ΑΛΓΕΒΡΑ

1) ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

2) ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

3) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ.

4) ΠΡΟΟΔΟΙ.

5) ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

Θεσ/νίκη '90

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

<u>Γενικά</u>: Έστω $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ με $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu+1$ πραγματικοί αριθμοί και η συνάρτηση P με

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0 .$$

Το $P(x)$ λέγεται πολυώνυμο ν βαθμού με συντελεστές $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ και η συνάρτηση P λέγεται πολυωνυμική συνάρτηση ν βαθμού.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Αν P είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση ν βαθμού, τότε η εξίσωση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ λέγεται <u>πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού</u>.

- Κάθε $\rho\in\mathbb{R}$ στο οποίο η τιμή της πολυωνυμικής συνάρτησης P είναι μηδέν λέγεται ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x)=0$, ή και ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

▼<u>ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ.</u>

1) Το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$ <u>έχει παράγοντα το $x-\rho$</u>, αν και μόνο αν <u>το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$</u>.

- Αυτό σημαίνει ότι το $x-\rho\,/\,P(x)$, δηλαδή $P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)$ όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\rho$. $(\Delta=\delta\cdot\pi)$
- Ταυτότης διαίρεσης: $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$ ($\Delta=\delta\cdot\pi$ σε τέλεια διαίρεση).
- Σε διαίρεση πολυωνύμων ισχύουν:
  α) Βαθμός υπολοίπου $<$ βαθμό διαιρέτη.
  β) Βαθμός πηλίκου $=$ Βαθμό Διαιρετέου $-$ βαθμό διαιρέτη.
- Το υπόλοιπο της διαίρεσης πολυωνύμου $P(x)$ με το α' βάθμιο διώνυμο $x-\rho$ είναι το $P(\rho)$. Δηλαδή <u>$\upsilon=P(\rho)$</u>.
- Το υ και το $\pi(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ με $x-\rho$ βρίσκονται (εκτός από τη διαίρεση) και με το <u>σχήμα Horner</u>.

2) Αν η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα τον ακέραιο αριθμό $\kappa\neq 0$, τότε ο κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. Δηλαδή: $P(\kappa)=0 \wedge \kappa\in\mathbb{Z}^* \Longrightarrow \kappa/\alpha_0$. $(\kappa=0 \Leftrightarrow \alpha_0=0)$

3) Αν η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα το ανάγωγο κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ $(\kappa\neq 0)$, τότε ο κ είναι διαιρέτης του α_0 και ο λ διαιρέτης του α_ν. Δηλαδή: $P\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)=0 \wedge \frac{\kappa}{\lambda}$ ανάγωγο $\Longrightarrow \kappa/\alpha_0 \wedge \lambda/\alpha_\nu$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να βρεθεί με το σχήμα Horner η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)=-2x^5+3x^4-2x^2+5x-1$ για $x=-3$ και το πηλίκο της διαίρεσής του με $x+3$.

(2) Να βρεθεί το υ και το π(x) της διαίρεσης του $P(x)=-2x^4+3x^2+2x+1$ με $x+2$. Όμοια, για τη διαίρεση $(x^5+32):(x+2)$.

Θυμήσου Αξιοσημείωτα πηλίκα (Άλγεβρα Α' Λυκείου Φυλ.7).

(3) α) Δείξτε ότι ο αριθμός 8^9-1 διαιρείται με το 7.
β) " " " " $11^{11}-1$ " " " 10.
γ) " " " " $11^{11}+1$ " " " 12.
δ) " " " " $15^{10}-1$ " " " 14 και με το 16.
ε) " " " " $5^{2\nu+1}-1$ " " " 4, $(\nu\in\mathbb{N})$.

(4) Να βρεθούν οι ρητές ρίζες των εξισώσεων: $x^\nu-1=0$, $x^\nu+1=0$ $(\nu\in\mathbb{N}^*)$.

(5) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ δεν έχει ρητές ρίζες.

(6) Να βρεθούν οι ακέραιοι κ, ώστε η εξίσωση $x^3-x^2+\kappa x+4=0$ να έχει μια τουλάχιστον ρητή ρίζα.

(7) Να εξεταστεί αν η εξίσωση $x^\nu-2\lambda x+2=0$ όπου $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\geq 2$ και $\lambda\in\mathbb{Z}$ έχει ρητές ρίζες.

(8) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
1) x^7-1. 2) x^7+1. 3) x^5-32. 4) x^4y^8-1. 5) x^3+y^6. 6) x^6-64.

(9) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-15x^3+34x^2-15x-18$. Να βρεθεί η αριθμητική του τιμή για $x=2$ και να γραφεί σαν γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου παράγοντα και ενός πολυωνύμου.

(10) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\lambda x^2-20x+6$. Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε:
1) το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-3$.
2) το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ να είναι το 2.

(11) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+\alpha x+\beta$ να έχει παράγοντες τους $x+2$ και $x-4$.

(12) Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το $P(x)=\kappa x^3-\lambda x^2-5x+4$ διαιρούμενο με $x+2$ και $x-1$ να δίνει αντίστοιχα υπόλοιπα 6 και 2.

(13) Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το $P(x)=x^3-\lambda x^2+\kappa x+2$ διαιρούμενο με $x-2$ και $x+3$ να δίνει αντίστοιχα υπόλοιπα 8 και -52.

(14) Πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x+2$ δίνει υπόλοιπο 3 και με $x-1$ δίνει υπόλοιπο 2.
Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x+2)\cdot(x-1)$.

(15) Δείξτε ότι το $P(x)=x^6-6x^4+x^2+24x-20$ διαιρείται με το πολυώνυμο x^2-3x+2. (Υπόδειξη: Επειδή $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, αρκεί $P(1)=0 \wedge P(2)=0$)

(16) Πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 12 και διαιρούμενο με $x-3$ αφήνει υπόλοιπο 17. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)(x-3)$.

(17) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^2-2x+1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+3$
(Υπόδειξη: Επειδή $f(x)=(x-1)^2$, αρκεί $P(1)=0 \wedge \pi(1)=0$, όπου $\pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$. Όμοια, δουλεύω αν ζητείται να δείξω ότι το 1 είναι διπλή ρίζα του $P(x)$.)

(18) Δείξτε ότι το $\varphi(x)=x^2-4x+4$ είναι παράγοντας του $P(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$.

(19) Δείξτε ότι το $P(x)=2x^3-11x^2+12x+9$ έχει διπλή ρίζα το 3.

(20) Δείξτε ότι η εξίσωση $3x^3-4x^2-x+2$ έχει διπλή ρίζα το 1 και να βρείτε την άλλη ρίζα της.

(21) Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο
$P(x)=2x^4+(\kappa+2\lambda)x^3+(2\kappa-\lambda)x^2-5x-2\kappa$, να έχει ρίζες το 1 και το -2.
Στη συνέχεια να βρεθούν οι άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$.

(22) Δείξτε ότι το x^2-1 διαιρεί το $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha$ αν και μόνο αν $\alpha+\beta=0$.

(23) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=\alpha x^4+\beta x^3-18x^2+15x-5$ δια του $\varphi(x)=x^2-3x+2$ είναι $\upsilon(x)=4x-7$, να βρείτε τα α,β.

(24) Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το:
1) $x^2-\alpha^2$ είναι $\upsilon(x)=\dfrac{f(\alpha)-f(-\alpha)}{2\alpha}x+\dfrac{f(\alpha)+f(-\alpha)}{2}$.
2) $(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι $\upsilon(x)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}x+\dfrac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta}$. (αν $\alpha\neq\beta$).

(25) Αν το $P(x)=x^4+3x^3-7x+6$ διαιρείται με το $(x-1)^2$, δείξτε ότι: $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=0$.
$P(x)=x^3+\alpha x+\beta$ $(x-\kappa)^2$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Είναι της μορφής $P(x)=0$, όπου $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$.
Επιλύονται ανάλογα με το βαθμό ν του $P(x)$, ως εξής:

Α' ΒΑΘΜΟΥ → $\alpha x+\beta=0$. (Βλέπε Άλγεβρα Α' Λυκείου, Φυλ. 27).

Β' ΒΑΘΜΟΥ → $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. (,, ,, ,, ,, , ,, ,,).

▼ **ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ Β' ΒΑΘΜΟΥ** → $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$, με $\nu\geq 3$.

Διακρίνονται σε:

1) **Εξισώσεις που αναλύονται σε γινόμενο α' βαθμίων ή β' βαθμίων παραγόντων.** (Βλέπε Άλγεβρα Α' Λυκείου, Φυλ. 28).

2) **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΙ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ.**

• Με τη βοηθητική αντικατάσταση επιδιώκουμε να μειώσουμε το βαθμό της εξίσωσης, οπότε απλοποιείται η λύση της.

παράδειγμα

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24 \Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$$

Θέτω $x^2+5x+4=y$ (1) οπότε $x^2+5x+6=y+2$ κι έχω:

$$y(y+2)=24 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y^2+2y-24=0 \\ \Delta=4+96=100=10^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-2\pm10}{2} \begin{cases} 4 \\ -6\end{cases}$$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow \begin{cases} x^2+5x+\cancel{4}=\cancel{4} \Leftrightarrow x(x+5)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0} \vee \boxed{x=-5} \\ x^2+5x+4=-6 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2+5x+10=0 \\ \Delta=-15<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}\notin\mathbb{R}.\end{cases}$$

• **ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΣ** → $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$: $\alpha\neq0$

Θέτω $x^2=y$ (1) κι έχω:

$\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ ← Επιλύουσα → Έχει εν γένει 2 ρίζες $\begin{cases} y_1 \\ y_2\end{cases}$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow \begin{cases} x^2=y_1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y_1} \ (\text{αν } y_1\geq0). \text{ Αν } y_1<0 \text{ είναι αδύνατη.} \\ x^2=y_2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y_2} \ (\text{αν } y_2\geq0). \ \text{,,} \ y_2<0 \ \text{,,} \ \text{,,} .\end{cases}$$

• Όμοια με τη διτετράγωνη, λύνονται και οι **ΤΡΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ** → $\alpha x^{2\kappa}+\beta x^\kappa+\gamma=0$.

Δηλαδή, θέτω $x^\kappa=y$ (1) κι έχω: $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0 \begin{cases} y_1 \\ y_2\end{cases}$ εν γένει.

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow \left.\begin{cases} x^\kappa=y_1 \\ x^\kappa=y_2\end{cases}\right\} \rightarrow$$ **Διώνυμες** (Βλέπε Άλγεβρα Α' Λυκείου, Φυλ. 28).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

26 Να λυθούν οι εξισώσεις ; ανισώσεις

1) $(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x+3)+24=0$.

2) $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504$. 3) $x(2x+1)(x-2)(2x-3)=63$.

4) $x^4-4x^3+16x\geq 16$. 5) $x^3+x^2-4x-4=3(x-2)(x+1)$.

6) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15=0$. 7) $(x+1)^2(2x-3)-(x^2-1)^2\leq 0$

8) $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)+2=0$. 9) $3x^4+10x^2+3=0$

10) $x^4-5x^2+4=0$. 11) $x^4-6x^2+8=0$. 12) $2x^4-7x^2+3\geq 0$.

13) $x^6+7x^3-8=0$. 14) $x^8-4x^4+3=0$. 15) $x^{10}-5x^5+6=0$.

16) $(x-1)^6-9(x-1)^3+8=0$. 17) $(x^2-5x+2)^4-3(x^2-5x+2)^2=4$.

18) $x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2=0$.

19) $\alpha^2x^4-\alpha^4x^2=x^2-\alpha^2$.

Διερεύνηση διτετραγώνου

Το είδος των ριζών της διτετράγωνης εξίσωσης, εξαρτάται από το πρόσημο των ριζών της επιλύουσας, δηλαδή από τα P, Δ, S.

P	Δ	S	Ρίζες επιλύουσας $y_{1,2}$	Ρίζες διτετραγώνου $x_{1,2,3,4}$.
$-$			$y_1\in\mathbb{R}_+^*$, $y_2\in\mathbb{R}_-^*$	$x_{1,2}\in\mathbb{R}$, $x_{3,4}\notin\mathbb{R}$ (2 ρίζες άνισες).
0		$+$	$y_1\in\mathbb{R}_+^*$, $y_2=0$	$x_{1,2}\in\mathbb{R}$, $x_3=x_4=0$ (3 ρίζες η μια διπλή)
		$-$	$y_1=0$, $y_2\in\mathbb{R}_-^*$	$x_1=x_2=0$, $x_{3,4}\notin\mathbb{R}$ (1 ρίζα διπλή $=0$)
$+$	$+$	$+$	$y_{1,2}\in\mathbb{R}_+^*$	$x_{1,2,3,4}\in\mathbb{R}$ (4 ρίζες άνισες)
		$-$	$y_{1,2}\in\mathbb{R}_-^*$	$x_{1,2,3,4}\notin\mathbb{R}$ (Καμμία ρίζα)
	0	$+$	$y_1=y_2\in\mathbb{R}_+^*$	$x_1=x_3\in\mathbb{R}$, $x_2=x_4\in\mathbb{R}$ (2 ρίζες διπλές)
		$-$	$y_1=y_2\in\mathbb{R}_-^*$	$x_{1,2,3,4}\notin\mathbb{R}$ (Καμμία ρίζα)
	$-$		$y_{1,2}\notin\mathbb{R}$	$x_{1,2,3,4}\notin\mathbb{R}$ (,, ,,)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

27 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^4-2(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^4+\beta^4=0$ έχει 4 ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

28 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^4-(\lambda+1)x^2+\lambda-2=0$ να έχει 4 ρίζες άνισες. $(\alpha,\beta\neq 0)$

29 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}-\{1\}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda-1)x^4-4x^2+\lambda+2=0$ να έχει: 1) 2 διπλές ρίζες. 2) 4 ρίζες διαφορετικές ανά δύο 3) 2 ρίζες άνισες. 4) 1 ρίζα διπλή ίση με 0.

3) ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η εξίσωση $P(x)=0$ λέγεται αντίστροφη αν και μόνο αν για κάθε ρίζα της $\rho\neq 0$, υπάρχει και η ρίζα $\frac{1}{\rho}$ σ' αυτήν.

- Οι αριθμοί $+1, -1$ έχουν αντίστροφο τον εαυτό τους.
- Σε κάθε αντίστροφη εξίσωση, οι συντελεστές των όρων της που ισαπέχουν από τους άκρους όρους είναι

ή ΙΣΟΙ ή ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ

ΕΠΙΛΥΣΗ

Α' βαθμού

- Ίσοι: $\alpha x+\alpha=0 \Leftrightarrow x=-1$
- Αντίθετοι: $\alpha x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=1$

Β' βαθμού

- Ίσοι: $\alpha x^2+\beta x+\alpha=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αντίθετοι: $\alpha x^2-\alpha=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Γ' βαθμού

Ίσοι: $\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha(x^3+1)+\beta x(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\alpha(x+1)(x^2-x+1)+\beta x(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(\alpha x^2-\alpha x+\alpha+\beta x)=0 \Leftrightarrow$

$x+1=0 \Leftrightarrow x_1=-1$

ή

$\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0 \Leftrightarrow x_{2,3}$ αντίστροφες

Αντίθετοι: $\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=0$

$\Leftrightarrow \alpha(x^3-1)+\beta x(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\alpha(x-1)(x^2+x+1)+\beta x(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(\alpha x^2+\alpha x+\alpha+\beta x)=0 \Leftrightarrow$

$x-1=0 \Leftrightarrow x_1=1$

ή

$\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0 \Leftrightarrow x_{2,3}$ αντίστροφες.

Δ' ΒΑΘΜΟΥ

Ίσοι: $\boxed{\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0}$

Διαιρώ με $x^2\neq 0$ (διότι αν $x=0 \Rightarrow \alpha=0$ Άτοπο)

$\alpha x^2+\beta x+\gamma+\dfrac{\beta}{x}+\dfrac{\alpha}{x^2}=0 \Leftrightarrow$

$\alpha\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\gamma=0$

Θέτω $x+\dfrac{1}{x}=\omega$ (1) οπότε

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\dfrac{1}{x}=\omega^2-2$

κι έχω: $\alpha(\omega^2-2)+\beta\omega+\gamma=0 \Leftrightarrow$

$\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma-2\alpha=0$ $\to \omega_1$ ή ω_2 εν γένει

Άρα (1) $\Rightarrow$

$x+\dfrac{1}{x}=\omega_1 \Leftrightarrow x^2-\omega_1x+1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}$

$x+\dfrac{1}{x}=\omega_2 \Leftrightarrow x^2-\omega_2x+1=0 \Leftrightarrow x_{3,4}$

Αντίθετοι: $\boxed{\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0.}$

$\Leftrightarrow \alpha(x^4-1)+\beta x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$\alpha(x^2-1)(x^2+1)+\beta x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(\alpha x^2+\alpha+\beta x)=0 \Leftrightarrow$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 1$

ή

$\alpha x^2+\beta x+\alpha=0 \Leftrightarrow x_{3,4}$ αντίστροφες.

ΠΡΟΣΟΧΗ: η εξίσωση $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2-\beta x+\alpha=0$ δεν είναι αντίστροφη, αλλά λύνεται με παρόμοιο τρόπο. Δηλαδή θέτω $x-\dfrac{1}{x}=\omega$ οπότε $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\dfrac{1}{x}=\omega^2+2$.

Ε' ΒΑΘΜΟΥ

- Ίσοι: $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$
- Αντίθετοι: $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3-\gamma x^2-\beta x-\alpha=0$.

Λύνεται όπως η Γ' βαθμού, οπότε καταλήγω σε μια α' βάθμια και σε μια αντίστροφη Δ' βαθμού.

ΣΤ' ΒΑΘΜΟΥ

- Ίσοι: $\alpha x^6+\beta x^5+\gamma x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$
- Αντίθετοι: $\alpha x^6+\beta x^5+\gamma x^4-\gamma x^2-\beta x-\alpha=0$.

Λύνονται όπως η Δ' βαθμού. (Στην 1η διαιρώ με $x^3\neq 0$....)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $2x^3-3x^2-3x+2=0$
2) $3x^3+7x^2-7x-3=0$
3) $x^3-\frac{37}{12}x^2+\frac{37}{12}x-1=0$
4) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$
5) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$
6) $3x^4+2x^3-34x^2+2x+3=0$
7) $2x^4-5x^3+7x^2-5x+2=0$
8) $x^4-6x^3+6x-1=0$
9) $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$
10) $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$

31 Όμοια, οι εξισώσεις:

1) $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1=0$
2) $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$
3) $5x^4-16x^3+2x^2+16x+5=0$

προσοχή: δεν είναι αντίστροφες.

4) $2(x^4+1)=(x+1)^4$.
5) $x^3+\frac{1}{x^3}=6\left(x+\frac{1}{x}\right)$.
6) $9(x^4-x^3+x^2-x+1)=13(x^2-x+1)^2$.

32 Να λυθεί η εξίσωση: $(\beta-2)x^3-(2\alpha+1)x^2+(2\beta-1)x-\alpha+1=0$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$, αν ξέρουμε ότι έχει ρίζα το 2 και είναι αντίστροφη.

33 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=27x^3-15\lambda x^2+5\lambda^2x-\lambda^3$ να είναι πολλαπλάσιο του $3x-1$.

34 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το $P(x)=16x^4+48\lambda x^3+40\lambda^2x^2+12\lambda^3x+\lambda^4$ να είναι διαιρετό με το $2x+1$.

35 Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)=3x^4-5\alpha x^3+2\alpha^2x^2-3\alpha^3x+\alpha^4$ και $f(x)=2x^3+3\alpha x^2+4\alpha^2x+5\alpha^3$ όταν διαιρούνται με το $x-1$ να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

36 Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ μετατρέπεται σε διτετράγωνη αν θέσουμε $x=\frac{1+y}{1-y}$: $y\neq 1$. Στη συνέχεια, να λυθεί η: $4x^4-9x^3-26x^2-9x+4=0$.

4) ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ που έχουν μια τουλάχιστον ρίζα $\rho \in \mathbb{Q}$ (ρητή), και ακέραιους συντελεστές $\longrightarrow$ $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ με $a_i \in \mathbb{Z}, i=0,1,\dots,\nu$

i) Αν $\boxed{a_\nu = 1}$

Παράδειγμα

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$ (1).

$\Delta_4 = \{\pm1, \pm2, \pm4\}$.

$P(1) = 1-4+5-4+4 = 2 \neq 0$

$P(-1) = 1+4+5+4+4 \neq 0$

$P(2) = 16-32+20-8+4 = 0 \Rightarrow$

το 2 είναι ρίζα του $P(x)$.

1	-4	5	-4	4	2
	2	-4	2	-4	
1	-2	1	-2	$\boxed{0}$ $\rightarrow$ υπόλοιπο	

$\pi(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

$(1) \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x^3-2x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\rightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\rightarrow x^3-2x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2)+(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ x^2+1=0 \Leftrightarrow x_{1,2} \notin \mathbb{R} \end{cases}$

Άρα η (1) έχει μια ρίζα διπλή τη $x=2$.

ΕΠΙΛΥΣΗ.

- Βρίσκω τους διαιρέτες του σταθερού όρου a_0. Δηλαδή το σύνολο $\Delta_{a_0} = \{\pm1, \dots, \pm a_0\}$.
- Βρίσκω με αντικατάσταση ή με σχήμα Horner ποιός από αυτούς είναι ρίζα του $P(x)$ και έστω ρ μια ρίζα, τότε το $x-\rho / P(x)$ και άρα το $P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x) = 0$ (1)
- Βρίσκω το πηλίκο $\pi(x)$ με σχήμα Horner, οπότε $(1) \Rightarrow \begin{cases} x-\rho=0 \Leftrightarrow x=\rho \\ \vee \\ \pi(x)=0, \quad (2) \end{cases}$
- Η εξίσωση (2) είναι μια από τις προηγούμενες μορφές, διαφορετικά συνεχίζω όπως με την $P(x)=0$.

ii) Αν $\boxed{a_\nu \neq 1}$

Παράδειγμα

$3x^3 - 22x^2 + 48x - 32 = 0$ (1)

$\Delta_{32} = \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm32\}$, $\Delta_3 = \{\pm1, \pm3\}$.

$A = \{\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm2, \pm\frac{2}{3}, \pm4, \pm\frac{4}{3}, \pm8, \pm\frac{8}{3}, \pm16, \pm\frac{16}{3}, \pm32, \pm\frac{32}{3}\}$.

$P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$, $P(2) = 0 \Rightarrow 2$ ρίζα

3	-22	48	-32
	6	-32	32
3	-16	16	$\boxed{0}$

$\pi(x) = 3x^2 - 16x + 16$.

- Βρίσκω τους διαιρέτες του a_0 και » » » a_ν
- Παίρνω το σύνολο $A = \left\{\frac{a}{b} \text{ όπου } a \in \Delta_{a_0}, b \in \Delta_{a_\nu}\right\}$
- Συνεχίζω όπως στη (i) περίπτωση με τους αριθμούς του συνόλου A.

$(1) \Leftrightarrow (x-2)(3x^2-16x+16) = 0 \Leftrightarrow$

$\rightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$\rightarrow 3x^2-16x+16 = 0$, $\Delta = 256-192 = 64$ $\Rightarrow x_{2,3} = \frac{16 \pm 8}{6} = \begin{cases} 4. \\ 4/3. \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(37) Να λυθούν οι εξισώσεις / ανισώσεις

1) $x^3-x^2-18=0$.
2) $x^3-6x^2+11x-6\geq 0$.
3) $x^4+x^3-31x^2-25x+150=0$.
4) $x^4-6x^3+30x-25=0$.
5) $x^4-5x^3+4x^2+6x-4=0$.
6) $x^4-3x^3+12x-16\geq 0$.
7) $2x^3-5x^2+x+2=0$.
8) $6x^3-7x^2+1>0$.
9) $2x^3-9x^2+7x+6\leq 0$.
10) $3x^4-4x^3+1\neq 0$ (<)
11) $6x^4+13x^3-2x^2-7x+2\leq 0$.
12) $3x^4-8x^3-35x^2-4x+20=0$.

(38) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-4\alpha x-20$ να έχει παράγοντες τους $x-1$, $x-2$. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

(39) Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί κ, λ ώστε η εξίσωση $x^3-\kappa x^2+\lambda x-6=0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 3. Μετά να λυθεί η εξίσωση.

(40) Δίνεται η εξίσωση $2x^3+(\lambda-4)x^2-5x+1-\lambda=0$
Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε αυτή να έχει ρίζα το 2 και μετά να βρεθούν οι άλλες ρίζες της.

(41) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+\alpha x^2+(3\alpha+\beta)x+2\beta$ να διαιρείται με $x+1$ και $x-2$. Μετά να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

(42) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3-5x^2+\frac{6}{\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε το $P(x)$ να διαιρείται με $\lambda x-1$. Στη συνέχεια για τις τιμές του λ που θα βρείτε να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

(43) Πολυώνυμο $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -2, ενώ τα υπόλοιπα των διαιρέσεών του με $x+1$ και $x-2$ είναι αντίστοιχα 6 και 12.
Να βρεθεί η άλλη ρίζα του $P(x)$.

(44) Να λυθεί η εξίσωση:

$$(2x^2-x-2)^3-2\cdot(2x^2-x+3)^2+9\cdot(2x^2-x+2)+26=0.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

1) ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ (ΡΗΤΕΣ) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Βλέπε Άλγεβρα Α' Λυκείου Φυλ. 29)

Παραδείγματα

α) $\dfrac{x+6}{x^2-3x+2}+\dfrac{1-3x}{x^2-4x+3}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3x+5}{x^2-5x+6} \Leftrightarrow$

$\dfrac{x+6}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1-3x}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3x+5}{(x-2)(x-3)}$ Ε.Κ.Π. $=2(x-1)(x-2)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow$

$x\neq 1 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow$

$2(x-3)(x+6)+2(1-3x)(x-2)=3(x-1)(x-2)(x-3)-2(3x+5)(x-1)$ Π.Ο.: $A=\mathbb{R}-\{1,2,3\}$

$\Leftrightarrow \dots\dots \Leftrightarrow 3x^3-20x^2+9x+32=0$ (1). ← Πολυωνυμική.

$\Delta_{32}=\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16,\pm32\}$
$\Delta_3=\{\pm1,\pm3\}$ $\Big\} \to \left\{\pm1,\pm\frac{1}{3},\pm2,\pm\frac{2}{3},\dots,\pm32,\pm\frac{32}{3}\right\}$

$P(1)\neq 0,\ P(-1)=0 \Rightarrow -1$ ρίζα

3	−20	9	32	−1
	−3	23	−32	
3	−23	32	$\boxed{0}$	

$\pi(x)=3x^2-23x+32$.

(1) $\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-23x+32)=0 \Leftrightarrow$

- $x+1=0 \Leftrightarrow x_1=-1$ δεκτή
- ή $3x^2-23x+32=0$, $\Delta=145 \Rightarrow x_{2,3}=\dfrac{23\pm\sqrt{145}}{6}$ δεκτές.

β) $\dfrac{x}{x^2+2}=\dfrac{x^2-2}{2x}$ Ε.Κ.Π. $=2x(x^2+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}^*$.

$2x^2=(x^2-2)(x^2+2) \Leftrightarrow 2x^2=x^4-4 \Leftrightarrow x^4-2x^2-4=0$ ← Διτετράγωνος.

Θέτω $x^2=y$ (1) και έχω: $y^2-2y-4=0$, $\Delta=20 \Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{2\pm2\sqrt5}{2}=1\pm\sqrt5$

(1) $\Leftrightarrow$
- $x^2=1+\sqrt5 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1+\sqrt5}$ δεκτές
- $x^2=1-\sqrt5<0$ αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

45 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{19x}{12}$. 2) $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{10}{9}-\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$. 3) $\dfrac{(1+x)^4}{1+x^4}=2$.

4) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3}=\dfrac{x^2+x+1}{x}$. 5) $\dfrac{x^2-3x+2}{2}+\dfrac{2}{x^2-x}=\dfrac{3x^2-1}{x-1}$

6) $x^2-x=18-\dfrac{72}{x^2-x}$. 7) $\dfrac{x}{x^3+x^2}+\dfrac{x+1}{x^3+4x^2+5x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}-\dfrac{2x}{x^3+3x^2}=1$.

8) $2\cdot\left(\dfrac{3x+2}{x-3}\right)^4-5\cdot\left(\dfrac{3x+2}{x-3}\right)^2+3=0$ 9) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+8=0$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ.

1) ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ (ΡΗΤΕΣ) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ. (Βλέπε Άλγεβρα Α' Λυκείου Φυλ 29).

Παραδείγματα

α) $\dfrac{x+6}{x^2-3x+2}+\dfrac{1-3x}{x^2-4x+3}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3x+5}{x^2-5x+6} \Leftrightarrow$

$\dfrac{x+6}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1-3x}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3x+5}{(x-2)(x-3)}$ Ε.Κ.Π. $=2(x-1)(x-2)(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow$ $x\neq 1 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow$

$2(x-3)(x+6)+2(1-3x)(x-2)=3(x-1)(x-2)(x-3)-2(3x+5)(x-1)$ Π.Ο. : $A=\mathbb{R}-\{1,2,3\}$

$\Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow 3x^3-20x^2+9x+32=0$ (1). ← Πολυωνυμική.

$\left.\begin{array}{l}\Delta_{32}=\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8,\pm16,\pm32\}\\ \Delta_3=\{\pm1,\pm3\}\end{array}\right\} \to \left\{\pm1,\pm\frac{1}{3},\pm2,\pm\frac{2}{3},\dots,\pm32,\pm\frac{32}{3}\right\}$

$P(1)\neq 0$, $P(-1)=0 \Rightarrow -1$ ρίζα

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -20 & 9 & 32 & -1 \\ & -3 & 23 & -32 & \\ \hline 3 & -23 & 32 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\pi(x)=3x^2-23x+32.$

$(1)\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-23x+32)=0 \Leftrightarrow$

$x+1=0 \Leftrightarrow x_1=-1$ δεκτή

ή $3x^2-23x+32=0$, $\Delta=145$ $\Rightarrow x_{2,3}=\dfrac{23\pm\sqrt{145}}{6}$ δεκτές.

β) $\dfrac{x}{x^2+2}=\dfrac{x^2-2}{2x}$ Ε.Κ.Π $=2x(x^2+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}^*$.

$2x^2=(x^2-2)(x^2+2) \Leftrightarrow 2x^2=x^4-4 \Leftrightarrow x^4-2x^2-4=0$ ← Διτετράγωνος.

Θέτω $x^2=y$ (1) και έχω: $y^2-2y-4=0$, $\Delta=20$ $\Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{5}}{2}=1\pm\sqrt{5}$

$(1)\Leftrightarrow$ $x^2=1+\sqrt{5} \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}$ δεκτές

$x^2=1-\sqrt{5}<0$ αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

45) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{19x}{12}$. 2) $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{10}{9}-\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$. 3) $\dfrac{(1+x)^4}{1+x^4}=2$.

4) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3}=\dfrac{x^2+x+1}{x}$. 5) $\dfrac{x^2-3x+2}{2}+\dfrac{2}{x^2-x}=\dfrac{3x^2-1}{x-1}$

6) $x^2-x=18-\dfrac{72}{x^2-x}$. 7) $\dfrac{x}{x^3+x^2}+\dfrac{x+1}{x^3+4x^2+5x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}-\dfrac{2x}{x^3+3x^2}=1$.

8) $2\cdot\left(\dfrac{3x+2}{x-3}\right)^4-5\cdot\left(\dfrac{3x+2}{x-3}\right)^2+3=0$ 9) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+8=0$.

2) ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

i) Της μορφής: $\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ ή $\sqrt[\nu]{f(x)} = \varphi(x)$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: (Βλέπε Άλγεβρα Α' Λυκείου Φυλ. 32).

Παράδειγμα

$\sqrt{x^2-2x+6}+3=2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+6}=2x-3$. (1) Πρέπει

$$\begin{cases} x^2-2x+6\geq 0, \text{ ισχύει } \forall x\in\mathbb{R} \text{ (διότι } \Delta<0, \alpha>0) \\ 2x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 3/2 \end{cases}$$

$(1)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+6=4x^2-12x+9 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2-10x+3=0 \\ \Delta=100-36=64 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{10\pm 8}{6} \begin{cases} \to 3 \text{ δεκτή.} \quad A=\left[\frac{3}{2},+\infty\right). \\ \to \frac{1}{3}\notin A \text{ απορρίπτεται.} \end{cases}$$

ii) Της μορφής: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{\varphi(x)}=g(x)$ ή $\sqrt{f(x)}+\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{g(x)}$

ΕΠΙΛΥΣΗ:

$\sqrt{f(x)}+\sqrt{\varphi(x)}=g(x) \Leftrightarrow$

$f(x)+2\sqrt{f(x)\cdot\varphi(x)}+\varphi(x)=g^2(x) \Leftrightarrow$

$2\sqrt{f(x)\cdot\varphi(x)}=g^2(x)-f(x)-\varphi(x) \xrightarrow{(i)\text{ μορφή}} *$

Πρέπει: $\left.\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ \varphi(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ g^2(x)-f(x)-\varphi(x)\geq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow A.$

• Όμοια, λύνεται και η άλλη μορφή. (στο * θα είναι $g(x)-f(x)-\varphi(x)\geq 0$)

Παράδειγμα

$\sqrt{x+6}=\sqrt{5(x+2)}-\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{5(x+2)}$ Πρέπει

$x+6+2\sqrt{(x+6)(x+1)}+x+1=5(x+2) \Leftrightarrow$

$2\sqrt{(x+6)(x+1)}=5x+10-2x-7 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+7x+6}=3x+3 \longrightarrow *$

$$* \begin{cases} x+6\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ 5(x+2)\geq 0 \\ 3x+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -6 \\ x\geq -1 \\ x\geq -2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \quad A=[-1,+\infty)$$

$4(x^2+7x+6)=9x^2+18x+9 \Leftrightarrow 5x^2-10x-15=0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-2x-3=0 \\ \Delta=4+12=16 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2} \begin{cases} \to 3 \text{ δεκτή.} \\ \to -1 \text{ » .} \end{cases}$$

• Σε οποιαδήποτε άλλη μορφή, καλύτερα να μη μπαίνουν περιορισμοί, αλλά να γίνεται ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ των ριζών για να βρεθεί ποιές είναι δεκτές και ποιές απορρίπτονται. Φυσικά αυτό, μπορεί να γίνει και στις προηγούμενες μορφές

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

46 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\sqrt{3x^2+2x+1}-13=5x$
2) $x-\sqrt{x^2-7}=7$
3) $x-\sqrt{4-x^2}=1$
4) $x-2\sqrt{x^2+x+3}=-x-2$
5) $13-\sqrt{4x^2+7x-8}=2x$
6) $\sqrt{x^2-2x+1}=2-x$
7) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}=1$
8) $\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}=\sqrt{3x}$
9) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+9}=\sqrt{4-x}$
10) $\sqrt{2x+1}=1-\sqrt{x+1}$

47 Όμοια, οι εξισώσεις:

1) $3x^2-4x+\sqrt{3x^2-4x+6}=0$.
2) $2x^2-7x=3\sqrt{2x^2-7x+7}-3$.
3) $4\sqrt[3]{x}-\dfrac{20}{\sqrt[3]{x}}=11$
4) $\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+2}}=\dfrac{5}{2}$
5) $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}}=\dfrac{13}{6}$

Υπόδειξη

Κάντε κατάλληλη βοηθητική αντικατάσταση.

48 Όμοια, οι εξισώσεις:

1) $\sqrt[3]{13x+1}=x+1$. 2) $\sqrt[3]{x^3+1}-1=x$
3) $\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{x^2-9}$
4) $\sqrt{x-15}+\sqrt{x+17}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-10}$
5) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}-\sqrt{x+11}+\sqrt{x+18}=0$
6) $\dfrac{5}{x+\sqrt{x^2+5}}-\dfrac{5}{x-\sqrt{x^2+5}}=6$. 7) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{4}{x}$
8) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$. 9) $(x+2)\sqrt{x+5}=(x+3)\cdot\sqrt{x+5}$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι.

Θ1 Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $27x^3-15\alpha x^2+5\alpha^2 x-\alpha^3=0$ να έχει ρίζα το $1/3$.
Στη συνέχεια, δείξτε ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει άλλες ρίζες.

Θ2 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο
$P(x)=(\lambda-1)x^5+3\lambda x^4-(\lambda+1)x^3-(\lambda+1)x^2+3\lambda x+\lambda-1$
να έχει παράγοντα το $x-2$.
Μετά, να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

Θ3 Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x)=x^4-\alpha x^3+\beta x^2-39x+2\alpha$ να έχει παράγοντα το x^2-5x+6.
Μετά, να βρεθούν οι ρίζες του $P(x)$.

Θ4 Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο
$P(x)=x^4+(\kappa-\lambda)x^3+2\kappa x^2-5x+4$ να διαιρείται με το $(x-1)^2$.
Μετά, να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

Θ5 Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουν 4 ρίζες οι εξισώσεις:
1) $(\lambda-3)x^4-2(3\lambda-4)x^2+7\lambda-6=0$, $(\lambda\neq 3)$.
2) $(\lambda-1)x^4+(\lambda+1)x^2+\lambda-2=0$, $(\lambda\neq 1)$.

Θ6 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}-\{-1\}$ ώστε η εξίσωση
$(\lambda+1)x^4-2(\lambda-1)x^2+3(\lambda-1)=0$ να έχει:
α) δυο διπλές ρίζες . β) 4 ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

Θ7 Να λυθούν οι εξισώσεις:
1) $2x^{12}-5x^9+3x^6=0$. 2) $(\omega^2-\omega)^2-5(\omega^2-\omega)+6=0$.
3) $x^{10}-26x^7-27x^4=0$. 4) $2x^4-3x^3-2x^2+2x+1=0$.
5) $x^4+\dfrac{16}{x^4}=17$. 6) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=1$.
7) $x^9-x^5+x^4-1=0$. 8) $x^4-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta=0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$
9) $x^6-2x^4+2x^2-1=0$. 10) $x^5+1=0$
11) $4x^4-9x^3-26x^2-9x+4=0$. 12) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}+\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}=\dfrac{5}{2}$
13) $5x^4-16x^3+2x^2+16x+15=0$. 14) $2x^7-5x^4+3x=0$.
15) $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$. 16) $2x^2-15x+5+\sqrt{2x^2-15x+11}=0$.
17) $\sqrt{x^2+x}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-x}}=\dfrac{5}{2}$ 18) $x^{10}-1=0$. 19) $x^8+3=0$.

Θ8 Πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x+1$ δίνει υπόλοιπο -6, διαιρούμενο με $x-2$ δίνει υπόλοιπο 39. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με $(x+1)(x-2)$.

Θ9 Δείξτε ότι: αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, τότε το πολυώνυμο $Q(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ έχει παράγοντα το $x-1$.

Θ10 Το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+x^2-4x+\beta$ έχει ρίζα το 1 και διαιρούμενο με x δίνει υπόλοιπο 1.
Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

Θ11 Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση
$(\alpha+\beta)x^4+(2\alpha-\beta-10)x^3+2x^2-(\alpha-\beta-7)x+6-\alpha=0$
να είναι: i) διτετράγωνη ii) δευτεροβάθμια.
Σε κάθε περίπτωση να λυθεί η εξίσωση για τις τιμές των α,β που θα βρείτε.

Θ12 Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^5-11x^4+43x^3-74x^2+52x-8$ έχει για ρίζα το 2 με πολλαπλότητα 3. (Τριπλή ρίζα).
Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

Θ13 Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+1)x^3-(\alpha^2+5\alpha-5)x^2+(\alpha^2+5\alpha-5)x-(\alpha+1)=0$, με $\alpha\neq-1$.

i) Αν ρ_1,ρ_2,ρ_3 οι ρίζες της και η ρ_2 είναι ανεξάρτητη του α, δείξτε ότι $\rho_2^2=\rho_1\rho_3$.

ii) Να βρεθεί ο α ώστε $\rho_1+\rho_3=2\rho_2$.

iii) Για τις τιμές του α που θα βρείτε, δείξτε ότι η εξίσωση έχει τρείς ρίζες ίσες.

Θ14 α) Δείξτε ότι η παράσταση $A=\dfrac{(x-2)^{2\nu}+(x-1)^{\nu}-1}{x-2}$ είναι πολυώνυμο.

β) Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $P(x)=x^{\nu}-\nu x+\nu-1$

Θ15 Δείξτε ότι:
αν ο αριθμός ρ είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, τότε ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης $\alpha x^2+2\beta x+3\gamma=0$. $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συνάρτηση είναι κάθε διμελής σχέση $f: A \to B$ κατά την οποία κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί σε ένα μόνο $y = f(x) \in B$, δηλαδή κάθε απεικόνιση $f: A \to B$, όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

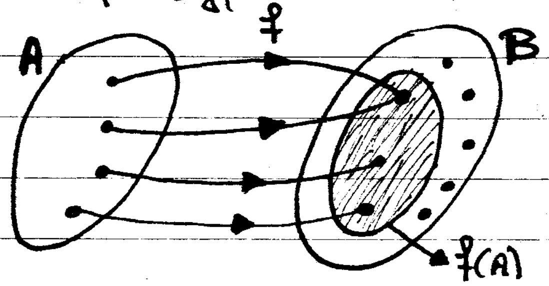
ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια σχέση $f: A \to B$ θα λέγεται συνάρτηση, όταν

- $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

ή • Αντιθετοαντίστροφα: $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

(Θυμήσου, Νόμος Αντιθετοαντιστροφής: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$).

Παράδειγμα



$A \to$ Πεδίο Ορισμού.

$B \to$ Σύνολο Αφίξεως. (• Αν δεν δίνεται παίρνω $B = \mathbb{R}$)

$y = f(x) \to$ Εικόνα του x.

$x \to$ Πρότυπο ή Αρχέτυπο.

$f(A) \to$ Σύνολο εικόνων ή Πεδίο Τιμών.

(• Προφανώς $f(A) \subseteq B$).

▼ ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται:

- "επί", όταν $f(A) = B$
- "ένα προς ένα" ("1-1"), όταν $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

  ή αντιθετοαντίστροφα $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- "1-1 και επί" όταν συμβαίνουν τα δύο προηγούμενα.

↳ Όταν η f είναι "1-1 και επί" τότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$ που είναι επίσης "1-1 και επί".

▼ ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Η $f: A \to B$ λέγεται σταθερή με τιμή c, όταν $\forall x \in A,\ f(x) = c$.
- Η $f: A \to A$,, ταυτοτική στο A, όταν $\forall x \in A,\ f(x) = x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Δείξτε ότι, οι παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις και βρείτε ποιές απ' αυτές είναι "1-1":

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x + \beta$, 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

3) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, 4) $f: \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$

Κάθε συνάρτηση ορίζεται από

1) το πεδίο ορισμού της A (δηλαδή το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές ο x)

2) το τύπο της $y=f(x)$ (δηλαδή τη διμελή σχέση που μας δείχνει την αντιστοιχία των x στα y)

• Όταν **δεν** δίνεται το Π.Ο. τότε παίρνουμε για Π.Ο. A "το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$" για το οποίο ο τύπος $y=f(x)$ της συνάρτησης f έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Αυτό εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης. Έτσι σε:

① ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ $\longrightarrow f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_\nu\in\mathbb{R}$

το $A=\mathbb{R}$ π.χ. η $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\sqrt{2}x^3+5x-1$ έχει Π.Ο. το $\mathbb{R}$.

② ΡΗΤΗ (ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ) $\longrightarrow f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ το $A=\mathbb{R}-\{x/g(x)=0\}$

π.χ. η $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-2}$ έχει $A=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

③ ΑΡΡΗΤΗ $\longrightarrow f(x)=\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ το $A=\{x/\varphi(x)\geq 0\}$

π.χ. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ Πρέπει $x^2-9\geq 0$

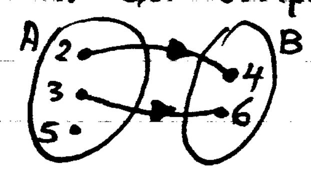
x		-3		3	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

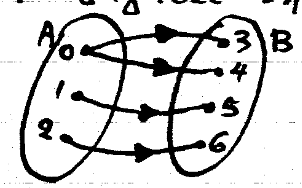
$A=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

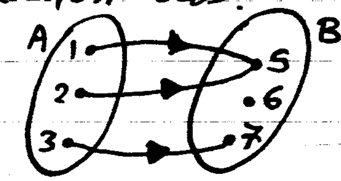
$\varphi(x)=\sqrt[3]{x-1}$. Πρέπει $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \Leftrightarrow A=[1,+\infty)$.

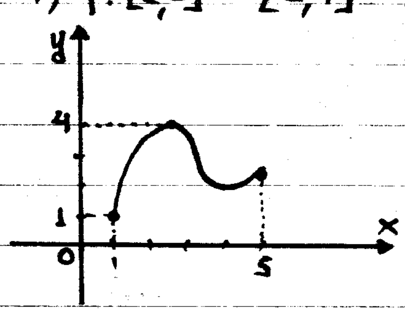
ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

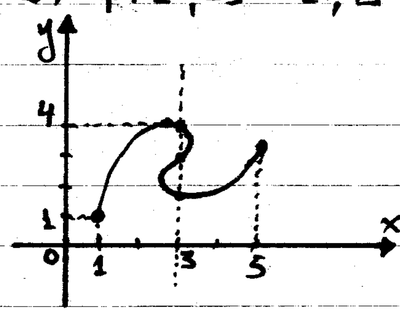
⑨ Εξετάσετε αν τα παρακάτω σχήματα (Βέννια, καρτεσιανά διαγράμματα) είναι ή όχι συναρτήσεις. Εξηγήστε την απάντησή σας.

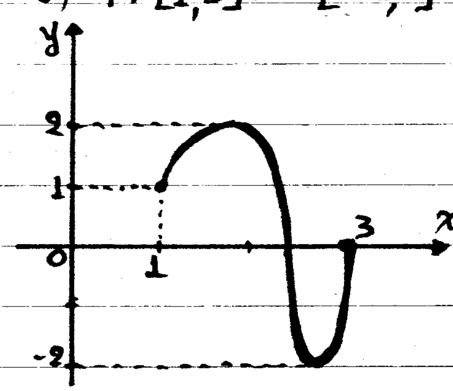
1)


2)


3)


4) $f:[1,5]\to[1,4]$


5) $f:[1,5]\to[1,4]$


6) $f:[1,3]\to[-2,6]$


Σε όσες είναι συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι "1-1" ή "επί".

3 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1) $y=\sqrt{3}x^5-\frac{5}{2}x^2+3$. 2) $y=-\frac{3}{x-1}$. 3) $y=\frac{x-2}{x^2-4}$

4) $y=\frac{3x^2}{x^2-4x}$. 5) $y=\frac{3}{x^2-8x+16}$. 6) $y=\frac{2x^2-3}{x^2+5x+6}$

7) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. 8) $y=\frac{4x}{x^2-x+1}$. 9) $y=\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ ⟷ 10) $y=\frac{x+2}{x-3}$

11) $y=\sqrt{x-2}$. 12) $y=\sqrt{3-x}$. 13) $y=\sqrt[3]{x^2-x-6}$. 14) $y=\sqrt[4]{x^2+3x+1}$

15) $y=\sqrt{x^2+6x+9}$. 16) $y=\sqrt[5]{3x^2+4x+5}$. 17) $y=\sqrt[4]{x-x^3}$

18) $y=\sqrt{x^3+5x^2-6x}$. 19) $y=\sqrt{(x+2)(x-3)}$. 20) $y=\sqrt[6]{x^4-x^3+x-1}$

Σε ΜΙΚΤΗ = Ρητή + Άρρητη κάνουμε συναλήθευση των δυο περιορισμών που προκύπτουν....

παράδειγμα: Στην $y=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-16}$ πρέπει: $\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ x^2-16\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

x		-3		3	
x^2-9	+	0	−	0	+

$\begin{cases} x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty) \\ x\neq\pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow A=(-\infty,-4)\cup(-4,-3]\cup[3,4)\cup(4,+\infty)$

4 Να βρεθεί το Π.Ο. των συναρτήσεων:

1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2-x}}$. 2) $y=\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ ⟷ 3) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$

4) $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$. 5) $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\sqrt[6]{x^2-4}$

6) $y=\sqrt{x^2-4}+\frac{5}{\sqrt[3]{x-1}}$. 7) $y=\sqrt{x+2}-2\sqrt[4]{5-x}$. 8) $y=\sqrt{\frac{2x}{3x-1}}$

Σε συναρτήσεις με ΑΠΟΛΥΤΑ (Βλέπε Άλγεβρα Α' Λυκείου φυλ. 17)

5 Να βρεθεί το Π.Ο. των συναρτήσεων:

1) $y=2|x|-|x-2|+3$. 2) $y=\frac{4}{|x|-2}$. 3) $y=\frac{3x}{|x|+1}$. 4) $y=\frac{x-1}{|x-2|-2}$

5) $y=-\frac{3|x-1|}{|x+4|}$. 6) $y=\sqrt{2-|x|}$. 7) $y=\sqrt{|3x-1|-2}$. 8) $y=\sqrt{|x|+3}$.

9) $y=\sqrt{|x-5|}$. 10) $y=\frac{|x-1|}{|x^2-1|}$. 11) $y=\frac{\sqrt{x}}{|x|}$. 12) $y=\sqrt{\frac{|x|-2}{|x|+1}}$.

ΙΣΟΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ : $f_1 = f_2 \Leftrightarrow A_{f_1} = A_{f_2} = A$ και $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A$.
(Σημαίνει ότι θα έχουν και το ίδιο γράφημα, $B_1 = B_2$)

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ – ΕΠΕΚΤΑΣΗ :
Έστω $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ και $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$.
Η f_1 λέγεται περιορισμός της f_2 στο A_1, όταν $A_1 \subset A_2$ και $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A_1$ (Η f_2 λέγεται επέκταση της f_1 στο A_2).

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ $g_1 : A_2 \to \mathbb{R}$.

1) ΑΘΡΟΙΣΜΑ $f_1 + f_2$: $A = A_1 \cap A_2$ και $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
2) ΑΝΤΙΘΕΤΗ $-f_1$ της f_1 : $A = A_1$ και $(-f_1)(x) = -f_1(x)$.
3) ΔΙΑΦΟΡΑ $f_1 - f_2$: $A = A_1 \cap A_2$ και $(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x)$.
4) ΓΙΝΟΜΕΝΟ λf_1 $(\lambda \in \mathbb{R})$: $A = A_1$ και $(\lambda f_1)(x) = \lambda \cdot f_1(x)$.
5) ΓΙΝΟΜΕΝΟ $f_1 f_2$: $A = A_1 \cap A_2$ και $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$.
6) ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ $\frac{1}{f_1}$ της f_1 : $A_1' = \{x \in A_1 : f_1(x) \neq 0\}$ και $\left(\frac{1}{f_1}\right)(x) = \frac{1}{f_1(x)}$.
7) ΠΗΛΙΚΟ $\frac{f_1}{f_2} = f_1 \cdot \frac{1}{f_2}$: $A = A_1 \cap A_2'$ όπου $A_2' = \{x \in A_2 : f_2(x) \neq 0\}$ και $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

- ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι, εν γένει, $\frac{1}{f} \neq f^{-1}$ (όπου f^{-1} η αντίστροφη της f) διότι η $\frac{1}{f}$ ορίζεται πάντα στο A' (εκτός αν $f(x) = 0, \forall x \in A$), ενώ η f^{-1} ορίζεται μόνο όταν η f είναι "1-1 και επί".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(6) Αν $f_1 : f_1(x) = |x-2| - |x+5| + 2$ και $f_2 : f_2(x) = \begin{cases} 9, & \text{αν } x < -5 \\ -2x-1, & \text{αν } -5 \leq x < 2 \\ -5, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$. Δείξτε ότι $f_1 = f_2$.

(7) Αν $f : f(x) = \frac{(x-2)(x^2-3x-10)}{x^2-4}$ και $g : g(x) = x-5$, δείξτε ότι η f είναι περιορισμός της g στο A_f.

(8) Αν f, g, h είναι συναρτήσεις του F_A (δηλαδή με κοινό πεδίο ορισμού A) δείξτε ότι: 1) $f = g \Leftrightarrow f + h = g + h$. 2) $f = g \Rightarrow f \cdot h = g \cdot h$
3) $\kappa(f+g) = \kappa f + \kappa g$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

(9) Αν $f_1 : f_1(x) = \frac{3x^2+4}{x}$ και $f_2 : f_2(x) = \frac{-2x^2-4}{x}$, δείξτε ότι η $f_1 + f_2$ είναι ταυτοτική.

(10) Αν f_1, f_2 σταθερές συναρτήσεις στο F_A δείξτε ότι και οι συναρτήσεις $f_1 \pm f_2$, $f_1 f_2$ και f_1 / f_2 είναι επίσης σταθερές.

▼ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση f ορισμένη στο A, λέγεται:

1) Γνησίως αύξουσα $\Uparrow$, όταν $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
2) Αύξουσα $\uparrow$, „ „ : „ $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
3) Γνησίως φθίνουσα $\Downarrow$, „ „ : „ $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
4) Φθίνουσα $\downarrow$, „ „ : „ $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
5) Σταθερή ($\uparrow$ και $\downarrow$), „ „ : „ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

$\updownarrow\!\rightarrow$ **Μονότονη**, όταν είναι οτιδήποτε από τα παραπάνω. Ειδικά αν είναι $\Uparrow$ ή $\Downarrow$ λέγεται γνησίως μονότονη.

- Αν ο περιορισμός της f στο $A_1 \subset A$ είναι μονότονη συνάρτηση τότε η f είναι μονότονη στο A_1.
- ΠΡΟΣΟΧΗ: Μια συνάρτηση f μπορεί να έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο υποσύνολα A_1 και A_2 του Π.Ο. της, αλλά "όχι κατ' ανάγκη" και στο $A_1 \cup A_2$. π.χ. η $y = \frac{1}{x}$ (γιατί;)
- Αν $f \Uparrow$ στο A, τότε $-f \Downarrow$ στο A.

$\rightarrow$ Το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης καθορίζεται ισοδύναμα και από το πρόσημο του λόγου μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} : x_1 \neq x_2$

Έτσι, η f είναι στο $A_1 \subseteq A$

1) $\Uparrow$ όταν $\lambda > 0$ $(\forall x_1, x_2 \in A_1)$. 3) $\Downarrow$ όταν $\lambda < 0$ $(\forall x_1, x_2 \in A_1)$
2) $\uparrow$ „ $\lambda \geq 0$ („). 4) $\downarrow$ „ $\lambda \leq 0$ („)
5) Σταθερή ($\uparrow$ και $\downarrow$) όταν $\lambda = 0$ $(\forall x_1, x_2 \in A_1)$. (Γιατί;)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(11) Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:
1) $y = x^2$ στο $[0, +\infty)$. 2) $y = x^2 - 5x + 6$ στο $(-\infty, \frac{5}{2}]$
3) $y = \frac{x-1}{x+3}$ στο $(3, +\infty)$.

(12) Όμοια, για τις παρακάτω συναρτήσεις στο Π.Ο. τους:
1) $y = \frac{1}{x}$. 2) $y = -\frac{2}{x}$. 3) $y = 2x - 3$. 4) $y = 2x^3$
5) $y = \frac{2-x}{x+2}$. 6) $y = |4x - 5| + 6$. 7) $y = 4x^3 + 5$
8) $y = \sqrt{x} + 2$. 9) $y = \frac{x-1}{|x-1|}$. 10) $y = \frac{2}{|x|}$.

(13) Δείξτε ότι η $f : f(x) = \frac{1}{x^2+5}$ είναι $\Uparrow$ στο $(-\infty, 0]$ και $\Downarrow$ στο $[0, +\infty)$.

(14) Δείξτε ότι η $\varphi : \varphi(x) = \frac{1}{4x^3} + 2$ είναι $\Downarrow$ στο $\mathbb{R}_+^*$.

▼ ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ – ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

Μια συνάρτηση f με Π.Ο. A λέγεται:

1) **ΑΡΤΙΑ** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A,\ -x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

• Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

2) **ΠΕΡΙΤΤΗ** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A,\ -x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

• Η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή $O(0,0)$.

$\updownarrow\rightarrow$ **Βασική προϋπόθεση** ώστε μια συνάρτηση να είναι άρτια ή περιττή είναι το Π.Ο. της A να είναι συμμετρικό διάστημα ως προς το 0.
π.χ. της μορφής $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $(-\kappa, \kappa)$, $[-\kappa, \kappa]$, $(-\kappa, -\lambda] \cup [\lambda, \kappa)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει η 1η συνθήκη: $\forall x \in A,\ -x \in A$.

3) **ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ** $\Leftrightarrow$ $\exists T \in \mathbb{R}^*: \forall x \in A,\ x+T \in A$ και $f(x+T) = f(x)$.

▼ ΒΑΣΙΚΕΣ ▼

ΑΡΤΙΕΣ	ΠΕΡΙΤΤΕΣ	ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ
$y = c$ (σταθερή)	$y = \alpha x^{2\kappa+1}$ (π.χ. οι $y = x$, $y = \alpha x$)	$y = \eta\mu x$ με $T = 2\pi$.
$y = \alpha x^2 + \gamma$	$y = \eta\mu x$.	$y = \sigma\upsilon\nu x$,, ,,
$y = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$	$y = \varepsilon\varphi x$.	$y = \varepsilon\varphi x$,, $T = \pi$.
$y = \sigma\upsilon\nu x$	$y = \sigma\varphi x$.	$y = \sigma\varphi x$,, ,,
$y = \lvert x \rvert$	$y = \frac{\alpha}{x}$.	$\hookrightarrow$ Γιατί;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15 Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές;

1) $y = |x-4| + |x+4|$.
2) $y = x^4 - x^2$.
3) $y = x^3 + x$.
4) $y = \frac{1}{x^3} + \sigma\varphi x$.
5) $y = 3x + \eta\mu^3 x$.
6) $y = 2x^4 - 3x^2 + 5$.
7) $y = x^4 + \sigma\upsilon\nu x$.
8) $y = 4x^3 + 5\eta\mu x$.
9) $y = 4x^4 - 3\sigma\upsilon\nu^3 x$.
10) $y = \frac{5x^5 - 4x^3}{x^4 + 3}$.
11) $y = \frac{3x^4}{x^2 + 2}$
12) $y = \frac{3x|x|}{2|x| + 1}$
13) $y = |x| - 3$
14) $y = \sqrt{1 - x^2}$

16 Αν f άρτια ή περιττή, δείξτε ότι η $g: g(x) = [f(x)]^2$ είναι άρτια.

17 Αν f, g άρτιες στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι και οι $h = f + g$ και $\varphi = 4f + 5g$ είναι άρτιες.

18 Δείξτε ότι η $f: f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x}$ έχει περίοδο 2π.

19 Να βρεθεί η περίοδος των συναρτήσεων: 1) $y = \eta\mu 7x$. 2) $y = \varepsilon\varphi \frac{5x}{2}$.

20 Δείξτε ότι η $f: f(x) = \sigma\varphi(x^2)$ δεν είναι περιοδική.

$\hookrightarrow$ Για τη λύση των 19-20 βλέπε Φυλ. τριγωνομετρικές εξισώσεις....

ΜΕΛΕΤΗ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. $\boxed{y=\alpha x+\beta}$: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\leftrightarrow$ Ομοπαραλληλική

• Πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$. • Πεδίο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$

• Μονοτονία: Εξαρτάται από το α (διότι $\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dots=\alpha$)

Αν $\alpha>0 \Leftrightarrow f\uparrow$.

Αν $\alpha<0 \Leftrightarrow f\downarrow$. Αν $\alpha=0 \Leftrightarrow f$ σταθερή $(y=\beta)$

• Γραφική παράσταση: Παριστάνει ευθεία (ε).

Σημεία τομής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι τα $\left(-\frac{\beta}{\alpha},0\right)$, $(0,\beta)$ αντίστοιχα.

• Ειδικές Περιπτώσεις:

• Αν $\beta=0 \Leftrightarrow \underline{y=\alpha x}$ ← Γραμμική. Διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ και είναι περιττή.

• Αν $\alpha=0 \Leftrightarrow \underline{y=\beta}$ ← Είναι $//x'x$ από το σημείο $(0,\beta)$ και είναι σταθερή.

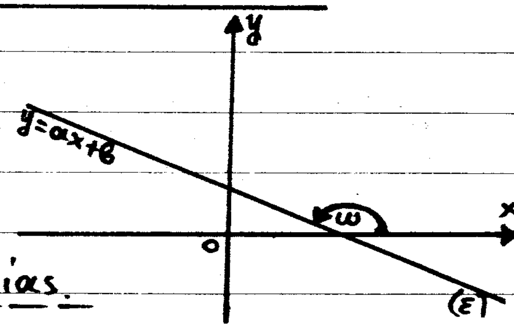
• Αν $\alpha=\beta=0 \Leftrightarrow \underline{y=0}$ ← Είναι ο άξονας $x'x$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ευθείες, αλλά όχι συναρτήσεις, παριστάνουν και οι εξισώσεις:

$\underline{x=c}$ ← Είναι $//y'y$ από το σημείο $(c,0)$.

Ειδικά η $\underline{x=0}$ είναι ο άξονας $y'y$.

▼ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ



Αν ω είναι η θετική κυρτή γωνία που σχηματίζει ο Ox με μια ευθεία (ε) $\left(0\le\omega<\pi \wedge \omega\ne\frac{\pi}{2}\right)$, τότε η εφω καθορίζει πλήρως την διεύθυνση της (ε) και λέγεται συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας.

• Αποδεικνύεται ότι εφω $=\alpha$.

Έτσι, για τις ευθείες (ε_1): $y=\alpha_1x+\beta_1$, (ε_2): $y=\alpha_2x+\beta_2$ έχουμε ότι:

1) $\varepsilon_1//\varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2$. (Αν $\varepsilon_1\equiv\varepsilon_2$ τότε $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$)

2) $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\alpha_2=-1$.

▼ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (max – min).

Έστω f συνάρτηση με Π.Ο. Α. Θα λέμε ότι η f έχει

• μέγιστο (max) στο $x_0\in A$ όταν $\forall x\in A$, $f(x)\le f(x_0)$. Το $\max=(x_0,f(x_0))$.

• ελάχιστο (min) ,, ,, ,, ,, , $f(x)\ge f(x_0)$. Το $\min=(x_0,f(x_0))$.

Προφανώς, αν $f\uparrow$ για $x\le x_0$ και $\downarrow$ για $x\ge x_0$, τότε έχει max στο x_0.

Όμοια, αν $f\downarrow$,, ,, ,, $\uparrow$,, ,, ,, ,, min ,, ,,.

↔ Η συνάρτηση $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha\ne0$, δεν έχει ακρότατα. (γιατί;)

2. $\boxed{y=\alpha x^2+\beta x+\gamma}$: $\alpha\in\mathbb{R}^*$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

- Πεδίο Ορισμού $A=\mathbb{R}$.
- Πεδίο Τιμών: Εξαρτάται από το α $\begin{cases}\alpha>0 \Rightarrow f(A)=\left[-\frac{\Delta}{4\alpha},+\infty\right) \\ \alpha<0 \Rightarrow f(A)=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4\alpha}\right]\end{cases}$

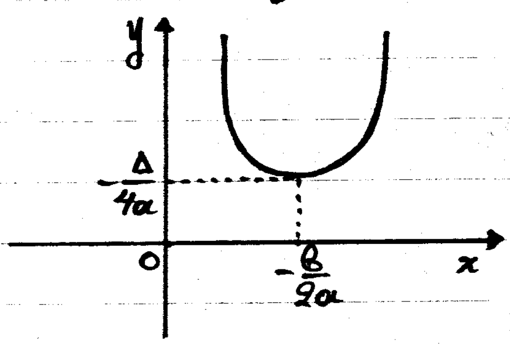
- Μονοτονία: Εξαρτάται από το α — Ακρότατα

Αν $\alpha>0 \Rightarrow \begin{cases}\text{στο } \left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right) \text{ είναι } \downarrow \\ \text{στο } \left(-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right) \text{ είναι } \uparrow\end{cases} \rightarrow min=\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

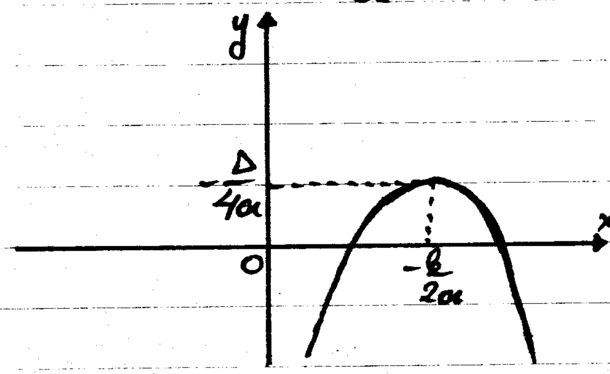
Αν $\alpha<0 \Rightarrow \begin{cases}\text{στο } \left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right) \text{ είναι } \uparrow \\ \text{'' } \left(-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right) \text{ είναι } \downarrow\end{cases} \rightarrow max=\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

- Γραφική παράσταση: Παριστάνει παραβολή (c), συμμετρική ως προς την ευθεία $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

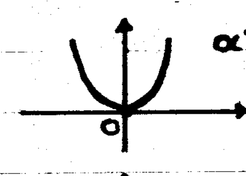
$\alpha>0$

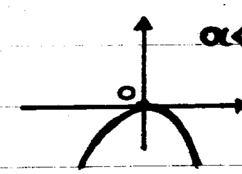


$\alpha<0$

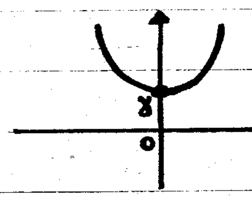


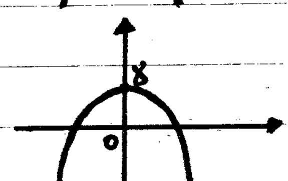
- Ειδικές Περιπτώσεις:
- Αν $\beta=\gamma=0 \Leftrightarrow \underline{y=\alpha x^2}$



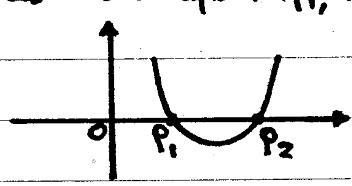


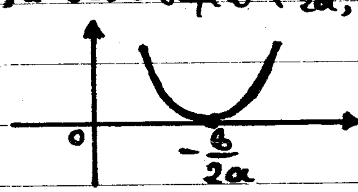
- Αν $\beta=0 \Leftrightarrow \underline{y=\alpha x^2+\gamma}$

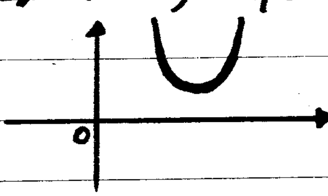




Σημεία τομής με τους άξονες:
με τον $y'y$ είναι το $(0,\gamma)$, ενώ με τον $x'x$ εξαρτάται από τη Δ.
1) $\Delta>0 \Rightarrow$ 2 σημεία $(\rho_1,0),(\rho_2,0)$. 2) $\Delta=0 \Rightarrow$ 1 σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},0\right)$. 3) $\Delta<0 \Rightarrow \nexists$ σημεία.







ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21 Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

1) $y = 3x - 2$. 2) $y = -2x + 4$. 3) $y = \frac{1}{2}x$.

4) $y = |2x - 1|$. 5) $y = |2 - x| + x$. 6) $y = |x-1| + |x-2|$

7) $y = \frac{|x|}{x}$. 8) $y = \begin{cases} |x-1| + x, & x \leq 0 \\ |x-2| - x, & x > 0 \end{cases}$

22 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες:

1) $y = \frac{\lambda x + 7}{5}$, $y = \frac{2(\lambda - 1)x + 9}{3}$ να είναι παράλληλες.

2) $y = 7 - (\lambda + 3)x$, $y = 3 + \frac{(1-\lambda)x}{4}$ " " κάθετες.

23 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $y = (\lambda - 1)x + \lambda - 2$, $y = (3\lambda - 7)x - 2\lambda + 5$ να είναι //. Μετά να βρεθεί ευθεία (ε) κάθετη στις δύο προηγούμενες που να διέρχεται από το σημείο $(-1, 1)$.

24 Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \frac{\mu - 2}{\mu - 1}x + 3\mu - 2$ να είναι:

1) // προς τον άξονα $x'x$. 2) // με την ευθεία $y = 4x + 3$

3) κάθετη στην ευθεία $y = -2x + 5$.

25 Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = \frac{(2\mu - 1)x + 3\mu - 2}{\mu + 1}$ να διέρχεται: → απλοποιώ στη μορφή $ax + b = y$

1) από την αρχή των αξόνων 2) από το σημείο $(-1, 2)$.

26 Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x) = |x - 2|$.

1) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να γίνει η γραφική παράσταση.

2) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η γραφική της παράσταση.

3) Να βρεθεί το ελάχιστο της f.

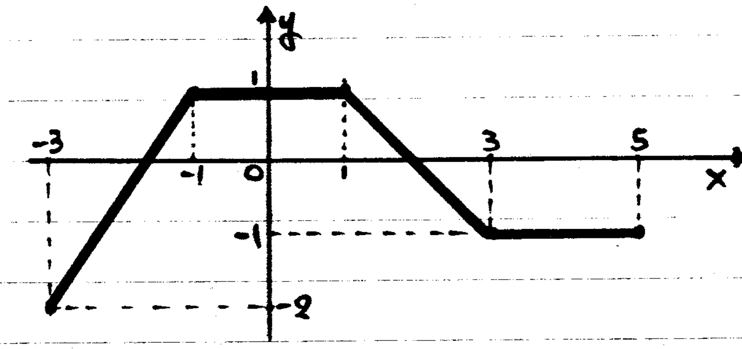
27 Από τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f_1: f_1(x) = |x-1| + |x-3|$

$f_2: f_2(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{αν } x \neq 3 \\ 0, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$ να βρεθεί το πεδίο τιμών τους.

να βρω τα πάντα

(28) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases} \alpha x+1, & \text{αν } x\leq 0 \\ (\beta-1)x-1, & \text{αν } x>0 \end{cases}$.
Αν $f(-1)=-4$ και διέρχεται από το σημείο $(3,5)$ να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να γίνει η γραφική παράσταση.

(29) Από το διπλανό διάγραμμα μιας συνάρτησης f, να βρεθούν το A, το $f(A)$, η μονοτονία και ο τύπος της f.



(30) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
1) $y=x^2-4x+3$. 2) $y=x^2-4$. 3) $y=-2x^2+3x$

(31) Όμοια, να μελετηθούν οι συναρτήσεις:
1) $y=x^2+|3x-2|$. 2) $y=x^2-|x^2-4|$. 3) $y=|x^2-5x+6|$
4) $y=x^2-2|x|$. 5) $y=|x^2-1|$. 6) $y=|x^2-3x-4|$. 7) $y=|x^2-4|x||$

(32) Δίνονται η παραβολή (c): $y=\frac{x^2}{2}-x-1$ και η ευθεία (ε): $y=\lambda x-3$. Για ποιές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η (ε) τέμνει την (c) σε δύο, ένα ή κανένα σημείο.

(33) Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια των παραβολών
$f_\lambda : f_\lambda(x)=(\lambda+2)x^2-2\lambda x+1 \quad (\lambda\neq -2)$.
Να βρείτε για ποιές τιμές του λ
1) α) Οι f_λ τέμνουν τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία
β) » » εφάπτονται στον » ».
γ) » » δεν τέμνουν τον » ».
2) α) » » τέμνουν τον $x'x$ σε δύο σημεία που βρίσκονται στον ίδιο ημιάξονα του $x'x$.
β) Οι f_λ τέμνουν τον $x'x$ σε δύο σημεία που βρίσκονται εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων.

34) Δίνεται η οικογένεια των παραβολών
$f_\lambda : f_\lambda(x) = (\lambda-1)x^2 - \lambda x + 2 \qquad \lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.
Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής της οικογένειας αυτής, που έχει:
1) μέγιστο για $x=3$. 2) ελάχιστο το $y=3$.

35) Δίνεται η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Να βρεθούν τα α, β, γ αν το διάγραμμα (c) αυτής διέρχεται από το σημείο $M(2,5)$ και έχει min το σημείο $(1,0)$.

36) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ η οικογένεια
$f_\lambda : f_\lambda(x) = (\lambda+1)x^2 - (2\lambda+1)x + 2\lambda - 1$
1) Εφάπτεται του $x'x$. 2) Εφάπτεται της ευθείας $y = x+2$.

37) Αν $f_\lambda : f_\lambda(x) = x^2 - (\lambda-2)x + 3 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ μια οικογένεια παραβολών. 1) Δείξτε ότι όλες οι f_λ διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.
2) Ποιές από τις f_λ εφάπτονται της ευθείας (ε): $y = 2x$.

3. $\boxed{y = \frac{\alpha}{x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

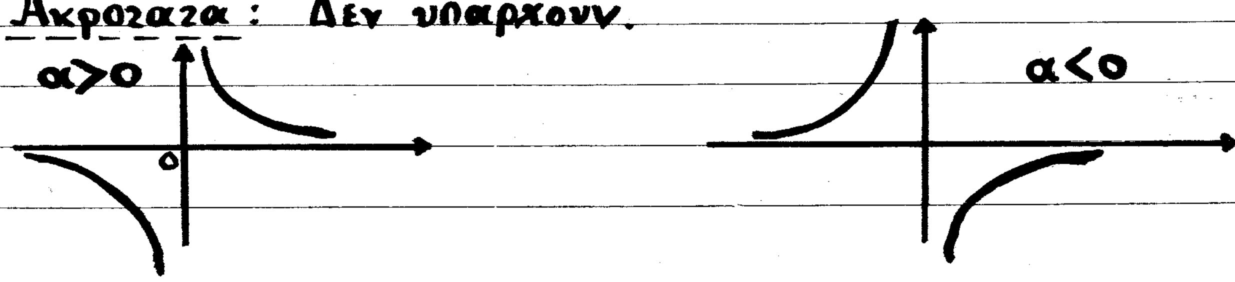
- Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}^*$. • Πεδίο τιμών $f(A) = \mathbb{R}^*$.
- Μονοτονία: Εξαρτάται από το α $\left(\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \ldots = \frac{-\alpha}{x_1 x_2}\right)$

Αν $\alpha > 0 \Leftrightarrow f \downarrow$ στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
Αν $\alpha < 0 \Leftrightarrow f \uparrow$,, ,, ,, ,,

- Γραφική παράσταση: Παριστάνει Υπερβολή (c) (2 κλάδοι) συμμετρική ως πρός την αρχή $O(0,0)$. (διότι είναι περιττή).

Ασύμπτωτες: Οι άξονες $x'x$ $(y=0)$ και $y'y$ $(x=0)$

- Ακρότατα: Δεν υπάρχουν.



4. $\boxed{y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, $\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}^*$.

- Πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\}$.
- Πεδίο τιμών $f(A)=\mathbb{R}-\{+\frac{\alpha}{\gamma}\}$.
- Μονοτονία: Εξαρτάται από την ορίζουσα $D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$

$\left(\text{διότι } \lambda=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\cdots\cdots=\dfrac{D}{(\gamma x_1+\delta)(\gamma x_2+\delta)}=\dfrac{D/\gamma^2}{(x_1+\frac{\delta}{\gamma})(x_2+\frac{\delta}{\gamma})}\right)$

Αν $D>0 \Leftrightarrow f \uparrow$ στα διαστήματα $(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma})$, $(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty)$.
Αν $D<0 \Leftrightarrow f \downarrow$,, ,, ,, ,,

- Γραφική παράσταση: Παριστάνει Υπερβολή (c) (2 κλάδοι) συμμετρική ως προς το σημείο $(X,\Psi)=(-\frac{\delta}{\gamma},+\frac{\alpha}{\gamma})$ που τη βρίσκω ως εξής:

Κάνω τη διαίρεση
και επειδή $\Delta=\delta\pi+\upsilon$
έχω $\frac{\Delta}{\delta}=\pi+\frac{\upsilon}{\delta}$

$$\begin{array}{r|l} \alpha x+\beta & \gamma x+\delta \\ \cline{2-2} -\alpha x-\frac{\alpha\delta}{\gamma} & \frac{\alpha}{\gamma} \\ \hline \beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma} & \end{array}$$

κι άρα: $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma x+\delta} \Leftrightarrow y-\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma x+\delta} \Leftrightarrow$

$y-\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}}{x+\frac{\delta}{\gamma}}$. Θέτω $\Psi=y-\frac{\alpha}{\gamma}$, $X=x+\frac{\delta}{\gamma}$, $A=\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}$

οπότε $\Psi=\dfrac{A}{X}$ ← 3η Μορφή.

Ασύμπτωτες: Οι ευθείες $y=\frac{\alpha}{\gamma}$ (για $\Psi=0$)
και $x=-\frac{\delta}{\gamma}$ (για $X=0$)

- Ακρότατα: Δεν υπάρχουν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

38 Να μελετηθούν και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1) $y=\frac{2}{x}$. 2) $y=-\frac{3}{x}$. 3) $y=\frac{x+2}{3x-1}$. 4) $y=\frac{-2x+1}{x-2}$

ΜΕΛΕΤΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

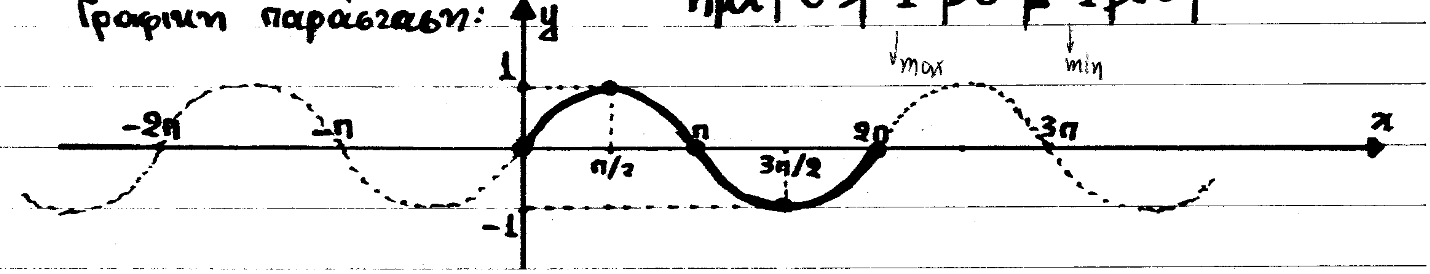
▼ $\boxed{y=\eta\mu x}$ $A=\mathbb{R}$, $f(A)=[-1,1]$.

Είναι περιττή ($\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$) και περιοδική με $T=2\pi$

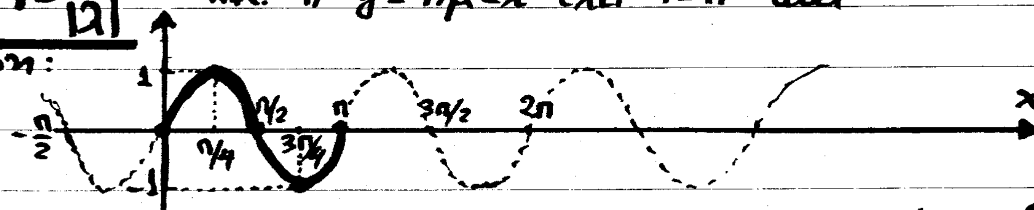
Μονοτονία στο $[0,2\pi]$:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	...
$\eta\mu x$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0	...
		max		min		

Γραφική παράσταση:

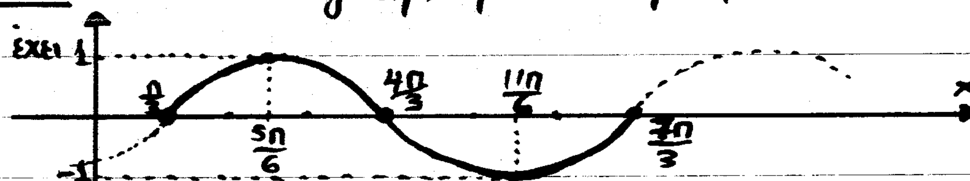


● Η $y=\eta\mu\lambda x$ έχει $T=\frac{2\pi}{|\lambda|}$ π.χ. η $y=\eta\mu 2x$ έχει $T=\pi$ και γραφική παράσταση:



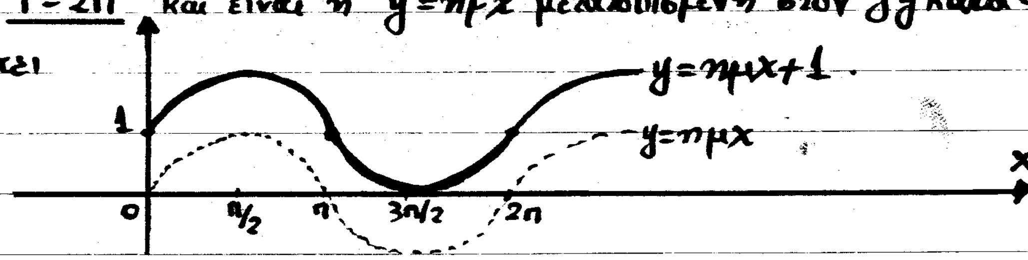
● Η $y=\eta\mu(x+\theta)$ έχει $T=2\pi$ και είναι η $y=\eta\mu x$ μετατοπισμένη στον $x'x$ κατά θ.

π.χ. η $y=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ έχει γραφική παράσταση:



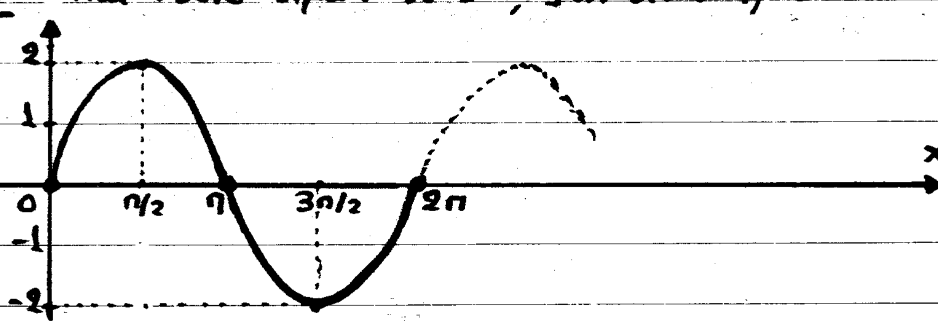
● Η $y=\eta\mu x+\alpha$ έχει $T=2\pi$ και είναι η $y=\eta\mu x$ μετατοπισμένη στον $y'y$ κατά α

π.χ. η $y=\eta\mu x+1$, έχει γραφική παράσταση:



● Η $y=\alpha\eta\mu x$ έχει $T=2\pi$ και πεδίο τιμών το $[-\alpha,\alpha]$ αν $\alpha>0$ ή το $[\alpha,-\alpha]$ αν $\alpha<0$.

π.χ. η $y=2\eta\mu x$ έχει γραφική παράσταση: με πεδίο τιμών $[-2,2]$.



Εφαρμογή: Να γίνει η γραφική παράσταση της $y=-3\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

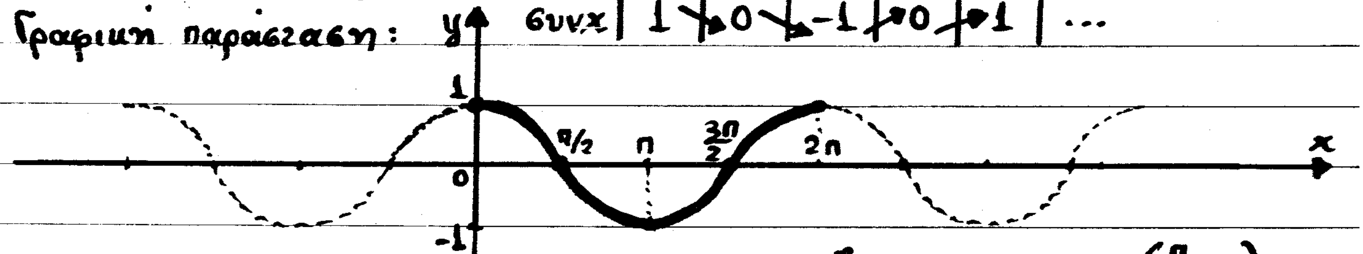
▼ $\boxed{y=\sigma\upsilon\nu x}$ $A=\mathbb{R}$, $f(A)=[-1,1]$

Είναι άρτια ($\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$) και περιοδική με $T=2\pi$.

Μονοτονία στο $[0,2\pi]$:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	...
$\sigma\upsilon\nu x$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1	...

Γραφική παράσταση:



• Η $y=\sigma\upsilon\nu x$ μπορεί να προκύψει από τη $y=\eta\mu x$, διότι $\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

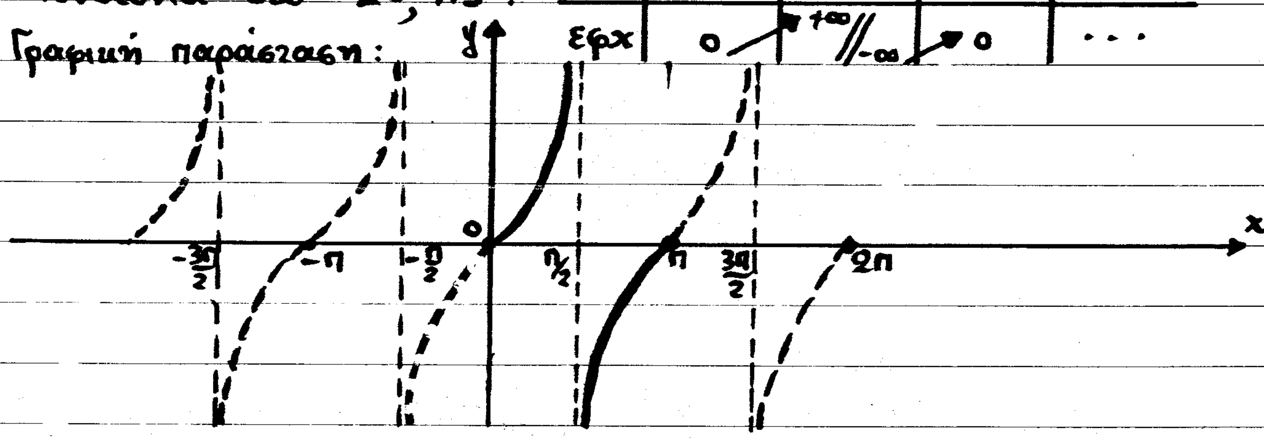
▼ $\boxed{y=\varepsilon\varphi x}$ $A=\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$, $f(A)=\mathbb{R}$

Είναι περιττή ($\varepsilon\varphi(-x)=-\varepsilon\varphi x$) και περιοδική με $T=\pi$.

Μονοτονία στο $[0,\pi]$:

x	0	$\pi/2$	π	...
$\varepsilon\varphi x$	0 ↗	$+\infty$ // $-\infty$ ↗	0	...

Γραφική παράσταση:



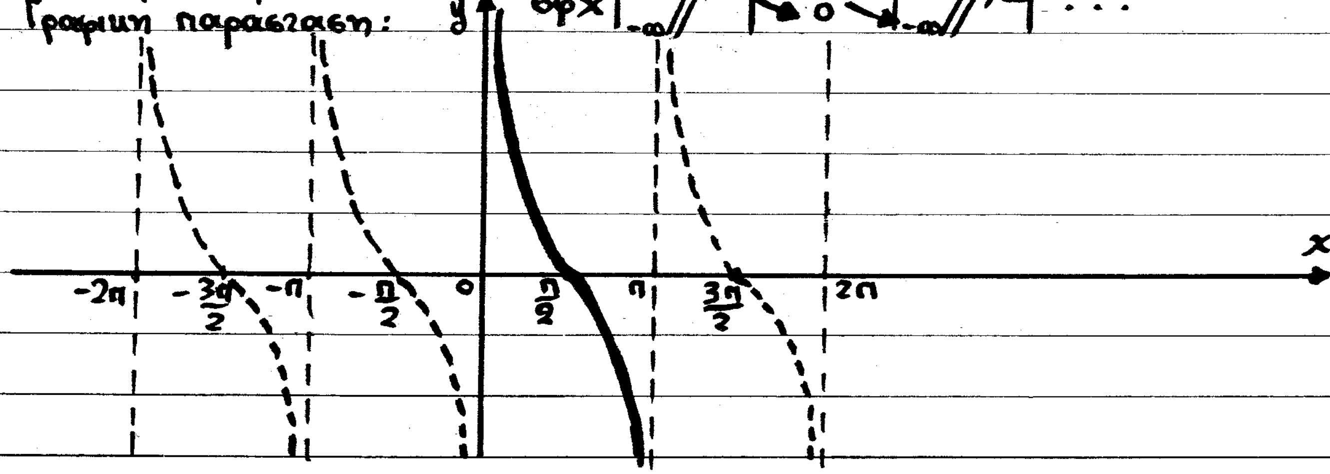
▼ $\boxed{y=\sigma\varphi x}$ $A=\mathbb{R}-\{\kappa\pi\}$, $f(A)=\mathbb{R}$.

Είναι περιττή ($\sigma\varphi(-x)=-\sigma\varphi x$) και περιοδική με $T=\pi$.

Μονοτονία στο $[0,\pi]$:

x	0	$\pi/2$	π	...
$\sigma\varphi x$	$-\infty$ // $+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$ // $+\infty$	...

Γραφική παράσταση:



▼ ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ⟶ $f(x)=0$.

α΄ τρόπος:

Θέτω $y=f(x)$, βρίσκω τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$ και βλέπω πού τέμνει τον άξονα $x'x$ (Δηλαδή την ευθεία $y=0$). Οι τετμημένες των σημείων τομής είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

β΄ τρόπος: Βλέπε § 2.26 Β. – εφαρμογές 1-2.

▼ ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ ⟶ $f(x) \gtrless 0$

1) Σε αλγεβρικές συναρτήσεις: α΄ τρόπος:

Θέτω $y=f(x)$, βρίσκω τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$ και βλέπω ποιό από τα σύνολα (ημιευθείες ή ευθύγρ. τμήματα) στα οποία η γραφική παράσταση χωρίζει τον άξονα $x'x$ επαληθεύουν την $f(x) \gtrless 0$.

β΄ τρόπος: Βλέπε § 2.26 Β. – εφαρμογή 3.

2) Σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις ⟶ $f(x) \gtrless \alpha$, όπου $f=\eta\mu$ ή $f=\sigma\upsilon\nu$

Βρίσκω στον τριγωνομετρικό κύκλο τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ στο διάστημα $[0,2\pi]$

Βλέπω ποιό από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο τριγωνομ. κύκλος επαληθεύει την $f(x) \gtrless \alpha$, κι έτσι έχω τις πρωτεύουσες λύσεις στο $[0,2\pi]$.

Προσθέτω στις λύσεις αυτές τη περίοδο $2\kappa\pi$ και έχω τις γενικές λύσεις λύνοντας ως προς x.

- Αν η $f=\varepsilon\varphi$ ή $f=\sigma\varphi$ κάνω την ίδια δουλειά στο $[0,\pi]$ και προσθέτω στο τέλος τη περίοδο $\kappa\pi$.

παράδειγμα

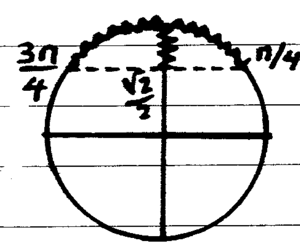
$\eta\mu(3x-1) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Λύσεις στο $[0,2\pi]$: $\frac{\pi}{4} \leq 3x-1 \leq \frac{3\pi}{4}$

Γενικές λύσεις: $2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \leq 3x-1 \leq 2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$

$$2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}+1 \leq 3x \leq 2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}+1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}.$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

39 Να λυθούν γραφικά οι εξισώσεις:

1) $3x-2=0$ 2) $x^2-3x=-2$

3) $x^2+2|x|-3=0$ 4) $\eta\mu 3x=0$

40 Να λυθούν γραφικά οι ανισώσεις:

1) $2x-5\leq 0$ 2) $x^2+x-6<0$ 3) $x^2-6x+9\geq 0$

4) $x^2-x+1<0$ 5) $\eta\mu 3x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 6) $\sigma\upsilon\nu 2x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\varepsilon\varphi x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$ 8) $\sigma\varphi 5x<\sqrt{3}$ 9) $\sigma\upsilon\nu 4x\leq-\sqrt{3}/2$

41 Όμοια, οι ανισώσεις:

1) $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)>0$ 2) $\sigma\upsilon\nu\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{2}$

3) $\varepsilon\varphi\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)<0$ 4) $\sigma\varphi\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$

5) $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{3}\right)>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6) $\eta\mu\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)>-\frac{1}{2}$

7) $-\frac{1}{2}<\eta\mu 3x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sigma\upsilon\nu 2x<\frac{1}{2}$

42 Όμοια, οι ανισώσεις:

1) $\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x\leq 1$ 2) $2\eta\mu x+1>0$

3) $2\sigma\upsilon\nu\frac{2x}{5}<1$ 4) $2\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}>0$

5) $2\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>-\sqrt{3}$ 6) $3\varepsilon\varphi 2x-\sqrt{3}\leq 0$

7) $\sigma\varphi 3x+\sqrt{3}>0$ 8) $\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1>0$.

9) $-\frac{\sqrt{3}}{3}<\varepsilon\varphi 5x<1$ 10) $-\sqrt{3}<\sigma\varphi 3x<1$

43 Όμοια, οι ανισώσεις:

1) α) $\eta\mu^2 x-5\eta\mu x+6\geq 0$

β) $2\sigma\upsilon\nu^2 4x-1\geq 0$

2) α) $\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x-1)(4\eta\mu^2 x-3)>0$

β) $(\varepsilon\varphi^2 x-3)(2\sigma\upsilon\nu^2 x-1)>0$

3) α) $2\eta\mu^3 x-5\eta\mu^2 x-3\eta\mu x\leq 0$

β) $3\varepsilon\varphi^2 x-1>0$

4) α) $3\varepsilon\varphi^4 x-4\varepsilon\varphi^2 x+1<0$

5) β) $\varepsilon\varphi^2 x-(\sqrt{3}+1)\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}\leq 0$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ II.

Θ1) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:
1) $y=-4x^2+7$. 2) $y=x^2-4x+3$. 3) $y=6x^3+1$
4) $y=\frac{1}{2x^3}+3$. 5) $y=|x-1|+3$. 6) $y=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$
7) $y=\frac{2x}{1+|x|}$. 8) $y=\begin{cases}5, & \text{αν } x\in(-\infty,6)\\ x-1, & \text{αν } x\in[6,+\infty)\end{cases}$. 9) $y=|x^2-3x+2|$

Οι 1-3-6 , είναι 1-1 ;

Θ2) Αν f,g συναρτήσεις του F_A φθίνουσες, δείξτε ότι και η $f+g$ είναι φθίνουσα.

Θ3) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f: $f(x)=\alpha|x+2|+\beta|x-2|+(\beta-\alpha+1)x-\alpha-2\beta$ να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$.

Θ4) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f: $f(x)=|x-1|-|x|+2$.

Θ5) Να μελετηθούν και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των:
1) $y=-\frac{2}{x}$. 2) $y=\frac{x+3}{2x+4}$. 3) $y=x^2-5x+6$. 4) $y=-x^2+2$
5) $y=(x-3)^2$. 6) $y=\frac{-2}{|3x+1|}$. 7) $y=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & x\le 2\\ 2x-2, & x>2\end{cases}$
8) $y=\eta\mu 3x$. 9) $y=1+\sigma\upsilon\nu x$ στο $[-2\pi,0]$.
10) $y=1+\varepsilon\varphi x$ στο $(0,2\pi)$. 11) $y=1+\eta\mu(x-\frac{\pi}{6})$ στο $[-\pi,\pi]$

Θ6) Να εξεταστεί αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:
1) $y=\frac{2x}{x^2+3}$. 2) $y=3x^2-4$. 3) $y=\frac{\sqrt{3x^2-1}}{3x}$. 4) $y=x-\varepsilon\varphi x$
5) $y=x^2+2\sigma\upsilon\nu x$. 6) $y=|x-2|+|x+2|-3|x|$.

Θ7) Αν f,g συναρτήσεις του F_A δείξτε ότι:
1) f,g άρτιες $\Rightarrow f\cdot g$ άρτια . 2) f,g περιττές $\Rightarrow f\cdot g$ ~~περιττή~~ άρτια.
3) f περιττή, g άρτια $\Rightarrow f\cdot g$ περιττή.

Θ8) Να εξεταστεί αν είναι περιοδικές οι συναρτήσεις:
1) $y=\eta\mu x+1$. 2) $y=2\sigma\upsilon\nu 3x-5$. 3) $y=3\sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}$
4) $y=\eta\mu\frac{x}{\pi}$. 5) $y=\sigma\upsilon\nu(x^2)$. 6) $y=\sigma\upsilon\nu(x^2-x+3)$.

Θ9 Να λυθούν γραφικά οι εξισώσεις:

1) $x^2-4=-x-2$. 2) $x^2=x-2$. 3) $x^2-3x=-2$

4) $\frac{2}{x}=3-x$. 5) $x^2=\frac{1}{x}$. 6) $x^2=2x$

Θ10 Να λυθούν γραφικά οι ανισώσεις:

1) $x^2>x+2$. 2) $(x+1)^2<2$. 3) $x^2-4x+3<0$.

4) $ημ3x>\frac{1}{2}$. 5) $2συνx\leq\sqrt{2}$. 6) $εφ(x-\frac{\pi}{6})>0$.

7) $ημ(x+\frac{\pi}{6})>\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8) $εφ(x-\frac{\pi}{3})<0$. 9) $ημx>\frac{1}{2}$ στο $(-\pi,\pi)$.

Θ11 Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των συναρτήσεων:

1) $y=4x-2$. 2) $y=x+2$ στο $[1,3]$. 3) $y=2x^2-4x+1$

4) $y=-x^2+x-1$. 5) $y=|3x-2|-|x|+1$. 6) $y=\begin{cases}2x-3, & x\in(-\infty,2]\\ -x+3, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$.

↳ Γενικά: Πρέπει να κάνω γραφ. παρ. $\Rightarrow f(A) \Longrightarrow$ ---

Θ12 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f: f(x)=x^2+2\lambda x+3$ να έχει min το 2 $\Leftrightarrow$ (0 $y=2$) ← ⊛

Θ13 Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=x^2+\kappa x+\lambda$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$. Αν $f(2)=9$ και έχει min για $x=-1$ να βρεθεί το πεδίο τιμών της.

Θ14 Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f: f(x)=-x^2+3x-\kappa$ αν έχει max το $-7/2$.

Θ15 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}-\{\frac{1}{2},-2\}$ ώστε οι ευθείες $y=(2\lambda-1)x+3$, $(\lambda+2)x-y-1=0$ να είναι 1) $//$. 2) $\perp$.

Θ16 Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια των παραβολών $f_\lambda: f_\lambda(x)=x^2-2(\lambda-1)x-\lambda$. Δείξτε ότι $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ το διάγραμμα των συναρτήσεων f_λ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία.

Θ17 Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια των παραβολών $f_\lambda: f_\lambda(x)=x^2-2\lambda x+1$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο παραβολές αυτής της οικογένειας των οποίων τα διαγράμματα εφάπτονται στον $x'x$ και ότι οι κορυφές αυτών των δύο παραβολών είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

Θ18 Δείξτε ότι οι κορυφές των παραβολών $f_\lambda(x)=\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-1$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, βρίσκονται στην ευθεία $x+y=0$.

ΚΥΚΛΙΚΕΣ (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

▼ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΟΞΩΝ:

1) Μοίρα → $1\mu = \frac{1}{360}$ του κύκλου. 2) Βαθμός → $1\beta = \frac{1}{400}$ του κύκλου. 3) Ακτίνιο → $1\alpha = \frac{1}{2\pi}$ του κύκλου

ΒΑΣΙΚΗ ΣΧΕΣΗ → $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\beta}{200} = \dfrac{\alpha}{\pi}$.

▼ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ:

είναι ένας προσανατολισμένος κύκλος με ακτίνα $\rho = 1$.

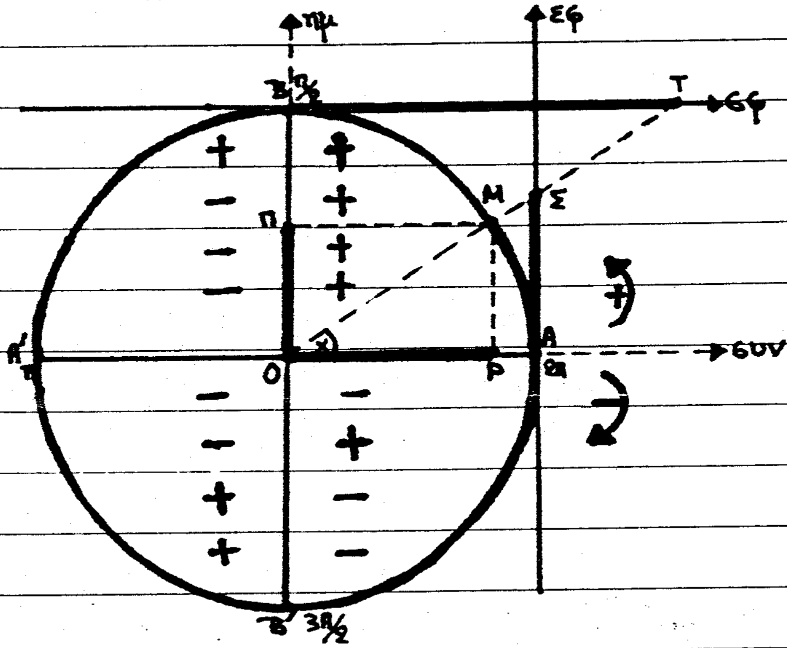
Προσανατολισμένος είναι ο κύκλος στον οποίο έχει ορισθεί η αρχή **A** και η φορά (θετική +, αρνητική −), διαγραφής των τόξων.

$$\eta\mu x = \overline{O\Pi} \begin{cases} A = \mathbb{R} \\ f(A) = [-1, 1] \end{cases}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \overline{OP} \begin{cases} A = \mathbb{R} \\ f(A) = [-1, 1] \end{cases}$$

$$\varepsilon\varphi x = \overline{A\Sigma} \begin{cases} A = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \\ f(A) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\sigma\varphi x = \overline{BT} \begin{cases} A = \mathbb{R} - \{k\pi\} \\ f(A) = \mathbb{R}. \end{cases}$$



- Τόξα x και x' με το ίδιο πέρας **Μ** πληρούν τη σχέση: $x' = 2k\pi + x,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Τα τόξα $2k\pi$ έχουν πέρας το **Α**.

  » » $(2k+1)\pi$ » » » **Α'**.

  » » $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ » » » **Β**.

  » » $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ » » » **Β'**.

▼Μεταβολή στο $[0, 2\pi)$ − Μονοτονία.

x	0	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$
ημx	$0 \nearrow$	$\frac{1}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$
συνx	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \searrow$	$\frac{1}{2} \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$
εφx	$0 \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow$	$1 \nearrow$	$\sqrt{3} \nearrow$	$+\infty \,//\, -\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty \,//\, -\infty$
σφx	$-\infty \,//\, +\infty \searrow$	$\sqrt{3} \searrow$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty \,//\, +\infty \searrow$	0

Η συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi x$ δεν ορίζεται στα $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

» » $y = \sigma\varphi x$ » » » $0, \pi$.

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι μονότονες.

Η $y = \varepsilon\varphi x$ ↑ γνησίως αύξουσα και

η $y = \sigma\varphi x$ ↓ γνησίως φθίνουσα.

▼ ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \;\to\; \begin{cases} \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x. \\ \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x. \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\varphi x &= \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \\ \sigma\varphi x &= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \end{aligned}\right\} \to \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1.$$

$$1 + \varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \longleftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

$$1 + \sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x} \longleftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

▼ ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ.

→ Τόξα αντίθετα έχουν το **ίδιο συν** και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$.

→ **ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ.**

1) Στα 90° και 270° το **ημ** γίνεται **συν** και **αντίστροφα**,
η **εφ** » **σφ** και » .

2) Στα 180° και 360° παραμένουν **ίδια**.

→ Το **πρόσημο** στα παραπάνω εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει **το τόξο που δίνεται**.

- **Συμπληρωματικά τόξα** → $\frac{\pi}{2} - x$, x.

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \eta\mu x$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sigma\varphi x$, $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \varepsilon\varphi x$.

- **Παραπληρωματικά τόξα** → $\pi - x$, x.

$\eta\mu(\pi-x) = \eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(\pi-x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(\pi-x) = -\varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi(\pi-x) = -\sigma\varphi x$.

- **Τόξα με διαφορά π** → $\pi + x$, x.

$\eta\mu(\pi+x) = -\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(\pi+x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(\pi+x) = \varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi(\pi+x) = \sigma\varphi x$.

- **Τόξα με διαφορά $\frac{\pi}{2}$** → $\frac{\pi}{2} + x$, x.

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\eta\mu x$, $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sigma\varphi x$, $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\varepsilon\varphi x$.

- **Τόξα με άθροισμα ή διαφορά $\frac{3\pi}{2}$** → $\frac{3\pi}{2} - x$, x ή $\frac{3\pi}{2} + x$, x. Να βρεθούν...

ΤΥΠΟΙ

$\boxed{\alpha \pm \beta}$

$$\eta\mu(\alpha\pm\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta\pm\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha\pm\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta\mp\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha\pm\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\pm\varepsilon\varphi\beta}{1\mp\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha\pm\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta\mp1}{\sigma\varphi\beta\pm\sigma\varphi\alpha}\quad !!!$$

$$\updownarrow\ \eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$$

$\boxed{2\alpha}$

$$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha \longleftrightarrow \eta\mu\omega=2\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha$$

$$\updownarrow\ \sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}-\eta\mu^2\frac{\omega}{2}=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}-1=1-2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}$$

$$\varepsilon\varphi2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} \longleftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\omega}{2}}$$

$$\sigma\varphi2\alpha=\frac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha} \longleftrightarrow \sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\varphi^2\frac{\omega}{2}-1}{2\sigma\varphi\frac{\omega}{2}}$$

$\boxed{3\alpha}$

$$\eta\mu3\alpha=3\eta\mu\alpha-4\eta\mu^3\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu3\alpha=4\sigma\upsilon\nu^3\alpha-3\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\varepsilon\varphi3\alpha=\frac{3\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

Συναρτήσει

$\boxed{\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

$$\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2},\quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha},\quad \sigma\varphi^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}$$

$\boxed{\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}$

$$\eta\mu\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}\qquad \sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}\qquad \sigma\varphi\alpha=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}$$

Μετασχηματισμοί

Σε γινόμενο

$$\eta\mu A\pm\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A\pm B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A\mp B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{B-A}{2}\quad !!!$$

$$\varepsilon\varphi A\pm\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu(A\pm B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\varphi A\pm\sigma\varphi B=\frac{\eta\mu(B\pm A)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}\quad !!!$$

Σε άθροισμα

$$2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$\updownarrow\ 1+\eta\mu A=\eta\mu\frac{\pi}{2}+\eta\mu A=\dots,\quad \eta\mu A+\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu A+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\dots$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

• 1η ΟΜΑΔΑ: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

① Αν $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ και $\eta\mu\alpha=\frac{15}{17}$, $\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{12}{13}$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις: $\eta\mu(\alpha+\beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$, $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$, $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)$

② Αν $\eta\mu\alpha=\frac{1}{3}$, $\eta\mu\beta=\frac{1}{2}$ και $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ να βρεθεί το $\eta\mu(2\alpha+\beta)$.

③ Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{3}$ και $\eta\mu\alpha=\frac{3}{5}$ να βρεθούν το $\eta\mu3\alpha$ και το $\sigma\upsilon\nu3\alpha$.

④ Αν $4\eta\mu^2x-2(1+\sqrt{3})\eta\mu x+\sqrt{3}=0$ να βρεθούν τα $\eta\mu2x$, $\sigma\upsilon\nu2x$, $\varepsilon\varphi2x$.

⑤ Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των: 15°, 75°, $22^\circ,5$, 18°, 36°.

⑥ Δείξτε ότι η παράσταση $K=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+120^\circ)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha-120^\circ)$ είναι σταθερή. (ανεξάρτητη από το τόξο α).

⑦ Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

1) $\eta\mu4\alpha+\eta\mu\alpha$. 2) $\eta\mu7\alpha-\eta\mu5\alpha$. 3) $\sigma\upsilon\nu5\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha$.

4) $\sigma\upsilon\nu3x+\sigma\upsilon\nu5x$. 5) $\eta\mu x-\eta\mu2x+\eta\mu3x$. 6) $\eta\mu3x+\eta\mu7x+\eta\mu10x$

7) $\sigma\upsilon\nu\omega+2\sigma\upsilon\nu2\omega+\sigma\upsilon\nu3\omega$. 8) $\sigma\upsilon\nu7\alpha-\sigma\upsilon\nu5\alpha+\sigma\upsilon\nu3\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha$

9) $\sigma\upsilon\nu3\omega+\sigma\upsilon\nu5\omega+\sigma\upsilon\nu7\omega+\sigma\upsilon\nu15\omega$.

⑧ Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A=\frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu3\alpha)(\eta\mu8\alpha+\eta\mu2\alpha)}{(\eta\mu5\alpha-\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu4\alpha-\sigma\upsilon\nu6\alpha)} \qquad B=\frac{\eta\mu\alpha-\eta\mu5\alpha+\eta\mu9\alpha-\eta\mu13\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu5\alpha-\sigma\upsilon\nu9\alpha+\sigma\upsilon\nu13\alpha}$$

⑨ Να μετασχηματιστούν σε άθροισμα ή διαφορά οι παραστάσεις:

1) $2\eta\mu2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$. 2) $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu4\alpha$. 3) $\sigma\upsilon\nu5\alpha\sigma\upsilon\nu7\alpha$. 4) $\eta\mu\alpha\eta\mu3\alpha$.

⑩ Να βρεθεί η αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

1) $2\sigma\upsilon\nu60^\circ\cdot\eta\mu30^\circ$. 2) $\eta\mu45^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu75^\circ$. 3) $\sigma\upsilon\nu150^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu30^\circ$. 4) $2\eta\mu36^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu54^\circ$.

⑪ Δείξτε ότι! 1) $\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$. 2) $\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$.

3) $\eta\mu^4\frac{\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{3\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{5\pi}{8}+\eta\mu^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

4) $\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}$.

⑫ Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $A=\dfrac{\eta\mu8\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu6\alpha\sigma\upsilon\nu3\alpha}{\sigma\upsilon\nu2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu3\alpha\eta\mu4\alpha}$

⑬ Δείξτε ότι:

1) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{15}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$.

2) $\sigma\upsilon\nu20^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu40^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu60^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu80^\circ=\frac{1}{16}$. 3) $\varepsilon\varphi9^\circ-\varepsilon\varphi27^\circ-\varepsilon\varphi63^\circ+\varepsilon\varphi81^\circ=4$.

• 2η ΟΜΑΔΑ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

14 Να αποδείξτε τις ταυτότητες:

1) $ημ(α-β)\cdot συνβ + ημβ\cdot συν(α-β) = ημα$.

2) $συν(α-β)\cdot συν(α+β) - ημ(α-β)\cdot ημ(α+β) = συν2α$.

3) $ημ(60^\circ-α)συν(30^\circ+α) + ημ(30^\circ+α)συν(60^\circ-α) = 1$.

4) $\dfrac{ημ(α-β)}{συνα\cdot συνβ} + \dfrac{ημ(β-γ)}{συνβ\cdot συνγ} + \dfrac{ημ(γ-α)}{συνγ\cdot συνα} = 0$.

5) $\dfrac{ημ(β-γ)}{ημβ\,ημγ} + \dfrac{ημ(γ-α)}{ημγ\,ημα} + \dfrac{ημ(α-β)}{ημα\,ημβ} = 0$.

6) $\dfrac{2ημ(α+β)}{συν(α+β)+συν(α-β)} = εφα + εφβ$.

7) $\dfrac{εφ^2 2α - εφ^2 α}{1 - εφ^2 2α\cdot εφ^2 α} = εφ3α\cdot εφα$.

8) $συνx + συν(120^\circ+x) + συν(240^\circ+x) = 0$

9) $συν^2 x + συν^2(120^\circ+x) + συν^2(120^\circ-x) = \frac{3}{2}$

10) $συν^2 α + συν^2(60^\circ+α) + συν^2(60^\circ-α) = \frac{3}{2}$.

15 Δείξτε ότι:

1) $\dfrac{ημ2α}{1+συν2α} = εφα$.

2) $\dfrac{ημ2α}{1-συν2α} = σφα$.

3) $συν^4 α - ημ^4 α = συν2α$.

4) $σφα - εφα = 2σφ2α$.

5) $\dfrac{1+σφ^2 α}{2σφα} = \dfrac{1}{ημ2α}$

6) $\dfrac{σφ^2 α+1}{σφ^2 α-1} = \dfrac{1}{συν2α}$

7) $εφ(45^\circ-α) = \dfrac{συν2α}{1+ημ2α}$

8) $συν^2\left(\frac{π}{4}-α\right) - ημ^2\left(\frac{π}{4}-α\right) = ημ2α$.

9) $εφ(45^\circ+α) - εφ(45^\circ-α) = 2εφ2α$.

10) $\dfrac{συνα+ημα}{συνα-ημα} - \dfrac{συνα-ημα}{συνα+ημα} = 2εφ2α$.

11) $\dfrac{1-συν2α+ημ2α}{1+συν2α+ημ2α} = εφα$

12) $\dfrac{σφ\frac{θ}{2}+1}{σφ\frac{θ}{2}-1} = \dfrac{συνθ}{1-ημθ}$

16 Να δείξτε τις ισότητες:

1) $3 - 4συν2α + συν4α = 8ημ^4 α$.

2) $\dfrac{2}{(1+εφα)(1+σφα)} = \dfrac{ημ2α}{1+ημ2α}$.

3) $\dfrac{1}{συνα} - εφα = εφ\left(45^\circ - \frac{α}{2}\right)$.

4) $εφα + \dfrac{1}{συνα} = σφ\left(45^\circ - \frac{α}{2}\right)$.

5) $\dfrac{1+συνα+συν\frac{α}{2}}{ημα+ημ\frac{α}{2}} = σφ\frac{α}{2}$.

6) $\dfrac{ημ2α}{1-συν2α}\cdot\dfrac{1-συνα}{συνα} = εφ\frac{α}{2}$.

7) $\dfrac{ημ2α}{1+συν2α}\cdot\dfrac{συνα}{1+συνα} = εφ\frac{α}{2}$.

8) $σφ\frac{α}{2} - εφ\frac{α}{2} = 2σφα$.

9) $2\cdot\dfrac{3+συν4α}{1-συν4α} = εφ^2 α + σφ^2 α$.

10) $εφ(30^\circ+α)\cdot εφ(30^\circ-α) = \dfrac{2συν2α-1}{2συν2α+1}$.

17 Ομοίως, τις ισότητες:

1) $\dfrac{ημ3α}{ημα} - \dfrac{συν3α}{συνα} = 2$.

2) $\dfrac{3συνα+συν3α}{3ημα-ημ3α} = σφ^3 α$.

3) $4ημα\cdot ημ(60^\circ+α)\cdot ημ(60^\circ-α) = ημ3α$

4) $\dfrac{ημ3α+ημ^3 α}{συν^3 α-συν3α} = σφα$

5) $4ημ^3 α\, συν3α + 4συν^3 α\, ημ3α = 3ημ4α$

6) $\dfrac{συν^3 α - συν3α}{συνα} + \dfrac{ημ^3 α + ημ3α}{ημα} = 3$.

(18) Δείξτε ότι:

1) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha-\sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu 5\alpha-\eta\mu 3\alpha}=\varepsilon\varphi 4\alpha.$

2) $\dfrac{\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 3\alpha}=\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}.$

3) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha-\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha.$

4) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha-\eta\mu 4\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{5\alpha}{2}.$

5) $\dfrac{\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 5\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi 2\alpha.$

6) $\dfrac{\eta\mu\alpha+\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha+\eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha}=\varepsilon\varphi 4\alpha.$

7) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 7\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha-\sigma\upsilon\nu 5\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu 7\alpha-\eta\mu 3\alpha-\eta\mu 5\alpha+\eta\mu\alpha}=\sigma\varphi 2\alpha.$

8) $\dfrac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}.$

9) $\sigma\upsilon\nu 5\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 3\alpha=-\eta\mu 2\alpha\cdot\eta\mu\alpha$

10) $\eta\mu 4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu 3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha.$

(19) Όμοια:

1) $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$

2) $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

3) $(\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2=4\eta\mu^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\eta\mu^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\eta\mu\alpha.$

5) α) $\eta\mu 5\alpha=5\eta\mu\alpha-20\eta\mu^3\alpha+16\eta\mu^5\alpha.$

β) $\sigma\upsilon\nu 5\alpha=16\sigma\upsilon\nu^5\alpha-20\sigma\upsilon\nu^3\alpha+5\sigma\upsilon\nu\alpha.$

6) $\dfrac{1}{\eta\mu 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ}=4.$

7) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

8) $\dfrac{\sqrt{2}\,(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)}{\sqrt{3}\,\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$

9) $(\sqrt{3}-\varepsilon\varphi\alpha)\cdot\varepsilon\varphi(30^\circ+\alpha)=(\sqrt{3}+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot\varepsilon\varphi\alpha$

(20) Όμοια:

1) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta.$

2) $\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta+2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\eta\mu^2(\alpha+\beta).$

3) $\dfrac{\varepsilon\varphi^2 2x}{2+\varepsilon\varphi^2 2x}=\dfrac{2\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^4 x}$

4) $\dfrac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}+\dfrac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x+1}=\dfrac{2\eta\mu 2x}{2\sigma\upsilon\nu 2x+1}.$

5) $\dfrac{\eta\mu 8\alpha}{\eta\mu\alpha}=8\sigma\upsilon\nu 4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha.$

6) $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha\cdot\eta\mu\frac{3\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}$

7) $\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu(\alpha+2\beta)-\eta\mu\beta\cdot\eta\mu(\beta+2\alpha)=\eta\mu(\alpha-\beta)\,\eta\mu(\alpha+\beta).$

8) $\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 7\alpha+\eta\mu 8\alpha=4\sigma\upsilon\nu 3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{9\alpha}{2}$

9) $\eta\mu 4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu 3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha.$

(21) Όμοια:

1) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{32}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

2) $\eta\mu\dfrac{\pi}{32}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

3) $\eta\mu\dfrac{\pi}{48}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$

4) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{48}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$

3η ΟΜΑΔΑ: ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΝΘΗΚΗ. (Θυμήσου μεθοδολογία Φυλ.13 Άλγεβρα Α΄ Λυκείου).

22) Αν $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, δείξτε ότι: $\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi\alpha=1$.

23) Σε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi \Gamma=\varepsilon\varphi A\cdot\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma$.

24) Αν $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, δείξτε ότι:

1) $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}+\sigma\varphi\frac{\beta}{2}+\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{\beta}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}$. 3) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma=1$.

2) $\varepsilon\varphi2\alpha+\varepsilon\varphi2\beta+\varepsilon\varphi2\gamma=\varepsilon\varphi2\alpha\cdot\varepsilon\varphi2\beta\cdot\varepsilon\varphi2\gamma$. 4) $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}=2$.

25) 1) Αν $\alpha+\beta=45^\circ$, δείξτε ότι: $(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta)=2$.

2) $\alpha+\beta=135^\circ \Rightarrow (1+\sigma\varphi\alpha)(1+\sigma\varphi\beta)=2$. 3) $\alpha=\beta+\gamma \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma$.

4) $x+y+z=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi(2x+2y-z)+\varepsilon\varphi(2y+2z-x)+\varepsilon\varphi(2x+2z-y)=\varepsilon\varphi(2x+2y-z)\cdot\varepsilon\varphi(2y+2z-x)\cdot\varepsilon\varphi(2x+2z-y)$. (Κάνε χρήση της άσκησης 23.Φ)

5) $x+y=225^\circ \Rightarrow \frac{\sigma\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\cdot\frac{\sigma\varphi y}{1+\sigma\varphi y}=\frac{1}{2}$.

6) $x=\alpha+\beta \Rightarrow \eta\mu^2x=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu x$.

7) Αν $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{7}$, $\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{13}{14}$, δείξτε ότι: $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$.

8) Αν $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ και $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2-1}$, $\varepsilon\varphi\beta=\frac{\sqrt2}{2}$, δείξτε ότι: $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

9) $2\varepsilon\varphi\alpha=3\varepsilon\varphi\beta \Rightarrow \varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\beta}{2+3\varepsilon\varphi^2\beta}$. 10) $\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=4\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\frac{3\eta\mu\alpha}{5-3\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

11) $\varepsilon\varphi x=\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu2x+\beta\cdot\eta\mu2x=\alpha$. 12) $2\sigma\upsilon\nu\alpha=x+\frac{1}{x} \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu3\alpha=x^3+\frac{1}{x^3}$.

13) $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\eta\mu(\gamma-\delta)=\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\eta\mu(\gamma+\delta) \Rightarrow \sigma\varphi\delta=\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\gamma$.

14) $\alpha+\beta+\gamma=0 \wedge 4\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma=1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma=3/2$.

15) $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=0 \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma}{\sigma\upsilon\nu3\alpha+\sigma\upsilon\nu3\beta+\sigma\upsilon\nu3\gamma}=1/12$.

26) Σε κάθε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, δείξτε ότι:

1) $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$.

2) $\eta\mu A+\eta\mu B-\eta\mu\Gamma=4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$.

3) $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma=-1+4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.

4) $\sigma\upsilon\nu2A+\sigma\upsilon\nu2B-\sigma\upsilon\nu2\Gamma=1-4\eta\mu A\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

5) $\eta\mu4A+\eta\mu4B+\eta\mu4\Gamma=-4\eta\mu2A\eta\mu2B\eta\mu2\Gamma$.

6) $\sigma\upsilon\nu2A+\sigma\upsilon\nu2B+\sigma\upsilon\nu2\Gamma=-1-4\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

7) $\sigma\upsilon\nu4A+\sigma\upsilon\nu4B+\sigma\upsilon\nu4\Gamma=-1+4\sigma\upsilon\nu2A\sigma\upsilon\nu2B\sigma\upsilon\nu2\Gamma$.

(Κάνε χρήση του Μνημονικού κανόνα, προσέχοντας ότι τα τόξα (Α+Β) και Γ είναι παραπληρωματικά ενώ τα $\left(\frac{A+B}{2}\right)$ και $\frac{\Gamma}{2}$ συμπληρωματικά)

$$\boxed{\eta\mu(A+B)=\eta\mu\Gamma,\quad \sigma\upsilon\nu(A+B)=-\sigma\upsilon\nu\Gamma,\quad \eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2},\quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)=\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$$

8) $\eta\mu^2A+\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma=2+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$. 9) $\eta\mu^2A+\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma=2\eta\mu A\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

10) $\sigma\upsilon\nu^2A+\sigma\upsilon\nu^2B-\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=1-2\eta\mu A\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$. 11) $\eta\mu^2\frac{A}{2}+\eta\mu^2\frac{B}{2}+\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}=1-2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

▼ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ Τ.Ε.

$\boxed{\eta\mu x=\alpha} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow \boxed{x=2\kappa\pi+\theta \ \vee\ x=(2\kappa+1)\pi-\theta}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

$|\alpha|\leq 1$.

$\boxed{\sigma\upsilon\nu x=\alpha} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \boxed{x=2\kappa\pi+\theta \ \vee\ x=2\kappa\pi-\theta}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

$\boxed{\varepsilon\varphi x=\alpha} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow \boxed{x=\kappa\pi+\theta}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

$\alpha\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\sigma\varphi x=\alpha} \Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta \Leftrightarrow \boxed{x=\kappa\pi+\theta}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

▼ ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ Τ.Ε. (που ανάγονται σε θεμελιώδεις...)

Α) $\eta\mu(f(x))=\eta\mu(\varphi(x))$ ή $\sigma\upsilon\nu(f(x))=\sigma\upsilon\nu(\varphi(x))$ ή $\varepsilon\varphi(f(x))=\varepsilon\varphi(\varphi(x))$ ή $\sigma\varphi(f(x))=\sigma\varphi(\varphi(x))$.

- $f(x)=2\kappa\pi+\varphi(x) \ \vee\ f(x)=(2\kappa+1)\pi-\varphi(x) \Leftrightarrow$ λύνω ως προς x...

π.χ. $\eta\mu 3x=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3x=2\kappa\pi+x-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{6}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

$\vee\ 3x=(2\kappa+1)\pi-x+\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{(2\kappa+1)\pi}{4}+\frac{\pi}{12}$

Β) $\eta\mu(f(x))=-\eta\mu(\varphi(x))$ ή $\varepsilon\varphi(f(x))=-\varepsilon\varphi(\varphi(x))$ ή $\sigma\varphi(f(x))=-\sigma\varphi(\varphi(x))$.

- $\eta\mu(f(x))=\eta\mu(-\varphi(x)) \rightarrow$ Μορφή Α...

π.χ. $\varepsilon\varphi 3x+\varepsilon\varphi x=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 3x=-\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 3x=\varepsilon\varphi(-x) \Leftrightarrow 3x=\kappa\pi-x \Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Γ) $\sigma\upsilon\nu(f(x))=-\sigma\upsilon\nu(\varphi(x))$ (Χρήση παραπληρωματικών τόξων x, $\pi-x$...).

- $\sigma\upsilon\nu(f(x))=\sigma\upsilon\nu(\pi-\varphi(x)) \rightarrow$ Μορφή Α...

π.χ. $\sigma\upsilon\nu 4x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu(\pi-x) \Leftrightarrow$

$4x=2\kappa\pi+\pi-x \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{5}+\frac{\pi}{5}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

$\vee\ 4x=2\kappa\pi-\pi+x \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$

Δ) $\eta\mu(f(x))=\sigma\upsilon\nu(\varphi(x))$ ή $\varepsilon\varphi(f(x))=\sigma\varphi(\varphi(x))$. (Χρήση συμπληρωματικών τόξων x, $\frac{\pi}{2}-x$).

- $\eta\mu(f(x))=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\varphi(x)\right) \rightarrow$ Μορφή Α...

π.χ. $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) \Leftrightarrow$

$x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}-x \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

$\vee\ \cancel{x}=(2\kappa+1)\pi-\frac{2\pi}{3}+\cancel{x} \rightarrow$ Αδύνατη.

▼ **ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ Τ.Ε.** (Δηλαδή εξισώσεις με ένα τριγωνομετρικό άγνωστο...).

Α' ΒΑΘΜΟΥ ⟶ $\alpha\eta\mu x+\beta=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\frac{\beta}{\alpha}$ ⟶ Θεμελιώδης...

Β' ΒΑΘΜΟΥ ⟶ $\left.\begin{array}{c}\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x+\gamma=0\\ \Delta\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \eta\mu x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ⟶ Θεμελιώδεις...

ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ Β' ΒΑΘΜΟΥ ⟶ Θέτω $\eta\mu x=y$ οπότε θα είναι αναλυτή σε γινόμενο ή διτετράγωνη ή αντίστροφη κ.λ.π. (Βλέπε Φυλ. 4 έως 11).

⟶ Όμοια, λύνονται και οι αλγεβρικές με άγνωστο συνx ή εφx ή σφx.

▼ **Τ.Ε. με δύο αγνώστους ημx και συνx** ⟶ $f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)=0$.

1) **ΓΡΑΜΜΙΚΗ** ⟶ $\boxed{\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma.}$

α' τρόπος: Διαιρώ με $\alpha\neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}$, θέτω $\frac{\beta}{\alpha}=\varepsilon\varphi\omega$ κι έχω:

$\eta\mu x+\varepsilon\varphi\omega\,\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \eta\mu x+\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$

$\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu x=\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega$ (• Πρέπει $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\omega\right|\leq 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2\geq\gamma^2$)

$\Leftrightarrow \eta\mu(x+\omega)=\eta\mu\tau \Leftrightarrow \begin{array}{l} x+\omega=2\kappa\pi+\tau \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\tau-\omega \\ \vee\ x+\omega=(2\kappa+1)\pi-\tau \Leftrightarrow x=(2\kappa+1)\pi-\tau-\omega \end{array}, \kappa\in\mathbb{Z}.$

β' τρόπος: Αντικαθιστώ τα ημx και συνx συναρτήσει $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ κι έχω:

$\alpha\cdot\frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}+\beta\cdot\frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}=\gamma$ ⟶ Αλγεβρική β' βαθμού ως προς $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$.

2) i) **ΟΜΟΓΕΝΗΣ** ⟶ $\boxed{\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+\gamma\sigma\upsilon\nu^2x=0}$.

Διαιρώ με $\sigma\upsilon\nu^2x\neq 0$ (διότι αν $\sigma\upsilon\nu^2x=0 \Rightarrow \alpha\eta\mu^2x=0 \Rightarrow \eta\mu^2x=0$ ⟶ Άτοπο, αφού $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$).

κι έχω: $\alpha\varepsilon\varphi^2x+\beta\varepsilon\varphi x+\gamma=0$ ⟶ Αλγεβρική β' βαθμού ως προς εφx.

• Όμοια, λύνεται και η $\alpha\eta\mu^3x+\beta\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu x+\gamma\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu^2x+\delta\sigma\upsilon\nu^3x=0$ (Διαιρώ με $\sigma\upsilon\nu^3x$.)

ii) **ΨΕΥΔΟΟΜΟΓΕΝΗΣ** ⟶ $\boxed{\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+\gamma\sigma\upsilon\nu^2x=\delta}$ $(\delta\neq 0)$

Πολ/ζω το δ με $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$ κι έχω: $\alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+\gamma\sigma\upsilon\nu^2x=\delta(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)$

$\Leftrightarrow \alpha\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+\gamma\sigma\upsilon\nu^2x-\delta\eta\mu^2x-\delta\sigma\upsilon\nu^2x=0 \Leftrightarrow (\alpha-\delta)\eta\mu^2x+\beta\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x+(\gamma-\delta)\sigma\upsilon\nu^2x=0$ ⟶ Ομογενής

3) **ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ** ⟶ $\boxed{\alpha(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+\beta\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x=\gamma.}$

Θέτω $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=z$ οπότε $\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x=\frac{z^2-1}{2}$ κι έχω:

$\alpha z+\beta\cdot\frac{z^2-1}{2}=\gamma$ ⟶ β' βαθμού ως προς $z < \begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \end{array}$ οπότε:

$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=z_1$ ⟶ Γραμμική.
$\vee\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=z_2$ ⟶ ,, .

(• Επειδή $2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x=z^2-1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=z^2-1$ πρέπει $-1\leq z^2-1\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq z^2\leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq z\leq\sqrt{2}$).

▼ ΑΛΛΑ ΕΙΔΗ Τ.Ε.

1) Τα Αθροίσματα τα κάνω Γινόμενα

· Παράδειγμα:

$$\underbrace{\eta\mu 5x-\eta\mu 3x}=\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\frac{5x-3x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5x+3x}{2}=\eta\mu x\Leftrightarrow 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu 4x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x\,(2\sigma\upsilon\nu 4x-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\quad \kappa\in Z.$$

$$\vee\ \sigma\upsilon\nu 4x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=2\lambda\pi+\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\lambda\pi}{2}+\frac{\pi}{12} \\ 4x=2\lambda\pi-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\end{cases},\ \lambda\in Z.$$

2) Τα Γινόμενα τα κάνω Αθροίσματα

Παράδειγμα:

$$\underbrace{\eta\mu 3x\cdot\eta\mu x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\left[\sigma\upsilon\nu(3x-x)-\sigma\upsilon\nu(3x+x)\right]=\cancel{\tfrac{1}{2}}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu 4x=1\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x-(2\sigma\upsilon\nu^2 2x-1)=1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x-2\sigma\upsilon\nu^2 2x+\cancel{1}=\cancel{1}\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x\,(1-2\sigma\upsilon\nu 2x)=0\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x=0\Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

$$\vee\ \sigma\upsilon\nu 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow 2x=2\lambda\pi\pm\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\lambda\pi\pm\frac{\pi}{6},\ \lambda\in Z.$$

Λύση Τ.Ε. σε διάστημα (α,β) ή [α,β) ή (α,β] ή [α,β]...

Παράδειγμα: Να λυθεί στο $[0,\pi)$ η εξίσωση: $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{3}$.

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi x}-\frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \frac{1+\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}-\frac{1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}=2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (1+\varepsilon\varphi x)^2-(1-\varepsilon\varphi x)^2=2\sqrt{3}(1-\varepsilon\varphi^2 x)\Leftrightarrow \ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi^2 x+2\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\frac{-2\pm 4}{2\sqrt{3}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\quad (1)$$

$$\vee\ \varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\quad (2)$$

● 1 Βρίσκω τις λύσεις συναρτήσει του $\kappa\in Z$.

● 2 Τις βάζω στο διάστημα και βρίσκω το κ.

● 3 Από τις γενικές λύσεις βρίσκω το x.

Αλλά $x\in[0,\pi)\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 0\le\kappa\pi+\frac{\pi}{6}<\pi\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}\le\kappa\pi<\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le\kappa<\frac{5}{6}\Leftrightarrow \kappa=0$ (διότι $\kappa\in Z$)

Άρα για $\kappa=0$ η (1) δίνει: $x=\pi/6$.

Όμοια, από τη (2) βρίσκω $\kappa=1$ και άρα $x=2\pi/3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(27) Να λυθούν οι εξισώσεις: (Βλέπε μορφές Α, Β, Γ, Δ, Φυλ. 40).

1) $ημ\left(\frac{x}{3}+\frac{π}{4}\right)=ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)$.
2) $εφ3x=εφ\left(7x+\frac{π}{8}\right)$.
3) $συν2x-συν\frac{x}{2}=0$.
4) $εφ3x=-σφ2x$.
5) $εφ\left(2x+\frac{π}{3}\right)=σφ(π-3x)$.
6) $ημ(π-2x)-συν\left(x+\frac{π}{4}\right)=0$.
7) $συν\left(\frac{π}{6}+5x\right)+ημ(-3x)=0$.
8) $συν\left(3x-\frac{π}{4}\right)+συν\left(\frac{2π}{3}-2x\right)=0$.
9) $εφ\left(x-\frac{π}{3}\right)=σφ2x$.
10) $ημ3x+ημ2x=0$.

(28) Όμοια, οι εξισώσεις: (Βλέπε Αλγεβρικές Τ.Ε. Φυλ. 41).

1) $3εφ^2x-4εφx+1=0$.
2) $2συν^2x=\sqrt{2}\,συνx+2$.
3) $2ημ^2x+\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})ημx$.
4) $(3+σφx)^2=5(3+σφx)$.
5) $εφ^2x-(1+\sqrt{3})εφx+\sqrt{3}=0$.
6) $4συν^4x-37συν^2x+9=0$.
7) $εφ^2x-8ημ^2x+3=0$.
8) $2ημ^2x+\sqrt{3}\,συνx+1=0$.
9) $ημ^2 2x-ημ^2x=\frac{1}{2}$.
10) $2ημ^2 3x+ημ^2 6x=2$.

(29) Όμοια, οι εξισώσεις:

1) $ημ2x=ημ^3x$.
2) $3εφ^2x=7-8συν^2x$.
3) $εφx(εφ^2x-1)=σφx$.
4) $\sqrt{3}\,εφx=2ημx$.
* 5) $εφx=4συν2x-σφ2x$.
6) $συν2x-ημ3x=1$.
7) $ημ^4x+συν^4x=5/8$.
8) $ημ^6x+συν^6x=1/4$.
9) $συν4x+2συν^2x=0$.
10) $ημ3x-συν2x=0$.
11) $εφ\left(\frac{π}{4}+x\right)+εφx-2=0$.
12) $1-συν(π-x)+ημ\left(\frac{π+x}{2}\right)=0$.
13) $2-2ημ\left(\frac{3π}{2}-x\right)=\sqrt{3}\cdot εφ\left(\frac{π-x}{2}\right)$.
14) $σφx+\frac{ημx}{1+συνx}=2$.

(30) Όμοια, οι εξισώσεις: (Βλέπε Τ.Ε. με αγνώστους ημx, συνx Φυλ. 41)

1) $3ημx-\sqrt{3}συνx=3$.
2) $ημ4x+\sqrt{3}\,συν4x=\sqrt{2}$.
3) $ημx+συνx=1$.
4) $2ημx+3συνx=1$.
5) $5ημ^2x-3ημxσυνx-2συν^2x=0$.
6) $συν^2x+4ημ2x+3=0$.
7) $ημ^2x+ημ2x-2συν^2x=1/2$.
8) $ημx+2συνx=1/συνx$.
9) $ημx+συνx=1+ημxσυνx$.
10) $2ημx+2συνx-4ημxσυνx=1$.
11) $\frac{1}{ημx}+\frac{1}{συνx}=2\sqrt{2}$.
12) $ημx-συνx+ημxσυνx=1$.

31 Να λυθούν οι εξισώσεις: (Αθροίσματα ⟷ Γινόμενα. Βλέπε Φυλ. 42).

1) $συν2x + συνx = ημx + ημ2x$.
2) $εφx + εφ2x = εφ3x$.
3) $ημx + ημ2x + ημ3x = 0$.
4) $2συνx + συν3x + συν5x = 0$.
5) $συν6x + ημ5x = ημ3x - συν2x$
6) $συνx \cdot συν7x = συν3x \cdot συν5x$.
7) $2ημx \cdot ημ3x = 1$.
8) $4ημx \cdot ημ2x \cdot ημ3x = ημ4x$.

32 Να λυθεί στο διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ η εξίσωση:

$$\frac{εφ\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{συν^2x} = \frac{εφx}{συν^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$$

(Βλέπε Φυλ. 42 παράδειγμα).

33 Να λυθεί στο $[-\pi, \pi]$ η εξίσωση:

$$συν2x + 3συνx = 0.$$

34 Αν $x \in [0, 2\pi)$, να λυθεί η εξίσωση:

$$ημ3x + ημ5x = ημ8x.$$

35 Αν $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, να λυθεί η εξίσωση:

$$4συν^4x - 37συν^2x + 9 = 0.$$

36 Να λυθεί στο $(2\pi, 3\pi)$ η εξίσωση:

$$συν^2x + 4ημ2x + 3 = 0.$$

37 Να λυθεί στο $[\pi, 3\pi]$ η εξίσωση:

$$\sqrt{3}\,συνx - 3ημx = 3.$$

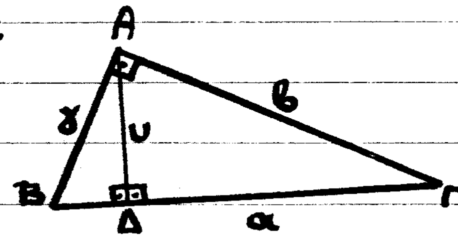
38 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $ημ(\pi - x) + σφ\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{συν(-x)} - συν(2\pi - x)$.

2) $ημ(\pi - x) + σφ\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\frac{1}{συνx} - συνx}{2ημx}$.

3) $\frac{συν\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + συνx} = \frac{1}{συν^2\frac{x}{2}} - 1$.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.



1) $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ορθογώνιο ($\hat{A}=90°$).

$\eta\mu B=\frac{\beta}{\alpha}$, $\eta\mu\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \beta=\alpha\,\eta\mu B$, $\gamma=\alpha\,\eta\mu\Gamma$.

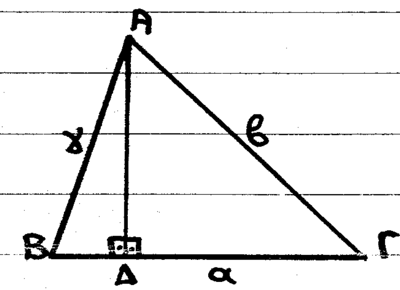
$\sigma\upsilon\nu B=\frac{\gamma}{\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu B$, $\beta=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

$\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma}$, $\varepsilon\varphi\Gamma=\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta=\gamma\,\varepsilon\varphi B$, $\gamma=\beta\,\varepsilon\varphi\Gamma$.

$\sigma\varphi B=\frac{\gamma}{\beta}$, $\sigma\varphi\Gamma=\frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \gamma=\beta\,\sigma\varphi B$, $\beta=\gamma\,\sigma\varphi\Gamma$.

- $\eta\mu B=\sigma\upsilon\nu\Gamma$.
- $\varepsilon\varphi B=\sigma\varphi\Gamma$.
- $E=\frac{\beta\gamma}{2}=\frac{\alpha\upsilon}{2} \Leftrightarrow$
  $E=\frac{1}{2}\alpha\gamma\,\eta\mu B=$
  $=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$.

2) $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ τυχαίο



▼ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2R\,\eta\mu A \\ \beta=2R\,\eta\mu B. \\ \gamma=2R\,\eta\mu\Gamma. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\eta\mu A=\frac{\alpha}{2R}$, $\eta\mu B=\frac{\beta}{2R}$, $\eta\mu\Gamma=\frac{\gamma}{2R}$.

▼ ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ.

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^2&=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A. \\ \beta^2&=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu B. \\ \gamma^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma. \end{aligned}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu A=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma} \\ \sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} \end{cases}$$

- $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A=\frac{1}{2}\alpha\gamma\,\eta\mu B=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$.
- $E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$.
- $E=\tau\cdot\rho$
- $E=\rho_\alpha(\tau-\alpha)=\rho_\beta(\tau-\beta)=\rho_\gamma(\tau-\gamma)$ όπου $\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$
- Θεώρημα προβολών : $\alpha=\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\,\sigma\upsilon\nu B$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

39 Σε τρίγωνο ΑΒΓ, δείξτε ότι:

1) $\alpha\,\eta\mu(B-\Gamma)+\beta\,\eta\mu(\Gamma-A)+\gamma\,\eta\mu(A-B)=0$

2) $\alpha\sigma\upsilon\nu A+\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=4R\,\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

3) $(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu A+(\gamma+\alpha)\sigma\upsilon\nu B+(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\Gamma=2\tau \Longleftrightarrow 2\tau=\alpha+\beta+\gamma$

4) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=8R^2(1+\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma)$.

5) $\alpha(\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma)=2(\gamma-\beta)\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$. 6) $\gamma^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta\,\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$.

7) $(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+(\beta+\gamma)^2\eta\mu^2\frac{A}{2}=\alpha^2$.

40 Όμοια: Mollweid

1) $\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}$. 2) $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$.

3) $\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$. 4) $\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$.

5) $\eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}$. 6) $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}$. 7) $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$.

8) $\sigma\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}}$. 9) $E=2R^2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

41 Όμοια:

1) $\alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma\sigma\upsilon\nu B)=\beta^2-\gamma^2$. 2) $\alpha(\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)=2(\beta+\gamma)\eta\mu^2\frac{A}{2}$

3) $\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}\eta\mu 2A+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\beta^2}\eta\mu 2B+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}\eta\mu 2\Gamma=0$. 4) $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-4E\,\sigma\varphi A$.

5) $\frac{\alpha\,\eta\mu(B-\Gamma)}{\beta^2-\gamma^2}=\frac{\beta\,\eta\mu(\Gamma-A)}{\gamma^2-\alpha^2}=\frac{\gamma\,\eta\mu(A-B)}{\alpha^2-\beta^2}$. 6) $1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\gamma}{\tau}$.

42 Αν $\alpha=2\beta\,\eta\mu\frac{A}{2}$, τότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές.

43 Αν $\eta\mu A=2\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ » .

44 $4E=\alpha^2\sigma\varphi\frac{A}{2} \Rightarrow$ » » .

45 $\eta\mu\Gamma(\sigma\upsilon\nu A+2\sigma\upsilon\nu\Gamma)=\eta\mu B(\sigma\upsilon\nu A+2\sigma\upsilon\nu B)\Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές ή ορθογώνιο.

46 1) $\eta\mu A=\frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma}\Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ορθογώνιο

2) $\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B\Rightarrow$ » » .

47 $\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma\Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές.

48 $\eta\mu 3A+\eta\mu 3B+\eta\mu 3\Gamma=0\Rightarrow$ Μία των γωνιών του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι 60°.

49 $\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma=\sqrt{3}\Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισόπλευρο.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ.

Θ1 Δείξτε ότι:

1) $\dfrac{\eta\mu 2x}{\eta\mu 2x-1}=\dfrac{2}{(1-\varepsilon\varphi x)(1-\sigma\varphi x)}$

SOS 2) $\dfrac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\beta}=\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$.

3) $\sigma\upsilon\nu^2 y+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6}-y\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\frac{3}{2}$

4) $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1+\eta\mu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}$.

Θ2 Αν $\alpha-2\beta=135^\circ$ δείξτε ότι: $\dfrac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha}\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi 2\beta-1}{\varepsilon\varphi 2\beta}=2$.

Θ3 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $8\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}=1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

2) $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1-\eta\mu 2x}$

3) $\dfrac{1-\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1-\sigma\varphi\frac{x}{2}}=2\eta\mu\frac{x}{2}$

4) $1-3\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x=\dfrac{1}{\eta\mu(\pi-x)\cdot(\sigma\varphi 2x-\sigma\varphi x)}$

5) $-2\sigma\varphi(\pi-x)-(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=4$.

Θ4 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) δείξτε ότι:

1) $\varepsilon\varphi 2B=\dfrac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2}$

2) $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\dfrac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$.

Θ5 Αν $\varepsilon\varphi^2\alpha=1+2\varepsilon\varphi^2\beta$, δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu 2\beta-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha=1$.

Θ6 Αν $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, δείξτε ότι:

$$\varepsilon\varphi\left(\alpha+\beta-\tfrac{\pi}{3}\right)+\varepsilon\varphi\left(\beta+\gamma-\tfrac{\pi}{3}\right)+\varepsilon\varphi\left(\gamma+\alpha-\tfrac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(\alpha+\beta-\tfrac{\pi}{3}\right)\varepsilon\varphi\left(\beta+\gamma-\tfrac{\pi}{3}\right)\varepsilon\varphi\left(\gamma+\alpha-\tfrac{\pi}{3}\right).$$

Θ7 Δείξτε ότι:

1) $\dfrac{\eta\mu^2 2\alpha-4\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2 2\alpha+4\eta\mu^2\alpha-4}=\varepsilon\varphi^4\alpha$.

2) $\dfrac{\eta\mu(x+y)-2\eta\mu x+\eta\mu(x-y)}{\sigma\upsilon\nu(x+y)-2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu(x-y)}=\varepsilon\varphi x$.

3) $\eta\mu\frac{5\pi}{13}-\eta\mu\frac{3\pi}{13}+\eta\mu\frac{10\pi}{13}-\eta\mu\frac{8\pi}{13}=0$.

4) $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

5) $\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2 2\omega+\sigma\upsilon\nu^2 3\omega+\sigma\upsilon\nu^2 4\omega-2=2\sigma\upsilon\nu\omega\,\sigma\upsilon\nu 2\omega\,\sigma\upsilon\nu 5\omega$.

SOS 6) $\dfrac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha\,\eta\mu 6\alpha+\eta\mu 4\alpha\,\eta\mu 13\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha\,\sigma\upsilon\nu 6\alpha+\eta\mu 4\alpha\,\sigma\upsilon\nu 13\alpha}=\varepsilon\varphi 9\alpha$.

Θ8 Δείξτε ότι: σε κάθε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισχύουν:

1) $\beta\,\sigma\upsilon\nu B+\gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$.

2) $E=R\upsilon_\alpha\,\eta\mu A$. 3) $E=\alpha R\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

Θ9 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\eta\mu x+\eta\mu 3x+\eta\mu 5x+\eta\mu 7x=0$. 2) $\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0$.

3) $\sigma\upsilon\nu 7x-\eta\mu 7x=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$. 4) $\eta\mu x-\eta\mu 2x=2\eta\mu^2\frac{x}{2}$.

5) $\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 3x=\sigma\upsilon\nu 5x\,\sigma\upsilon\nu 7x$. 6) $\sigma\upsilon\nu 2x\,\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu 4x\,\eta\mu x$

7) $\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu 3x\,\sigma\upsilon\nu 6x+\eta\mu 4x\,\sigma\upsilon\nu 13x=0$.

Θ10 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3} \\ \eta\mu x+\eta\mu y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\sqrt{2}\end{cases}$. 3) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ 2\eta\mu x\,\eta\mu y=1\end{cases}$.

Θ11 Δείξτε ότι:

1) $\varepsilon\varphi(\alpha+30^\circ)\cdot\varepsilon\varphi(\alpha-30^\circ)=\dfrac{1-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$.

2) $\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x=\dfrac{2(3+\sigma\upsilon\nu 4x)}{1-\sigma\upsilon\nu 4x}$. sos

3) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{3}{2}$.

Θ12 Αν $\eta\mu\alpha=\eta\mu^2\beta$, δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 2\beta=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 4\beta}{4}$

Θ13 Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=0$ και $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma=0$, δείξτε ότι:

1) $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)+\sigma\upsilon\nu(\gamma-\alpha)=-\frac{3}{2}$.

sos 2) $\eta\mu^2(\alpha-\beta)+\eta\mu^2(\beta-\gamma)+\eta\mu^2(\gamma-\alpha)=\frac{9}{4}$.

3) $\sigma\upsilon\nu^3(\alpha+x)+\sigma\upsilon\nu^3(\beta+x)+\sigma\upsilon\nu^3(\gamma+x)=3\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)\sigma\upsilon\nu(\beta+x)\sigma\upsilon\nu(\gamma+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Θ14 Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $\frac{\pi}{12}$ και να αποδειχθεί η σχέση: $\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{12}+\varepsilon\varphi^2\frac{5\pi}{12}=14$

(Πολυτεχνείο).

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

Κάθε συνάρτηση $\alpha:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ (ή $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$) λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών ή απλούστερα **πραγματική ακολουθία**. (Όταν δεν αναφέρεται το Π.Ο. της ακολουθίας θα εννοείται το $\mathbb{N}^*$).

Η τιμή μιας ακολουθίας α στο ν συμβολίζεται α_ν (αντί $\alpha(\nu)$) και λέγεται όρος με δείκτη ν. Έτσι μια ακολουθία συμβολίζεται:

i) $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ ή (α_ν) ή αναλυτικότερα $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_\nu,\dots$

ii) $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ » » » » $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_\nu,\dots$

▼ ΤΡΟΠΟΙ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΥ ΜΙΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ.

1) Με το γενικό της όρο α_ν. π.χ. Η ακολουθία $\alpha_\nu=(-1)^\nu\cdot\frac{1}{2\nu}$.

2) Επαγωγικά με αναδρομικό (αναγωγικό) τύπο. ↔ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ

i) Αναδρομική ακολουθία α΄ τάξης: Δίνεται ο 1ος όρος της και μια αναδρομική σχέση που εκφράζει τον όρο ν+1 τάξης συναρτήσει του προηγούμενου όρου ν τάξης. π.χ. $(\alpha_\nu):\begin{cases}\alpha_1=2\\ \alpha_{\nu+1}=3\alpha_\nu-1\end{cases}$.

ii) Αναδρομική ακολουθία β΄ τάξης: Δίνονται ο 1ος και ο 2ος όρος της και μια αναδρομική σχέση που εκφράζει τον όρο ν+2 τάξης συναρτήσει των όρων ν και ν+1 τάξης. π.χ. $(\alpha_\nu):\begin{cases}\alpha_1=3,\ \alpha_2=4\\ \alpha_{\nu+1}=3\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}\end{cases}$

• Ακολουθία Fibonacci $(\alpha_\nu):\begin{cases}\alpha_1=1,\ \alpha_2=1\\ \alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}\end{cases}$.

iii) Αναδρομική ακολουθία κ΄ τάξης: .... π.χ. $\begin{cases}\alpha_1=1,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=5\\ \alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+2\alpha_{\nu-2}-3\alpha_{\nu-3}\end{cases}$.

▼ ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

Μια ακολουθία (α_ν) είναι:

1) Γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow \alpha_\nu<\alpha_{\nu+1},\ \forall\nu\in\mathbb{N}$. 3) Αύξουσα $\Leftrightarrow \alpha_\nu\le\alpha_{\nu+1},\ \forall\nu\in\mathbb{N}$

2) » φθίνουσα $\Leftrightarrow \alpha_\nu>\alpha_{\nu+1}$, ». 4) Φθίνουσα $\Leftrightarrow \alpha_\nu\ge\alpha_{\nu+1}$, ».

• Σταθερή $\Leftrightarrow \alpha_\nu=\alpha_{\nu+1},\ \forall\nu\in\mathbb{N}$.

▼ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΙΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

α) Από το πρόσημο της διαφοράς $\Delta=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$, ως εξής:

$\Delta>0\Leftrightarrow(\alpha_\nu)\uparrow$, $\Delta\ge0\Leftrightarrow(\alpha_\nu)\uparrow$, $\Delta<0\Leftrightarrow(\alpha_\nu)\downarrow$, $\Delta\le0\Leftrightarrow(\alpha_\nu)\downarrow$, $\Delta=0\Leftrightarrow(\alpha_\nu)$ σταθ.

β) Αν οι όροι της (α_ν) διατηρούν πρόσημο, από τη σύγκριση του λόγου $\Lambda=\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ με τη μονάδα. Έτσι, αν $\alpha_\nu>0,\ \forall\nu\in\mathbb{N}$ και

$\Lambda>1\Leftrightarrow(\alpha_\nu)\uparrow$, $\Lambda\ge1\Leftrightarrow(\alpha_\nu)\uparrow$, $\Lambda<1\Leftrightarrow(\alpha_\nu)\downarrow$, $\Lambda\le1\Leftrightarrow(\alpha_\nu)\downarrow$ $\Lambda=1\Leftrightarrow(\alpha_\nu)$ σταθ.

γ) Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, αφού βρούμε μια ένδειξη μονοτονίας μεταξύ δύο ή τριών πρώτων όρων της ακολουθίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Να βρεθούν οι 5 πρώτοι όροι των ακολουθιών με γενικούς όρους:
$\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\nu}$, $\alpha_\nu = \nu^2+1$, $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu^2}$, $\alpha_\nu = 2(-1)^\nu$, $\alpha_\nu = \frac{2\nu}{3^\nu}$, $\alpha_\nu = \eta\mu\frac{\nu\pi}{2}$.

② Να γραφούν οι 4 πρώτοι όροι των ακολουθιών:
$\alpha_\nu = \frac{\nu^2-(-1)^\nu\cdot\nu+1}{\nu+1}$, $\beta_\nu = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}$, $\gamma_\nu = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2\nu+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3\nu-1)}$

$\delta_\nu = 1+2+3+\cdots+\nu$, $\varepsilon_\nu = \frac{(-1)^\nu(\nu+2)}{\nu+1}$, $\zeta_\nu = \frac{2\nu+3}{2^\nu}$, $\eta_\nu = 1^2+2^2+\cdots+\nu^2$.

③ Όμοια, των ακολουθιών:
1) $(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_1 = 2\\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu+1\end{cases}$. 2) $(\beta_\nu): \begin{cases}\beta_1 = 1\\ \beta_{\nu+1} = \sqrt{1+\beta_\nu}\end{cases}$. 3) $(\gamma_\nu): \begin{cases}\gamma_1 = -1\\ \gamma_{\nu+1} = \gamma_\nu^\nu\end{cases}$.

④ Να οριστούν επαγωγικά (δηλ. να γίνουν αναδρομικές) οι ακολουθίες:
$\alpha_\nu = 4\nu+5$, $\beta_\nu = 3\nu-1$, $\gamma_\nu = \frac{3}{\nu}$, $\delta_\nu = 2^\nu$, $\varepsilon_\nu = (-1)^\nu\cdot\nu$.

⑤ Δίνεται η ακολουθία:
$(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1\\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu+\alpha_{\nu-1},\ \forall\nu>1\end{cases}$ Δείξτε ότι: $\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\cdots+\alpha_{2\nu} = \alpha_{2\nu+1}-1$.

⑥ Δίνεται η ακολουθία $(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_1 = \sqrt{2}\\ \alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu\end{cases}$, $\nu\in\mathbb{N}$.
Να βρεθεί ο γενικός της όρος α_ν.

⑦ Δείξτε ότι οι ακολουθίες (α_ν) και (β_ν) είναι σταθερές, όπου
$\alpha_\nu = (-1)^\nu+(-1)^{\nu+1}$, $\nu\in\mathbb{N}$ και $(\beta_\nu): \begin{cases}\beta_1 = 1\\ \beta_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\beta_\nu+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\end{cases}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

⑧ Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες:
$\alpha_\nu = 5\nu+7$, $\beta_\nu = \nu^2+2$, $\gamma_\nu = (-1)^\nu\cdot 3\nu$, $\delta_\nu = \frac{\nu+5}{\nu^2+1}$, $\varepsilon_\nu = 2\nu-\nu^2$.

⑨ Όμοια, για τις ακολουθίες:
1) $\alpha_\nu = \frac{2\nu^2-\nu}{\nu+1}$, $\nu\in\mathbb{N}$. 2) $\alpha_\nu = \frac{2\nu-7}{\nu+3}$, $\nu\in\mathbb{N}$. 3) $\alpha_\nu = \frac{\nu+2}{2^\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

4) $\alpha_\nu = \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2\nu+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2\nu+3)}$. 5) $\alpha_\nu = \frac{2^\nu}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu}$. 6) $\alpha_\nu = \sqrt{2\nu}-\sqrt{\nu}$.

⑩ Όμοια, για τις ακολουθίες:
$(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_1 = 1\\ \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu}\end{cases}$. $(\beta_\nu): \begin{cases}\beta_1 = 6\\ \beta_{\nu+1} = \sqrt{3+\beta_\nu}\end{cases}$. $(\gamma_\nu): \begin{cases}\gamma_1 = 3\\ \gamma_{\nu+1} = \frac{3\gamma_\nu-4}{2}\end{cases}$.

⑪ Αν η (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}$ είναι ↑ και $\beta\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι η $(\gamma_\nu): \gamma_\nu = \beta-\alpha_\nu$ είναι ↓.

ΠΡΟΟΔΟΙ.

▼ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Λέγεται η ακολουθία $(α_ν)$, αν υπάρχει $ω \in \mathbb{R}$: $α_{ν+1} = α_ν + ω$, $\forall ν$.

Το $ω$ → Διαφορά, διότι $ω = α_{ν+1} - α_ν$.

▼ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ

Λέγεται η ακολουθία $(α_ν)$ με $α_1 \neq 0$, αν υπάρχει $λ \in \mathbb{R}^*$: $α_{ν+1} = α_ν \cdot λ$, $\forall ν$.

Το $λ$ → Λόγος, διότι $λ = \frac{α_{ν+1}}{α_ν}$.

$α_ν = α_1 + (ν-1)ω$ ← ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ → $α_ν = α_1 λ^{ν-1}$.

$2β = α + γ$ ← α, β, γ διαδοχικοί όροι → $β^2 = αγ$.

$Σ_ν = \frac{α_1 + α_ν}{2} \cdot ν = \frac{2α_1 + (ν-1)ω}{2} \cdot ν$ ← ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν πρώτων όρων → $Σ_ν = \frac{α_ν λ - α_1}{λ - 1} = \frac{α_1(λ^ν - 1)}{λ - 1}$

- Αν $ω = 0 \Rightarrow Σ_ν = ν \cdot α_1$.
- Αν $λ = 1 \Rightarrow Σ_ν = ν \cdot α_1$

ΜΕΣΟΣ

$M_A = \frac{α_1 + α_2 + \cdots + α_ν}{ν}$ ← Αριθμητικός ← Γεωμετρικός → $M_Γ = \sqrt[ν]{α_1 α_2 \cdots α_ν}$

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

$α, \underbrace{\ldots\ldots}_{μ}, β$ ← ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ → $α, \underbrace{\ldots\ldots}_{μ}, β$

- $ν = μ + 2 \Rightarrow ω = \frac{β - α}{μ + 1}$
- $ν = μ + 2 \Rightarrow λ^{μ+1} = \frac{β}{α}$ → Διώνυμη εξίσωση

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

$ω > 0 \Rightarrow \uparrow$, $ω < 0 \Rightarrow \downarrow$

$ω = 0 \Rightarrow$ σταθερή με τιμή $α_1$.

$λ > 1$ και $\begin{cases} α_1 > 0 \Rightarrow \uparrow \\ α_1 < 0 \Rightarrow \downarrow \end{cases}$, $λ = 1 \Rightarrow$ σταθερή.

$0 < λ < 1$ και $\begin{cases} α_1 > 0 \Rightarrow \downarrow \\ α_1 < 0 \Rightarrow \uparrow \end{cases}$ • $λ < 0 \Rightarrow$ "όχι μονότονη

▼ ΒΑΣΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ.

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + ν = \frac{ν(ν+1)}{2}$

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + ν^2 = \frac{ν(ν+1)(2ν+1)}{6}$

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + ν^3 = \frac{ν^2(ν+1)^2}{4}$ • $S_3 = S_1^2$.

ΔΙΝΕΤΑΙ

- Άθροισμα και περιττό πλήθος όρων:
- Γινόμενο και περιττό πλήθος όρων:

Βάζω x το μεσαίο όρο της προόδου, οπότε η

Αριθ. Πρ. είναι: $\ldots, x - 2ω, x - ω, x, x + ω, x + 2ω, \ldots$

Γεωμ. Πρ. είναι: $\ldots, \frac{x}{λ^2}, \frac{x}{λ}, x, xλ, xλ^2, \ldots$

- Άθροισμα και άρτιο πλήθος όρων:
  Βάζω $x - ω, x + ω$ τους 2 μεσαίους όρους:
  $\ldots, x - 3ω, x - ω, x + ω, x + 3ω, \ldots$ με διαφορά $2ω$
- Γινόμενο και άρτιο πλήθος όρων:
  Βάζω $\frac{x}{λ}, x \cdot λ$ τους 2 μεσαίους όρους:
  $\ldots, \frac{x}{λ^3}, \frac{x}{λ}, xλ, xλ^3, \ldots$ με λόγο $λ^2$.

▼ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Είναι η $α_1, α_2, \ldots, α_ν, \ldots$ όταν η $\frac{1}{α_1}, \frac{1}{α_2}, \ldots, \frac{1}{α_ν}, \ldots$ είναι Αριθμητική.

- Αν $α, β, γ$ διαδοχικοί → $β = \frac{2αγ}{α + γ}$

▼ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡ.

Είναι η Γ.Π. με λόγο $λ$, όταν $|λ| < 1$.

Άθροισμα απείρων όρων: $Σ_\infty = \frac{α_1}{1 - λ}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(12) Στην Αριθμητική πρόοδο $3, 7, 11, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ είναι $\alpha_\nu = 79$.
Να βρείτε τα: ω, ν, α_{11}, Σ_{20}.

(13) Σε Αριθμητική πρόοδο δίνονται: $\alpha_9 = 15$, $\Sigma_{12} = 165$. Να βρεθεί η πρόοδος

(14) Σε Αριθμ. πρ. δίνονται: $\nu = 11$, $\alpha_{11} = 92$, $\Sigma_{11} = 517$. Να βρεθεί η πρόοδος.

(15) Σε Αριθμ. πρ. δίνονται: $\alpha_1 = 58$, $\omega = -3$, $\Sigma_\nu = 578$. Να βρεθούν οι ν και α_ν.

(16) Δείξτε ότι: το άθροισμα των ν πρώτων περιττών φυσικών, ισούται με το τετράγωνο του πλήθους των.

(17) Να βρεθεί το άθροισμα όλων των πολλαπλασίων του 3, που περιέχονται μεταξύ του 100 και του 500.

(18) Σε Αριθ. πρ. το άθροισμα του $3^{ου}$ και $7^{ου}$ όρου είναι 40, ενώ το άθροισμα του $6^{ου}$ και $8^{ου}$ όρου είναι 56. Να βρεθεί η πρόοδος.

(19) Σε Αριθ. πρ. είναι $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2\nu + 2$. Δείξτε ότι: $\Sigma_\nu = \nu^3$.

(20) Να βρεθεί Αριθ. πρ. με 12 όρους, αν το άθροισμα των τεσσάρων μεσαίων όρων της είναι 74 και το γινόμενο των άκρων όρων 70.

(21) Να βρεθούν οι γωνίες πενταγώνου αν ξέρουμε ότι σχηματίζουν αριθ. πρ. και η μικρότερη είναι 60°.

(22) Σε Αριθ. πρ. (α_ν) ο $2^{ος}$ και $8^{ος}$ όρος διαφέρουν κατά 24 ενώ το άθροισμα του $4^{ου}$ και ~~$10^{ου}$~~ όρου είναι 70. $12^{ου}$
Να βρείτε τη πρόοδο (α_ν), αν: 1) (α_ν) αύξουσα. 2) (α_ν) φθίνουσα.
Μετά, να βρείτε το άθροισμα των όρων που είναι ανάμεσα στους α_8 και α_{25}.

(23) Να βρεθεί ο κ ώστε οι παρακάτω αριθμοί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. 1) $4-\kappa$, $3+2\kappa$, $6+7\kappa$. 2) 3κ, κ^2-2, κ^2.

(24) Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Αριθ. Πρ., τότε και οι αριθμοί $x = \alpha^2 - \beta\gamma$, $y = \beta^2 - \alpha\gamma$, $z = \gamma^2 - \alpha\beta$ είναι διαδοχικοί όροι Αριθ. προόδου.
Τι λόγο έχουν οι διαφορές των δυο προόδων;

(25) Τα ψηφία ενός τετραψήφιου αριθμού είναι διαδοχικοί όροι Αριθ. Πρ. Αν το τελευταίο ψηφίο είναι τετραπλάσιο του πρώτου, να βρεθεί ο αριθμός.

(26) Αν $\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{1}{\beta+\gamma}, \frac{1}{\gamma+\alpha}$ Αριθ. Πρ., τότε $\beta^2, \alpha^2, \gamma^2$ Αριθ. Πρόοδος.

(27) α, β, γ αριθμ. Πρ. $\Longrightarrow$ $\beta+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta$ αριθμ. Πρόοδος.

(28) Να βρεθούν πέντε διαδοχικοί όροι Αριθμ. Πρ., αν ξέρουμε ότι το άθροισμά τους είναι 5 και $\alpha_2 \cdot \alpha_4 = -8$.

(29) Να βρεθούν 4 διαδοχικοί όροι Αριθ. πρ. που έχουν άθροισμα 26 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 214.

(30) Να βρεθούν 4 διαδοχικοί όροι Αριθμ. πρ., αν $\alpha_1 + \alpha_4 = 20$ και $\alpha_2 \cdot \alpha_3 = 96$.

(31) Ανάμεσα στους αριθμούς 9 και 34 να παρεμβάλλεται άλλους, ώστε να προκύψουν 11 διαδοχικοί όροι Αριθμ. Προόδου.

(32) Πόσους αριθμητικούς ενδιαμέσους πρέπει να παρεμβάλουμε μεταξύ των αριθμών 1 και 19 ώστε ο λόγος του $2^{ου}$ ενδιαμέσου προς τον τελευταίο ενδιάμεσο να είναι ίσος με $1/6$.

(33) Δείξτε ότι το άθροισμα των μ αριθμητικών ενδιαμέσων που παρεμβάλλονται μεταξύ 1 και μ^2, είναι $\frac{\mu(\mu^2+1)}{2}$.

(34) Να βρεθεί πόσους αριθμητικούς ενδιάμεσους μπορούμε να παρεμβάλουμε μεταξύ -6 και 48, ώστε $x_7 = 2x_4$. (x_i οι ενδιάμεσοι)

(35) Σε αριθμ. πρ. ισχύει $\omega = 2\alpha_1$. Δείξτε ότι: $\nu^2 \cdot \Sigma_\mu = \mu^2 \cdot \Sigma_\nu$.

(36) Να βρεθεί η Αριθ. πρ. στην οποία ισχύει: $\Sigma_\nu = \nu(3\nu+1)$ $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

(37) Σε αριθμ. πρ. ισχύει $\Sigma_\nu = (\nu+1)\alpha_\nu$. Δείξτε ότι: $\alpha_1 = \frac{(1-\nu)\cdot(\nu+2)\omega}{2}$.

(38) Σε Αριθμ. πρ. δείξτε ότι: $\frac{\mu-\nu}{\lambda}\Sigma_\lambda + \frac{\nu-\lambda}{\mu}\cdot\Sigma_\mu + \frac{\lambda-\mu}{\nu}\cdot\Sigma_\nu = 0$.

(39) Δίνονται οι Αρμονικές πρόοδοι: $\frac{1}{25}, \frac{1}{33}, \frac{1}{41}, \ldots$ και $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \ldots$. Να βρείτε τον $31^{ο}$ όρο της $1^{ης}$ και τον $8^{ο}$ όρο της $2^{ης}$.

(40) Να βρείτε τον $12^{ο}$ όρο μιας Αρμον. πρ. $\alpha_3 = \frac{1}{4}$ και $\alpha_8 = \frac{3}{8}$.

(41) Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $1+\kappa, 3+\kappa, 9+\kappa$ να είναι διαδοχικοί όροι Αρμονικής προόδου.

(42) Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου, δείξτε ότι:

1) $\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma} = 2$. 2) $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1}{\beta-\gamma}$.

(43) Αν οι $\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}, \beta, \frac{\beta+\gamma}{1-\beta\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής πρ. Δείξτε ότι: οι $\alpha, \frac{1}{\beta}, \gamma$ είναι διαδοχικοί Αρμονικής πρ.

(44) α, β, γ Αρμον. πρ. $\Longrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$.

45) Αν α,β,γ Αριθμ.πρ. και β,γ,δ Αρμον.πρ., τότε $\alpha\delta=\beta\gamma$.

46) Αν η παράσταση $\Pi=\alpha(\beta-\gamma)x^2+\beta(\gamma-\alpha)yx+\gamma(\alpha-\beta)y^2$ είναι τέλειο τετράγωνο δείξτε ότι οι α,β,γ αποτελούν Αρμονική πρ.

47) Μεταξύ των αριθμών 0,25 και 0,025 να παρεμβληθούν 18 αριθμοί, ώστε να σχηματιστεί Αρμονική πρόοδος.

48) Μεταξύ των αριθμών $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{35}$ να παρεμβληθούν 7 αρμονικοί ενδιάμεσοι.

49) Να βρεθεί το πλήθος ν των όρων μιας Γεωμετρικής προόδου, όταν:

1) $\alpha_1=4$, $\lambda=4$, $\Sigma_\nu=5460$. 3) $\alpha_4=13$, $\alpha_6=117$, $\alpha_\nu=9477$.

2) $\alpha_1=4$, $\alpha_\nu=972$, $\Sigma_\nu=1456$. 4) $\alpha_\nu=81$, $\lambda=\frac{3}{4}$, $\Sigma_\nu=781$.

50) Να βρεθεί η Γεωμ.πρ. που έχει 1ο όρο τη μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $x^3-2x^2-25x+50=0$ και λόγο τη μεγαλύτερη ρίζα. Μετά, να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της, αν πάρουμε σαν ν το τριπλάσιο της 3ης ρίζας της εξίσωσης.

51) Σε Γεωμ. Πρ. το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της είναι 40 και το άθροισμα των 8 πρώτων όρων είναι 3280. Να βρεθεί η πρόοδος.

52) Σε Γεωμ. Πρ. είναι $\Sigma_6=28\Sigma_3$ και $\Sigma_4=80$. Να βρεθεί η πρόοδος.

53) Σε Γεωμ. Πρ. είναι $\lambda=5$, $\nu=7$, $\alpha_\nu=31250$. Να βρεθούν οι α_1 και Σ_ν.

54) Σε Γεωμ. Πρ. είναι $\alpha_3=20$ και $\alpha_7=320$. Να βρεθεί η πρόοδος.

55) Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $2x-2$, $3x+6$, $12x+6$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

56) Αν οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, δείξτε ότι: $\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

57) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. πρ., δείξτε ότι:

1) $(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)-(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)=(\beta-\gamma)^2$

2) $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2=(\alpha-\delta)^2$

$\beta^2=\alpha\gamma$
$\gamma^2=\beta\delta$
$\alpha\delta=\beta\gamma$.

58) Αν α,β,γ Γεωμ. πρ., δείξτε ότι: $\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\alpha}{\gamma}$.

59) Να βρεθούν 4 διαδοχικοί όροι Γεωμ. πρ., αν το γινόμενό τους είναι 729 και ο 4ος όρος ισούται με το γινόμενο των δύο μεσαίων.

(60) Να βρεθούν 3 διαδοχικοί όροι Γεωμ. Πρ. με άθροισμα 52 και γινόμενο 1728.

(61) Να βρεθούν 3 διαδοχικοί όροι γνησίως αύξουσας Γεωμ. Πρ. που έχουν άθροισμα 91 και η διαφορά του πρώτου από τον τρίτο είναι 56.

(62) Τρεις ακέραιοι είναι διαδοχικοί όροι Γεωμ. Πρ. και έχουν γινόμενο 1000 και άθροισμα 35. Να βρεθούν οι αριθμοί.

(63) Μεταξύ των αριθμών 3 και 192 να παρεμβληθούν δύο γεωμετρικοί ενδιάμεσοι.

(64) Μεταξύ των αριθμών 5 και 160 να παρεμβληθούν 4 γεωμετρικοί ενδιάμεσοι.

(65) Ανάμεσα στις ρίζες της εξίσωσης $2x^2-5x-3=0$ να παρεμβάλεται 4 γεωμετρικούς ενδιάμεσους.

(66) Μεταξύ των αριθμών 2 και -1024 να παρεμβληθούν 8 γεωμετρικοί ενδιάμεσοι. Στη Γεωμ. Πρ. που προκύπτει να υπολογιστεί το άθροισμα των 7 πρώτων θετικών όρων της.

(67) Να σχηματιστούν οι Γεωμ. Πρ. στις οποίες οι 3 πρώτοι όροι έχουν άθροισμα 42 και $\alpha_{11}=16\alpha_7$.

(68) Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

1) $S=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1)(\nu+2)$. ⟷ Βλέπε S_1, S_2, S_3

2) $S=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-(2\nu-1)^2+(2\nu)^2$. Φυλ. 51.

(69) Όμοια, τα αθροίσματα:

1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$ 2) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots$

3) $\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\cdots\ (\alpha>\beta>0)$. 4) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}+\cdots\ (\alpha>1)$.

5) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^\nu+1}+\frac{1}{(2^\nu+1)^2}+\cdots\right)+\cdots$

(70) Να γραφούν με κλασματική μορφή, οι δεκαδικοί αριθμοί:

$\alpha=0,2323\ldots$, $\beta=4,7\overline{32}$, $\gamma=0,4581581581\ldots$

(71) Σε απολύτως φθίνουσα Γεωμ. Πρ. ο α_1 είναι το μισό του αθροίσματος των απείρων όρων της και $\alpha_1+\alpha_2=20$. Να βρεθεί η πρόοδος.

(72) Σε φθίνουσα Γεωμ. Πρ. δίνονται $\alpha_1+\alpha_3=30$ και $3\alpha_1=2\Sigma_\infty$.
Να βρεθεί η πρόοδος.

(73) Το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας Γεωμ. Πρ.
είναι $9/2$ και $\alpha_1-\alpha_2=2$. Να βρεθεί η πρόοδος.

(74) Το γινόμενο των τριών πρώτων όρων φθίνουσας Γεωμ. Πρ.
είναι 216 και το άθροισμα των κύβων τους 1971.
Να βρεθεί το άθροισμα των απείρων όρων της.

(75) Τετραγώνου πλευράς α συνδέω τα μέσα των πλευρών του.
Σχηματίζεται τετράγωνο του οποίου συνδέω τα μέσα κ.ο.κ.
Των απείρων τετραγώνων που σχηματίζονται να βρεθεί το
άθροισμα των περιμέτρων και των εμβαδών.

(76) Το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας Γεωμ. Πρ.
είναι 6 και το άθροισμα των τετραγώνων τους 18.
Να βρεθεί η πρόοδος.

(77) Σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, οι διαστάσεις του είναι
διαδοχικοί όροι γεωμ. πρ., το άθροισμα των ακμών του
είναι 168 και ο όγκος του 512. Να βρεθούν οι διαστάσεις.

(78) Τρεις αριθμοί x, y, z έχουν άθροισμα 147.
Αν οι x, y, z είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής προόδου
και οι x, z, y " " " Γεωμετρικής " ,
να βρείτε τα x, y, z.

(79) Οι αριθμοί x, y, z αποτελούν Γεωμετρική πρόοδο.
Αν ο μεσαίος αυξηθεί κατά 2, τότε αποτελούν
αριθμητική πρόοδο. Να βρεθούν οι 3 αριθμοί, όταν
το άθροισμά τους είναι 28.

(80) Αν α, β, γ Αριθμητική πρόοδος,
β, γ, δ Γεωμετρική "
και γ, δ, x Αρμονική " ,
δείξτε ότι: $x=\dfrac{(2\beta-\alpha)^2}{\alpha}$

(81) Αν οι α, β, γ είναι συγχρόνως διαδοχικοί όροι Αριθμητικής
και Γεωμετρικής προόδου και $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\neq 0$, δείξτε ότι: $\alpha=\beta=\gamma$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV.

Θ1 Δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $x^3-3x^2-13x+15=0$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Θ2 Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες:
$\alpha_\nu=\frac{1}{\nu+1}$, $\beta_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2$, $\gamma_\nu=\frac{\nu^2+1}{\nu}$.

Θ3 Αν οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι Αρμονικής προόδου, δείξτε ότι: $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}$.

Θ4 Σε Γεωμετρική πρόοδο, είναι: $\alpha_3=6$ και $\alpha_7=96$. Να βρεθεί η πρόοδος και το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της.

Θ5 Να βρεθεί ο x ώστε οι αριθμοί $x+2$, $3x+1$, $3x^2-7$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Θ6 Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων φθίνουσας Γεωμ. Πρ. είναι 56 και το άθροισμα των απείρων όρων της 64. Να βρεθεί η πρόοδος.

Θ7 Σε Αριθμητική πρόοδο είναι: $\alpha_1=-2$ και $\omega=3$. Να βρεθεί ο μέσος αριθμητικός των 27 πρώτων όρων της.

Θ8 Σε Αριθμ. Πρ. είναι: $\alpha_5+\alpha_{10}=8$ και $\Sigma_{15}=75$. Να βρεθεί η πρόοδος.

Θ9 Αν $x+y+\omega+z=126$, $\omega-y=14$ και οι x,ω,z αποτελούν Αριθμ. Πρ. ενώ οι x,y,z Γεωμ. Πρ., να βρεθούν οι x,y,ω,z.

Θ10 Να βρεθεί το άθροισμα: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$

Θ11 Σε Γεωμ. Πρ. με 2ν όρους, το άθροισμα των όρων άρτιας τάξης είναι Σ_1 και το άθροισμα των όρων περιττής τάξης είναι Σ_2. Να βρεθεί η πρόοδος.

Θ12 Να βρεθούν 4 αριθμοί που σχηματίζουν αριθμ. πρ., αν το γινόμενο των άκρων όρων της είναι 45 και το γινόμενο των μέσων όρων της είναι 77.

Θ13 Μεταξύ δύο αριθμών που έχουν άθροισμα 36/5 παρεμβάλλονται μ αριθμητικοί μέσοι με άθροισμα 18. Να βρεθεί ο μ.

Θ14) Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ οι πλευρές και οι γωνίες του είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικών προόδων. Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Θ15) Στο τριώνυμο $\varphi(x)=x^2+\alpha x+\beta$ οι συντελεστές $1, \alpha, \beta$, αποτελούν αύξουσα αριθμ. πρ. και οι ρίζες του $\rho_{1,2}$ πληρούν τη σχέση $\rho_1^2+\rho_2^2=62$. Να βρεθούν τα α, β.

Θ16) Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμ. Πρ., δείξτε ότι και οι $x=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, $y=\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2$, $z=\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου.

Θ17) Δείξτε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμ. Προόδου.

Θ18) Σε αριθμ. Πρ. είναι $\alpha_1=\kappa$ και $\alpha_{2\nu}=\lambda$. Δείξτε ότι: $\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}=\kappa+\lambda$.

Θ19) Αν οι πλευρές α, β, γ και η ημιπερίμετρος τ τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, είναι διαδοχικοί όροι Αριθμ. Πρ., δείξτε ότι το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο.

Θ20) Το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου είναι $E=54$ και οι πλευρές του αποτελούν Αριθμ. Πρ. Να βρεθούν οι πλευρές του.

Θ21) Οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αποτελούν Αριθμ. Πρ. Δείξτε ότι: η διαφορά ω ισούται με την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

* Θ22) Αν οι πλευρές τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι Γεωμ. Πρ. με λόγο λ, δείξτε ότι: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\lambda<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Θ23) Οι γωνίες τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ αποτελούν Γεωμ. Πρ. και $\hat{\Delta}=9\hat{B}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες.

Θ24) Σε ισόπλευρο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ εγγράφω κύκλο, και φέρνω εφαπτομένη $//B\Gamma$. Στο νέο ισόπλευρο που σχηματίζεται εγγράφω νέο κύκλο και φέρνω εφαπτομένη $//B\Gamma$ ... κ.ο.κ. Να βρεθεί: το άθροισμα των Εμβαδών των απείρων κύκλων.

Θ25) Σε κύκλο (O, R) εγγράφω κανονικό εξάγωνο, σ' αυτό νέο κύκλο και νέο κανονικό εξάγωνο ... κ.ο.κ. Να βρεθεί το άθροισμα των περιμέτρων και των εμβαδών των απείρων εξαγώνων.

Θ26) Σε Αριθμ. Πρ. είναι $\alpha_\lambda=\nu$, $\alpha_\mu=\lambda$, $\alpha_\nu=\mu$. Δείξτε ότι: $\lambda^3+\mu^3+\nu^3=3\lambda\mu\nu$.

Θ27) Να υπολογιστούν: 1) $\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\ldots}}}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. 2) $\sqrt{\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta\ldots}}}$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}_+^*$.

ΕΚΘΕΤΙΚΗ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.

▼**ΕΚΘΕΤΙΚΗ** είναι η συνάρτηση $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ με $f_\alpha(x) = \alpha^x$ και $\alpha > 0$

- Αν $\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

Ιδιότητες:

1) $\alpha^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_\alpha(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2) $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 + x_2} \Rightarrow f_\alpha(x_1) \cdot f_\alpha(x_2) = f_\alpha(x_1 + x_2)$.

3) $\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 - x_2} \Rightarrow f_\alpha(x_1) : f_\alpha(x_2) = f_\alpha(x_1 - x_2)$.

4) $(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2} \Rightarrow f_{\alpha^{x_1}}(x_2) = f_{\alpha^{x_2}}(x_1) = f_\alpha(x_1 x_2)$.

5) $(\alpha\beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x \Rightarrow f_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x) \cdot f_\beta(x)$.

6) $(\alpha : \beta)^x = \alpha^x : \beta^x \Rightarrow f_{\alpha:\beta}(x) = f_\alpha(x) : f_\beta(x)$.

8) $\alpha > 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^x > 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ \alpha^x = 1, \text{ για } x = 0 \\ 0 < \alpha^x < 1, \forall x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

9) $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha^x < 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ \alpha^x = 1, \text{ για } x = 0 \\ \alpha^x > 1, \forall x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$

10) $\alpha > \beta \wedge x > 0 \Rightarrow \alpha^x > \beta^x$.
$\alpha > \beta \wedge x < 0 \Rightarrow \alpha^x < \beta^x$.

- 7) Αν $\alpha \neq 1$ η f_α είναι "1-1 και επί".

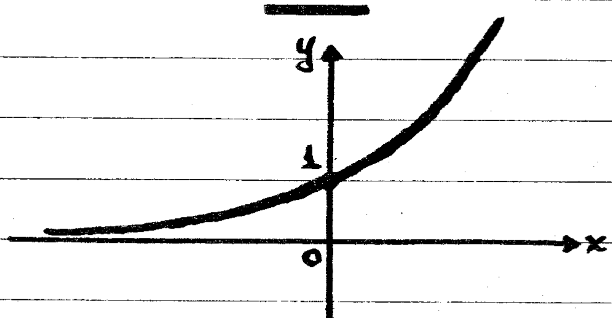
▼**Μονοτονία της f_α** ⟷ Εξαρτάται από το θετικό αριθμό α.

1) Αν $\alpha > 1 \leftrightarrow f_\alpha \uparrow$. 2) Αν $\alpha = 1 \leftrightarrow f_\alpha$ σταθερή. 3) Αν $0 < \alpha < 1 \leftrightarrow f_\alpha \downarrow$.

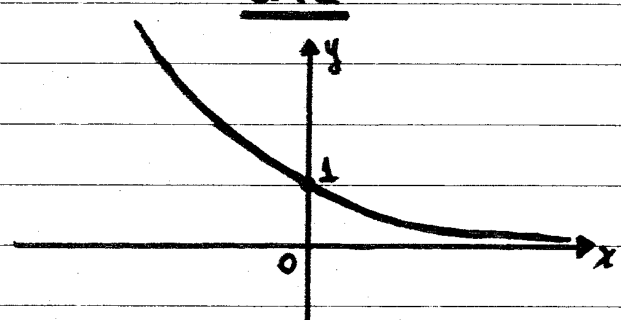
▼**Γραφική παράσταση της f_α**

- Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 1, διότι $f_\alpha(0) = \alpha^0 = 1$.
- Έχει ασύμπτωτο την ευθεία $y = 0$ (δηλαδή τον άξονα $x'x$).

$\alpha > 1$



$\alpha < 1$



(*)→ Εκθετική συνάρτηση απλά, χωρίς να αναφέρεται η βάση, λέμε τη συνάρτηση $f: f(x) = e^x$ όπου $e \cong 2{,}718281$ άρρητος αριθμός, που είναι το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Δίνονται οι συναρτήσεις: $f_2(x)=2^x$, $f_5(x)=5^x$, $f_{1/2}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f_{1/3}(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.
Να βρεθούν τα εξαγόμενα:
1) $2\cdot f_2(3)-3f_5(2)$. 2) $f_2\left(\frac{1}{2}\right):f_5\left(\frac{1}{2}\right)$. 3) $f_{1/2}\left(\frac{1}{3}\right)\cdot f_{1/3}\left(\frac{1}{2}\right)$.
4) $f_{1/2}(-3)\cdot f_{1/3}(-2)$. 5) $f_5(-2)\cdot f_2(-5)$.

② Αν $f_\alpha : f_\alpha(x)=\alpha^x$, $(\alpha>0)$, να βρεθεί ο α όταν:
1) $f_\alpha(3)=125$. 2) $f_\alpha(-2)=0{,}01$. 3) $f_\alpha(5)=\frac{1}{3125}$. 4) $f_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)=7$.

③ Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η $f: f(x)=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^x$ να είναι: 1) $\uparrow$. 2) $\downarrow$.

④ Δείξτε ότι: 1) $f_4\left(\frac{1}{5}\right)\cdot f_8\left(\frac{1}{5}\right)=2$. 2) $f_3(4)\cdot f_4(3)=5.184$.

⑤ Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ αν: 1) $\left[f_\alpha\left(\frac{1}{7}\right)\right]^{21}=27$. 2) $f_\alpha(5{,}2):f_\alpha(2{,}2)=216$.
3) $$\frac{8\cdot\left[f_\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\right]^8}{f_5(1)\cdot f_3(3)+f_\alpha(4)}=3$$

⑥ Να συγκριθούν με τη μονάδα οι αριθμοί:
1) $f_{2/5}\left(\frac{2}{3}\right)$. 2) $f_{3/2}\left(\frac{2}{3}\right)$. 3) $f_{\sqrt{2}}(-1{,}5)$. 4) $f_{1/3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 5) $f_{5/4}\left(-\frac{1}{3}\right)$.

⑦ Να συγκριθούν οι αριθμοί μ και ν, αν:
1) $f_{3/5}(\mu)<f_{3/5}(\nu)$. 2) $f_{4/3}(\mu)<f_{4/3}(\nu)$. 3) $f_{0,4}(\mu)>f_{0,4}(\nu)$.

⑧ Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=(3x^2-10x+3)^{2x}$.

⑨ Όμοια των συναρτήσεων: 1) $f(x)=(x-1)^x$. 2) $f(x)=(x^3-2x^2+1)^x$

⑩ Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\left(\frac{8}{\alpha^2-1}\right)^x$, $x\in\mathbb{R}$.
Να βρεθεί ο α ώστε να ορίζεται η συνάρτηση.
Στη συνέχεια να βρεθεί ο α αν η f είναι: 1) $\uparrow$ 2) $\downarrow$.

⑪ Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\alpha\cdot x$ και $g(x)=\alpha^x$.
Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι: 1) Οι αριθμοί $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_\nu)$ είναι διαδοχικοί Αριθμητικής Πρ.
2) „ „ $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_\nu)$ „ „ Γεωμετρικής Πρ.

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Είναι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται δύναμη με εκθέτη παράσταση που περιέχει τον άγνωστο.

Διακρίνονται στις μορφές:

▼ **1η ΜΟΡΦΗ** → $\alpha^{f(x)}=\beta$ όπου ο β είναι ή μετατρέπεται σε δύναμη του α. Οπότε $\alpha^{f(x)}=\alpha^{\kappa} \Leftrightarrow f(x)=\kappa$ ← Αλγεβρική εξίσωση.

$\alpha\neq 1$ (Τι συμβαίνει αν $\alpha=1$;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(12) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $3^{x^2-5x+11}=243$. 2) $5^{\sqrt{x}}=625$. 3) $7^{2-|3x|}=1$.

4) $4^{x^3-5x^2+6x+3}=64$. 5) $5^{x^4-10x^2+9}=1$ 6) $10^{x+2}=0{,}001$

7) $(2-\sqrt{3})^{2\sigma\upsilon\nu x-1}=1$. 8) $2^{\sigma\upsilon\nu 2x}=\sqrt{2}$. 9) $2^{3^x}=512$.

$$\left.\begin{matrix}\alpha^{f(x)}=\alpha^{g(x)}\\ \alpha\neq 1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow \dots \text{ Αλγεβρική εξίσωση} \dots$$

(13) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $2^{x^2-2x}=8^{x-2}$. 2) $3^{x}=81^{2-|x+1|}$ 3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7}=\left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$.

4) $100\cdot 10^{x}=1000^{\frac{5}{x}}$. 5) $8^{4x-1}=(16\sqrt{2})^{2x-1}$. 6) $5^{5\sqrt{x}}=\left(5^{\sqrt{x}-4}\right)^{x}$.

▼ **2η ΜΟΡΦΗ** → $f(\alpha^x)=g(\alpha^x)$ ↔ Θέτω $\alpha^x=y$

οπότε καταλήγει στην 1η μορφή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(14) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $4^{x}-7\cdot 2^{x}-8=0$. 2) $3^{x+2}+5\cdot 3^{x}+3^{x-1}-3^{x-2}=128$.

3) $9^{x}-3^{x+1}-3^{x}+3=0$. 4) $5^{2x-1}+3\cdot 5^{x+1}=80$.

5) $2^{2x+1}+1=3\cdot 2^{x}$. 6) $3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=5$.

7) $3^{x-1}-\dfrac{15}{3^{x+1}}+3^{x}-\dfrac{21}{3^{x+1}}=0$. 8) $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot 3^{2\sqrt{x}}+3=0$.

9) $3^{x}-4\sqrt{3^{x}}+3=0$. 10) $3\cdot 81^{1/x}-10\cdot 9^{1/x}+3=0$.

▼ 3η ΜΟΡΦΗ → $f(\alpha^x)=g(\beta^x)$ Διακρίνεται στις περιπτώσεις:

i) $A\cdot\alpha^x=B\cdot\beta^x \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x=\frac{B}{A}$ ← 1η μορφή.

ii) $A\cdot\alpha^{2x}+B\cdot\alpha^x\cdot\beta^x+\Gamma\cdot\beta^{2x}=0$ ↔ Ομογενής. Διαιρώ με β^{2x} και έχω: $A\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x}+B\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x+\Gamma=0$. Θέτω $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x=y$ ... ← 2η μορφή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(15) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $3^{x+1}-2^x=3^{x-1}+2^{x+3}$.
2) $3^{2x+1}-5\cdot6^x+2\cdot4^x=0$.
3) $5\cdot3^{2x}+3\cdot25^x=8\cdot15^x$.
4) $3\cdot2^{x-4}-2^{x-1}=5^{x-2}-6\cdot5^{x-3}$.
5) $5^{x-2}-3\cdot2^{x-3}=7\cdot5^{x-3}-2^x$.
6) $3^{x+2}+9^{x-1}=1458$.
7) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

▼ 4η ΜΟΡΦΗ → $[f(x)]^{g(x)}=1$. Πρέπει: $f(x)>0$ ↔ Βρίσκω το A

Οι λύσεις προκύπτουν από τις εξισώσεις:

i) $f(x)=1$ (της οποίας οι ρίζες είναι δεκτές, αφού $f(x)=1>0$)

ii) $g(x)=0$ (της οποίας δεκτές είναι μόνο οι ρίζες που ανήκουν στο A).

Ειδική περίπτωση: $[f(x)]^{f(x)}=\beta=\alpha^\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha \Leftrightarrow \dots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(16) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $(x^2-3x+2)^{x^2-2x}=1$.
2) $x^{2x^2-3x-2}=1$.
3) $(x^2-5x+4)^{x^3-4x}=1$.
4) $x^x=4$
5) $(x^2-7x+15)^{x^2-7x+15}=27$.
6) $(x^2-3x+4)^{x^2-3x+4}=4$.
7) $(|2x-1|-1)^{|2x-1|-1}=256$
8) $(x^3-2x^2+3)^{2x^4-3x^3-17x^2+27x-9}=1$.

▼ ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

● Επιδιώκω να τα καταστήσω αλγεβρικά, δουλεύοντας συνήθως ως εξής: 1) Αναλύω σε πρώτους παράγοντες τις αριθμητικές βάσεις ώστε να γίνουν ίδιες και εξισώνω τους εκθέτες.

2) Κάνω κατάλληλο βοηθητική αντικατάσταση, συνήθως $a^x = \omega$, $\beta^y = \varphi$.

3) Διαιρώ κατά μέλη

4) Συνδυάζω τα προηγούμενα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

17 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} 4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4^{x-1} \cdot 2^{y-2} = 8 \\ 3^{x-2} \cdot 3^{y-4} = \frac{1}{3} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3^x + 4^y = 13 \\ 3^{2x} - 4^{2y} = 65 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3^x + 2 \cdot 5^y = 77 \\ -3^{x+1} + 5^{y+2} = 544 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5^{3x} \cdot 5^{4y} = 5^{18} \\ 5^{2x} : 5^{7y} = \left(\frac{1}{5}\right)^{17} \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2^x = 5y \\ 5^x = 2y \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3^{x-y} + 2^{x+y} = 11 \\ 2 \cdot 3^{x-y} - 3 \cdot 2^{x+y} = -18 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75 \\ 3^y \cdot 5^x = 45 \end{cases}$ 13) $\begin{cases} 2^{x^2-y^2} = 256 \\ 5x + 3y = 2(10-y) \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 4^x - 9^y = -17 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 172 \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 4 \cdot 2^{x-y} = 304 \end{cases}$

▼ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ως γνωστόν η εκθετική συνάρτηση $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ με $f_\alpha(x) = \alpha^x$ $(\alpha>0)$ αν $\alpha \neq 1$ είναι "1-1 και επί" και γνησίως μονότονη, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f_α^{-1} που είναι επίσης γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.
Η f_α^{-1} λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση α και συμβολίζεται $\log_\alpha$. Δηλαδή: $\log_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $(\alpha>0 \wedge \alpha \neq 1)$

Ο τύπος της (ως γνωστόν) προκύπτει δι' εναλλαγής των x, y δηλαδή: $y = \log_\alpha x \Leftrightarrow \alpha^y = x$

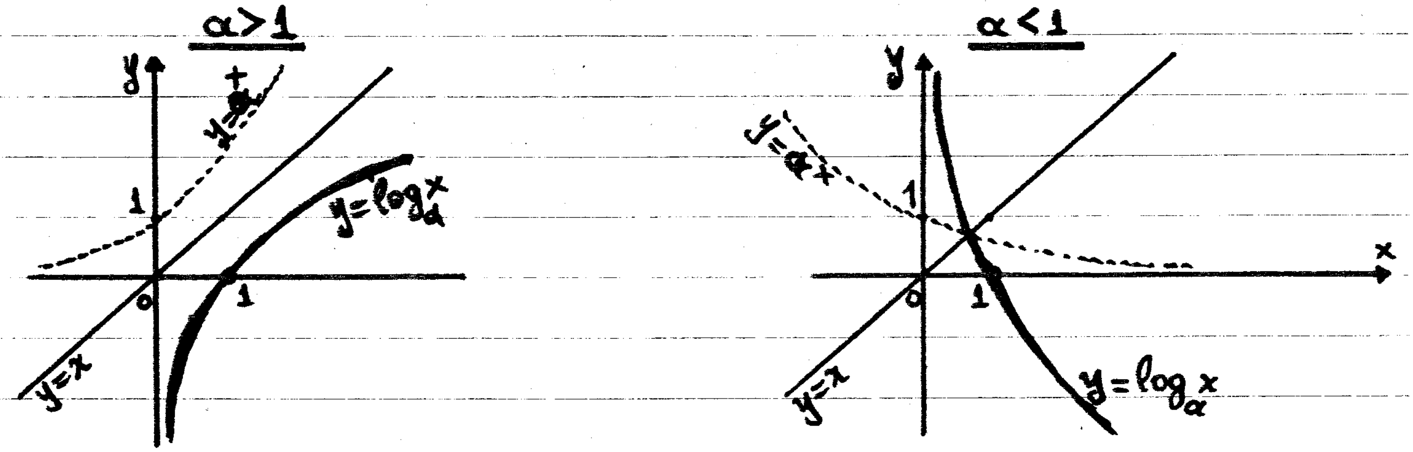
↕ $\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$, $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

● Μονοτονία της $\log_\alpha$ ↔ Εξαρτάται από το α $(\alpha>0 \wedge \alpha \neq 1)$

1) Αν $\alpha>1 \Leftrightarrow \log_\alpha$ ↑.   2) Αν $\alpha<1 \Leftrightarrow \log_\alpha$ ↓

↕ Γραφική παράσταση της $\log_\alpha$

Αφού η $\log_\alpha$ είναι αντίστροφη της f_α, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f_α ως προς τη διχοτόμο $y=x$ της $x\hat{O}y$.
• Έχει ασύμπτωτο την ευθεία $x=0$ (δηλαδή τον άξονα $y'y$).



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $\log_\alpha(x_1 x_2)=\log_\alpha x_1+\log_\alpha x_2$.

2) $\log_\alpha(x_1 : x_2)=\log_\alpha x_1-\log_\alpha x_2$.

3) $\log_\alpha x^\kappa=\kappa\cdot\log_\alpha x$ $\quad(\kappa\in\mathbb{R})$.

↳ $\log_\alpha \sqrt[\nu]{x}=\frac{1}{\nu}\log_\alpha x$ $\quad(\nu\in\mathbb{N}^*)$

4) $\alpha>1 \Rightarrow \begin{cases}\log_\alpha x>0, & \text{αν } x>1.\\ \log_\alpha x<0, & \text{αν } x<1.\end{cases}$

5) $0<\alpha<1 \Rightarrow \begin{cases}\log_\alpha x<0, & \text{αν } x>1.\\ \log_\alpha x>0, & \text{αν } x<1.\end{cases}$

ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ λέγεται ο λογάριθμος με βάση $\alpha=10$. Συμβολισμός: $\log x$

↳ $\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log 100=2$, $\log 1000=3$, ..., $\log 10^\nu=\nu$.

ΦΥΣΙΚΟΣ (ή ΝΕΠΕΡΙΟΣ) λέγεται ο λογάριθμος με βάση e. Συμβολισμός: $\ln x$

↳ $e^x=y \Leftrightarrow \ln y=x \Leftrightarrow y=e^{\ln y}$. Άρα: $\alpha=e^{\ln\alpha} \Leftrightarrow \alpha^x=(e^{\ln\alpha})^x \Leftrightarrow \alpha^x=e^{x\ln\alpha}$

ΤΥΠΟΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΒΑΣΗΣ ⟷ $\log_\beta x=\dfrac{\log_\alpha x}{\log_\alpha \beta}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

18 Να συγκριθούν οι αριθμοί:

1) $\log_2 5$, $\log_2 3$. 2) $\log_{0,7} 11$, $\log_{0,7} 12$. 3) $\log 15$, $\log 9$. 4) $\ln 2$, $\ln 3$.

19 Δείξτε ότι:

1) $\log 3+2\log 4-\log 12=2\log 2$.

2) $\frac{1}{2}\log 25+\frac{1}{3}\log 8+\frac{1}{5}\log 32=1+\log 2$.

3) $3\log 2+\log 5-\log 4=1$.

4) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_7 8=3$

5) $\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\gamma\cdot\log_\gamma\alpha=1$. $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*_+-\{1\}$.

6) $\alpha^{\log\beta}=\beta^{\log\alpha}$ $\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*_+$.

20 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f: $f(x)=\log_x(-x^2+3x+10)$.

21 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*_+$, $\alpha>\beta$ και $\alpha^2+\beta^2=11\alpha\beta$, δείξτε ότι: $\log\frac{\alpha-\beta}{3}=\frac{1}{2}(\log\alpha+\log\beta)$.

22 Αν $x,y\in\mathbb{R}^*_+$, $x^2+y^2=23xy$, δείξτε ότι: $\log_\alpha\frac{x+y}{5}=\frac{1}{2}(\log_\alpha x+\log_\alpha y)$

23 Αν $\frac{\log\alpha}{\kappa}=\frac{\log\beta}{\lambda}=\frac{\log\gamma}{\mu}=\log x$, δείξτε ότι: $\frac{\beta^3}{\alpha^2\gamma}=x^{3\lambda-2\kappa-\mu}$.

24 Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*_+$, $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ και $\frac{\log\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\log\beta}{\gamma-\alpha}=\frac{\log\gamma}{\alpha-\beta}$, δείξτε ότι: $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=1$.

25 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, δείξτε ότι: $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \alpha = 1$.
Στη συνέχεια δείξτε ότι:
$$\log_\alpha(\beta\gamma\delta) = \frac{1}{\log_\beta \alpha} + \frac{1}{\log_\gamma \alpha} + \frac{1}{\log_\delta \alpha}. \qquad (\gamma, \delta \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}).$$

26 Να υπολογιστεί το άθροισμα: $S = \log 3 + \log 3^2 + \log 3^3 + \cdots + \log 3^{50}$.

27 Αν $\log 2 = 0{,}301$, $\log 5 = 0{,}698$ να βρείτε τους $\log 250$ και $\log_2 250$.

28 Να εφαρμοστούν όλες οι δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων στις παραστάσεις: $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*)$. 1) $\log_3\left(\dfrac{3\alpha^2}{5\beta\sqrt[4]{\gamma}}\right)$. 2) $\log \dfrac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2\gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2\beta\gamma^2}}$.

29 Δείξτε ότι: $\dfrac{(\log_2 5 + \log_3 5) \cdot \log_6 5}{\log_2 5 \cdot \log_3 5} = 1$.

30 Δείξτε ότι: $\dfrac{7}{16}\log(3+2\sqrt{2}) - 4\log(\sqrt{2}+1) = \dfrac{25}{8}\log(\sqrt{2}-1)$.

31 Αν $\alpha > 1, \beta > 1$ δείξτε ότι: 1) $\frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta) \geq \sqrt{\log\alpha \cdot \log\beta}$.
2) $\log(\alpha^2-1) + \log(\beta^2-1) - \log\left[(\alpha\beta+1)^2 - (\alpha+\beta)^2\right] = 0$.

32 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \neq 1$, $\alpha\beta \neq 1$, δείξτε ότι: $\log_{\alpha\beta}\gamma = \dfrac{\log_\beta \gamma}{1 + \log_\beta \alpha}$.

33 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $K = \log_3 \sqrt[5]{729\sqrt[4]{243\sqrt[3]{81}}}$.

34 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ δείξτε ότι: $\log_\alpha\left(\dfrac{1}{\beta^5}\right) \cdot \log_\beta \alpha^2 = -10$.

35 Αν $\log 2 = \alpha$, $\log 5 = \beta$, δείξτε ότι: $\log_8 \sqrt{125} = \dfrac{\beta}{2\alpha}$.

36 Αν $\alpha > 1$, δείξτε ότι: $\log(\alpha+1) - \log\alpha < \log\alpha - \log(\alpha-1)$.

37 Αν $x = \log\dfrac{\alpha}{\beta}$, $y = \log\dfrac{\beta}{\gamma}$, $z = \log\dfrac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x+y+z=0$.

38 Αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $\mu > 0$, $\log_\alpha \mu = \nu$, δείξτε ότι: $\log_{1/\alpha}\mu = -\nu$.

39 Αν $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ και $x = \log_{2\alpha}\alpha$, $y = \log_{3\alpha}2\alpha$, $z = \log_{4\alpha}3\alpha$
δείξτε ότι: $xyz = 2yz - 1$.

40 Αν
$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha \neq 1 \\ x = \log_{\sqrt{\alpha}}\alpha \\ y = \log_\alpha \alpha^2 \\ z = \log_{\alpha^2}\alpha^4 \end{array}\right\} \Longrightarrow xyz = x+y+z+2.$$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Είναι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται λογάριθμος του αγνώστου ή συναρτήσεως του αγνώστου.

Διακρίνονται στις μορφές:

1) $\log_x \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = x^{\beta} \leftarrow$ ... Διώνυμη. (Π.Ο. $x>0 \wedge x \neq 1$).

2) $\log_\alpha f(x) = \beta \Leftrightarrow f(x) = \alpha^{\beta} \leftarrow$ ... Αλγεβρική. (Π.Ο. $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ ... Α.)

3) $\log_\alpha f(x) = \log_\alpha g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \leftrightarrow$ ... Αλγεβρική.

Στην παραπάνω μορφή καταλήγουμε με τις ιδιότητες των λογαρίθμων. **Προσοχή** όμως το Π.Ο. πρέπει να βρίσκεται από την αρχή, για κάθε λογαριθμική συνάρτηση που υπάρχει στην εξίσωση. Έτσι, για κάθε συνάρτηση της μορφής $y = \log_{\varphi(x)} f(x)$ το Π.Ο. βρίσκεται από τις σχέσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)>0 \\ \varphi(x)>0 \\ \varphi(x)\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

41 Να λυθούν οι εξισώσεις: (1η μορφή).

1) $\log_x\left(\frac{81}{16}\right) = 4$ 2) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$. 3) $\log_x 25 = 2$

4) $\log_x 16 = \frac{2}{3}$. 5) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$. 6) $\log_x 16 = -2$

7) $\log_x 343 = 3$. 8) $\log_x \frac{1}{81} = -4$. 9) $\log_x 64 = -2$.

42 Να λυθούν οι εξισώσεις: (2η μορφή).

1) $\log_4 x = 3$. 2) $\log x = -3$. 3) $\ln x = 2$.

4) $\log_8 x = -\frac{7}{3}$. 5) $\log_8 x = -\frac{7}{3}$. 6) $\log_{2\sqrt[3]{5}} x = -6$.

7) $\log_3(x^2 - x + 3) = 2$. 8) $\log(x^2 - 5x + 16) = 1$ 9) $\log_{1/2}(x^3 - 3x) = -1$

43 Σε ποιό λογαριθμικό σύστημα με βάση x, ισχύουν:

1) $2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$. 2) $\log_x 256 = (\log_x 4)^2 + 3$.

44 Να λυθούν οι εξισώσεις: (3η Μορφή)

1) $\log(4x-1) = 2\log2 + \log(x^2-1)$ 5) $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$.

2) $\frac{1}{2}\log(x+2) + \log\sqrt{x-3} = 1 + \log\sqrt{3}$ 6) $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$.

3) $2\log x - \log(x+1) = \log4 - \log3$ 7) $\log\left[\log(2x^2+x-2)\right] = 0$

4) $\log_4(x+2) - \log_4(x-3) = 3$ 8) $\log\left[\log(2x^2+x-11)\right] = 0$.

45 Όμοια, οι εξισώσεις:

1) $\frac{1}{2}\log\sqrt{x^2+x-5} = \log x + \log\frac{1}{x}$. 2) $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54$.

3) $2\log(x-1)^{1/2} + 3\log(x+5)^{1/3} = \log(x+13)$.

Εκθετικολογαριθμικές.

→ Της μορφής $\alpha^{f(x)} = \beta$, όταν ο β δεν μετατρέπεται σε δύναμη του α, οπότε λογαριθμίζω και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

46 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $2^x = \frac{5}{6}$. 2) $5^{3x-2} = 7$. 3) $2^x + \frac{6}{2^x} = 5$. 4) $2^{2x} = 3^{x+1}$

5) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$. 6) $e^x - e^{-x} = \frac{8}{3}$. 7) $2\cdot 9^x - 7\cdot 3^x + 3 = 0$.

8) $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$. 9) $9^x + 6^x = 4^x$.

→ Βάση και εκθέτης να είναι συνάρτηση του x. (Δουλεύω όμοια...)

47 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$. 2) $10x^{\log x} = x^2\sqrt{x}$.

3) $x^{\log x + \frac{1}{2}} = 10^3$. 4) $x^{\log_3 x^2 + \log_3^2 x - 10} = \frac{1}{x^2}$.

→ $\log_\alpha^\nu x = (\log_\alpha x)^\nu \neq \log_\alpha x^\nu$.

48 Για ποιές τιμές του θ η εξίσωση: $x^2 - x\cdot\log\theta + 3\log\theta - 8 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και ίσες.

49 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12$. 2) $\log(3^x+1)+\log(3^x+4)=\log(9\cdot 3^x+1)$

3) $\log(3^x+2)=2x\log 3$. 4) $9\cdot 3^{\log_{3x}^2 4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{3x}\frac{1}{8}}$.

5) $\log(2^x+2\cdot 3^x)+\log 81 = x\log 3+\log 178$.

6) $\varphi(x)+\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{10}{3}$, όπου $\varphi(x)=\dfrac{2\log x+1}{2\log x-1}$.

50 Όμοια, οι εξισώσεις:

1) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$. 2) $\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1$.

3) $\log_2(9-2^x)=3-x$. 4) $x^{\frac{\log x+7}{4}}=10^{\log x+1}$

5) $\log 2+\log(4^{x-2}+9)=1+\log(2^{x-2}+1)$. 6) $\log\left(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right)=0$.

7) $2(\log 2-1)+\log(5^{\sqrt{x}}+1)=\log(5^{1-\sqrt{x}}+5)$.

▼ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

Όπως και στα εκθετικά, τα μετατρέπω σε αλγεβρικά.........

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases}\log x+\log y=\log 14\\ 3x-y=1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2\\ x^2+y=12.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=25\\ \log x+\log y=2.\end{cases}$

4) $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=2\\ x^2+y^2=50.\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\log x+\log y=3\\ \log x^3+\log y^4=11\end{cases}$ 6) $\begin{cases}xy=40\\ x^{\log y}=4.\end{cases}$

SOS 7) $\begin{cases}x^{\log y}+y^{\log x}=20\\ \log\sqrt{xy}=1.\end{cases}$ 8) $\begin{cases}4\log x+\log y^5=12\\ \log x^2+\log\sqrt{y}=2.\end{cases}$ 9) $\begin{cases}5^{\log x}+3^{\log y}=14\\ 25^{\log x}-9^{\log y}=-56\end{cases}$

10) $\begin{cases}x^2+y^2=425\\ \log x+\log y=2.\end{cases}$ 11) $\left\{5^{\frac{4x}{\log y}}=25,\ y^{\frac{\log y}{x+2}}=10^4\right\}$.

12) $\begin{cases}2^x+2^y=12\\ \log(2x+2)-\log(3+y)=0\end{cases}$ 13) $\begin{cases}4(\log_x y+\log_y x)=17\\ xy=243.\end{cases}$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ V.

Θ1 Αν $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}_+^*$ και $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, $\alpha\beta \neq 1$, δείξτε ότι:

$$\log_\alpha x + \log_\beta x = \log_\alpha \beta \left(1 + \log_\beta \alpha\right)^2 \log_{\alpha\beta} x .$$

Θ2 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f: $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\log(9x^2 - 4)}{9^x - 3(3^x - 1) - 3^x}$

Θ3 Δείξτε ότι: $\log 2 + \log(2+\sqrt{2}) + \log\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \log\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = 2\log 2$.

Θ4 Αν $x = \log_\alpha(\beta\gamma)$, $y = \log_\beta(\alpha\gamma)$, $z = \log_\gamma(\alpha\beta)$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ δείξτε ότι:

1) $xyz = x+y+z+2$. 2) $\alpha^{x-2} \cdot \beta^{y-2} \cdot \gamma^{z-2} = 1$.

Θ5 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ και $\log_\alpha \beta = \log_\beta \gamma \cdot \log_\gamma \alpha$, δείξτε ότι: $\alpha = \beta \lor \alpha\beta = 1$.

Θ6 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ και οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδ. δείξτε ότι: οι αριθμοί $\log_\alpha \delta$, $\log_\beta \delta$, $\log_\gamma \delta$ " " " Αρμονικής " .

Θ7 Δείξτε ότι το άθροισμα Σ_ν των ν πρώτων όρων Αριθμητικής Προόδ. με $\alpha_1 = \log\alpha$ και $\alpha_2 = \log\beta$, είναι: $\Sigma_\nu = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}$.

Θ8 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $x > 0$ και $\log_\alpha x$, $\log_\beta x$, $\log_\gamma x$ διαδοχικοί όροι Αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι: $\gamma^2 = (\alpha\gamma)^{\log_\alpha \beta}$

Θ9 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $2\beta > \gamma$ και $\log_\beta \alpha = \log_\beta\left(\gamma^{\log_\gamma 2\beta} - \beta^{\log_\beta \gamma}\right)$.

Θ10 Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου, $\gamma, \alpha+\beta, \beta-\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ και $\log_{\beta+\alpha} \gamma + \log_{\beta-\alpha} \gamma = 2\log_{\beta+\alpha} \gamma \cdot \log_{\beta-\alpha} \gamma$,

δείξτε ότι: το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Θ12 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\log\sqrt{x-5}+\log\sqrt{2x-3}+1=\log 30$.

2) $\log(x-6)+\log(x-7)=1-\log 5$.

3) $4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

4) $5^{\log x}-3^{\log x-1}=3^{\log x+1}-5^{\log x-1}$

5) $\log_4\left[\log_3(\log_2 x)\right]=0$.

6) $\log_2(\log_2 x)=\log_4(\log_4 x)$.

7) $\log\left(4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1\right)-1=\log\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2\right)-2\log 2$.

8) $16^{ημ^2 x}+16^{συν^2 x}=10$.

Θ13 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} α^{2x}\cdot α^{3y}=α^{8} \\ \dfrac{α^{2x}}{α^{3y}}=α^{-4} \end{cases}$: $α>0$

2) $\begin{cases} xy=α^2 \\ \log^2 x+\log^2 y=\frac{5}{2}\log^2 α \end{cases}$: $α>0$.

3) $\begin{cases} \log(x^2y^3)=α \\ \log x-\log y=β \end{cases}$.

4) $\begin{cases} y=x^{\sqrt{y}} \\ x^4=y^{\sqrt{y}} \end{cases}$: $x,y\in\mathbb{R}_+^*$.

5) $\begin{cases} 2\cdot 9^x-7\cdot 9^y+3=0 \\ \log_3(x-y)-\log_3 y=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4^{\log y}-2^{2\log x}=12 \\ y^2-x^4=0 \end{cases}$

Θ14 Δείξτε ότι:

1) $\log_α εφ1^\circ+\log_α εφ2^\circ+\dots+\log_α εφ89^\circ=0$, όπου $0<α\neq 1$.

2) $\dfrac{1}{\log_2 1+\log_2 2+\dots+\log_2 ν}+\dfrac{1}{\log_3 1+\log_3 2+\dots+\log_3 ν}+\dots+\dfrac{1}{\log_ν 1+\log_ν 2+\dots+\log_ν ν}=1$