mu}$, F_A, $\mathbb{R}^\nu$, $\mathcal{E}$ είναι οι πιο "γνωστοί" δ.χ.

3) Για να δείξω ότι ένα σύνολο V "δεν" είναι δ.χ, δείχνω ότι: $V=\varnothing$ ή ότι δεν ισχύει "μία" από τις ιδιότητες του ορισμού.

(M$_2$) → Στους γραμμικούς συνδυασμούς

1) Αν δίνεται ένας δ.χ. V και τα στοιχεία του $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$ και ζητείται να δειχτεί (ή να εξεταστεί) αν το $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$, τότε:
Θεωρώ την εξίσωση $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_\kappa v_\kappa$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa \in \mathbb{R}$ και τη λύνω με αγνώστους τους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$, οπότε:

α) Αν υπάρχει λύση τότε το V γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός

β) Αν δεν υπάρχει λύση, τότε δεν είναι γραμμ. συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$.

↳ Το πρόβλημα αυτό "μεταφέρεται" τις περισσότερες φορές στη λύση ενός γραμμικού συστήματος (με αγνώστους τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$).

2) Έστω $v_1, v_2, \dots, v_\kappa, v_{\kappa+1}, \dots, v_\lambda$ στοιχεία ενός δ.χ. V. Τότε ισχύουν:

- Το $\mathbf{0}$ γράφεται πάντοτε σαν γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_\lambda$, διότι $\mathbf{0}=0\cdot v_1+0\cdot v_2+\dots+0\cdot v_\lambda$.
- Το v_i με $i \in \{1,2,\dots,\kappa\}$ παράγεται (δηλαδή είναι γραμμ. συνδυασμός) από τα $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$, διότι $v_i=0\cdot v_1+0\cdot v_2+\dots+1\cdot v_i+\dots+0\cdot v_\kappa$.
- Αν το v παράγεται από τα $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$, τότε παράγεται και από τα $v_1, v_2, \dots, v_\kappa, \dots, v_\lambda$ διότι $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_\kappa v_\kappa \Longrightarrow v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_\kappa v_\kappa+0\cdot v_{\kappa+1}+\dots+0\cdot v_\lambda$.

M3 → Στους διανυσματικούς υπόχωρους

1) Για να δείξω ότι το σύνολο V_1 είναι υπόχωρος του δ.χ. V, δουλεύω με ένα απο τους παρακάτω τρόπους (ή με τον ορισμό...).

<u>α' τρόπος:</u> i) Δείχνω ότι $V_1 \subseteq V$ και $V_1 \neq \emptyset$ δείχνοντας ότι το $0 \in V \Rightarrow 0 \in V_1$

ii) $\forall v, u \in V_1 : (v+u) \in V_1$ iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V_1 : (\lambda \cdot v) \in V_1$.

<u>β' τρόπος:</u> Δείχνω ότι $\exists v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ τέτοια ώστε:

$$V_1 = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\},$$ δηλαδή

ότι ο V_1 παράγεται απο τα $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$.

<u>γ' τρόπος:</u> Δείξνω ότι: $\forall v_1, v_2 \in V_1$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in V_1$.

2) Για να δείξω ότι το V_1 "δεν" είναι υπόχωρος του δ.χ. V δείχνω ότι: $V_1 \not\subseteq V$ ή $V_1 = \emptyset$ ή $0 \in V$ και $0 \notin V_1$ ή $\exists v, u \in V_1 : (v+u) \notin V_1$ ή $\exists \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda v) \notin V_1$

- Στο δ.χ. V ισχύει $\{0\} = \{\lambda \cdot 0 \in V : \lambda \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή το $\{0\}$ είναι υπόχωρος του V.

Άρα: οι "στάνταρ" υπόχωροι του V είναι τα σύνολα $\{0\}$ και V.

3) Για να δείξω ότι το $v \in V$ ανήκει και στον υπόχωρο V_k που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ δείχνω ότι $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$

M4 → Στη γραμμική εξάρτηση.

Για να δείξω ότι τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ ενός δ.χ. V είναι "γραμμικώς εξαρτημένα" δουλεύω με ένα απο τους τρόπους:

<u>α' τρόπος:</u> Δείχνω ότι: ένα τουλάχιστον απο τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα υπόλοιπα διανύσματα

<u>β' τρόπος:</u> Δείχνω ότι: $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ "όχι όλα μηδέν" τέτοια ώστε $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

<u>γ' τρόπος:</u> Αν $V = \mathbb{R}^\nu$ και

$v_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{\nu 1})$, $v_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu 2})$, $\dots$, $v_k = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{\nu k})$,

δείχνω ότι: όλες οι ορίζουσες των $k \times k$ υποπινάκων ($k \leq \nu$) του πίνακα

$$[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_k] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & & \alpha_{\nu k} \end{bmatrix}$$

είναι μηδέν.

M5 → Στη γραμμική ανεξαρτησία

Για να δείξω ότι τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ ενός δ.χ. V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα δουλεύω με ένα απο τους εξής 4 τρόπους:

α' τρόπος: Δείχνω ότι: "δεν" είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

β' τρόπος: Δείχνω ότι: κανένα απο αυτά δεν γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων (ή δεν ανήκει στον υπόχωρο που παράγεται απο τα υπόλοιπα διανύσματα).

γ' τρόπος: Δείχνω ότι: Αν $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

δ' τρόπος: Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του γ' τρόπου της M4, δείχνω ότι: υπάρχει κάποιος υποπίνακας $k \times k$ του $[v_1\ v_2 \dots v_k]$ με ορίζουσα διάφορη του μηδενός.

- (1) Ξέρουμε ότι: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V : \lambda \cdot v = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee v = \mathbf{0}$.

  Άρα το διάνυσμα v (μόνο του) είναι:
  - α) γραμμικώς ανεξάρτητο $\Leftrightarrow v \neq \mathbf{0}$.
  - β) γραμμικώς εξαρτημένο $\Leftrightarrow v = \mathbf{0}$.
- (2) Τα διαν. $\mathbf{0}, v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα αφού π.χ. ισχύει: $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k = \mathbf{0}$ και $1 \neq 0$.
- (3) Αν στις προϋποθέσεις του γ' τρόπου της M4 και του δ' τρόπου της M5 είναι και $k = \nu$, τότε αν η ορίζουσα $D = |v_1\ v_2 \dots v_k|$ είναι
  - α) $D \neq 0$ τότε τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
  - β) $D = 0$ " " " " " εξαρτημένα.

M6 → Στις Βάσεις και στη Διάσταση.

Για να δείξω ότι το σύνολο $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι μια βάση του δ.χ. V δουλεύω με ένα απο τους εξής 3 τρόπους:

α' τρόπος: (ορισμός). Δείχνω ότι: τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν το V.

▼ **Αν η διάσταση του V είναι k**, δείχνω ότι:

β' τρόπος: τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

γ' τρόπος: τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ παράγουν το V.

- (1) Αν το $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι μια βάση του V τότε 1) κάθε στοιχείο $v \in V$ εκφράζεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Δηλαδή υπάρχει μια μόνο κ-άδα $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ από πραγματικούς ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$.
Τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ λέγονται συντεταγμένες του v ως προς τη βάση B.

2) Κάθε βάση του V έχει επίσης k στοιχεία.

3) Τα διανύσματα του V που είναι περισσότερα από k (δηλαδή τη διάστασή του) είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένα.

•$_2$ Έστω ο δ.χ. V και V_1 ο υπόχωρος του που παράγεται από τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$. Τότε:

1) Βρίσκοντας ένα μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων διανυσμάτων από τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$, προσδιορίζουμε (από αυτά) μια βάση του V_1. Ειδικά αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι ανεξάρτητα, αυτά αποτελούν μια βάση του V_1.

2) Αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε:
α) αν η διάσταση του V είναι k, είναι $V_1 = V$.
β) αν η διάσταση του V είναι $> k$, είναι $V_1 \neq V$.

•$_3$ Από την Αναλυτική Γεωμετρία ξέρουμε ότι:

1) "Ένα" διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ της διανυσματικής ευθείας $\mathcal{A}$, αποτελεί μια βάση σ' αυτή.

2) "Δύο" μη συγγραμμικά (δηλαδή μη παράλληλα) διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του διανυσματικού επιπέδου $\mathcal{P}$, αποτελούν βάση σ' αυτό.

3) "Τρία" μη συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του χώρου των ελεύθερων διανυσμάτων $\mathcal{E}$, αποτελούν βάση σ' αυτόν.

•$_4$ Ο υπόχωρος $\{\mathbf{0}\}$ ενός δ.χ. V είναι ο μοναδικός δ.χ. που "δεν έχει βάση", διότι το στοιχείο $\mathbf{0}$ παράγει το σύνολο $\{\mathbf{0}\}$, αλλά είναι διάνυσμα γραμμικώς εξαρτημένο.

* Διάβασε καλά και τις μεθόδους $\mathcal{M}_8 - \mathcal{M}_9 - \mathcal{M}_{10} - \mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{12}$ του 1ου κεφαλαίου της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

▼ Ένας δ.χ. V με διάσταση $k \in \mathbb{N}^*$ έχει άπειρες βάσεις

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ μια βάση του $V \Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_k$ γρ. ανεξάρτητα (1)
Αν $B_\lambda = \{\lambda v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ με $\lambda \in \mathbb{N}^*$ και $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$: $\mu_1(\lambda v_1) + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_k v_k = 0 \Leftrightarrow$
$(\lambda\mu_1) v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_k v_k = 0 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \lambda\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = 0$ $(\lambda \in \mathbb{N}^*)$
$\Rightarrow \lambda v_1, v_2, \ldots, v_k$ γραμμ. ανεξ. $\Rightarrow B_\lambda$ βάση του V, $\forall \lambda \in \mathbb{N}^*$.
Άρα το V έχει άπειρες βάσεις (έστω τις B_λ με $\lambda \in \mathbb{N}^*$).

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

① Σε ένα διαν. χώρο V υπάρχουν δύο βάσεις που η μια έχει ν στοιχεία ($\nu \in \mathbb{N}^*$) και η άλλη ν^2-6. Να βρεθεί η διάσταση του V.

② Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για τα $x, y, z \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $v=(x,y,z)$ να ανήκει στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγουν τα διανύσματα $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(-1,4,3)$, $v_3=(0,6,6)$.

③ Αν $A=\{v=(x,y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$ και $B=\{u=(x,0,z) : x,z\in\mathbb{R}\}$ είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι τα A, B και $A\cap B$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

④ Δείξτε ότι το σύνολο $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4x+3y+z=2\}$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

⑤ Δείξτε ότι το σύνολο V των λύσεων του συστήματος:
$\begin{cases} 3x+y-4z+5\omega=0 \\ 4x-y+z-10\omega=0 \end{cases}$ όπου $x,y,z,\omega\in\mathbb{R}$, είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του χώρου $\mathbb{R}^4$.

⑥ Έστω V το σύνολο λύσεων του συστήματος: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+y-3z=0 \end{cases}$ $: x,y,z\in\mathbb{R}$.
Δείξτε ότι το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάσταση του V.

⑦ Δίνεται το σύνολο $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0\}$
1) Δείξτε ότι το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
2) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ αν το $v=(\lambda+1, \lambda+2, \lambda+3)\in V$.

⑧ Έστω S το σύνολο των πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta+\gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το S είναι υπόχωρος του Π_2.

⑨ Δείξτε ότι οι πίνακες $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ παράγουν το χώρο Π_2.

⑩ Δίνονται οι συναρτήσεις f_1, f_2 του $F_{\mathbb{R}}$ με τύπους $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x+1$. Να γραφεί η συνάρτηση f του $F_{\mathbb{R}}$ με $f(x)=\alpha x+\beta$: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των f_1, f_2.

⑪ Δείξτε ότι το σύνολο L των κάτω τριγωνικών πινάκων 3×3 είναι διανυσματικός χώρος με εσωτερική πράξη τη πρόσθεση των πινάκων και εξωτερική πράξη το πολ/μό αριθμού με πίνακα.

⑫ Δείξτε ότι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1=(1,2,-1)$, $v_2=(0,1,0)$, $v_3=(1,0,1)$ είναι ο ίδιος ο $\mathbb{R}^3$.

⑬ Δείξτε ότι τα στοιχεία $v_1=x-1$, $v_2=x+1$, $v_3=x^2-1$ του δ.χ. $F_{\mathbb{R}}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(14) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $(2x)\cdot\vec{AB}+(3y)\cdot\vec{B\Gamma}=(xy)\,\vec{A\Gamma}$.
Να βρεθούν τα $x,y\in\mathbb{R}$.

(15) Δείξτε ότι οι πίνακες $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&5\\-1&4\end{bmatrix}$, $\Gamma=\begin{bmatrix}1&7\\-5&0\end{bmatrix}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του Π_2.

(16) Δείξτε ότι τα διανύσματα $v_1=(\lambda,2,2)$, $v_2=(-1,\lambda-2,\lambda-2)$, $v_3=(\lambda,2,3)$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

(17) Αν ο πίνακας $A\in\Pi_\nu$ είναι αντιστρέψιμος και οι πίνακες A^3, A είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του χώρου Π_ν, δείξτε ότι ο πίνακας A^2 είναι διαγώνιος.

(18) Αν τα διανύσματα v_1,v_2,v_3 ενός δ.χ. V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα δείξτε ότι και τα $w_1=v_1+2v_2$, $w_2=v_2+2v_3$, $w_3=v_3+2v_1$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

(19) Δίνονται τα διανύσματα $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(-1,4,5)$, $v_3=(-5,2,1)$, $v_4=(2,12,12)$ του δ.χ. $\mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι ο υπόχωρος $V_{1,2}$ που παράγεται από τα v_1,v_2 ταυτίζεται με τον υπόχωρο $V_{3,4}$ που παράγεται από τα v_3,v_4.

(20) Αν ο πίνακας $A\in\Pi_2$ δεν είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι οι πίνακες A,A^2 είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του Π_2.

(21) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu^2x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu^2x$, $w(x)=1$, $\varphi(x)=x^2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $F_{\mathbb{R}}$.

(22) Δείξτε ότι τα διαν. $v_1=(2\lambda,7)$, $v_2=(\lambda+1,3\lambda)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

(23) Δίνεται το σύνολο $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leq xy+yz+zx\}$.
1) Δείξτε ότι το L είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
2) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του L.

(24) Δίνονται τα σύνολα: $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y-z=0\}$, $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=2x\}$. Δείξτε ότι το σύνολο $V\cap W$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάστασή του.

(25) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ και το σύνολο $S=\{X\in\Pi_2: A\cdot X=0\}$. Δείξτε ότι το S είναι υπόχωρος του δ.χ. Π_2 και να βρεθεί μια βάση του S και η διάστασή του.

(26) Δίνεται ο δ.χ. V και $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ μια βάση του. Δείξτε ότι τα διανύσματα: $w_1=v_1$, $w_2=v_1+v_2+v_3$, $w_3=v_3$ αποτελούν επίσης μια βάση του V.

(27) Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1=(1,0,2)$, $v_2=(0,1,-3)$, $v_3=(3,2,0)$.
1) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του V.
2) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$, αν το διάνυσμα $v=(1,2,\lambda)\in V$.

(28) ΘΕΜΑ '87. Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, $V=\{(\alpha,\alpha-\beta,2\alpha+3\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι το V είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να βρεθεί η διάστασή του.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών: $\boxed{\mathbb{C}=\mathbb{R}^2=\{(\alpha,\beta) \text{ ή } \alpha+\beta i \text{ όπου } \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}}$

περιέχει:

1) Τους πραγματικούς αριθμούς. Δηλαδή $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, διότι κάθε $x\in\mathbb{R}$ γράφεται: $x=x+0\cdot i$ ή $(x,0)$.

2) Το στοιχείο i που το λέμε <u>φανταστική μονάδα</u>, διότι $i=0+1\cdot i$ ή $(0,1)$ και για το οποίο ισχύει: $\underline{i^2=-1}$

3) Τους μη πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ (όταν $\beta\neq0$).

• Το $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ περιέχει τους φανταστικούς αριθμούς: $\underline{I=\{\beta i=0+\beta i \text{ ή } (0,\beta)\}}$.

<u>Γενικά:</u> Το $\mathbb{C}$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής: $\alpha+\beta i$ ή (α,β) όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και μόνο απ' αυτά.

Δηλαδή: $\forall z=\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$ είναι άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού αριθμού. Το
- α λέγεται πραγματικό μέρος του z.
- β ,, φανταστικό ,, ,, ,,.

<u>ΙΣΟΤΗΣ στο $\mathbb{C}$:</u> $\underline{z_1=z_2 \Leftrightarrow \alpha_1+\beta_1 i=\alpha_2+\beta_2 i \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 \wedge \beta_1=\beta_2}$.

Άρα, $\forall z\in\mathbb{C}$ υπάρχουν μοναδικοί $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $z=\alpha+\beta i$.

<u>ΠΡΑΞΕΙΣ στο $\mathbb{C}$:</u> Οι μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ συμπεριφέρονται ως προς τις πράξεις όπως και τα διώνυμα $\alpha+\beta x$ στο $\mathbb{R}$.

<u>Η ΠΡΟΣΘΕΣΗ:</u> $z_1+z_2=(\alpha_1+\beta_1 i)+(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i$

<u>Ο ΠΟΛ/ΜΟΣ:</u> $z_1\cdot z_2=(\alpha_1+\beta_1 i)\cdot(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$

• Το $\mathbb{C}$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις αυτές.

► <u>Το $\mathbb{C}$ είναι σώμα</u> (ως προς τις πράξεις αυτές) με

1) Ουδέτερο στοιχείο ως προς τη
- $+$, το $0=0+0i$
- $\cdot$, το $1=1+0i$

: $(0,1\in\mathbb{R})$

● $\underline{z=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \wedge \beta=0}$

2) Συμμετρικό του $z=\alpha+\beta i$ ως προς τη
- $+$, το $-z=(-\alpha)+(-\beta)i$ ← Αντίθετος του z
- $\cdot$, το $\frac{1}{z}=z^{-1}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\cdot i$ ← Αντίστροφος ,,

▼ <u>Ιδιότητες του $\mathbb{C}$.</u>

1) Νόμος διαγραφής:
- Στη $+$: $\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}: z_1+z_3=z_2+z_3 \Rightarrow z_1=z_2$.
- Στο $\cdot$: $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}, z_3\in\mathbb{C}^*: z_1\cdot z_3=z_2\cdot z_3 \Rightarrow z_1=z_2$.

2) Η εξίσωση:
- $\alpha+z=\beta$ έχει Μ.Μ.Λ. στο $\mathbb{C}$, τη $z=\beta-\alpha$ ← Αφαίρεση στο $\mathbb{C}$.
- $\alpha\cdot z=\beta, \alpha\neq0$,, ,, ,, ,, , ,, $z=\beta\cdot\alpha^{-1}$ ← Διαίρεση ,, ,,.

3) $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$: α) $z_1\cdot z_2=0 \Leftrightarrow z_1=0 \vee z_2=0$.

β) $(-z_1)z_2=-(z_1z_2)$, $z_1\cdot(-z_2)=-(z_1z_2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΙ

Για να γράψω το $z\in\mathbb{C}$ στη κανονική μορφή $\alpha+\beta i$, διακρίνω τις περιπτώσεις:

1) Αν ο z δεν έχει φανταστικό μέρος σε παρονομαστή, τότε: κάνω τις πράξεις και χωρίζω σε πραγματικό και φανταστικό μέρος το αποτέλεσμα.

2) α) Αν ο z είναι κλασματικός με φανταστικό μέρος στο παρονομαστή τότε: πολ/ζω τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και συνεχίζω όπως στη περίπτωση 1.

β) Αν ο z είναι άθροισμα κλασμάτων, τότε κάνω ότι στο 2α για κάθε κλάσμα χωριστά, εκτός αν οι παρονομαστές είναι συζυγείς οπότε κάνω ομώνυμα και συνεχίζω όπως στο 1.

• Συζυγής του $z=\alpha+\beta i$ είναι ο $\bar{z}=\alpha-\beta i$ και ισχύει $z\cdot\bar{z}=\alpha^2-\beta^2 i^2=\alpha^2+\beta^2$.

▼ **ΔΥΝΑΜΕΙΣ του i**

$i^0=1$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$ ...... $\quad i^{\kappa}=i^{4n+\upsilon}=i^{\upsilon} \;:\; \upsilon\in\{0,1,2,3\}$.

(1) Να γραφούν στη μορφή $\alpha+\beta i$ οι παραστάσεις:

1) $(-3+2i)^2+(2i+3)(5-i)$. 2) $(2-3i)^2+(2+i)(3-5i)^2+12i^3(1+i)^2-\frac{5+2i}{i}$

3) $\frac{2+3i}{3-i}$. 4) $\frac{2+i}{5-i}+\frac{4}{5+i}$. 5) $\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}$. 6) $\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$

7) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7$. 8) $2i^{87}+3\left(1-i^{-122}\right)+(-i)^{-51}$.

(2) Αν $z_1=3(2+i)$ και $z_2=-1+2i$ να γραφούν στη μορφή $\alpha+\beta i$ οι αριθμοί:

1) z_1+z_2. 2) z_1-z_2. 3) $z_1\cdot z_2$. 4) z_1/z_2. 5) $3z_1^2-2z_1z_2$. 6) $z_1^3-z_2^3$.

(3) Αν $z=\frac{1-i}{2+i}$ να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $z+\frac{1}{\bar{z}}$.

(4) Να γράψετε στη μορφή $\alpha+\beta i$ τον αριθμό: $z=\left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^{40}+\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^{23}$.

(5) Όμοια για τις ορίζουσες: $D_1=\begin{vmatrix}1+i & 1-2i\\ 2+3i & 1+i\end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix}1 & i & 1+i\\ -i & 1 & 0\\ 1-i & 0 & 1\end{vmatrix}$.

(6) Αν $z=\alpha+\beta i$: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ να γραφούν στη κανονική μορφή οι μιγαδικοί:

1) $\frac{1}{z^2}$. 2) $z+\frac{1}{\bar{z}}$. 3) $\frac{z-6i}{z+8}$ 4) $\frac{z^2-1}{z^2+1}$.

(7) Να υπολογισθούν τα αθροίσματα:

$S_1=i^0+i^1+i^2+i^3+\dots+i^{\nu-1}$, $\quad S_2=i^0-i^1+i^2-i^3+\dots+(-1)^{\nu-1}\cdot i^{\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

(8) Δείξτε ότι: 1) $1+i+i^2+\dots+i^{95}=0$. 2) $\frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i}+\frac{\alpha-\beta i}{\alpha+\beta i}=2\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

(9) Αν $z=\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}+\frac{i}{2}$ δείξτε ότι: $z^2-2z+\frac{5}{4}=0$.

(10) Δείξτε ότι οι $z_1=1+2i$, $z_2=1-2i$ είναι ρίζες του $f(x)=x^3-4x^2+9x-10$.

(11) Δείξτε ότι ο μιγαδικός $1+i$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $z^3-2iz^2-(1-i)z-2i=0$.

Αν ζητηθεί να προσδιοριστούν δύο αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει μια σχέση, τότε φέρνω τη σχέση στη μορφή $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=\delta\end{cases}$ ή $\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$ οπότε από το σύστημα που προκύπτει βρίσκω τα x, y.

(12) Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ αν: 1) $(x-yi)(3+i)=1+7i$.
2) $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$.
3) $x+yi=(1+i)^8$
4) $\dfrac{x}{1-2i}+\dfrac{y}{2-3i}=\dfrac{6+7i}{1-8i}$.
5) $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{2+i}=\dfrac{1+2i}{3-i}$.
6) $(x+yi)^2=\dfrac{38+41i}{2-i}$

(13) Όμοια, αν: $(4-3i)x^2+(3+2i)xy=4y^2-\frac{1}{2}x^2+(3xy-2y^2)i$

(14) Να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $1+2\sqrt{2}\,i=\dfrac{3(1+xi)}{1-xi}$

Οι α΄ βάθμιες εξισώσεις και τα γραμμικά συστήματα με συντελεστές από το $\mathbb{C}$, λύνονται όπως και τα αντίστοιχα με συντελεστές από τα $\mathbb{R}$.

(15) Να λυθούν οι εξισώσεις:
1) $(2-i)z=5(1-2i)$.
2) $(3+i)z-3(2-3i)=2-5i$
3) $\dfrac{z}{3+4i}+\dfrac{z-1}{5i}=\dfrac{5}{3-4i}$
4) $(2+i)z+4+2i=3i-3-z$.

(16) Να λυθούν τα συστήματα:
1) $\begin{cases}(4+3i)z-3iw=-12+6i\\ (1-i)z+(2+i)w=8+3i\end{cases}$
2) $\begin{cases}iz-(2-i)w=-7+6i\\ (1+i)z+(1-i)w=1-i.\end{cases}$
3) $\begin{cases}(1+i)z-iw=1-i\\ (3+i)z+(1-i)w=11+4i\end{cases}$
4) $\begin{cases}(1+i)z+(1-i)w=3+i.\\ (2+i)z-(-3+i)w=4+2i.\end{cases}$

(17) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $(\alpha+\beta)-\gamma i=5\gamma+(\alpha-\beta)i$
δείξτε ότι: $2\alpha-\beta=\gamma$.

(18) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ και $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{1}{\gamma} \Longrightarrow 2(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)\gamma i=5\alpha+i$.

(19) Αν $\dfrac{\alpha i}{2}=\dfrac{\beta i}{3}=\dfrac{\gamma i}{4} \Longrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2=\dfrac{81\alpha^2}{4}$

(20) Να γράψτε τους μιγαδικούς $(1+2i)^3$, $(1+2i)^2$ στη μορφή $\alpha+\beta i$ και μετά να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε ο $1+2i$ να είναι ρίζα της $z^3+\lambda z^2-7z+\mu=0$.

ΕΠΙΛΥΣΗ στο $\mathbb{C}$ της β' βάθμιας εξίσωσης

$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

1) Αν $\Delta>0 \Rightarrow z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ (2 ρίζες πραγματικές και άνισες).

2) Αν $\Delta=0 \rightarrow z_{1,2}=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ (1 ρίζα διπλή, $z_1=z_2\in\mathbb{R}$)

3) Αν $\Delta<0 \Rightarrow z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ (2 ρίζες μη πραγματικές, συζυγείς).

- ΑΡΑ: οι β' βάθμιες εξισώσεις με συντελεστές από το $\mathbb{R}$, λύνονται στο $\mathbb{C}$ ακόμη και όταν $\Delta<0$.
- Οι πολυωνυμικές ανωτέρου του β' βαθμού, λύνονται όπως οι αντίστοιχες στο $\mathbb{R}$ (εφ' όσον έχουν συντελεστές από το $\mathbb{R}$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(21) Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις:
1) $2z^2-3z+4=0$. 2) $z^2+z+1=0$ 3) $z^2+3=0$

(22) Ομοια, οι εξισώσεις: 1) $3z^3+z^2+6z+2=0$
2) $z^3-8z^2+25z-26=0$. 3) $3z^4-7z^2-4=0$. 4) $3z^4+5z^2+2=0$.

ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ $z=\alpha+\beta i$, $\bar{z}=\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) Το πραγματικό μέρος του $z \rightarrow Re(z)=\alpha=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$
2) Το φανταστικό " " " $\rightarrow Im(z)=\beta=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
3) $z+\bar{z}=2\alpha\in\mathbb{R}$, $z-\bar{z}=2\beta i\in I$, $z\cdot\bar{z}=\alpha^2+\beta^2\in\mathbb{R}$.
4) $(\bar{\bar{z}})=z$
5) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$, $z\in I\Leftrightarrow z=-\bar{z}$

▼ ΣΥΖΥΓΗΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ Γενικά: $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_\nu}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_\nu$ (Απόδειξη...)
2) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ " : $\overline{z_1\cdot z_2\cdots z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdots\bar{z}_\nu$
3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. 4) $\overline{(z^\nu)}=(\bar{z})^\nu$. 5) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$.

- Βασική εφαρμογή: (Απόδειξη...)

Αν η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ με $\alpha_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,\nu)$ και $\alpha_\nu\neq 0$, έχει ρίζα το μιγαδικό z, τότε θα έχει ρίζα και το $\bar{z}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ

- Για να δείξω ότι $z\in\mathbb{R}$, δείχνω ότι: $Im(z)=\beta=0$ ή $\bar{z}=z$.
- » » » » $z\in I$, » » : $Re(z)=\alpha=0$ ή $z+\bar{z}=0$.
- Αν για το μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ δίνεται:
  1) $z>0 \Leftrightarrow \alpha+\beta i>0 \Leftrightarrow \alpha>0 \wedge \beta=0$
  2) $z<0 \Leftrightarrow \alpha+\beta i<0 \Leftrightarrow \alpha<0 \wedge \beta=0$

  Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ο $z\in\mathbb{R}$.

(23) Αν $z=\dfrac{(3+i)^2}{-1+i}$ να βρεθεί το $Re(w)$ και το $Im(w)$ όπου $w=\dfrac{\bar{z}+1}{z}$.

(24) Αν $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ δείξτε ότι: $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2=2Re(z_1\bar{z}_2)=2Re(\bar{z}_1 z_2)$.

(25) Αν $z^2=(\bar{z})^2$ δείξτε ότι $z\in\mathbb{R} \vee z\in I$.

(26) Να βρεθούν τα $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $z_1=9+(x+4y)i$ και $z_2=3x+y-14i$ να είναι συζυγείς.

(27) Αν $z\bar{z}=\alpha^2 \Leftrightarrow \dfrac{z-\alpha}{z+\alpha}\in I$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $z+\alpha\neq 0$.

(28) 1) Αν $z^2\geq 0 \Rightarrow z\in\mathbb{R}$. 2) Αν $z^2<0 \Rightarrow z\in I^*$.

(29) Αν $z\bar{z}=1$ δείξτε ότι: 1) $(z+\frac{1}{z})\in\mathbb{R}$. 2) $(z-\frac{1}{z})\in I$.

(30) 1) Αν $z\neq -1$ και $w=\dfrac{z}{z+1}$ δείξτε ότι: $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
2) Αν $z\neq 1$ και $w=\dfrac{z-2}{z-1}$ δείξτε ότι: $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

(31) Δίνεται η συνάρτηση f: $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^3+z^2+1}$. Δείξτε ότι οι αριθμοί $f(1+i)$, $f(1-i)$ είναι συζυγείς.

(32) Δείξτε ότι $z\in\mathbb{R}$ όπου:
1) $z=\dfrac{(3+4i)^\nu}{(5+i)(1-6i)}+\dfrac{(3-4i)^\nu}{(5-i)(1+6i)}-(\alpha-3i)^\nu\cdot(\alpha+3i)^\nu$ και $\alpha\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$.
2) $z=(7+i\sqrt{5})^\nu+(7-i\sqrt{5})^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$.
3) $z=(\alpha+\beta i)^\nu+(\alpha-\beta i)^\nu$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

- Σε εξισώσεις που εμφανίζονται περισσότεροι από ένα άγνωστο <u>Θέτω $z=x+yi$</u> και από την εξίσωση βρίσκω τα x,y. (Βλέπε Φ.3)

(33) Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις:
1) $z^2+\bar{z}=0$. 2) $5(z-\bar{z})+z\bar{z}=61+50i$.
3) $7z+\bar{z}-12i=0$. 4) $z\bar{z}=25+32i-4(z-\bar{z})$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ ΣΤΟ $\mathbb{C}$. (Δηλαδή με συντελεστές από το $\mathbb{C}$).

▼ Τετραγωνικές ρίζες μιγαδικού $z=\alpha+\beta i$.

1) Αν $\beta=0 \Leftrightarrow z=\alpha\in\mathbb{R}$ οπότε αν
- $\alpha>0$ οι τετραγωνικές ρίζες είναι οι $\pm\sqrt{\alpha}$.
- $\alpha=0 \Leftrightarrow z=0 \Rightarrow$ Μια τετραγωνική ρίζα το 0.
- $\alpha<0$ οι τετραγωνικές ρίζες είναι οι $\pm i\sqrt{-\alpha}$.

2) Αν $\beta\neq 0$ ο $z=\alpha+\beta i$ έχει

δύο αντίθετες τετραγωνικές ρίζες που τις βρίσκω ως εξής:

έστω $x+yi$ μια τετραγωνική ρίζα του $z=\alpha+\beta i \Leftrightarrow (x+yi)^2=\alpha+\beta i \Leftrightarrow$

$(x^2-y^2)+2xyi=\alpha+\beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=\alpha \\ 2xy=\beta\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ y=\dfrac{\beta}{2x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{\beta^2}{4x^2}=\alpha \\ \rightarrow \end{cases} \Leftrightarrow$

$4x^4-4\alpha x^2-\beta^2=0$. Θέτω $x^2=\omega$ κι επειδή $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=-\dfrac{\beta^2}{4}<0 \Leftrightarrow \omega_{1,2}$ ετερόσημες

$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1>0 \\ \omega_2<0 \text{ απορ.}\end{cases} \Leftrightarrow x^2=\omega_1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\omega_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \Leftrightarrow y_1 \\ -x_1 \Leftrightarrow -y_1\end{cases}$.

Άρα ο z έχει τετραγωνικές ρίζες τις $x_1+y_1 i$ και $-x_1-y_1 i$ που είναι αντίθετες.

⇕ Οι τετραγωνικές ρίζες ορισμένων μιγαδικών βρίσκονται και αν τους γράψουμε σαν ανάπτυγμα τετραγώνου. Αυτό γίνεται όταν $\pm\alpha=\dfrac{\beta^2}{4}-1$ ως εξής:

$\alpha\pm\beta i=\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2+i^2\pm 2\cdot\dfrac{\beta}{2}i=\left(\dfrac{\beta}{2}\pm i\right)^2$, και άρα οι τετραγ. ρίζες είναι $\dfrac{\beta}{2}\pm i$ και $-\dfrac{\beta}{2}\mp i$.

π.χ. $3-4i=4-1-2\cdot 2i=(2-i)^2 \Rightarrow$ Τετραγ. ρίζες του $3-4i$ είναι οι $2-i$, $-2+i$.

▼ Η εξίσωση $az^2+bz+c=0$ με $a,b,c\in\mathbb{C}$ και $a\neq 0$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Αν d είναι μια τετραγωνική ρίζα της διακρίνουσας $\Delta=b^2-4ac$ τότε $d^2=\Delta$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm d}{2a}$.

• Είναι $S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ και $P=z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

34) Να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες των: $-40-42i$, $4+4\sqrt{3}i$, $(1+i)^3-5+22i$.

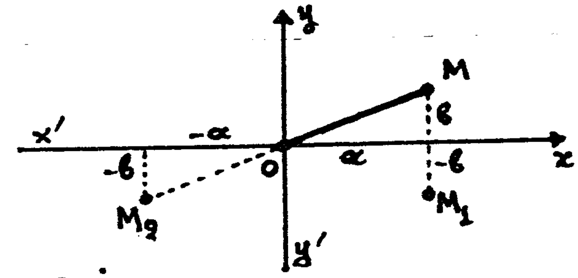
35) Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις: 1) $(2-i)z^2+(1-i)z+2+6i=0$. 2) $z^2-2iz-1=0$
3) $z^2+2iz-1+2i=0$. 4) $z^2-(3+i)z+4+3i=0$. 5) $z^2-(1+\sqrt{3}i)z+\sqrt{3}i=0$.
6) $z^2-(5-3i)z+10-5i=0$. 7) $z^2-2(2+i)z+6=0$. 8) $z^2+(-3+2i)z+5-i=0$.

36) Όμοια οι εξισώσεις: (Βλέπε παρατήρηση στην άσκηση 33.Φ)
1) $z=i\bar{z}$. 2) $iz-\bar{z}+2-3i=0$. 3) $z^2+2=\bar{z}-z-2\bar{z}^2$. 4) $z^3+\bar{z}=0$, $z\in\mathbb{C}^*$.
5) $\sqrt{z\bar{z}}+z=8+4i$. 6) $z\bar{z}+3iz+2+i=0$. 7) $z^3=\bar{z}$, $z\in\mathbb{C}^*$.

37) Δίνεται το πολυώνυμο $P(z)=z^3-az^2+24iz+b$, $a,b\in\mathbb{C}$.
Να βρεθούν τα a,b αν $P(i)=2+i$ και το 2 είναι ρίζα του $P(z)$.

38) Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ τα συστήματα: 1) $\begin{cases} 2ix^2-(3+i)y=-3+17i \\ (1+3i)x-2yi=3\end{cases}$, $x,y\in\mathbb{R}$. 2) $\begin{cases} 2iz-(1+i)w=4 \\ 3\bar{z}-2i\bar{w}=i\end{cases}$

ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.



Κάθε μιγαδικός $z=\alpha+\beta i=(\alpha,\beta)$: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ απεικονίζεται σ' ένα σημείο M του επιπέδου Oxy και αντίστροφα.

Δηλαδή: έχουμε μια απεικόνιση "1-1 και επί" του $\mathbb{C}$ στο σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy που λέγεται μιγαδικό επίπεδο.

- Αν $z=0 \Leftrightarrow M\equiv O$ όπου O η αρχή των αξόνων
- Αν $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow M\in x'x$ ⟵ Άξονας πραγματικών.
- Αν $z\in I \Leftrightarrow M\in y'y$ ⟵ » φανταστικών.
- Οι $z,\bar{z}$ απεικονίζονται σε σημεία συμμετρικά ως προς τον $x'x$ (M, M_1).
- Οι $z,-z$ » » » » » » την αρχή O. (M, M_2).

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού $z=\alpha+\beta i$ ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. ($|z|=|\vec{OM}|$ όπου $\vec{OM}$ η διανυσματική ακτίνα).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: (Απόδειξη...)

1) $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|=\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$, $z\in I \Leftrightarrow |z|=\sqrt{\beta^2}=|\beta|$. • $z=0 \Leftrightarrow |z|=0$.
2) $|z|=|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|$
3) $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2=z^2$, $z\in I \Leftrightarrow |z|^2=-z^2$ • Αν $z\in\mathbb{C}$ τότε $|z|^2\neq z^2$.
4) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ • Αν $|z|=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$, $z=\frac{1}{\bar{z}}$.

▼ ΜΕΘΟΔΟΙ ▼

- Για να βρώ το $|z|$ φέρνω το z στη μορφή $\alpha+\beta i$, οπότε $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.
  - Το μέτρο του z βρίσκεται (ειδικά όταν ο z έχει πολλές πράξεις) και με τις ιδιότητες των πράξεων στα μέτρα, που θα αναφερθούν αργότερα... (Φ. 11)
- Για να βρώ το z που ικανοποιεί (αυτός ή το μέτρο του) ορισμένες σχέσεις, τότε: γράφω το z στη μορφή $\alpha+\beta i$ και απο τις σχέσεις κάνω σύστημα με αγνώστους τα α,β.
  - Φυσικά το ίδιο κάνω σε εξισώσεις που περιέχουν $|z|$
- Όταν $|z|=1$ χρησιμοποιώ την παρατήρηση της ιδιότητας 4.
- Μέθοδος Τετραγωνισμού: Χρησιμοποιείται σε ασκήσεις ταυτοτήτων με μέτρα ως εξής: $|f(z_1)|=|f(z_2)| \Leftrightarrow |f(z_1)|^2=|f(z_2)|^2 \Leftrightarrow f(z_1)\cdot\overline{f(z_1)}=f(z_2)\cdot\overline{f(z_2)} \Leftrightarrow \ldots$
  - Το ίδιο κάνω σε ασκήσεις που έχουν $|z|^2$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 4.
- Για να δείξω ότι $z\in\mathbb{R}$, αρκεί να δείξω ότι:
  $z=\bar{z}$ ή $Im(z)=\beta=0$ ή $|z|^2=z^2$.
- Για να δείξω ότι $z\in I$, αρκεί να δείξω ότι:
  $z+\bar{z}=0$ ή $Re(z)=\alpha=0$ ή $|z|^2=-z^2$.

(Γενίκευση της μεθόδου του Φ.5.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

39 Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών:
1) $z_1 = \frac{4-3i}{2+i}$. 2) $z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. 3) $z_3 = \varepsilon\varphi x - i$. 4) $z_4 = 1 - \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$.

40 Αν $|5x+2yi-3| = |x-15+yi|$, $x,y \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι: $8x^2+y^2=72$.

41 Δείξτε ότι:
1) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(\bar{z}_1 z_2)$.
2) $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2-2Re(\bar{z}_1 z_2)$.
3) $|z_1+z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = 4Re(z_1\bar{z}_2) = 4Re(\bar{z}_1 z_2)$.
4) $|1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1-z_2|^2 = (1-|z_1|^2)\cdot(1-|z_2|^2)$.
5) $|z_1\bar{z}_2+1|^2 + |z_1-z_2|^2 = (1+|z_1|^2)\cdot(1+|z_2|^2)$.
6) $|z + i\bar{z}|^2 = 2|z|^2 + 2\cdot Im(z^2)$.

(Βλέπε και άσκηση 24.Φ.)

($\bullet$ $Im(z^2) = \frac{z^2-\bar{z}^2}{2i}$).

42 Δείξτε ότι:
1) $|z-9| = 3|z-1| \Leftrightarrow |z|=3$. 2) $|z^2| = |z^2-1| \Rightarrow Re(z^2) = \frac{1}{2}$.

($\bullet$ $Re(z^2) = \frac{z^2+\bar{z}^2}{2}$).

43 Όμοια:
1) $|z+4| = 2|z+1| \Leftrightarrow |z|=2$. 2) $|z-10| = 3|z-2| \Leftrightarrow |z-1|=3$.
3) $|z-5| = |z-7| \Rightarrow Re(z)=6$. 4) $|7z-i| = |iz+7| \Leftrightarrow |z|=1$.
5) $|5z-1| = |z-5| \Leftrightarrow |z|=1$. 6) $|z+64| = 8|z+1| \Leftrightarrow |z|=8$

44
1) Αν $|z+\alpha i| = |z+\beta i|$, $z\in\mathbb{C}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha\neq\beta$, δείξτε ότι: $Im(z) = -\frac{\alpha+\beta}{2}$.
2) Αν $|z+\alpha| = |z+\beta|$, " , " , " , " " : $Re(z) = -\frac{\alpha+\beta}{2}$.

45
1) Αν $|z+i| = |z-i| \Rightarrow z\in\mathbb{R}$. 2) Αν $|z-1| = |z+1| \Rightarrow z \in \mathbb{I}$.

46 Αν $\mu,\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ δείξτε ότι:
1) $|\mu z - i| = |iz+\mu| \Leftrightarrow |z|=1$. 2) $|\lambda z-1| = |z-\lambda| \Leftrightarrow |z|=1$.

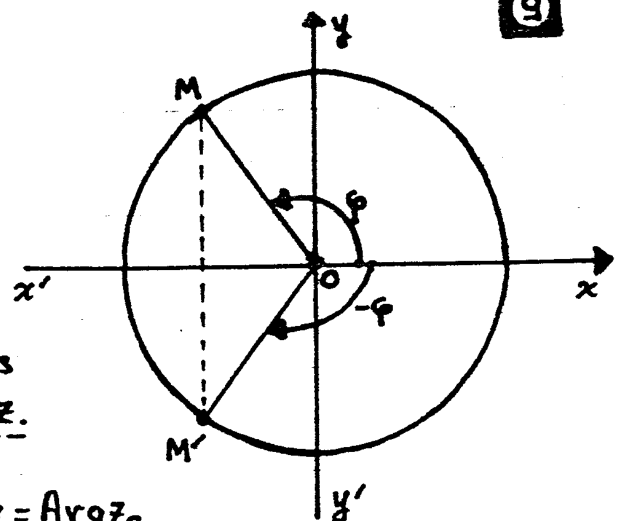
47 Αν $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}^*$ με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=1$ δείξτε ότι: $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1$.

48 Αν $z\in\mathbb{C}$ και $|z|=1$ δείξτε ότι: $|2z-i| = |2+iz|$.

49 Αν $|z|=1$ και $|z+1| = \sqrt{3}\cdot|z-1|$ δείξτε ότι: $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

50 Να λυθούν οι εξισώσεις: (Βλέπε άσκηση 33.Φ.).
1) $z^2+|z|=0$. 2) $|z|+z=2+3i$. 3) $|z-i|-|z-1| = i(|z|-1)$.

51 Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} |z-1| = |z+i| \\ |z+2| = |2z-i| \end{cases}$$



▼ΟΡΙΣΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ.

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ και $|z| = \rho$.
Η αλγεβρική τιμή της γωνίας $(\hat{Ox, OM})$ λέγεται πρωτεύον όρισμα του z

$$\varphi_0 = Arg z$$

Η θέση του M καθορίζεται από το ζεύγος (ρ, φ_0) ⟷ Πολικές συντεταγμένες του z.

- $z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ και $Arg z_1 = Arg z_2$.
- Αν $z \neq 0 \Leftrightarrow -\pi < Arg z \leq \pi$
- Αν $z \in \mathbb{R}^*_+ \Leftrightarrow Arg z = 0$, Αν $z \in \mathbb{R}^*_- \Leftrightarrow Arg z = \pi$.
- Αν $z = \beta i \in I$ με $\beta > 0 \Leftrightarrow Arg z = \frac{\pi}{2}$, $\beta < 0 \Leftrightarrow Arg z = -\frac{\pi}{2}$.

• Γενικά: $Arg \bar{z} = -Arg z$ (εκτός αν $z \in \mathbb{R}^*_-$ οπότε $Arg \bar{z} = Arg z = \pi$).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζουμε όρισμα ενός μιγαδικού z, κάθε πραγματικό

$$\boxed{\varphi = Arg z + 2\kappa\pi} \quad : \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- Αν $z = 0$ δεν έχει νόημα ο όρος όρισμα
- Αν φ είναι ένα όρισμα του z, τότε ο $\begin{cases} -\varphi \text{ είναι ένα όρισμα του } \bar{z}. \\ \pi + \varphi \text{ ,, ,, ,, ,, } -z. \end{cases}$

▼ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ► $z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ και $\exists \kappa \in \mathbb{Z} : \varphi_1 - \varphi_2 = 2\kappa\pi$.

Θ. Για να είναι ίσοι δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί πρέπει και αρκεί να έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά δύο οποιωνδήποτε ορισμάτων τους να είναι πολ/σιο του 2π. (Απόδειξη...)

▼ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ μιγαδικού ⟶ $\boxed{z = |z| \cdot (\sigma \upsilon \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)}$ (Απόδειξη)

- $_1$ Αν $z = \lambda(\sigma \upsilon \nu \theta + i \eta \mu \theta)$ με $\lambda < 0 \Rightarrow z = -\lambda \cdot [\sigma \upsilon \nu(\pi + \theta) + i \eta \mu(\pi + \theta)]$
- $_2$ Αν $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = \sigma \upsilon \nu \theta + i \eta \mu \theta$.

● ⟶ Για να γράψω τον $z = \alpha + \beta i$ σε τριγωνομετρική μορφή, δουλεύω ως εξής: **1)** Βρίσκω το μέτρο του $\rho = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.
2) Προσδιορίζω ένα όρισμά του φ από τους τύπους: $\sigma \upsilon \nu \varphi = \frac{\alpha}{\rho}$, $\eta \mu \varphi = \frac{\beta}{\rho}$ οι οποίοι στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ δίνουν μοναδική λύση $\varphi_0 = Arg z$.
(Οποιαδήποτε γωνία της μορφής $\varphi + 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι όρισμα του z).

• Ένα όρισμα του z μπορώ να βρώ και μόνο από το τύπο $\sigma \upsilon \nu \varphi = \frac{\alpha}{\rho}$, ανάλογα με τη θέση του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Έτσι: $z = \alpha + \beta i = \rho\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{\rho} i\right) = \rho(\sigma \upsilon \nu \varphi + i \eta \mu \varphi)$.

- Αν $z = (\rho, \varphi) \Rightarrow z + \bar{z} = 2\rho \sigma \upsilon \nu \varphi$ και $z - \bar{z} = 2\rho i \eta \mu \varphi$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

ΜΕΘΟΔΟΣ:

Για να βρώ το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει μια σχέση, θέτω $z=x+yi$ και απο τη σχέση βρίσκω την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου απο την οποία συμπεραίνω το γ.τ.

(52) Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει:

1) $2|z+1|=|z+4|$. 2) $|z-5+6i|=4$
3) $|z|^2+6Re(z)=7$. 4) $Re(z)=-3$
5) $Im(z)=4$. 6) $Re(z)=Im(z)$
7) $|z+2|=|z-3+i|$. 8) $z\bar{z}+3(z+\bar{z})=7$. 9) $|z-1|^2+|z+1|^2=4$.

(53) Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί:

1) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 2) $z=\frac{1-i}{1+i}$. 3) $z=2i$. 4) $z=1-$συνα$+i$ημα.

(54) Δείξτε ότι: 1) $1=$συν$0+i$ημ0. 2) $-1=$συνπ$+i$ημπ.
3) $i=$συν$\frac{\pi}{2}+i$ημ$\frac{\pi}{2}$ 4) $-i=$συν$(-\frac{\pi}{2})+i$ημ$(-\frac{\pi}{2})$.

(55) Να βρεθούν οι πολικές συντεταγμένες των μιγαδικών:

1) $z=1-i\sqrt{3}$. 2) $z=-2\sqrt{3}+2i$. 3) $z=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

(56) Οι παρακάτω μιγαδικοί που δίνονται με τις πολικές τους συντεταγμένες να γραφούν στη μορφή $\alpha+\beta i$:

1) $z=(3,\frac{\pi}{6})$. 2) $z=(1,\frac{3\pi}{4})$. 3) $z=(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\pi}{3})$.

(57) Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί:

1) $z=\frac{\rho(1+i\varepsilon\varphi\theta)^2}{1+\varepsilon\varphi^2\theta}$: $\rho,\theta\in\mathbb{R}$. 2) $z=\frac{1}{1+i\varepsilon\varphi\theta}$: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(58) Να γραφεί στη κανονική μορφή ο μιγαδικός: $z=6\cdot($συν$\frac{5\pi}{3}+i$ημ$\frac{5\pi}{3})$.

(59) Να βρεθεί το μέτρο και ένα όρισμα των μιγαδικών:

1) $z=$ημ$\frac{\pi}{6}+i$συν$\frac{\pi}{6}$. 2) $z=-4\cdot[$συν$(-\frac{\pi}{4})+i$ημ$(-\frac{\pi}{4})]$.
3) $z=1+i\,\varepsilon\varphi\varphi$: $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. 4) $z=(1+$συν$\varphi+i$ημ$\varphi)^2$: $\varphi\in[-\pi,\pi]$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΟ.

ΜΕΤΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ: $|z_1 \pm z_2| = \sqrt{(\alpha_1 \pm \alpha_2)^2 + (\beta_1 \pm \beta_2)^2}$

- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. (Απόδειξη).

Γενικά: $|z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_\nu|$.

ΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΑΤΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.

Αν ρ_1, ρ_2 τα μέτρα και φ_1, φ_2 τα ορίσματα των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \eta\mu(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Θ. Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ και φ_i ένα όρισμα του z_i, $i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$. Το γινόμενο $z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu$ έχει:

1. μέτρο το γινόμενο των μέτρων, δηλαδή: $|z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_\nu|$.
2. ένα όρισμα, το άθροισμα $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\nu$ των ορισμάτων. (Απόδειξη).

Πόρισμα: Αν $z_1 = z_2 = \cdots = z_\nu = z$ και φ είναι ένα όρισμα του z, τότε: $|z^\nu| = |z|^\nu$ και το $\nu\varphi$ είναι ένα όρισμα του z^ν

- Δηλαδή: αν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi) \Longrightarrow z^\nu = \rho^\nu \cdot [\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i \cdot \eta\mu(\nu\varphi)]$.

ΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΑΤΑ ΠΗΛΙΚΟΥ.

Θ. Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού $z \neq 0$ έχει μέτρο τον αντίστροφο του μέτρου του z, ενώ ένα όρισμά του είναι ο αντίθετος ενός ορίσματος του z. Δηλαδή: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ και $\theta = -\varphi + 2\kappa\pi$ (Απόδειξη).

- Έτσι: αν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi) \Longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\sigma\upsilon\nu(-\varphi) + i \cdot \eta\mu(-\varphi))$.

Πόρισμα: Αν οι μιγαδικοί $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ έχουν ορίσματα φ_1, φ_2 αντίστοιχα, τότε: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ και το $\varphi_1 - \varphi_2$ είναι ένα όρισμα του $\frac{z_1}{z_2}$.

- Έτσι: αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2)$ $\Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \eta\mu(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

ΔΥΝΑΜΗ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ.

Θ. Έστω μιγαδικός $z \neq 0$ και φ ένα όρισμά του. Τότε: $\forall \kappa \in \mathbb{Z}$, $|z^\kappa| = |z|^\kappa$. Το $\kappa \cdot \varphi$ είναι ένα όρισμα του z^κ. (Απόδειξη).

- **ΤΥΠΟΣ DE MOIVRE.** $\boxed{(\sigma\upsilon\nu\theta + i \cdot \eta\mu\theta)^\kappa = \sigma\upsilon\nu(\kappa\theta) + i \cdot \eta\mu(\kappa\theta)}$

Εφαρμογή-Θεωρία: Το σύνολο $\mathcal{U}$ των μιγαδικών με μέτρο 1, είναι πολλαπλασιαστική ομάδα. (Απόδειξη).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για να δείξω ότι οι εικόνες M_1, M_2, M_3 τριών μιγαδικών z_1, z_2, z_3 σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο πρέπει να δείξω ότι: $(M_1M_2)=(M_2M_3)=(M_3M_1)$ δηλαδή ότι: $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$. (διότι $|z_1-z_2|=\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2}=(M_1M_2)$).

(60) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0$, δείξτε ότι τα σημεία A, B, Γ που είναι εικόνες των z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1+i\sqrt{3}\,z_2$ αντίστοιχα, σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

(61) Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο και ισχύουν οι σχέσεις: $z_1+z_2+z_3=0$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, δείξτε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

(62) Δείξτε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $z_1=2+i$, $z_2=5-3i$, $z_3=2-7i$, είναι ισοσκελές.

(63) Δύο μιγαδικοί z_1, z_2 έχουν μέτρα: $|z_1|=3\mu-2$, $|z_2|=2\mu+7$ και ορίσματα $\varphi_1=\dfrac{(7\lambda+1)\pi}{4}$, $\varphi_2=\dfrac{(3\lambda+4)\pi}{2}$. Να βρεθούν τα $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $z_1=z_2$.

(64) Αν $z_1=3\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$ και $z_2=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$ να βρεθούν οι πολικές συντεταγμένες των μιγαδικών $z_1\cdot z_2$ και $\dfrac{z_1}{z_2}$.

(65) Να γίνουν οι πράξεις:

1) $8\cdot(\sigma\upsilon\nu 10^\circ+i\eta\mu 10^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 50^\circ+i\eta\mu 50^\circ)$. 2) $\dfrac{10\cdot(\sigma\upsilon\nu 65^\circ+i\eta\mu 65^\circ)}{1/2\cdot(\sigma\upsilon\nu 20^\circ+i\eta\mu 20^\circ)}$.

(66) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

1) $A=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^{13}$. 2) $B=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{13}}{(\sqrt{3}-i)^3}$.

3) $\Gamma=\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}-i\eta\mu\frac{\pi}{7}\right)\cdot(\sqrt{3}+i)$.

(67) Να βρεθεί το μέτρο και ένα όρισμα του $z_1\cdot z_2$, όπου:

1) $z_1=4\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}+i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_2=3\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}+i\eta\mu\frac{5\pi}{6}\right)$.

2) $z_1=-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+i\eta\mu 2\alpha$, $z_2=\eta\mu 2\alpha-i\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

(68) Αν $z=1+i$ να βρεθούν:

1) Ένα όρισμα των μιγαδικών $z, z^2, z^3, \dots, z^8$.

2) Ένα όρισμα του z^{8k}, $k\in\mathbb{N}$.

3) Ένα όρισμα του z^{1220}.

(69) Αν $z=\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha$ να βρεθεί το μέτρο και ένα όρισμα του $w=z+i\bar{z}$.

(70) Δείξτε ότι ο αριθμός $z=(1+i\varepsilon\varphi\alpha)^k+(1-i\varepsilon\varphi\alpha)^k$, $k\in\mathbb{N}$ είναι πραγματικός.

(71) Δείξτε ότι:

1) $(1+i)^{\nu}+(1-i)^{\nu}=2^{\frac{\nu+2}{2}}\cdot\text{συν}\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

2) $(1+i)^{\nu}-(1-i)^{\nu}=i\cdot 2^{\frac{\nu+2}{2}}\cdot\text{ημ}\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

(72) Αν $\alpha\in\mathbb{R}$ και $-\pi<\alpha\leq\pi$, να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση:
$z^2-4\cdot\text{συν}\alpha\cdot z+4=0$. (1).
Στη συνέχεια να υπολογιστούν οι παραστάσεις:
$S=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ και $S'=z_1^6+z_2^6$, όπου z_1, z_2 οι ρίζες της (1).

(73) Να βρεθεί ο $z\in\mathbb{C}$ όταν:
$|z+4i|=|z+2i|$ και $Arg(z+2i)=\frac{\pi}{4}$.

(74) Αν $\text{συν}\alpha+\text{συν}\beta+\text{συν}\gamma=0$ και $\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\beta+\text{ημ}\gamma=0$ δείξτε ότι:
$\text{ημ}2\alpha+\text{ημ}2\beta+\text{ημ}2\gamma=0$ και $\text{συν}2\alpha+\text{συν}2\beta+\text{συν}2\gamma=0$.

(75) Αν $f(x)=x^9+\kappa\cdot x^7+\lambda$ όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, να βρεθούν τα κ,λ ώστε ο $\rho=1+i$ να είναι ρίζα του $f(x)$.

(76) Να λυθεί η εξίσωση: $(1+i)^{16}\cdot x-(1-i)^{8}\cdot(x+2)=64$.

(77) Δείξτε ότι: $\left(\frac{1+i\,\text{εφ}\alpha}{1-i\,\text{εφ}\alpha}\right)^{\nu}=\frac{1+i\,\text{εφ}(\nu\alpha)}{1-i\,\text{εφ}(\nu\alpha)}$.

(78) Αν $z=\text{συν}\alpha+i\,\text{ημ}\alpha$, δείξτε ότι:

1) $z+\frac{1}{z}=2\text{συν}\alpha$ και $z-\frac{1}{z}=2i\,\text{ημ}\alpha$.

2) $z^{\nu}+\frac{1}{z^{\nu}}=2\text{συν}(\nu\alpha)$ και $z^{\nu}-\frac{1}{z^{\nu}}=2i\,\text{ημ}(\nu\alpha)$.

(79) Δείξτε ότι ο αριθμός $z=(\sqrt{3}+i)^{13}+(\sqrt{3}-i)^{13}$ είναι πραγματικός.

(80) Δίνεται η εξίσωση: $z^2-2\cdot(\text{συν}\alpha+i\,\text{ημ}\alpha)\cdot z+1=0$.
Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της, τότε:

1) Δείξτε ότι $|z_1|=\frac{1}{|z_2|}$ και $Arg z_1+Arg z_2=2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

2) Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε ο z_1+z_2 να είναι πραγματικός.

(81) Να βρεθεί το μέτρο και ένα όρισμα του $z=(\kappa-3)\cdot\left(\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

ΡΙΖΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζεται <u>ν-οστή ρίζα</u> ενός μιγαδικού αριθμού a κάθε μιγαδικός z τέτοιος ώστε: $z^{\nu}=a$.

▼ <u>ν-οστές ρίζες της μονάδας</u> είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^{\nu}=1$.
Αυτές είναι της μορφής: $\delta_{\kappa}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{\nu}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

π.χ. $\delta_0=\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0=1$.

$\delta_1=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}$, $\delta_2=\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{4\pi}{\nu}$, ...

● $\forall\kappa\in\mathbb{Z}$: $\delta_{\kappa}=\delta_1^{\kappa}$ (Έτσι: $\delta_2=\delta_1^2, \delta_3=\delta_1^3, \dots, \delta_{\nu-1}=\delta_1^{\nu-1}, \delta_{\nu}=\delta_1^{\nu}=1, \delta_{\nu+1}=\delta_1^{\nu+1}=\delta_1^{\nu}\delta_1=\delta_1 \dots$)

● $\forall\kappa\in\mathbb{Z}$ η ρίζα δ_{κ} ταυτίζεται με μια από τις $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{\nu-1}$.

Θ. Ν-οστές ρίζες της μονάδας είναι οι ν αριθμοί:
$\boxed{\delta_{\upsilon}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\upsilon\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2\upsilon\pi}{\nu}}$ όπου $\upsilon=0,1,2,\dots,\nu-1$.
(Απόδειξη).

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ των ν-οστών ριζών της μονάδας</u> $\to \delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\nu-1}$.

1) Ο αντίστροφος της ρίζας δ_{λ} είναι η ρίζα $\delta_{\nu-\lambda}$.

2) $\delta_0+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_{\nu-1}=0$. ● $\delta_0\cdot\delta_1\cdot\delta_2\cdot\dots\cdot\delta_{\nu-1}=1$.

3) Το σύνολο των ν-οστών ριζών της μονάδας είναι πολ/κή ομάδα.

● Οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 1. (διότι $|\delta_{\kappa}|=1$, $\forall\kappa=0,1,2,\dots,\nu-1$ και τα ορίσματα δυο διαδοχικών ριζών διαφέρουν κατά $\frac{2\pi}{\nu}$).

● Οι $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\nu-1}$ γράφονται και $1, \delta_1, \delta_1^2, \delta_1^3, \dots, \delta_1^{\nu-1}$ όπου $\delta_1=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}$.

▼ <u>ν-οστές ρίζες μιγαδικού</u> είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^{\nu}=a$, δηλαδή οι ν-οστές ρίζες του a. Αυτές είναι της μορφής:

$$z_{\kappa}=\sqrt[\nu]{|a|}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}\right), \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

● $z_{\kappa}=z_0\cdot\delta_{\kappa}$ $\to$ Άρα: ο a έχει ν ν-οστές ρίζες που τις βρίσκουμε αν πολ/με το z_0 με τις ν-οστές ρίζες του 1.

● Οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου.

● Οι ν-οστές ρίζες του a βρίσκονται και από τον πολ/μό οποιασδήποτε ν-οστής ρίζας του (όχι κατ' ανάγκη της z_0) επί τις ν-οστές ρίζες του 1. Δηλαδή: $(z_{\kappa}\cdot\delta_{\lambda})^{\nu}=a$.

▼ <u>Κυβικές ρίζες του 1</u> είναι οι ρίζες της $z^3=1$. Αυτές είναι:
$\delta_0=1$, $\delta_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\delta_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

<u>Ιδιότητες:</u> $\delta_1+\delta_2+1=0$, $\delta_1\delta_2=1$, $\delta_1^3=1=\delta_2^3$.

● Αν δ είναι μια κυβική <u>μιγαδική</u> ρίζα του 1, τότε: $\boxed{1+\delta+\delta^2=0, \quad \delta^3=1}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΜΕΘΟΔΟΙ.

Για να βρώ τις ν-οστές ρίζες του μιγαδικού $\lambda=\alpha+\beta i$ ή για να λύσω τη ΔΙΩΝΥΜΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $\Leftrightarrow z^\nu=\lambda,\ \nu\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

1) Γράφω το λ σε τριγωνομετρική μορφή $\lambda=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$: $\rho=|\lambda|$.

2) Συνεχίζω με ένα από τους εξής δύο τρόπους:

α' τρόπος (Βιβλίου). α) Βρίσκω τη ρίζα $z_0=\sqrt[\nu]{|\lambda|}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{\nu}+i\eta\mu\frac{\varphi}{\nu}\right)$.

β) Βρίσκω τις ν-οστές ρίζες της μονάδας από το τύπο

$$\delta_u=\sigma\upsilon\nu\frac{2u\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2u\pi}{\nu}\quad \text{όπου}\quad u=0,1,2,\dots,\nu-1.$$

γ) Εφαρμόζω το τύπο $z_\kappa=z_0\cdot\delta_\kappa$, $\kappa=0,1,2,\dots,\nu-1$ οπότε έχω τις ν-οστές ρίζες του λ.

β' τρόπος: Εφαρμόζω το τύπο

$$z_\kappa=\sqrt[\nu]{|\lambda|}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}\right)\ :\ \kappa=0,1,2,\dots,\nu-1.$$

(82) Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες των μιγαδικών:
1) $8i$. 2) $2+2i$. 3) $1+i$.

(83) Να βρεθούν οι τετάρτης τάξης ρίζες των:
1) -16. 2) $32+32\sqrt{3}i$.

(84) Να λυθούν οι εξισώσεις:
1) $z^2=-1$. 2) $z^3=i$. 3) $4z^7-1=0$. 4) $z^3+64i=0$.
5) $z^6-64i=0$. 6) $z^5+\sqrt{3}=i$. 7) $z^3=1+i\sqrt{3}$ 8) $z^3-1+i\sqrt{3}=0$.

(85) Ομοια, οι εξισώσεις:
1) $6z^5+48z^2=0$. 2) $4z^6+32z^3=0$. 3) $27z^3-1=0$.
4) $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$. 5) $(z+1)^5+(z-1)^5=0$. 6) $z^6-(1+2i)z^3+2i=0$.

(86) Ομοια, οι εξισώσεις:
1) $z^{10}-z^5-58.806=0$. 2) $(1-z)^\nu=z^\nu$. 3) $z^4+z^2+1=0$.

(87) Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^6+64=0$ και να βρεθούν οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο. (ΘΕΜΑ εξετάσεων).

(88) Αν $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε για τις διάφορες τιμές του λ, τις ρίζες στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης: $z^2-\lambda z+4=0$.

(89) α) Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\nu=1$ και να δείξτε ότι οι ρίζες της είναι $z_\kappa=i\varepsilon\varphi\left(\frac{\kappa\pi}{\nu}\right)$: $\kappa=0,1,\dots,\nu-1$.

β) Ομοια, δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης: $(z+1)^4-(z-1)^4=0$, είναι $z_\kappa=-i\varepsilon\varphi\left(\frac{\kappa\pi}{4}\right)$: $\kappa=0,1,2,3$.

Σε ασκήσεις που αναφέρονται στις νιοστές ρίζες του 1, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ριζών αυτών. (Φ.14).

(90) Αν ζ είναι μια κυβική μιγαδική ρίζα του 1, δείξτε ότι: $(1-\zeta)^6=-27$.

(91) Αν ζ_1,ζ_2 είναι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες του 1, δείξτε ότι: $(1+\zeta_1-\zeta_2)^3=(1-\zeta_1+\zeta_2)^3$.

(92) Αν ζ είναι μια κυβική μιγαδική ρίζα του 1, δείξτε ότι:

1) $1+\zeta^{3p+1}+\zeta^{3p+2}=0$. 2) $(2+5\zeta+2\zeta^2)^{12}=3^{12}$.

3) $(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^4)(1-\zeta^5)=9$. 4) $(1+\zeta)(1+2\zeta)(1+3\zeta)(1+5\zeta)=21$.

5) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha\zeta+\beta\zeta^2)(\alpha\zeta^2+\beta\zeta)$. 6) $\alpha+\zeta\beta+\zeta^2\gamma=(\alpha+\lambda)+\zeta(\beta+\lambda)+\zeta^2(\gamma+\lambda)$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\lambda\in\mathbb{R}$.

(93) Αν ζ_0,ζ_1,ζ_2 είναι οι κυβικές ρίζες του 1, δείξτε ότι: $(4\zeta_0+7\zeta_1+4\zeta_2)^3=27$.

(94) Αν ζ είναι μια νιοστή ρίζα του 1, δείξτε ότι: 1) $\bar{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$. 2) $(\zeta+\frac{1}{\zeta})\in\mathbb{R}$.

(95) Αν ζ είναι μια πέμπτη ρίζα του 1 (μιγαδική), δείξτε ότι:

$1+\zeta^{5k+1}+\zeta^{5k+2}+\zeta^{5k+3}+\zeta^{5k+4}=0$.

(96) Αν ζ είναι μια εβδόμη ρίζα του 1, δείξτε ότι:

$1+\zeta+\zeta^4+\zeta^{23}+\zeta^{30}+\zeta^{39}+\zeta^{43}=1+2(\zeta+\zeta^2+\zeta^4)$.

(97) Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες και η εικοστή δύναμη του $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(98) Αν ζ είναι μια κυβική ρίζα του 1 $(\zeta\neq 1)$, δείξτε ότι η παράσταση $A=\zeta^{2\nu}+\zeta^\nu+1$ μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 3, $\forall\nu\in\mathbb{N}$ και η $B=\zeta^{2\nu}+\zeta^\nu$ τις τιμές -1 και 2.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$.

- Πολυωνυμική συνάρτηση. $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με $P(z)=\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 z+\alpha_0 : \alpha_i\in\mathbb{C}, \alpha_\nu\neq 0$.
- Πολυωνυμική εξίσωση. $P(z)=0$.
- Ρίζα της $P(z)=0$ ή του $P(z)$ λέγεται $\forall z_0\in\mathbb{C}: P(z_0)=0$.
- <u>Λύση πολυωνυμικής εξίσωσης με παραγοντοποίηση</u>. Γίνεται αν ξέρουμε μια ρίζα έστω z_0 της $P(z)=0$, οπότε: $P(z)=(z-z_0)\cdot Q(z)=0$ ...

Θ. Το πολυώνυμο $P(z)$ βαθμού $\nu\geq 1$ έχει παράγοντα το $z-z_0$, αν και μόνο αν το z_0 είναι ρίζα του. (Απόδειξη ...).

<u>**Θ. D'Alembert:**</u> Κάθε πολυώνυμο στο $\mathbb{C}$ βαθμού $\nu\geq 1$, έχει μια τουλάχιστο ρίζα.

- Αν $z_1,z_2,\dots,z_\nu$ είναι ρίζες του $P(z)$, τότε: $P(z)=\alpha_\nu\cdot(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot\dots\cdot(z-z_\nu)$.
- Αν από τις ρίζες $z_1,z_2,\dots,z_\nu$ υπάρχουν μ ίσες με r, τότε: $P(z)=(z-r)^\mu\cdot Q(z)$ όπου $Q(z)$ πολυώνυμο $\nu-\mu$ βαθμού, με $Q(r)\neq 0$. Ο μ → βαθμός πολλαπλότητας της r.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

99 Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις:
1) $4z^3+12iz^2+z+3i=0$. 2) $z^4+(1-4i)z^3-4iz^2-3iz-3i=0$.

100 Να λυθούν οι εξισώσεις, αν ξέρουμε ότι έχουν ρίζα το i:
1) $z^3-(2+i)z^2+(10+2i)z-10i=0$. 2) $z^3+(2-i)z^2+(5-2i)z-5i=0$.

101 Δείξτε ότι το πολυώνυμο:
1) $P(z)=z^{8k}+z^{8k+1}+z^{8k+2}+z^{8k+3}$, $k\in\mathbb{Z}$, έχει παράγοντα το $1+z+z^2+z^3$.
2) $Q(z)=(z+1)^{6\lambda+1}-z^{6\lambda+1}-1$, $\lambda\in\mathbb{N}^*$,, ,, ,, z^2+z+1.

102 Δείξτε ότι το πολυώνυμο:
1) $P(z)=(\sigma\upsilon\nu\alpha+z\cdot\eta\mu\alpha)^\nu-(\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)+z\cdot\eta\mu(\nu\alpha))$ έχει παράγοντα το z^2+1.
2) $Q(z)=z^\nu\eta\mu\varphi-z\,\eta\mu(\nu\varphi)+\eta\mu(\nu\varphi-\varphi)$ έχει παράγοντα το $g(z)=z^2-2z\sigma\upsilon\nu\varphi+1$. ($\nu\neq1$)

103 Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις, αν μια ρίζα τους είναι πραγματική:
1) $z^3-(5-2i)z^2+(11-6i)z-7+4i=0$. 2) $z^3+(i-5)z^2+(6-3i)z+2i=0$.

104 Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις, αν μια ρίζα τους είναι φανταστική:
1) $z^3-z^2-(1-i)z-2(1+i)=0$. 2) $z^3-(5+2i)z^2+(3+9i)z-4i+4=0$.

105 Αφού υπολογισθούν οι δυνάμεις $(1+i)^3$ και $(3+i)^3$,
να λυθεί η εξίσωση: $z^6-(16+28i)z^3-88-16i=0$.

106 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(z)=2z^2+3iz-1$ και $f(z)=z^2+1$.
Να προσδιοριστούν τα α,β,γ ώστε το πολυώνυμο $g(z)=f(z)\cdot(\alpha z+\beta)+P(z)\cdot(z+\gamma)$ να είναι 1ου βαθμού και να έχει συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου το 1.

107 Αν $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+\alpha x+\beta$: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να βρεθούν τα α,β ώστε ο $z=1+i$ να είναι ρίζα του $f(x)$.

108 Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $z^2-z+1+i=0$,
να βρεθούν οι δυνάμεις z_1^ν και z_2^ν, $\nu\in\mathbb{N}$.

109 Θεωρούμε τα β΄ βάθμια πολυώνυμα $P(z), G(z), F(z)$ με πραγματικούς συντελεστές για τα οποία ισχύει:
$P^2(z)+G^2(z)=F^2(z)$.
Αν τα πολυώνυμα $P(z)$ και $G(z)$ δεν έχουν κοινή ρίζα, δείξτε ότι το πολυώνυμο $F(z)$ έχει ρίζες μιγαδικές.

110 Να λυθεί η εξίσωση: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)-1=0$.

111 Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $(3z^2+z+1)^2+(z^2-2z+2)^2=0$. (Βλέπε Εφαρμ. Βαθ. 149)

112 Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^4+4z^3+5z^2+2z-2=0$,
αν ξέρουμε ότι μια ρίζα είναι ο $-1+i$.

113 Να λυθεί η εξίσωση: $z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0$ ("ΘΕΜΑ 89")

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ.

1. α) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $(\alpha-\beta i)-i=(\gamma+\alpha i)+2(\beta+\gamma i)$ δείξτε ότι: $\beta+\gamma=-\frac{1}{3}$.
β) Αν $z=\alpha+\beta i:\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $(z-1)(-1+iz)\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι: $\alpha=-\beta \vee \alpha=\beta+1$.
γ) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ και $2\alpha=5\beta=\frac{1}{\gamma}$ δείξτε ότι: $3(\alpha+2\beta)-2(\alpha-\beta)\gamma i=\frac{27}{5}\alpha-\frac{3}{5}i$.
δ) Αν $z_1=5+(2\alpha-\beta)i$ και $z_2=\alpha+\beta-4i$ να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε οι z_1,z_2 να είναι: 1) συζυγείς. 2) αντίθετοι.

2. Δείξτε ότι $\forall\nu\in\mathbb{N}$ ισχύουν: 1) $(1+i)^{12\nu}=(1-i)^{12\nu}$.
2) $\frac{(1+i)^{\nu}}{(1-i)^{\nu-2}}=2i^{\nu-1}$. 3) $i^{2\nu}+i^{2\nu+1}+i^{2\nu+2}+i^{2\nu+3}=\frac{1}{i^{2\nu}}+\frac{1}{i^{2\nu+1}}+\frac{1}{i^{2\nu+2}}+\frac{1}{i^{2\nu+3}}$.

3. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί $z=x+yi:\ x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0$ που ικανοποιούν τις σχέσεις: $z\bar{z}=1$ και $z+\bar{z}=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{Z}$.

4. Δείξτε ότι: 1) $\frac{z+i}{z-i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in I$. 2) $\frac{z+i}{z-i}\in I\Leftrightarrow |z|=1$.
3) $z=\frac{z_1-\bar{z}_1 z_2}{1-z_2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z_1\in\mathbb{R}\ \vee\ |z_2|=1$.

5. α) Αν $f(x)=x^3-1$ και $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ δείξτε ότι: $f(z)=f(\bar{z})=0$.
β) Αν $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε ο $z=4-i$ να είναι ρίζα του $f(x)$.
γ) Δείξτε ότι οι $1+2i$ και $1-2i$ είναι ρίζες του $f(x)=x^3-4x^2+9x-10$.

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:
1) $\bar{z}+z^2=0$. 2) $3+2z+(-\bar{z})=0$. 3) $i(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})=2i-3$.

7. Όμοια οι εξισώσεις: 1) $|z|+z=2+i$. 2) $|z|^2+z-\bar{z}=3+2i$.
3) $|z|^2-2iz+\alpha=0:\ \alpha\geq 0$. 4) $|z|^2-2iz=-2\alpha-2\alpha i:\ \alpha\in\mathbb{R}_+$ (ΘΕΜΑ '77).

8. Όμοια οι εξισώσεις: 1) $z^2+3iz+4=0$. 2) $z^2-(3+i)z+4+3i=0$.

9. Να λυθεί η εξίσωση: $\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)+1=0$.

10. Αν η εξίσωση $\Phi(x)=x^3-(3-i)x^2+(2-3i)x+2i=0$ έχει ρίζα το $-i$, να βρεθούν οι άλλες ρίζες της.

11. Να προσδιοριστούν τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε ο $z=\sqrt{2}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$ να είναι ρίζα της εξίσωσης: $x^4+2x^3+3x^2+\lambda x+\mu=0$.
Στη συνέχεια να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της.

12. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z που πληρούν τις σχέσεις:
1) $|z|=5$. 2) $|z-2|=3$. 3) $Re(z)=1$.
4) $Im(z)=3$. 5) $Re(z)>2$ 6) $Im(z)>2$.
7) $Arg\, z=\pi/4$. 8) $|z-3-i|=4$.

12'. Αν $w=\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $z\neq\alpha i$, δείξτε ότι: (ΘΕΜΑ '91)
α) $w\in I\Leftrightarrow z\in I$ β) $|w|=1\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

(13) Αν $z=x+yi : x,y\in\mathbb{R}$ δείξτε ότι $\frac{(|x|+|y|)\sqrt{2}}{2} \le |z| \le |x|+|y|$.

(14) Αν $|z-2|=|z-4|$ δείξτε ότι: $Re(z)=3$.

(15) Αν $z\in\mathbb{C}$ δείξτε ότι: $|z|+|z+3| \ge |z+1|+|z+2|$.

(16) Δείξτε ότι:

1) $|z|=1 \Rightarrow w=\frac{z-1}{z+1}\in I : z\in\mathbb{C}-\{\pm 1\}$. 2) $z=\frac{1+3i}{-1+3i} \Rightarrow w=\frac{z^2+1}{z^2-1}\in I$.

(17) Αν $\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}=\lambda : \lambda\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι συνευθειακά σημεία.

(18) Να βρείτε το μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει:
$$|z-2|=|z-3|=|z-i|$$

(19) Αν $\left|\frac{z-4}{z-1}\right|=2$ δείξτε ότι: $|z|=2$.

(20) Σε γεωμετρική πρόοδο με μιγαδικούς όρους, ο πέμπτος όρος της διαιρούμενος με το πρώτο δίνει $\sqrt{3}-i$. Να βρεθεί ο λόγος λ της προόδου.

(21) Αν ζ είναι μια μιγαδική κυβική ρίζα του 1, δείξτε ότι:

1) $\zeta^4+\zeta^8+\zeta^{-1}\cdot\zeta^{-2}=0$. 2) $(1+\zeta)(1+2\zeta)(1+3\zeta)(1+5\zeta)=21$.

3) $-\zeta(1+\zeta)(1+\zeta^2)(1+\zeta^3)(1+\zeta^4)=2$. 4) $(1-\zeta)(1-\zeta^2)(1-\zeta^4)(1-\zeta^5)=9$.

(22) Δείξτε ότι: $\frac{1+(συνθ+iημθ)^4}{1+(συνθ-iημθ)^4}=συν4θ+iημ4θ \; : \; θ\neq\pm\frac{\pi}{4}$.

(23) Στο $\mathbb{C}$ δίνεται η εξίσωση: $z^2-2az+1=0$ με $a=συνθ+iημθ$.

1) Δείξτε ότι οι ρίζες της z_1, z_2 έχουν μέτρα αντίστροφους αριθμούς και τα ορίσματά τους έχουν άθροισμα $2κπ$, $κ\in\mathbb{Z}$.

2) Να βρεθεί ο $θ$ ώστε οι ρίζες να είναι:

α) Πραγματικές. β) Φανταστικές.

(24) Θεωρούμε το μιγαδικό $z=x+yi$ με $y\neq 0$ και $x,y\in\mathbb{R}$. Έστω $w=\frac{z^2}{z-1}$. Δείξτε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός τότε και μόνο τότε αν το σημείο (x,y) ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOy ανήκει σε μια υπερβολή από την οποία έχουν εξαιρεθεί οι κορυφές της (ΘΕΜΑ '84).

(25) Δείξτε ότι η εξίσωση: $(1+iz)^\nu=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, δεν έχει ρίζες πραγματικές. (ΘΕΜΑ εξετάσεων).

(26) α) Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση: $z^2+(\sqrt{3}-7i)z-4(3+i\sqrt{3})=0$ (1).

β) Έστω $z_1\in I$ και $z_2\in\mathbb{C}$ οι ρίζες της (1). Δείξτε ότι: $z_2-2i=w\cdot(z_1-2i)$ όπου $w=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

γ) Να καθορισθεί το είδος του τριγώνου AM_1M_2, όπου A η εικόνα του $2i$ και M_1, M_2 οι εικόνες των ριζών z_1 και z_2 της (1).

(27) Έστω $z=(2x-3)+(2y-1)i$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) που είναι τέτοια ώστε $|2z-1+3i|=3$, είναι κύκλος. Στη συνέχεια βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου αυτού και την ακτίνα του. (ΘΕΜΑ '86)