ΑΛΓΕΒΡΑ.

1) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ – ΕΠΑΓΩΓΗ.

2) Το $\mathbb{R}$ ως ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟ ΣΩΜΑ – ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

3) Το $\mathbb{R}$ ως ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΩΜΑ – ΤΑΥΤΟΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

4) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ.

5) ΡΙΖΙΚΑ.

6) ΚΥΚΛΙΚΕΣ (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ.

▼ ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΛΟΓΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ (μεταξύ προτάσεων).

p	q	$\overline{p}$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\veebar q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
α	α	ψ	α	α	ψ	α	α
α	ψ	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ
ψ	α	α	ψ	α	α	α	ψ
ψ	ψ	α	ψ	ψ	ψ	α	α
► A	B	A^c	$A\cap B$	$A\cup B$	$A\dotplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$	$A^c\cup B$	$(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)$

← Σύνολα Αληθεί[ας] των αντίστοιχω[ν] προτασιακών τύ[πων]

▼ ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

1) Ταυτότητος $p\Leftrightarrow p$
2) Διπλής αρνήσεως $p\Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$
3) Αποκλείσεως τρίτου $p\veebar \overline{p}$
4) Αντιφάσεως $\overline{p\wedge\overline{p}}$
5) Αντιθετοαντιστροφής $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\overline{q}\Rightarrow\overline{p})$
6) Συλλογισμού $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
7) Αποσπάσεως $[p\wedge(p\Rightarrow q)]\Rightarrow q$.
8) $\overline{p\vee q}\Leftrightarrow\overline{p}\wedge\overline{q}$ ← De Morgan → $\overline{p\wedge q}\Leftrightarrow\overline{p}\vee\overline{q}$
9) $(p\vee p)\Leftrightarrow p$ ← Αυτοδύναμοι → $(p\wedge p)\Leftrightarrow p$
10) $(p\vee q)\Leftrightarrow(q\vee p)$ ← Μεταθετικοί → $(p\wedge q)\Leftrightarrow(q\wedge p)$
11) $[(p\vee q)\vee r]\Leftrightarrow[p\vee(q\vee r)]$ ← Προσεταιριστικοί → $[(p\wedge q)\wedge r]\Leftrightarrow[p\wedge(q\wedge r)]$
12) $[p\vee(q\wedge r)]\Leftrightarrow[(p\vee q)\wedge(p\vee r)]$ ← Επιμεριστικοί → $[p\wedge(q\vee r)]\Leftrightarrow[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)]$
13α) $(p\vee ψ)\Leftrightarrow p$
13β) $(p\vee α)\Leftrightarrow α$ ← Ταυτοτικοί → $(p\wedge α)\Leftrightarrow p$, $(p\wedge ψ)\Leftrightarrow ψ$
14) $(p\vee\overline{p})\Leftrightarrow α$ ← Συμπληρωματικοί → $p\wedge\overline{p}\Leftrightarrow ψ$
15) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow\overline{p}\vee q$ ←●→ $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow(\overline{p}\vee q)\wedge(\overline{q}\vee p)$.

▼ ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΕΣ. Έστω $P(x)$ ένας π.τ. στο Ω με σύνολο αλήθειας A.

1) $A=\Omega\Leftrightarrow\forall x\in\Omega$, $P(x)$ αληθής. ● $\forall$ = για κάθε → Καθολικός ποσοδείκτης
2) $A=\varnothing\Leftrightarrow\forall x\in\Omega$, $\overline{P}(x)$ ».
3) $A\neq\varnothing\Leftrightarrow\exists x\in\Omega$, $P(x)$ ». ● $\exists$ = Υπάρχει τουλάχιστον ένα → Υπαρξιακός ποσοδείκτη[ς]
4) $A\neq\Omega\Leftrightarrow\exists x\in\Omega$, $\overline{P}(x)$ ».

● ΑΡΝΗΣΕΙΣ: 1) $\overline{\forall x\in\Omega, P(x)}\Leftrightarrow\exists x\in\Omega, \overline{P}(x)$. 2) $\overline{\exists x\in\Omega, P(x)}\Leftrightarrow\forall x\in\Omega, \overline{P}(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

① Ποιές απο τις παρακάτω φράσεις είναι προτάσεις: ((α) ή (γ))

1) Ο 24 είναι σύνθετος αριθμός • Ποιοί αριθμοί λέγονται σύνθετοι;

2) Ο 7 είναι περιττός και ο 3 πρώτος αριθμός • ,, ,, ,, πρώτοι;

3) Ο 315 είναι πολ/σιο του 3 και του 5 • Ποια είναι τα πολ/σια του α, $\alpha \in \mathbb{N}$

4) Πότε θα πάτε βόλτα;

5) Η σελήνη είναι δορυφόρος της γής.

6) "3+4>12"

② Ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις είναι απλές και ποιές σύνθετες:

1) Το 32 είναι πολ/σιο του 4 και διαιρέτης του 8.

2) Το 1 m έχει 100 cm ή 10 dm ή 1000 mm.

3) Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε είναι παρ/μο.

4) Καθε περιττός αριθμός δεν είναι πολ/σιο του 2.

5) Το 1 είναι διαιρέτης κάθε αριθμού.

6) Το 0 ,, πολ/σιο ,, ,,

③ Στις παρακάτω σύνθετες προτάσεις αντικαταστείστε με γράμματα (p, q, r, ..) όλες τις απλές προτάσεις απο τις οποιές αποτελούνται και βρείτε τη δομή τους:

1) Το 30 είναι πολ/σιο του 6 και διαιρείται με το 5.

2) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τότε έχει δύο γωνίες συμπληρωματικές.

3) Το 5 είναι ή άρτιος ή περιττός.

4) Το 7 δεν είναι πρώτος αριθμός.

5) Δύο ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν σχηματίζουν γωνία 90°.

6) Ο 2 είναι αρνητικός ή άρρητος αριθμός

7) Αν $\alpha=\beta$ τότε $\beta=\alpha$ (• Ποιές απο τις προτάσεις αυτές έχουν την ίδια δομή;)

④ Να βρείτε τα σύνολα αληθείας των παρακάτω προτασιακών τύπων:

1) $x+1 \neq x$, $x \in \mathbb{Z}$

2) $3x>0$, $x \in \Omega=\{-3, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\}$.

3) $x+3=x$, $x \in Q$

4) $P(x)$: "ο x είναι πρώτος", $x \in \Omega=\{2,4,5,6\}$.

5) $P(x,y)$: "ο x είναι διαιρέτης του y", $x \in A=\{1,2,5\}$, $y \in B=\{2,4,$

6) $P(x,y)$: "ο $x+y$ είναι στοιχείο του Ω", $x, y \in \Omega=\{-1,0,3,5,6,$

⑤ Να γράψτε τις παρακάτω προτάσεις με χρησιμοποίηση κατάλληλου ποσοδείκτη:

1) Κάθε αριθμός είναι ίσος με τον εαυτό του.

2) Κάθε φυσικός αριθμός είναι μεγαλύτερος απο κάθε αρνητικό.

3) Υπάρχει ακέραιος αριθμός που να πληρεί την ισότητα: "$3x=5+4$".

⑥ Διατυπώστε σε κανονική γλώσσα τις προτάσεις:

1) $\forall x\in \mathbb{R},\ x-1=x$.   3) $\overline{\exists} x\in \mathbb{Z}:\ 2x=1$.   5) $\forall x\in \mathbb{R},\ x^2\geq 0$.

2) $\exists x\in \mathbb{R},\ x+3=2$ 4) $\overline{\forall} x\in \mathbb{N}:\ x^2=x$.   6) $\overline{\exists} x\in \mathbb{R}:\ |x|<0$.

⑦ Αν $\alpha,\beta\in \mathbb{R}$, τότε η πρόταση:

1) $\alpha\cdot\beta=0$ διατυπώνεται ισοδύναμα με μια διάζευξη. Ποιά είναι η διάζευξη αυτή;

2) $\alpha^2+\beta^2=0$ " " " " σύζευξη. " " " σύζευξη " ;

3) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=0$ " " " " " . " " " " " " ;

4) $|\alpha|+|\beta|=0$ " " " " " . " " " " " " ;

Ποιές είναι οι αρνήσεις αυτών των προτάσεων και πως διατυπώνονται ισοδύναμα;

⑧ Να γίνει ο πίνακας αληθείας της πρότασης $p\wedge\bar{q}$ και να βρεθεί το σύνολο αληθείας του π.τ. $p(x)\wedge\bar{q}(x)$, αν A,B είναι τα σύνολα αληθείας των $p(x), q(x)$ αντίστοιχα.

⑨ Δείξτε ότι οι παρακάτω λογικοί τύποι είναι ταυτολογίες:

1) $(p\wedge q)\Rightarrow q$.   2) $p\Rightarrow(p\vee q)$.   3) $[\bar{p}\wedge(p\vee q)]\Rightarrow q$.

4) $\overline{(p\rightarrow q)}\Leftrightarrow(p\wedge\bar{q})$.   5) $\overline{(p\Leftrightarrow q)}\Leftrightarrow(\bar{p}\Leftrightarrow q)$.   6) $\overline{(p\Leftrightarrow q)}\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow\bar{q})$.

⑩ Δείξτε ότι οι παρακάτω λογικοί τύποι είναι αντιφάσεις:

1) $(p\wedge q)\wedge\bar{q}$.   2) $(p\wedge\bar{q})\Leftrightarrow(\bar{q}\Rightarrow\bar{p})$.

⑪ Στους παρακάτω π.τ. να βρείτε τα σύνολα αληθείας: $(\Omega=\mathbb{R})$

1) $x^2=4\Rightarrow x=2\vee x=-2$.   5) $x=1\Leftrightarrow x=-1$.

2) $x=4\Rightarrow x^2=16$.   6) $x\neq 1\Leftrightarrow x^2\neq 1$.

3) $x^2=25\Rightarrow x=-5$.   7) $x^2+4x+4=0\Leftrightarrow x=-2$

4) $x^2-5x+6=0\Rightarrow x=3\vee x=2$.   8) $2x=5\Leftrightarrow 2x+3=8$.

⑫ Οι παρακάτω προτάσεις να δειχθούν με "ευθεία απόδειξη" ή με "άτοπο απαγωγή":

1) Το τετράγωνο κάθε περιττού φυσικού αριθμού είναι περιττός.

2) " " " άρτιου " " " άρτιος.

3) Αν ο $\nu\in \mathbb{N}^*$ είναι περιττός, τότε ο $\nu^2+\nu$ είναι άρτιος.

4) " " " " " , " " ν^2-1 " πολ/σιο του 4.

5) " " " " " , " " $\nu^3-\nu$ " " " ".

⑬ Οι παρακάτω προτάσεις να δειχθούν με "αντιθετοαντιστροφή":

1) Αν ο φυσικός ν είναι πολ/σιο του 6, τότε ο ν είναι πολ/σιο του 3.

2) Αν $x^2\neq 9$, τότε $x\neq 3$.   3) Αν $x\neq 4\wedge x\neq -4$ τότε $x^2\neq 16$

4) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}\neq\hat{\Gamma}$ τότε είναι $AB\neq A\Gamma$.

▼ ΕΠΑΓΩΓΗ

Εφαρμόζεται σε προτάσεις του τύπου $P(\nu)$, $\forall \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \lambda$.

Στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα του Peano:

Αν $P(\lambda)$ αληθής
και $P(\kappa) \Rightarrow P(\kappa+1)$ αληθής) τότε $P(\nu)$ αληθής $\forall \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \lambda$.

⑭ ▼ΒΑΣΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ: Δείξτε ότι:

$$S_1 = 1+2+3+\cdots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}. \qquad S_2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

$$S_3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+\nu^3 = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} \qquad \bullet\ S_3 = S_1^2$$

⑮ Να δειχθούν οι ισότητες:

1) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+\nu(\nu+1) = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.
2) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(\nu+1)(\nu+2) = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3}$, ,, .
3) $1+3+5+\cdots+(2\nu+1) = (\nu+1)^2$, ,, .
4) $2+4+6+\cdots+(2\nu) = \nu(\nu+1)$, ,, .
5) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+\nu\cdot(\nu+1)^2 = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+5)}{12}$, ,, .
6) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2\nu-1)^3 = \nu^2(2\nu^2-1)$, ,, , $\nu \geq 2$.
7) $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2\nu)^3 = 2\nu^2(\nu+1)^2$, ,, , $\nu > 1$.
8) $2+2^2+2^3+\cdots+2^\nu = 2\cdot(2^\nu-1)$, ,, , $\nu \geq 3$.
9) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^\nu} = 1-\frac{1}{2^\nu}$, ,, , $\nu \geq 2$.
10) $1\cdot 5+2\cdot 5^2+3\cdot 5^3+\cdots+\nu\cdot 5^\nu = \frac{5+(4\nu-1)\cdot 5^{\nu+1}}{16}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

⑯ Δείξτε ότι: (Πολ/σια)

1) $\nu^3+5\nu =$ πολ/σιο του 3, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.
2) $2\nu^3-8\nu =$,, ,, ,, , ,, .
3) $\nu^3+3\nu^2+2\nu =$,, ,, ,, , ,, .
4) $\nu^2+2\nu =$ πολ/σιο του 8, $\forall \nu$ άρτιο.
5) $4\cdot 8^\nu+21\nu-4 =$ πολ/σιο του 49, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$
6) $2^{2\nu}+15\nu-1 =$,, ,, 9, ,, .
7) $7^{2\nu+1}-48\nu-7 =$,, ,, 288, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.
8) $7^{2\nu}+16\nu-1 =$,, ,, 64, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

⑰ Δείξτε τις ανισότητες:

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^\nu > \nu+1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 4$.
2) $2^\nu > \nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.
3) $2^{\nu+2} > 2\nu+5$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.
4) $3^\nu > 3\nu+1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 3$.
5) $5^\nu > 5\nu+2$, $\forall \nu \geq 2$.
* 6) $3^{\nu-1} > \nu^2$, $\forall \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 4$.

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{R}$ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

▼ ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} (x+y)\in\mathbb{R}$: $(x+y)\to$ Άθροισμα. $\varphi \to$ Πρόσθεση.

• $x=y \Rightarrow \alpha+x=\alpha+y$. • $\alpha=\beta \wedge x=y \Rightarrow \alpha+x=\beta+y$.

ΠΟΛ/ΜΟΣ

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{f} (x\cdot y)\in\mathbb{R}$: $(xy)\to$ Γινόμενο. $f \to$ Πολ/μός.

• $x=y \Rightarrow \alpha\cdot x=\alpha\cdot y$. • $\alpha=\beta \wedge x=y \Rightarrow \alpha\cdot x=\beta\cdot y$.

▼ ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

$\forall x,y\in\mathbb{R},\ x+y=y+x$ ←• Αντιμεταθετικότητα •→ $\forall x,y\in\mathbb{R},\ x\cdot y=y\cdot x$.

$\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ (x+y)+z=x+(y+z)$ ←• Προσεταιριστικότητα •→ $\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ (xy)z=x(yz)$.

Επιμεριστικότητα •→ $\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ x\cdot(y+z)=xy+xz$. • $\forall x\in\mathbb{R},\ x\cdot 0=0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ x+0=0+x=x$. ←• Ουδέτερο στοιχείο •→ $\forall x\in\mathbb{R},\ 1\cdot x=x\cdot 1=x$.

• Το 0 είναι μοναδικό. • Το 1 είναι μοναδικό.

Ύπαρξη

$\forall x\in\mathbb{R}, \exists x'\in\mathbb{R}: x+x'=x'+x=0$ ←• αντιθέτου – αντιστρόφου •→ $\forall x\in\mathbb{R}^*, \exists x'\in\mathbb{R}: x\cdot x'=x'\cdot x=1$

• $\forall x\in\mathbb{R}$, υπάρχει ένας μόνο αντίθετός του → $(-x)$. • $\forall x\in\mathbb{R}^*$, υπάρχει ένας μόνο αντίστροφός του

↕→ Τα παραπάνω αξιώματα εκφράζουν τη πρόταση: Το $\mathbb{R}$ ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟ ΣΩΜΑ.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

• $\forall x,y\in\mathbb{R} : x\cdot y=0 \Longrightarrow x=0 \vee y=0$

Γενικά: $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu=0 \Longleftrightarrow \alpha_1=0\vee\alpha_2=0\vee\ldots\vee\alpha_\nu=0$.

Αντιθετοαντίστροφα: $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu\neq 0 \Longleftrightarrow \alpha_1\neq 0\wedge\alpha_2\neq 0\wedge\ldots\wedge\alpha_\nu\neq 0$.

Νόμος Διαγραφής.

• $\forall \alpha,x,y\in\mathbb{R}: \alpha+x=\alpha+y \Longrightarrow x=y$. • $\forall \alpha\in\mathbb{R}^*, \forall x,y\in\mathbb{R}: \alpha x=\alpha y \Longrightarrow x=y$.

Έτσι: $\alpha+x=\alpha+y \Longleftrightarrow x=y$, και $\alpha\cdot x=\alpha y \Longleftrightarrow x=y$

• Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ υπάρχει ένας μόνο $x\in\mathbb{R}$, τέτοιος ώστε να είναι $\beta+x=\alpha$.

Ο αριθμός αυτός $x=\alpha+(-\beta)$ συμβολίζεται $\alpha-\beta$

• Αν $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}^*$ υπάρχει ένας μόνο $x\in\mathbb{R}$, τέτοιος ώστε να είναι $\beta\cdot x=\alpha$

Ο αριθμός αυτός $x=\frac{1}{\beta}\cdot\alpha$ συμβολίζεται $\frac{\alpha}{\beta}$

ΑΡΑ:

▼ ΑΦΑΙΡΕΣΗ

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\sigma} (\alpha-\beta)\in\mathbb{R}$: $(\alpha-\beta)\to$ Διαφορά. $\sigma\to$ Αφαίρεση.

▼ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \xrightarrow{\tau} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\in\mathbb{R}$: $(\alpha/\beta)\to$ Πηλίκο $\tau\to$ Διαίρεση.

▼ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

● ΔΙΩΝΥΜΟ Newton (Αξιοσημείωτοι πολ/μοί).

1) $(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu + \nu\cdot\alpha^{\nu-1}\cdot\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\alpha^{\nu-2}\cdot\beta^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{6}\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^3 + \cdots + \beta^\nu$.

2) $(\alpha-\beta)^\nu = \alpha^\nu - \nu\cdot\alpha^{\nu-1}\cdot\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\alpha^{\nu-2}\cdot\beta^2 - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{6}\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^3 + \cdots + (-1)^\nu\cdot\beta^\nu$.

▼ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

- $(\alpha\pm\beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$.
- $(\alpha\pm\beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$.
- $(\alpha\pm\beta)^4 = \alpha^4 \pm 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 \pm 4\alpha\beta^3 + \beta^4$.
- $(\alpha\pm\beta)^5 = \alpha^5 \pm 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 \pm 10\alpha^2\beta^3 +$

ΧΡΗΣΗ

- Απο το Α μέλος στο Β όταν θέλω να κάνω πράξεις.
- Απο το Β μέλος στο Α όταν θέλω να κάνω γινόμενο.

▼ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Οι συντελεστές των όρων που ισαπέχουν απο τα άκρα είναι ή ίσοι ή αντίθετο
- Ο εκθέτης του 1ου όρου ελαττώνεται, ενώ του 2ου αυξάνεται κατά μονάδα.
- Ο κάθε συντελεστής στο 2ο μέλος προκύπτει απο τον προηγούμενο όρο ως εξ

$$\frac{(\text{Συντελεστής του όρου})\cdot(\text{Εκθέτη του } \alpha)}{\text{Τάξη του όρου}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 18: Να υπολογιστούν τα διώνυμα:

$(\alpha-\beta)^6$, $(x+y)^6$, $(\omega-1)^4$, $(5\alpha-2)^2$, $(2\alpha^2+\beta)^3$, $(\alpha^2-\beta)$
$(2\alpha+\beta^2)^5$, $(3\alpha-1)^5$, $(\alpha^2-3)^3$, $(\alpha^3+1)^6$, $(\alpha^2-2\beta)^3$, (x^3+1)

● ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)^2 = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_\nu^2 + 2\alpha_1\alpha_2+\cdots+2\alpha_1\alpha_\nu + 2\alpha_2\alpha_3+\cdots+2\alpha_2\alpha_\nu+\cdots+2\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$

▼ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$.

$(\alpha-\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma$.

$(\alpha-\beta-\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma$.

$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta$.

$(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\alpha\delta-2\beta\gamma-2\beta\delta+2\gamma\delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 19: Να υπολογιστούν: $(2\alpha-\beta+3)^2$, $(x^2-2y-3\omega^3)^2$, $(x-\omega+\frac{1}{2}$
$(x^3-2y^2+3\omega-1)^2$, $(2x+y-7)^2$, $(-3x+4y-2)^2$, $(x^2-y+3\omega+2$

● **Cauchy** ●→ Εφαρμόζεται σε συμμετρικές παραστάσεις $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

και εκφράζουν αυτές συναρτήσει του αθροίσματος $S=\alpha+\beta$ και του γινομένου $P=\alpha\cdot\beta$ των μεταβλητών τους.

▼Εφαρμογές

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]^2-2\alpha^2\beta^2\ldots$

ΑΣΚΗΣΗ 20 Να εφαρμοσθεί η ταυτότητα του Cauchy στις παραστάσεις:

$\alpha^6+\beta^6$, x^2+4y^2, x^4+16y^4, $81\alpha^4+9\beta^2$, $27\alpha^3+8\beta^3$, x^6+64y^3.

● **Newton**

- $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
- $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$.
- Γενικεύεται για ν παράγοντες: $(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_\nu)=\cdots\cdots$

ΑΣΚΗΣΗ 21 Να γίνουν οι πράξεις:

$(x+4)(x-7)$, $(x-2)(x+3)(x+1)$, $x(x+1)(x+2)$, $(x+y)(x+2y)(x+3y)$.

● **ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΠΗΛΙΚΑ** ●→ $\alpha^\nu \pm \beta^\nu$

- Αν $\nu=2k+1$: $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\cdots+\beta^{\nu-1})$.
  $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\cdots+\beta^{\nu-1})$
- Αν $\nu=2k$: $\alpha^\nu-\beta^\nu=\begin{cases}(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\cdots+\beta^{\nu-1}) \\ (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-\cdots-\beta^{\nu-1})\end{cases}$

  Προτιμώτερο: $\alpha^\nu-\beta^\nu=\alpha^{2k}-\beta^{2k}=(\alpha^k-\beta^k)(\alpha^k+\beta^k)=\cdots$

▼ **ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^4-\beta^4=\begin{cases}(\alpha-\beta)(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3) \\ (\alpha+\beta)(\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3)\end{cases}$ → Προτιμώτερο: $\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)=$
  $=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$.
- $\alpha^5-\beta^5=(\alpha-\beta)(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)$, $\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)$.
- $\alpha^6-\beta^6=\begin{cases}(\alpha-\beta)(\alpha^5+\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4+\beta^5) \\ (\alpha+\beta)(\alpha^5-\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4-\beta^5)\end{cases}$ → Προτιμώτερο: $\alpha^6-\beta^6=(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)=$
  $=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 22 Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

$x^6\pm1$, $\alpha^5\pm1$, $\alpha^7\pm\beta^7$, $32x^5\pm1$, $8\alpha^3\beta^3\pm\alpha^6$, x^6-64, $x^6\pm y^9$, $27x^3y^6\pm8\alpha^3$.

ΑΣΚΗΣΗ 23 Να γίνουν οι πράξεις: (Με τα αξιοσημείωτα πηλίκα)

$(x+2y)(x-2y)$, $(3x^2-y)(y+3x^2)$, $(4x^3-1)(-4x^3-1)$, $(2x^2+5y)(-5y+2x^2)$, $(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)$, $(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $(x^2-2y)(x^4+2x^2y+4y^2)$, $(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)$, $(x+1)(x^3-x^2+x-1)$, $(y+\omega)(y^4-y^3\omega+y^2\omega^2-y\omega^3+\omega^4)$, $(x^2-x^4+1)(x^2+x^4+1)$, $(\alpha-2\beta+3\gamma)(\alpha-2\beta-3\gamma)$, $(2x^2+3y^3)(4x^4-6x^2y^3+9y^6)$.

● **Euler**

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = \begin{cases} (\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha) \\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]. \end{cases}$$

● **Συμπέρασμα Euler.**

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right].$$

ΑΣΚΗΣΗ 24 Να εφαρμοσθεί η ταυτότητα του Euler (και οι δύο τύποι):

$x^3+y^3+1-3xy$, $(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3+(\sqrt{\omega})^3-3\sqrt{xy\omega}$, $x^3+27y^3+8\omega^3-18xy\omega$, $\alpha^3-8\beta^3-64\omega^6-24\alpha\beta\omega^2$, $\alpha^6+\beta^6-1+3\alpha^2\beta^2$, $27\alpha^3-8\beta^3+64\gamma^3+72\alpha\beta\gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 25 Να εφαρμοσθεί το συμπέρασμα του Euler:

$\alpha^2+\beta^2+1-\alpha-\beta-\alpha\beta$, $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma^2$, $\alpha^4+\beta^4+16\gamma^4-\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\gamma^2-4\beta^2\gamma^2$, $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)-(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)-(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

● **(κύβος τριωνύμου).**

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

ΑΣΚΗΣΗ 26: Να εφαρμοσθεί η παραπάνω ταυτότητα:

$(2\alpha+3\beta+\gamma^2)^3$, $(x-2y+\omega)^3$, $(2\alpha-\beta+1)^3$, $(-\alpha+2\beta-\gamma)^3$, $(x^2+2y^3-1)^3$.

● **De Moivre**

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma).$$

ΑΣΚΗΣΗ 27 $x^4+y^4+1-2x^2-2y^2-2x^2y^2$, $\alpha^4+\beta^8+\gamma^8-2\alpha^2\beta^4-2\alpha^2\gamma^4-2\beta^4\gamma^4$.

● **Lagrange**

- $(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2.$
- $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2=\ldots$

ΑΣΚΗΣΗ 28 $(x^2+y^2)(\omega^2+z^2)-(x\omega+yz)^2$, $(x^2+1)(y^2+4)-(xy+2)^2$, $(x^2+y^2+1)(\omega^2+z^2+9)-(x\omega+yz+3)^2$, $(x^2+2y^2)(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha x+\beta y)^2$, $2x^2(y^2+\omega^2)-(xy+x\omega)^2$.

• Euler με συνθήκη (Euler-Cauchy)

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=\beta=\gamma \Longleftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 29

1) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να γίνει γινόμενο η παράσταση: $(3\alpha-2\beta)^3+(3\beta-2\gamma)^3+(3\gamma-2\alpha)^3$.

2) Αν $\alpha+\beta+\gamma=x+y+\omega$ " " " " " : $(\alpha-x)^3+(\beta-y)^3+(\gamma-\omega)^3$.

3) Αν $\alpha+\beta+\gamma=3x$ " " " " " : $(3x-\alpha)^3+(3x-\beta)^3+(3x-\gamma)^3$.

▼ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΙΣΟΤΗΤΕΣ.

Να δείξτε τις παρακάτω ισότητες (χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις ταυτότητες)

30 $\quad 2\alpha^2\beta(\alpha+\beta)=(\alpha^4-\beta^4)+2\beta(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)^2$

31 1) $(\alpha+\beta)^5-\alpha^5-\beta^5=5\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

2) $(\alpha+\beta)^7-\alpha^7-\beta^7=7\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$.

32 1) $(x+y)^4+x^4+y^4=2\cdot(x^2+xy+y^2)^2$.

2) $(2x+\beta)^5-32x^5-\beta^5=10\beta x(2x+\beta)(4x^2+2\beta x+\beta^2)$.

33 1) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$.

2) $x(x+y)(x+2y)(x+3y)+y^4=(x^2+3xy+y^2)^2$.

34 1) $(x+y)^3+(y+\omega)^3+(\omega+x)^3-3(x+y)(y+\omega)(\omega+x)=2(x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega)$.

2) $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3=3xyz(x-y)(y-z)(z-x)$.

35 1) $(x^2+y^2)(z^2+\omega^2)=(xz+y\omega)^2+(yz-x\omega)^2$.

2) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha y-\beta x)^2+\gamma^2(x^2+y^2)$.

3) $(\alpha^2+x^2+y^2)(x^2+\alpha^2+1)-(2\alpha x+y)^2=(\alpha^2-x^2)^2+(\alpha-xy)^2+(x-\alpha y)^2$.

36 1) $(x^2+y^2+z^2)^2-(xy+yz+zx)^2=(x^2-yz)^2+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2$.

2) $(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha x-\beta y)^2=(\alpha y+\beta x)^2+\gamma^2x^2+\gamma^2y^2$.

3) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+\omega^2)-(\alpha y-\beta x-\gamma\omega)^2=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha\omega+\gamma y)^2+(\gamma x-\beta\omega)^2$.

4) $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\gamma)^2$.

37 $\quad(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3=3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

38 $\quad 2(x^2y^2+y^2\omega^2+\omega^2x^2)-(x^4+y^4+\omega^4)=(x+y+\omega)(y+\omega-x)(\omega+x-y)(x+y-\omega)$.

39 $\quad 64\alpha^6-\beta^{12}=(8\alpha^3-\beta^6)(2\alpha+\beta^2)(4\alpha^2-2\alpha\beta^2+\beta^4)$.

40 $\quad(\beta y+\alpha\omega)^3+(\beta\omega+\alpha x)^3+(\beta x+\alpha y)^3-3(\beta y+\alpha\omega)(\beta\omega+\alpha x)(\beta x+\alpha y)=(\alpha^3+\beta^3)(x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega)$.

▼ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΝΘΗΚΗ ⟶ $P \Longrightarrow q$

41 1) Αν $x=\alpha^2-\beta\gamma$, $y=\beta^2-\gamma\alpha$, $\omega=\gamma^2-\alpha\beta$, τότε $\alpha x+\beta y+\gamma\omega=(\alpha+\beta+\gamma)(x+y+\omega)$.

2) Αν $x=\alpha^3+3\alpha\beta\gamma$, $y=\beta^3+3\alpha\beta\gamma$, $z=\gamma^3+3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε $x+y+z=12\alpha\beta\gamma$.

3) Αν $x=\beta+\gamma$, $y=\gamma+\alpha$, $z=\alpha+\beta$, τότε $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$.

4) Αν $x=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$, $y=\dfrac{2\alpha-1}{2\alpha+1}$, δείξτε ότι: $3(x-y)-xy=-1$.

5) $\alpha=\dfrac{x}{y+\omega}$, $\beta=\dfrac{y}{\omega+x}$, $\gamma=\dfrac{\omega}{x+y} \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{\beta}{1+\beta}+\dfrac{\gamma}{1+\gamma}=1$.

42 1) $x+y=1 \Longrightarrow x^3(y+1)-y^3(x+1)-(x-y)=0$.

2) $xy=1 \Longrightarrow \dfrac{x^3}{1+x^2}-\dfrac{y^3}{1+y^2}=x-y$.

3) $(x+y)^2=2(x^2+y^2) \Longrightarrow x=y$.

4) $\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=1\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha^3+\beta^3=-2$.

5) $\left.\begin{matrix}x+y=\alpha\\ xy=\beta\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2-2\beta \\ x^3+y^3=\alpha^3-3\alpha\beta \\ x^4+y^4=\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2 \end{cases}$

6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3 \Longrightarrow x^3+\dfrac{1}{x^3}=0$.

Μέθοδος
Βλέπε Φυλ. 13

43 1) $\alpha+\beta+\gamma=0 \Longrightarrow \dfrac{\alpha^4}{3\alpha\beta\gamma-\beta^3-\gamma^3}+\dfrac{\beta^4}{3\alpha\beta\gamma-\gamma^3-\alpha^3}+\dfrac{\gamma^4}{3\alpha\beta\gamma-\alpha^3-\beta^3}=0$.

2) $\alpha+\beta+\gamma=0 \Longrightarrow (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$.

3) $\alpha+\beta+\gamma=0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)^2$.

4) $x+y+z=0 \Longrightarrow \left(\dfrac{x+y}{2}+z\right)^3+\left(\dfrac{y+z}{2}+x\right)^3+\left(\dfrac{z+x}{2}+y\right)^3=\dfrac{3}{8}xyz$.

5) $\alpha+\beta+\gamma=2\tau \Longrightarrow 1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\dfrac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$.

6) $1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=5 \Longrightarrow \alpha=\beta$.

7) $\dfrac{x-y}{y-z}=\dfrac{x}{z} \Longrightarrow \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)$.

8) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=0 \Longrightarrow \dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}$. $(\alpha\beta\neq 0)$.

9) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha}=\alpha \Longrightarrow \dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}+\dfrac{1}{\gamma^3}=\dfrac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}$.

10) $\alpha+\beta+\gamma=2\tau \Longrightarrow (\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2+\tau^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

▼ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΔΙΑΖΕΥΞΗ ⟶ $p\vee q\vee r \ldots$

(44) Αν $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2=4xyz$, τότε δύο τουλάχιστον από τα x,y,z είναι αντίθετα.

(45) $(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)=(x-\gamma)^2(\beta-\alpha) \Rightarrow \alpha=\beta \vee \beta=\gamma \vee \gamma=\alpha$.

(46) $\alpha^4-\beta^4=(\alpha-\beta)^3(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta=0 \vee \alpha=\beta \vee \alpha=-\beta$.

(47) $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz \Rightarrow x=-y \vee y=-z \vee z=-x$

(48) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma} \Rightarrow$ δύο τουλάχιστον από τα α,β,γ είναι αντίθετοι.

(49) Αν $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3$ και $\alpha\neq-\beta$, δείξτε ότι $\alpha=0 \vee \beta=0$.

(50) $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta=0 \vee \gamma=0$

(51) $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=1\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=13\\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=19\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=0 \vee \beta=0 \vee \gamma=0$ Μέθοδος Βλέπε Φυλ.13

▼ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΣΥΖΕΥΞΗ ⟶ $p\wedge q\wedge r \ldots$

(52) $3\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha+\beta+\gamma)^2 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma$

(53) $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(x+y-2z)^2+(x+z-2y)^2 \Rightarrow x=y=z$.

(54) $(x+y+z)^2+(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0 \Rightarrow x=0 \wedge y=0 \wedge z=0$.

(55) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=0 \Rightarrow \alpha^2=\beta\gamma \wedge \beta^2=\gamma\alpha \wedge \gamma^2=\alpha\beta$.

(56) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2 \Rightarrow \alpha\gamma=-\beta\delta \wedge \beta\gamma=\alpha\delta$.

(57) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+w^2)=(\alpha x+\beta y+\gamma w)^2 \Rightarrow \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{w}{\gamma}$.

(58) $(x+y+w)^2=3(xy+yw+wx) \Rightarrow x=y=w$.

(59) $(x+y+z+w)^2+(x-y)^2+(x-z)^2+(x-w)^2+(y-z)^2+(y-w)^2+(z-w)^2=0 \Rightarrow$
$x=0 \wedge y=0 \wedge z=0 \wedge w=0$.

(60) $(\alpha^2+x^2+y^2)(x^2+\alpha^2+1)=(2\alpha x+y)^2 \Rightarrow (\alpha=x \vee \alpha=-x) \wedge \alpha=xy \wedge x=\alpha y$

(61) Αν $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+\gamma^2x^2+\gamma^2y^2=0$ δείξτε ότι:
$(\alpha=0 \wedge \beta=0 \wedge \gamma=0) \vee (x=0 \wedge y=0)$.

(62) $\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}_+^*\\ \text{και } \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4=4\alpha\beta\gamma\delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta$.

▼ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

63 Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

$A = 8x^3 - 27y^3 - 64\omega^3 - 72xy\omega$ $\qquad B = (\alpha-\beta+\gamma)^3 - \alpha^3 + \beta^3 - \gamma^3$.

64 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

$A = (\alpha+\beta)^3 + (\beta+\gamma)^3 + (\gamma+\alpha)^3$ $\qquad B = (\alpha\kappa+\beta\lambda)^3 + (\beta\kappa+\gamma\lambda)^3 + (\gamma\kappa+\alpha\lambda)^3$

65 Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

$$A = \frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad B = \frac{\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma^2}$$

$$\Gamma = \frac{(x+y)^5-x^5-y^5}{5x^4y^2+5x^3y^3+5x^2y^4}$$

66 Δείξτε ότι:

1) $(\alpha-\beta)^3 - \alpha^3 + (\alpha+\beta)^3 + 3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha(4\alpha^2+3\beta^2)$.

2) $(x^2-y\omega)^3 + (y^2-\omega x)^3 + (\omega^2-xy)^3 - 3(x^2-y\omega)(y^2-\omega x)(\omega^2-xy) = (x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega)^2$.

3) $(\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 + (\gamma+\alpha)^2 + 2(\alpha+\beta)(\beta+\gamma) + 2(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) + 2(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) = 4\cdot(\alpha+\beta+\gamma)^2$.

67 Αν $\left.\begin{aligned} \alpha &= 7x+3y+6\omega \\ \beta &= 6x+2y+6\omega \\ \gamma &= 3x+3y+2\omega \\ x^2 &= y^2+\omega^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$.

68 Αν $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$, δείξτε ότι δύο τουλάχιστον από τα α, β, γ είναι αντίθετα.

69 Αν $(\alpha^2+\beta^2)x^2 - 2\beta(\alpha+\gamma)x + \beta^2+\gamma^2 = 0 \Longrightarrow \beta = \alpha x \wedge \gamma = \beta x$.

70 Αν $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) = 4 \Longrightarrow \alpha = \beta$.

71 Αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 0 \Longrightarrow (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3 = (\alpha+\beta+\gamma)^6$.

72 Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0 \wedge \alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma \Longrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + 3 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

73 Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, δείξτε ότι:

1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2(\gamma^2-\alpha\beta)$. $\qquad$ 2) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = 2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$.

3) $\dfrac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta} + \dfrac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma} + \dfrac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma} = 0$

74 1) $\left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x^2+y^2+z^2 &= 2 \\ x^3+y^3+z^3 &= 3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow xyz = \frac{1}{6}$.

2) Αν $\alpha+\beta+\gamma = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 1$

Δείξτε ότι: $\alpha=0 \vee \beta=0 \vee \gamma=0$

ΜΕΘΟΔΟΙ.

Σε ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕ (ή ΧΩΡΙΣ) ΣΥΝΘΗΚΗ.

Είναι ασκήσεις του τύπου: Αν $Γ=Δ \Longrightarrow A=B$.

▼ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΗΣ.

●1 $A = \overrightarrow{\cdots} = \cdots \overset{(Γ=Δ)}{=} \cdots = \cdots = \overleftarrow{\cdots} = B$.

●2 $\left.\begin{array}{l} A = \cdots = \cdots = \cdots = K \\ B = \cdots = \cdots = \cdots = K \end{array}\right\} \Longrightarrow A=B$.

●3 Ευθεία απόδειξη: $Γ=Δ \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow A=B$.

●4 Μέθοδος ισοδυναμίας: $A=B \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$ Προφανής σχέση.
(Προφανείς είναι οι σχέσεις που δίνονται $(Γ=Δ)$ ή αυτές που δίνονται από τη Θεωρία)

●5 ΑΡΚΕΙ: $A-B=0$. (και το δείχνω με τον πρώτο τρόπο.)

●6 Αντιθετοαντιστροφή: $A \neq B \Rightarrow Γ \neq Δ$

●7 Άτοπος απαγωγή: Έστω $A \neq B \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow$ Αντίφαση.

Σε ΔΙΑΖΕΥΞΗ: $A=B \vee Γ=Δ \vee \cdots$

Αρκεί: $A-B=0 \vee Γ-Δ=0 \vee \cdots$, οπότε αρκεί: $(A-B)\cdot(Γ-Δ)\overset{\text{Επι}}{\cancel{+}}\cdots=0$
(Στο παραπάνω γινόμενο καταλήγουμε από τη δοθείσα σχέση με παραγοντοποίηση).

Σε ΣΥΖΕΥΞΗ: $A=B \wedge Γ=Δ \wedge \cdots$

Αρκεί: $A-B=0 \wedge Γ-Δ=0 \wedge \cdots$, οπότε αρκεί: $(A-B)^2+(Γ-Δ)^2+\cdots=0$
(Στο παραπάνω άθροισμα τετραγώνων καταλήγουμε από τη δοθείσα σχέση με τη ταυτότητα $α^2 \pm 2αβ + β^2 = (α \pm β)^2$, ή με Lagrange ή με συμπέρασμα Euler.

Το $\mathbb{R}$ ΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΩΜΑ.

▼ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ.

- Υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathbb{R}_+^*$ του $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ x=0 \ \underline{\vee}\ x \in \mathbb{R}_+^* \ \underline{\vee}\ -x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Το $\mathbb{R}_+^*$ είναι "κλειστό" ως προς τη πρόσθεση και τον πολ/μό, δηλαδή οι πράξεις αυτές είναι εσωτερικές στο $\mathbb{R}_+^*$. Έτσι $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^* \Longrightarrow \begin{cases} (x+y) \in \mathbb{R}_+^* \\ (xy) \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$.

$\mathbb{R}_+^* \to$ Σύνολο θετικών. ($\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x>0$).

$\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\} \to$ Σύνολο μη αρνητικών. ($\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 0$).

$\mathbb{R}_-^* \to$ Σύνολο αρνητικών ($\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ x<0$).

$\mathbb{R}_- = \mathbb{R}_-^* \cup \{0\} \to$ Σύνολο μη θετικών ($\forall x \in \mathbb{R}_-,\ x \leq 0$).

▼ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ: λέμε τις διμελείς σχέσεις "$>$" ή "$<$" ή "$\geq$" ή "$\leq$" που ορίζονται ως εξής:

$$\boxed{\begin{array}{l} x>y \Leftrightarrow x-y>0 \\ x \geq y \Leftrightarrow x-y \geq 0 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x<y \Leftrightarrow x-y<0 \\ x \leq y \Leftrightarrow x-y \leq 0 \end{array}}$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x=0 \ \underline{\vee}\ x>0 \ \underline{\vee}\ x<0$.

▼ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.

- Νόμος Τριχοτομίας: $\forall x,y \in \mathbb{R}$ ισχύει $x=y \ \underline{\vee}\ x>y \ \underline{\vee}\ x<y$.
- Κανόνας Προσήμων: x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow x \cdot y>0$, x,y ετερόσημοι $\Leftrightarrow x \cdot y<0$.
  - $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2>0$ • $\alpha>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>0$, $\alpha<0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<0$ • $xy>0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}>0$, $xy<0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}<0$.
- Μεταβατικότητα: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}:\ x>y \wedge y>z \Longrightarrow x>z$
  - Κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος απο κάθε αρνητικό.

▼ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

- $\forall \alpha,\beta,x,y,z \in \mathbb{R}$ ισχύουν: $\begin{cases} x>y \Leftrightarrow x+z>y+z. \\ x>y \wedge \alpha>\beta \Longrightarrow x+\alpha>y+\beta. \\ x>y \wedge \alpha>0 \Longrightarrow \alpha x>\alpha y. \\ x>y \wedge \alpha<0 \Longrightarrow \alpha x<\alpha y. \end{cases}$
- $\forall \alpha,\beta,x,y \in \mathbb{R}_+^*:\ x>\alpha \wedge y>\beta \Longrightarrow xy>\alpha\beta$.

Γενικά: $\forall \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\nu \in \mathbb{R}:\ \alpha_1>\beta_1 \wedge \alpha_2>\beta_2 \wedge \dots \wedge \alpha_\nu>\beta_\nu \Longrightarrow \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu>\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_\nu$

$\forall \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\nu \in \mathbb{R}_+^*:\ \alpha_1>\beta_1 \wedge \alpha_2>\beta_2 \wedge \dots \wedge \alpha_\nu>\beta_\nu \Longrightarrow \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu>\beta_1\beta_2 \cdots \beta_\nu$.

- $x>y \Leftrightarrow -x<-y$ • $x>y \wedge \alpha>0 \Longrightarrow \frac{x}{\alpha}>\frac{y}{\alpha}$ • $x>y \wedge \alpha<0 \Longrightarrow \frac{x}{\alpha}<\frac{y}{\alpha}$.
- $\forall \alpha>0:\ x>y \Leftrightarrow \alpha x>\alpha y$, $\forall \alpha<0:\ x>y \Leftrightarrow \alpha x<\alpha y$.
- $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall \nu \in \mathbb{Z}^*$ ισχύουν $\begin{cases} \text{Αν } \nu>0:\ x>y \Leftrightarrow x^\nu>y^\nu \\ \text{Αν } \nu<0:\ x>y \Leftrightarrow x^\nu<y^\nu \\ x=y \Leftrightarrow x^\nu=y^\nu \end{cases}$
  - Αν $\nu>0$ και $\begin{cases} x>1 \Rightarrow x^\nu>1 \\ 0<x<1 \Rightarrow x^\nu<1 \end{cases}$ • Αν $\nu<0$ και $\begin{cases} x>1 \Rightarrow x^\nu<1 \\ 0<x<1 \Rightarrow x^\nu>1 \end{cases}$

▼ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

1) i) $xy>0 \wedge x<y \Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$. ii) $xy<0 \wedge x<y \Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y}$.

2) i) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*: \alpha>\beta \Rightarrow \alpha^2>\beta^2$. ii) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}_-^*: \alpha>\beta \Rightarrow \alpha^2<\beta^2$.

3) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$. (Η ισότης ισχύει όταν $\alpha=\beta$).

4) $\forall \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (Η ισότης ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$).

5) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha^2+\beta^2\leq 0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$.

6) Το άθροισμα δύο αντιστρόφων θετικών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2.
Δηλαδή: $\forall \alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$. (Η ισότης ισχύει όταν $\alpha=1$).

7) ▼ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ SCHWARZ:

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\cdots)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\cdots)\geq(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\cdots)^2.$$

ΜΕΘΟΔΟΙ

→ ΤΑΥΤΟΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ (ή ΧΩΡΙΣ) ΣΥΝΘΗΚΗ

Είν

Είναι ασκήσεις του τύπου: Αν $\Gamma\geq\Delta \Rightarrow A\geq B$.

▼ ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΗΣ:

Μπορούμε ν' ακολουθήσουμε οποιαδήποτε από τις μεθόδους που αναφέρονται στις ταυτότητες με (ή χωρίς) συνθήκη. (Βλέπε Φυλ. 13).

Συνήθως όμως δουλεύουμε με δύο τρόπους και κυρίως με τον δεύτερο.

●1 Ευθεία απόδειξη: $\Gamma\geq\Delta \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow \cdots \Rightarrow A\geq B$

●2 Μέθοδος ισοδυναμίας: $A\geq B \Leftrightarrow A-B\geq 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$ Προφανής Σχέση.
(Πρόσεξε ότι η πρώτη δουλειά σ' αυτή τη μέθοδο είναι να τα πάμε όλα στο ένα μέλος ώστε το άλλο να γίνει 0.)

▼ ΠΡΟΦΑΝΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

1) $K^2\geq 0$ ως τέλειο τετράγωνο. (Η ισότης, όταν $K=0$)

2) $K^2+\lambda^2\geq 0$ ως άθροισμα τετραγώνων. (Η ισότης, όταν $K=\lambda=0$)

3) $K^2+\theta>0$, ($\theta\in\mathbb{R}_+^*$) ως άθροισμα τετραγώνου και θετικού.

4) i) $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\nu>0$, ($\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_\nu\in\mathbb{R}_+^*$) ως άθροισμα θετικών.
ii) $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu<0$, ($\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu\in\mathbb{R}_-^*$) » » αρνητικών.

5) i) $\theta_1\cdot\theta_2\cdots\theta_\nu>0$ ως γινόμενο θετικών.
ii) $\alpha_1\cdot\theta_1<0$ ως γινόμενο ετεροσήμων. iii) $\alpha_1\cdot\alpha_2>0$ ως γινόμενο ομοσήμων.

6) Τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\Delta<0$ είναι ομόσημο του α, $\forall x\in\mathbb{R}$.

→ Αν $\Delta \leq 0$ και $\begin{cases} \alpha>0, \text{ τότε } \Phi(x)\geq 0. \text{ (Η ισότης για } x=-\frac{\beta}{2\alpha}) \\ \alpha<0, \text{ τότε } \Phi(x)\leq 0. \text{ (» » » »)} \end{cases}$

→ Αν η ταυτοανίσωση δεν καταλήξει σε καμμία από τις προηγούμενες προφανείς σχέσεις, τότε παραγοντοποιώ το A−B και εξετάζω κάθε παράγοντα χώρια, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες που δίνονται και τις προφανείς σχέσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(75) 1) Δείξτε ότι: $3(\alpha^4+\alpha^2+1)\geq(\alpha^2+\alpha+1)^2$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$.
2) » » : $(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^2-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(x_1^2+x_2^2)\leq 0$, $\forall \alpha_1,\alpha_2,x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

(76) 1) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+^*$ και $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha \Rightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3>3\alpha\beta\gamma$.
2) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+^* \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^3>3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

(77) 1) Αν α,β ομόσημοι $\Rightarrow (1+\alpha)(1+\beta)>1+\alpha+\beta$
2) Αν α,β ετερόσημοι $\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$.

(78) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$ δείξτε ότι: 1) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$ 2) $\alpha\beta\leq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$.

(79) 1) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+^* \Rightarrow \alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)\geq 6\alpha\beta\gamma$.
2) Αν $\beta\geq\gamma \Rightarrow 2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha(\beta+\gamma)\geq\gamma-\beta$.

(80) Δείξτε ότι: $(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(y+z-x)^2\geq xy+yz+zx$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

(81) 1) Αν $\alpha\geq\beta>0 \Rightarrow \alpha^3-\beta^3\geq(\alpha-\beta)^3$
2) Αν $x>1 \Rightarrow x^3+x>x^2+1$

(82) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$, δείξτε ότι: 1) $\alpha^3+\beta^3\geq\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ 2) $\alpha^3+1\geq\alpha^2+\alpha$. 3) $\alpha^7+\beta^7\geq\alpha^4\beta^3+\alpha^3\beta^4$

(83) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+^*$ και $\alpha\beta\gamma=1 \Rightarrow (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\geq 8$.

(84) Αν α,β ομόσημοι και $\alpha\neq\beta \Rightarrow \left(\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^2<\alpha\beta<\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$. (Cauchy)

(85) Δείξτε ότι: (Βλέπε τριώνυμο με $\Delta<0$ ή $\Delta\leq 0$).
1) $2\alpha^2+1>2\alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ 2) $x^2(x^2-1)\geq -3x^2(2-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
3) $3\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 4) Αν $x>0 \Rightarrow 5x^2<2x^3+10x$
5) Αν $y>-1 \Rightarrow 2y^3+3y^2+2>-3y$.

(86) 1) Να συγκριθούν οι παραστάσεις: $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2$ και $3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$.
2) Αν $\omega>2$ να συγκριθούν οι αριθμοί: ω^3 και $\omega^2+\omega+2$
3) Αν $\alpha\beta\geq 0$ » » » » : $(\alpha^2-\beta^2)^2$ και $(\alpha-\beta)^4$.

→ Βρίσκω το πρόσημο της διαφοράς τους και από κει συμπεραίνω.

▼ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \leq 0. \\ x, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ ⟹ $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_\nu| = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0 \wedge \cdots \wedge \alpha_\nu = 0$.
  $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_\nu| \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \cdots \vee \alpha_\nu \neq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$
- » , $|x| = |-x|$
- » , $|x|^2 = x^2$ ⟶ Γενικά: $|x|^{2k} = x^{2k}$, $|x|^{2k+1} = |x^{2k+1}|$, $\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

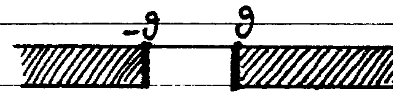
▼ Για εξισώσεις με απόλυτα:

- $\left.\begin{array}{l}|x| = \alpha \\ \alpha > 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow x = \pm\alpha$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \pm\alpha$
- $\left.\begin{array}{l}|x| = \alpha \\ \alpha < 0\end{array}\right\} \rightarrow$ Αδύνατη, διότι $|x| \geq 0$, $\forall x$

▼ Για ανισώσεις με απόλυτα:

- $\forall x, \alpha \in \mathbb{R}$, $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*$, $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \vee x \geq \theta$.



▼ Απόλυτη τιμή αθροίσματος:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- $|x - y| \leq |x| + |y|$.

Γενικά: $|x| - |y| \leq \big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

▼ Απόλυτη τιμή γινομένου.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Γενικά: $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \cdots \cdot |\alpha_\nu|$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΑΠΟΛΥΤΑ.

87 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$A = 5\cdot|2\alpha-1|+3|\alpha+1|-2\alpha+6\cdot|2-\alpha|$, αν $\alpha=-3$

$B = |\alpha-\beta|-2|\alpha+\beta|-4|\beta-\alpha|-3|-\alpha-\beta|$

88 Αν $\alpha<\beta<\gamma<0$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$A = -2\cdot|\alpha-\beta|+3|\gamma-\beta|-4|\alpha|+3|\beta|-|\alpha-\gamma|$.

$B = |\alpha^2+1|-|\beta^2+3|-3|\alpha-\beta|+|\alpha+\beta|-|\beta+\gamma|$.

$\Gamma = |-\alpha|-2|-\beta|+3|-\gamma-2\alpha|-2|\alpha+2\beta+3\gamma|$.

89 Αν $x\in\mathbb{R}$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις: (• ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ)

$A=2|x|+3$, $B=|x+1|-2x$.

$\Gamma=|x-2|+3|x|-1$, $\Delta=4|1-x|-2|x-1|$.

$E=\dfrac{3\cdot|x-1|}{x-1}+|2x|$, $Z=|1-2x|-|3-x|+x$.

$H=|x^2+1|-2|3x-2|$, $\Theta=2-|x^2+x+1|-3|x|$.

Βρίσκω τις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\nu$ των απολύτων, τις βάζω στον άξονα και διακρίνω τις περιπτώσεις $x<\rho_1$, $\rho_1<x<\rho_2$, ..., $\rho_\nu<x$. Σε κάθε περίπτωση βγάζω τα απόλυτα και βρίσκω τη παράσταση..

ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΙΩΝΥΜΟΥ $f(x)=\alpha x+\beta$.

x		$-\beta/\alpha$	
$\alpha x+\beta$	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

90 Δείξτε ότι: 1) $(\alpha+|\alpha|)(\alpha-|\alpha|)=0$ 2) $(|\alpha|+|\beta|)(|\alpha|-|\beta|)=\alpha^2-\beta^2$

91 1) Αν $\alpha<x<\beta \Rightarrow \big||\alpha-x|-|\beta-x|\big|=|\alpha+\beta-2x|$.

2) Αν $x<\alpha<\beta \vee \alpha<\beta<x \Rightarrow \big||\alpha-x|-|\beta-x|\big|=\beta-\alpha$.

3) Αν $\alpha<x<1 \Rightarrow \big||x-1|+|x-\alpha|\big|>|1-x|-|\alpha-x|$

92 Δείξτε ότι:

1) $\alpha^2+\beta^2\geq 2|\alpha\beta|$. 2) $\left|\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right|\geq 1$

3) $\big|\lambda+|\lambda|\big|=\big|\lambda-|\lambda|\big| \Leftrightarrow \lambda=0$

93 1) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ και $\left|\dfrac{\alpha|\beta|+\beta|\alpha|}{\alpha\beta}\right|=2 \Rightarrow \alpha,\beta$ ομόσημοι.

2) Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\big||\alpha|-|\beta|\big|=|\alpha+\beta| \Rightarrow \alpha\cdot\beta\leq 0$.

94 Να βρεθούν τα x,y,ω αν: (• $|\alpha_1|+|\alpha_2|+\dots+|\alpha_\nu|=0 \Leftrightarrow \alpha_1=0 \wedge \alpha_2=0 \wedge\dots\wedge \alpha_\nu=0$)

1) $|2x-1|+|2x+y-2|+|2\omega-4|=0$. 2) $|2x+y|+|3x-4y|+|\omega|=0$

3) $|x+y|+|x^2-xy-18|=0$. 4) $|x+y+13|+|y^2-8y+15|=0$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Θ1 Δείξτε ότι:

1) $1+2+2^2+\cdots+2^{\nu+1}=2^{\nu+2}-1$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$

2) $3+7+11+\cdots+(4\nu-1)=\nu\cdot(2\nu+1)$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$

3) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+\nu(\nu+2)=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+7)}{6}$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$.

4) $2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+\nu\cdot2^{\nu-1}=(\nu-1)\cdot2^{\nu}$, $\forall \nu\in\mathbb{N}: \nu\geq 2$.

Θ2 Δείξτε ότι:

1) $2^{3\nu}-3^{\nu}=\text{πολ}.5$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$. 2) $\nu^2>3\nu+1$, $\forall \nu\in\mathbb{N}: \nu\geq 4$.

Θ3 Δείξτε ότι:

1) $\alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^4=2\alpha^2\beta^2+2(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)^2$.

2) $(\alpha^2+1)(\beta^2+\gamma^2+1)-(\alpha\beta+1)^2=\alpha^2\gamma^2+(\alpha-\beta)^2+\gamma^2$.

3) $2(2x-\alpha)^3-27\alpha^2x=(x-2\alpha)(4x+\alpha)^2$.

Θ4 Αν $x+y+z=0$, δείξτε ότι:

1) $x^3+y^3=-z(x^2-xy+y^2)$. 2) $x^2+y^2+z^2=2(z^2-xy)=2\cdot(x^2+xy+y^2)$

3) $x(x+y)(x+z)=y(y+x)(y+z)=z(z+x)(z+y)$.

Θ5 Αν $x^2+y^2=1 \Rightarrow 2(x^4+y^4+x^2y^2)^2=x^8+y^8+1$.

Θ6 Αν $x+y+z=1 \wedge x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz=1$.

Θ7 Αν $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$.

Θ8 Αν $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2 \Rightarrow x=y=z$.

Θ9 Αν $2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-x^2-y^2-z^2 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma \wedge x=y=z=0$.

Θ10 Αν $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z} \rightarrow x=-y \vee y=-z \vee z=-x$.

Θ11 Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2 \Rightarrow \gamma^2=\alpha\beta \vee \alpha=\beta$.

Θ12 Αν $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2$.

Θ13 Αν x,y ομόσημοι $\Rightarrow x^4+y^4\geq x^3y+xy^3$.

Θ14 Αν $\alpha,x,y\in\mathbb{R}_+^*$ και $x<\alpha$, $y<\alpha \Longrightarrow \dfrac{x+y}{1+\frac{xy}{\alpha^2}}<\alpha$.

Θ15 Δείξτε ότι: 1) $2\alpha^4+1\geq 2\alpha^3+\alpha^2$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. 2) $3(1+x^2+x^4)\geq(1+x+x^2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Θ16 Αν $0<\alpha<1 \Rightarrow 1-\alpha^3>3\alpha(1-\alpha)$.

Θ17 Αν $x,y\in\mathbb{R}_+$ και $x\neq y \Rightarrow x^5+y^5>x^4y+xy^4$.

Θ18 Αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\neq\beta \Rightarrow \alpha^3+2\beta^3>3\alpha\beta^2$.

Θ19 Αν $\omega>0$ δείξε ότι $\omega^3+1\geq \omega^2+\omega$. Πότε ισχύει η ισότης;

Θ20 Αν $x>y>0$ να συγκριθούν οι αριθμοί: x^3-y^3 και $(x-y)^3$.

Θ21 Δείξε ότι:

1) $xy+|xy|\geq |x|y+x|y|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

2) $\left|\alpha+\frac{1}{\alpha}\right|\geq 2$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}^*$. 3) $\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4}\leq\frac{1}{2}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Θ22 Αν $\alpha>\beta$ και $|x-\alpha|>|x-\beta|$ δείξε ότι: $x<\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Θ23 Αν $|\alpha|<1$ και $|\beta|<1$ δείξε ότι $\left|\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right|<1$

Θ24 Να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

1) $A=|2\alpha^2+3|-5|\alpha-2|+3|-\alpha-1|-|\alpha+2|$, αν $\alpha=-2\sqrt{2}$.

2) $B=|\alpha^2+5|-2|\alpha-\beta|+4|\gamma-\alpha|-|\gamma+\beta|-2\alpha$, αν $\alpha>\beta>\gamma>0$.

3) $\Gamma=|2x-1|-3|x|+|x^2+2|$, $x\in\mathbb{R}$.

4) $\Delta=3\cdot|2-x|+4|3x+1|$, ״.

5) $E=\frac{2|x-2|}{x^2-4}+\frac{1}{|x+2|}$, $x\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

6) $Z=|x-1|-|x-3|$, $x\in(-\infty,1)$.

Θ25 Αν $1<x<2$ και $2<y<3$ να απλοποιηθεί το κλάσμα:

$$A=\frac{|3x-1|+|y^2-9|-|x^2-4|-5x-3}{-x|2-x|-|1-y^2|}$$

Θ26 Να βρεθούν τα x,y,z αν:

1) $(x-2)^2+(3x+y)^2+(z-2y)^2=0$.

2) $|x+1|+|x-2y|+|2x-y+3z|=0$

Θ27 Αν $\alpha\neq 1$ δείξε ότι: $|\alpha-1|+\frac{1}{|\alpha-1|}\geq 2$. Πότε ισχύει η ισότης;

Θ28 Αν $|x|\leq 1$, $|y|\leq 2$, $|z|\leq 3 \Rightarrow |x+y+z|\leq 6$.

Θ29 Αν $|x-\alpha|\leq 2$ και $|\alpha-y|\leq 3 \Rightarrow |x-y|\leq 5$.

Θ30 Δείξε ότι: $|x|^3-x^2|y|-|x|y^2+|y|^3\geq 0$.

Θ31 Δείξε ότι: $\big||x|-|y|\big|\leq|x+y|$. Πότε ισχύει η ισότης;

Θ32 Αν $M=\max\{\alpha,\beta\}$ και $\mu=\min\{\alpha,\beta\}$,
(δηλαδή M ο μεγαλύτερος και μ ο μικρότερος από τους α,β)
δείξε ότι: $M=\frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$ και $\mu=\frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$

Θ33 Αν $|\alpha|>|\beta|$ δείξε ότι: 1) $2\alpha+\beta\neq 0$. 2) $\left|\frac{\alpha+2\beta}{\beta+2\alpha}\right|<1$.

Θ34 Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 1$ και $\alpha^2\geq 2|\beta\gamma| \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq|\beta|+|\gamma|$.

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

▼ **ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ** αριθμού $\alpha\in\mathbb{R}$,
λέγεται κάθε ρίζα (λύση) της εξίσωσης $x^2=\alpha$ (1)

● Αν $\alpha=\kappa^2 \Rightarrow \pm\sqrt{\alpha}\in\mathbb{Q}$ (π.χ. $\sqrt{4}=2$, $-\sqrt{9}=-3$)

● → Αν $\alpha>0$ η (1) έχει 2 ρίζες, $x_{1,2}=\pm\sqrt{\alpha}$. (π.χ. $x^2=5 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$).
→ Αν $\alpha=0$ » » » 1 ρίζα, $x=0$ (διπλή)
→ Αν $\alpha<0$ » » δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. (διότι $x^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$).

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$, ενώ $(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$. (π.χ. $\sqrt{3^2}=|3|=3$, $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$, $(\sqrt{5})^2=5$).

▼ **ΝΙΟΣΤΗ ΡΙΖΑ** αριθμού $\alpha\in\mathbb{R}$,
λέγεται κάθε ρίζα (λύση) της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$

● Για κάθε $\alpha\geq 0$ υπάρχει ένας μοναδικός $x\geq 0$, τέτοιος ώστε $x^\nu=\alpha$.
Αυτός ο μη αρνητικός αριθμός συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$. ● $\sqrt[2]{\alpha}=\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[1]{\alpha}=\alpha$, $\sqrt[\nu]{0}=0$, $\sqrt[\nu]{1}=1$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\begin{cases}\alpha, & \text{αν } \nu=2\kappa+1. \ (\text{π.χ. } \sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2) \\ |\alpha|, & \text{αν } \nu=2\kappa. \ (\text{π.χ. } \sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{(\pm 2)^4}=|\pm 2|=2)\end{cases}$, ενώ $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=\alpha$.

→ Το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ έχει νόημα μόνο όταν $\alpha\geq 0$.
Έτσι, αν $\alpha<0 \Rightarrow$ → $\sqrt[\nu]{\alpha}\notin\mathbb{R}$, (π.χ. $\sqrt[6]{-2}\notin\mathbb{R}$, $-\sqrt[6]{2}\in\mathbb{R}$)
→ $-\sqrt[\nu]{-\alpha}\in\mathbb{R}$

▼ **Άμεσες συνέπειες του ορισμού.**

1) $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\sqrt[\nu]{\alpha}\geq 0 \wedge (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=\alpha$.
2) $\forall x,\alpha\in\mathbb{R}_+ : x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{\alpha}$
3) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+ : \alpha>\beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}>\sqrt[\nu]{\beta}$
4) $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+ : \begin{cases} 0<\alpha<1 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}<1. \\ \alpha>1 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}>1. \end{cases}$

▼ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΙΖΩΝ.** $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$ και $\mu,\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύουν:

1) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$ 2) $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$. ● $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$.

3) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ 4) $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\kappa=\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$ 5) $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\begin{cases}\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}} \\ \sqrt[\nu:\rho]{\alpha^{\mu:\rho}}\end{cases}$

● Αν $\mu>\nu \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^\pi\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^\upsilon}$, όπου π το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mu:\nu$. (π.χ. $\sqrt[5]{\alpha^{27}}=\alpha^5\cdot\sqrt[5]{\alpha^2}$)

▼ **Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ στο $\mathbb{R}$.**

$\alpha\in\mathbb{R}$	$\nu\in\mathbb{N}^*$	Ρίζες της $x^\nu=\alpha$	Παραδείγματα
$\alpha=0$		0	$x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ (τριπλή).
$\alpha>0$	άρτιος	$\sqrt[\nu]{\alpha}$, $-\sqrt[\nu]{\alpha}$	$x^4=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{2}$, $x^6=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[6]{1}=\pm 1$.
	περιττός	$\sqrt[\nu]{\alpha}$	$x^3=8 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$, $x^5=2 \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{2}$
$\alpha<0$	άρτιος	—	$x^6=-2 \Rightarrow x\notin\mathbb{R}$, $x^2=-1 \Rightarrow x\notin\mathbb{R}$.
	περιττός	$-\sqrt[\nu]{-\alpha}$	$x^3=-4 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{4}$, $x^5=-1 \Leftrightarrow x=-\sqrt[5]{1}=-1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΡΙΖΙΚΑ.

95 Να απλοποιηθούν τα ριζικά:

$\sqrt[5]{243}$, $-\sqrt[7]{128}$, $\sqrt{0{,}0004}$, $\sqrt{0{,}027}$, $\sqrt[4]{\frac{32}{81}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$.

96 Όμοια τα ριζικά $(\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega \in \mathbb{R}_+)$:

$\sqrt{\alpha^5}$, $\sqrt[3]{\alpha^{14}}$, $\sqrt[5]{32\alpha^{12}}$, $\sqrt[4]{\alpha^4x^6y}$, $\sqrt[4]{\alpha^8\beta^2\gamma^{12}}$, $\sqrt[3]{8\alpha\beta^3x^4}$, $\sqrt[5]{32x^5y^{10}\omega^7}$, $\sqrt[4]{27\alpha^7\beta^{21}}$, $\sqrt{120\alpha^7\beta^4\gamma^3}$, $\sqrt[5]{2\alpha^{24}\beta^{31}\gamma^{42}}$, $\sqrt[9]{16x^{39}y^{45}}$, $\sqrt[3]{64x^{22}y^{73}}$, $\sqrt[6]{64x^{12}y^9\omega^{70}}$.

97 Όμοια τα ριζικά (όπου έχουν έννοια...):

$\sqrt{\alpha^4-2\alpha^2}$, $\sqrt[3]{9x^6-x^3}$, $\sqrt{x^3+2x^2+x}$, $\sqrt{x^3-x^2}$, $\sqrt{\frac{(x^3+1)(x+1)}{4x^4}}$,

$3\sqrt{x^2-6x+9}$, $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$, $\sqrt{x^3-4x^2+4x}$, $\sqrt{\frac{(x^2-1)(x-1)}{x^4}}$, $\sqrt{\frac{x^3}{(x^2-1)^2}}$.

98 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*)$:

$\sqrt{\sqrt[3]{\alpha^2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}$, $\sqrt[3]{3\sqrt{9\sqrt{27\sqrt{81}}}}$, $\sqrt[5]{32\sqrt{2\sqrt[3]{8\sqrt{2}}}}$,

$\sqrt[4]{16\sqrt[3]{8\sqrt{2}}}$, $\sqrt[3]{4\alpha^2\sqrt{\frac{3\beta}{2\alpha}}}$, $\sqrt[4]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{9}\sqrt{\frac{8}{27}}}}$, $\sqrt[5]{27\alpha^3\sqrt[3]{\frac{\beta^5}{\alpha}}}$.

99 Όμοια οι παραστάσεις: • $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$ • $\longrightarrow$ B A

$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$, $\sqrt{11+\sqrt{72}}$, $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

100 Να γίνουν οι πράξεις:

1) $2\sqrt{8}-3\sqrt{18}+4\sqrt{32}-5\sqrt{50}+6\sqrt{72}$. 2) $2\cdot\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{2}-3\sqrt[4]{1}$.

3) $2\sqrt[3]{8}-5\sqrt{18}+2\sqrt[3]{54}-6\sqrt[3]{2}+7\sqrt{128}$. 4) $4\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{1}$.

101 Όμοια οι πράξεις (όλα τα υπόρριζα μη αρνητικά...):

1) $\sqrt{4\alpha^2+4}-5\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{x^2+\alpha^2x^2}+\sqrt{9\alpha^2+9}$, $x \in \mathbb{R}_+$.

2) $\sqrt{2\alpha^3x}-\sqrt{32\alpha x^3}+\sqrt{18xy^3}$, $\alpha, x, y \in \mathbb{R}_+$.

3) $\sqrt{\alpha^5-2\alpha^4}+\sqrt{\alpha x^4-2x^4}-\sqrt{4\alpha^3x^2-8\alpha^2x^2}$, $\alpha, x \in \mathbb{R}_+$.

4) $\sqrt{\frac{\alpha^3+\alpha^2}{x^3-x^2}}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4\alpha^2+4\alpha^3}{x-1}}-\frac{3\alpha}{x}\sqrt{\frac{\alpha+1}{x-1}}$, $\alpha, x \in \mathbb{R}_+^*$.

102 Όμοια οι πράξεις $(\alpha, x \in \mathbb{R}_+^*)$:

1) $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{27\alpha^3} : \sqrt[6]{\alpha^2}$. 2) $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\alpha^4}\cdot\sqrt[5]{\alpha^3} : \sqrt[6]{\alpha}$. 3) $\sqrt{\alpha^4}\cdot\sqrt[3]{\alpha^5}\cdot\sqrt[4]{\alpha^4}$.

4) $\sqrt[4]{\alpha}\cdot 3\sqrt[6]{\alpha^5x}\cdot 2\sqrt[3]{6\alpha^3x^3}$. 5) $\sqrt[3]{125\alpha\beta\gamma}\cdot 2\sqrt[3]{8\alpha^2\beta\gamma^3}\cdot\sqrt[3]{27\alpha^3\beta\gamma^3}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

6) $\frac{\sqrt[15]{4^3}\cdot\sqrt[15]{4^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[6]{2}}$ 7) $\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[6]{64x^2}}{4\sqrt[4]{81x^5}}$. 8) $\sqrt[\nu]{x^2\cdot\omega^{\nu-2}}\cdot\sqrt[\nu]{y^{\nu-3}\cdot\omega^2}\cdot\sqrt[\nu]{x^{\nu-2}\cdot y^3}$, $x, y, \omega \in \mathbb{R}_+^*$

103 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις $(x, y \in \mathbb{R})$:

$A=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-12x+36}$, $B=\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt[4]{y^4}}{|x|\cdot y}-2x^2\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^{10}}}+1$

104 Να μετασχηματιστούν τα παρακάτω κλάσματα, σε άλλα ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

▼ **ΡΗΤΟΠΟΙΗΣΗ** ▼

- $\dfrac{A}{\kappa\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}} = \dfrac{A\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}}{\kappa\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-\mu}}} = \dfrac{B}{\kappa\cdot\alpha}$
- $\dfrac{A}{\kappa\sqrt{\alpha}\pm\lambda\sqrt{\beta}} = \dfrac{A\cdot(\kappa\sqrt{\alpha}\mp\lambda\sqrt{\beta})}{(\kappa\sqrt{\alpha})^2-(\lambda\sqrt{\beta})^2} = \dfrac{B}{\kappa^2\alpha-\lambda^2\beta}$.

1) $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}$, $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$, $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{\alpha^2}}$, $-\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt[5]{\alpha^3}}$, $2\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $-\dfrac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$.

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$, $\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{2\sqrt{2}-3}$, $\dfrac{4}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{27}}$, $\dfrac{-2}{3\sqrt{8}-4\sqrt{2}}$.

3) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, $\dfrac{2}{\alpha\sqrt{1+\beta^2}-\beta\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\dfrac{1}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$

4) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\dfrac{3}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $\dfrac{3}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}$

105 Να γίνουν οι πράξεις:

1) $\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}+1}$, $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{5}{3\sqrt{2}+5}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{3-4\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

3) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$, $\dfrac{\frac{3}{2\sqrt{7}}}{\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}-1}+1}$

4) $\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-\alpha^4}}$.

106 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A=\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}\cdot y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}\cdot y^{1/4}+x^{1/4}\cdot y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}$,

$B=\dfrac{x^{1/2}-2x^{1/4}+1}{x^{1/4}-2x^{1/8}+1}$, $\Gamma=\dfrac{\alpha^2-\alpha^{3/2}\cdot\beta^{1/2}-2\alpha^{1/2}\cdot\beta^{1/4}+2\beta^{3/4}}{\alpha^{1/2}-\beta^{1/2}}$

$\Delta=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^{1/3}-\beta^{1/3}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}{\alpha^{2/3}+\alpha^{1/3}\cdot\beta^{1/3}+\beta^{2/3}}$

▼ **ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΡΗΤΟ**

$\forall\alpha\in\mathbb{R}^*_+$ και $\mu,\nu\in\mathbb{Z}^*$ ισχύει:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

- Ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων, που ισχύουν στο $\mathbb{Z}$

107 Δείξτε ότι: (τα υπόρριζα όλα θετικά)

1) $\sqrt{x^3+\sqrt[3]{x^6y^3}}+\sqrt{y^3+\sqrt[3]{x^3y^6}}=\sqrt{(x+y)^3}$

2) $\sqrt[\nu-1]{\dfrac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\alpha}}}=\sqrt[\nu]{\alpha}$.

3) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}=14$.

4) $\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2(x+y)$.

5) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}$.

6) $\left(\dfrac{5-2\sqrt{6}}{4}\right)^{-1}-\dfrac{5+2\sqrt{6}}{4}=15\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

7) $(6-2\sqrt{5})^{3/2}=8(\sqrt{5}-2)$.

8) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{xy}}-\dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{xy}}\right)\cdot\dfrac{x-y}{2\sqrt{xy}}=-\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

9) $\left(\alpha^{1/2}-\beta^{1/2}\right)\left(\alpha^{-1/2}+\beta^{-1/2}\right)=\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}$.

10) $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{2}}}=\sqrt{34}$.

ΤΡΙΩΝΥΜΟ $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$: $\alpha\neq 0,\ \alpha\beta\gamma\in\mathbb{R}$.

▼ **ΕΙΔΟΣ ΡΙΖΩΝ.** Εξαρτάται από τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ ως εξής:

$\Delta>0 \Leftrightarrow \rho_1\neq\rho_2\in\mathbb{R}$ (Πραγματικές και άνισες) $\rightarrow \rho_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

$\Delta=0 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2\in\mathbb{R}$ (Πραγματικές και ίσες ή μια διπλή) $\rightarrow \rho_1=\rho_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

$\Delta<0 \Leftrightarrow \rho_{1,2}\notin\mathbb{R}$ (Μη πραγματικές).

● $\Delta=\kappa^2$ (τέλειο τετράγωνο) και $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow \rho_{1,2}\in\mathbb{Q}$ (Ρητές)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(108) Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές:
1) $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\beta-\alpha=0$? 2) $(\alpha-\beta+\gamma)x^2+4(\alpha-\beta)x+(\alpha-\beta-\gamma)=0$.

(109) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2-\lambda x-2=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(110) Αν η εξίσωση $8\lambda^2 x(2x-1)+\kappa^2=0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές, δείξτε ότι η εξίσωση $4\lambda^2x^2+\kappa^2(4x+1)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. $(\lambda\in\mathbb{R}^*)$.

(111) Αν $\mu=\lambda+\frac{\nu}{\lambda}$ και $\nu\in\mathbb{Q}$, $\lambda\in\mathbb{Q}^*$ δείξτε ότι η εξίσωση $x^2+\mu x+\nu=0$ έχει ρητές ρίζες.

(112) Αν τα α,β,γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου, να βρεθεί το είδος των ριζών των εξισώσεων:
1) $\dfrac{\alpha^2}{x+1}-\dfrac{\gamma^2}{x}=\beta^2$. 2) $\beta\gamma x^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)x+\beta\gamma=0$.

(113) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$ δείξτε ότι η εξίσωση $(\alpha+\gamma-\beta)x^2+2\gamma x+\beta+\gamma-\alpha=0$ έχει ρητές ρίζες. Όμοια, για την εξίσωση: $4x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha(\beta+\gamma)=0$

(114) Αν η εξίσωση $2x^2-2(\gamma-\alpha)x+\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma=0$ έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι $2\beta=\alpha+\gamma$.

(115) Αν το $\varphi(x)=x^2+\lambda x+\mu$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, δείξτε ότι και το $f(x)=\varphi(x)+\kappa\cdot(\lambda+2x)$ έχει επίσης ρίζες πραγματικές και άνισες.

(116) 1) Αν $\kappa\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ δείξτε ότι οι εξισώσεις:
$x^2+\alpha x+\beta^2=0$ και $\kappa^2x^2+\alpha\kappa(\kappa^2+1)x+\alpha^2\kappa^2+\beta^2(\kappa^2-1)^2=0$
έχουν το ίδιο είδος ριζών.
2) Όμοια, για τις εξισώσεις: $x^2+2\kappa x+\lambda=0$ και $x^2+2x+\lambda+2\kappa(x+1)+1=0$

(117) Δείξτε ότι η εξίσωση $(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)+(x-\alpha)(x-\beta)=0$ έχει ρίζες πραγματικές.
Πότε οι ρίζες αυτές είναι ίσες;

▼ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΡΙΖΩΝ. ($\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$)

$S=\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ $\qquad P=\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

$\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma}{\alpha}=\ldots$

$\rho_1^3+\rho_2^3=(\rho_1+\rho_2)^3-3\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3-3\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\ldots$

● Κάθε άλλη τη μετατρέπουμε σε S και P

π.χ. $2\rho_1^2+5\rho_1\rho_2^2+5\rho_1^2\rho_2+2\rho_2^2=2(\rho_1^2+\rho_2^2)+5\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)=2\left[(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2\right]+5\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(118) Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες της $x^2+2x-36=0$ να υπολογιστεί η παράσταση $K=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1}+\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2}$, χωρίς να λυθεί η εξίσωση.

(119) Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες της $x^2-x+1=0$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:
$A=(\rho_1+1)^{-2}+(\rho_2+1)^{-2}$, $B=\frac{2\rho_1+3\rho_2}{\rho_1-1}+\frac{2\rho_2+3\rho_1}{\rho_2-1}$, $\Gamma=\rho_1^4+\rho_2^4$, $\Delta=\rho_1^5+\rho_2^5$

(120) Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες της $x^2+\lambda x+\frac{\lambda^2}{3}-\frac{\alpha}{\lambda}=0$ δείξτε ότι η παράσταση $\rho_1^3+\rho_2^3$ είναι ανεξάρτητη του λ.

(121) Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες της $(x^2+1)(\alpha^2+1)=\mu\alpha x(\alpha x-1)$, δείξτε ότι:
$$(\rho_1^2+1)(\rho_2^2+1)=\mu\rho_1\rho_2(\rho_1\rho_2-1).$$

▼ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Β' ΒΑΘΜΙΟΥ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ $\rho_{1,2}$

$$\left.\begin{matrix}\rho_1\\ \rho_2\end{matrix}\right)\pm \Longrightarrow \left.\begin{matrix}S=\rho_1+\rho_2\\ P=\rho_1\rho_2\end{matrix}\right)\Longrightarrow \omega^2-S\omega+P=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(122) Να σχηματιστεί εξίσωση που έχει ρίζες: 1) $-1, 4$. 2) $\frac{2}{3},\frac{3}{2}$
3) $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$. 4) $\frac{2-\sqrt{3}}{4},\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. 5) $3\lambda,-3\lambda$. 6) $\alpha+\beta,\alpha-\beta$.

(123) Να κατασκευαστεί η εξίσωση που έχει ρίζες:
1) αντίθετες των ριζών $x_{1,2}$ της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$
2) αντίστροφες " " " " " → Τι παρατηρείτε;

(124) Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες της $2x^2-3x+1=0$, να βρεθεί η εξίσωση με ρίζες:
1) $\frac{1}{\rho_1},\frac{1}{\rho_2}$. 2) ρ_1^2,ρ_2^2. 3) $\rho_1^2\rho_2,\rho_1\rho_2^2$. 4) $\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1},\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2}$. 5) ρ_1^2+3,ρ_2^2+3
6) $3\rho_1+2, 3\rho_2+2$. 7) ρ_1^{-3},ρ_2^{-3}. 8) $-\rho_1,-\rho_2$

(125) Να βρεθεί η εξίσωση με ρίζες τα τετράγωνα ή τους κύβους των ριζών της εξίσωσης: $2x(x-\alpha)=\alpha^2$.

▼ ΠΡΟΣΗΜΟ ΡΙΖΩΝ. Εξαρτάται απο τα P, Δ, S ως εξής:

1) $P<0 \Leftrightarrow \rho_2<0<\rho_1$ (Ετερόσημες ρίζες).

2) $P=0 \Leftrightarrow \rho_1=0,\ \rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ (Η μια ρίζα μηδέν και η άλλη $\begin{cases}\text{θετική αν } S>0\\ \text{αρνητική αν } S<0\end{cases}$.

3) $P>0$:
- $\Delta>0$:
  - $S>0 \Leftrightarrow 0<\rho_2<\rho_1$ (Δύο ρίζες θετικές).
  - $S<0 \Leftrightarrow \rho_2<\rho_1<0$ (Δύο ρίζες αρνητικές).
- $\Delta=0$:
  - $S>0 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2>0$ (Μια ρίζα διπλή θετική).
  - $S<0 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2<0$ (Μια ρίζα διπλή αρνητική).
- $\Delta<0 \Leftrightarrow \rho_{1,2}\notin\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

126 Να βρεθεί το πρόσημο των ριζών των εξισώσεων:
1) $3x^2-6x-1=0$. 2) $2x^2+3x+6=0$ 3) $-x^2+4x-4=0$
4) $x^2=\sqrt{3}\,(2x-\sqrt{3})$. 5) $x^2-2\sqrt{3}\,x+1=0$.

127 Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha^2\beta^2x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+1=0$ όπου $\alpha\beta\neq0$, έχει ρίζες θετικές.

▼ ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ $\Phi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Εξαρτώνται απο τη $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ ως εξής:

$\Delta>0 \Leftrightarrow \Phi(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ← Τύπος παραγοντοποίησης ($\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$).

$\Delta=0 \Leftrightarrow \Phi(x)=\alpha\cdot(x-\rho)^2=\alpha\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ← Τέλειο τετράγωνο ($\rho=\rho_1=\rho_2=-\frac{\beta}{2\alpha}$).

$\Delta<0 \Leftrightarrow \Phi(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ ← Άθροισμα τετραγώνων ($\rho_{1,2}\notin\mathbb{R}$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

128 Δείξτε ότι: 1) το τριώνυμο x^2-3x+2 τρέπεται σε γινόμενο δύο α'βαθμιων παραγόντων.
2) » » $x^2-10x+25$ » » τέλειο τετράγωνο.
3) » » $2x^2-3x+5$ » » άθροισμα τετραγώνων.

Στη συνέχεια, τρέψτε τα τριώνυμα αυτά στις αντίστοιχες μορφές.

129 Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:
1) $\frac{x^2+7x-8}{2x^2-7x+5}$. 2) $\frac{x^2-(\alpha-\beta)x-\alpha\beta}{x^2-2\alpha x+\alpha^2}$. 3) $\frac{x^2-(\sqrt{3}+2)x+2\sqrt{3}}{x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}}$

▼ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\Phi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Εξαρτάται από τα Δ, α ως εξής:

1) $\Delta>0 \Leftrightarrow$ Το $\Phi(x)$ είναι ετερόσημο του α εντός των ριζών και ομόσημο » » εκτός » »

$\alpha>0$

x		ρ_2		ρ_1	
$\Phi(x)$	+	0	−	0	+

$\alpha<0$

x		ρ_2		ρ_1	
$\Phi(x)$	−	0	+	0	−

2) $\Delta=0 \Leftrightarrow$ Το $\Phi(x)$ είναι ομόσημο του α, $\forall x\in\mathbb{R}-\{-\frac{\beta}{2\alpha}\}$.

Για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ το $\Phi(x)=0$.

$\alpha>0$

x		$-\beta/2\alpha$	
$\Phi(x)$	+	0	+

$\alpha<0$

x		$-\beta/2\alpha$	
$\Phi(x)$	−	0	−

3) $\Delta<0 \Leftrightarrow$ Το $\Phi(x)$ είναι ομόσημο του α, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\alpha>0$

x	
$\Phi(x)$	+

$\alpha<0$

x	
$\Phi(x)$	−

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Το τριώνυμο $\Phi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι **ετερόσημο του α μόνο στη περίπτωση** που είναι $\Delta>0$ και ο x παίρνει τιμές **μεταξύ των ριζών**.

- Το ίδιο πρόσημο με τα παραπάνω έχει και κάθε παράσταση της μορφής $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{2K+1}$, ενώ το $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{2K}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

130) Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων:

$2x^2-x-3$, x^2-2x+5, $-x^2+10x-25$, $-3x^2-x+1$, $-2x^2+5x-7$.

131) Δείξτε ότι: 1) $x^2-4x+3>0$, $\forall x\in(-\infty,\rho_2)\cup(\rho_1,+\infty)$.

2) $4x^2-x+2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 3) $-x^2+6x-9\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

4) $x^2-5x+6\leq 0$, $\forall x\in[\rho_2,\rho_1]$. 5) $4x^2-36x+81>0$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{9/2\}$.

▼ΘΕΣΗ ΑΡΙΘΜΟΥ $\xi \in \mathbb{R}$ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΤΟΥ $\Phi(x)$.

Εξαρτάται από τα α, $\Phi(\xi)$, $\xi+\frac{\beta}{2\alpha}$ ως εξής:

1) $\Phi(\xi)=0 \Leftrightarrow$ ο ξ είναι ρίζα του $\Phi(x)$.

2) $\alpha\cdot\Phi(\xi)<0 \Leftrightarrow \rho_2<\xi<\rho_1$ (ο ξ μεταξύ των ριζών που είναι πραγματικές και άνισες).

3) $\alpha\cdot\Phi(\xi)>0$, $\Delta\geq 0$ $\begin{cases} \xi+\frac{\beta}{2\alpha}<0 \Leftrightarrow \xi<\rho_2\leq\rho_1 & \text{(ο } \xi \text{ αριστερά των ριζών).} \\ \xi+\frac{\beta}{2\alpha}>0 \Leftrightarrow \rho_2\leq\rho_1<\xi & \text{(ο } \xi \text{ δεξιά ,, ,,).} \end{cases}$

- Για δύο αριθμούς $\xi_1<\xi_2\in\mathbb{R}$,
  αν $\Phi(\xi_1)\cdot\Phi(\xi_2)<0 \Leftrightarrow \xi_1<\rho_2<\xi_2<\rho_1 \ \vee\ \rho_2<\xi_1<\rho_1<\xi_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

132 Να βρεθεί η θέση του αριθμού 3 ως προς τις ρίζες της εξίσωσης $2x^2-5x-1=0$ (χωρίς να βρεθούν οι ρίζες της...).

133 Να βρεθεί η θέση των αριθμών -2, $\frac{1}{2}$ ως προς τις ρίζες της εξίσωσης $x^2+5x+6=0$. Όμοια, για τους αριθμούς $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

134 Αν ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4x+3=0$, δείξτε ότι:
1) $\rho_2<\sqrt{2}<\rho_1<5$ 2) $-3<\rho_2<\rho_1$ 3) $\rho_2<\rho_1<5$
4) Η μία ρίζα είναι το 3. 5) $0<\rho_2<\rho_1$

135 Να συγκριθούν οι αριθμοί 5 και 7 με τις ρίζες του τριωνύμου $\Phi(x)=x^2-9x+18$, χωρίς να βρεθούν οι ρίζες του.

136 Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$, δείξτε χωρίς να χρησιμοποιηθεί η διακρίνουσα, ότι η εξίσωση $(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

137 Αν ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2-3x+\lambda-5=0$ και $\rho_2<\rho_1<3$, δείξτε ότι $-4<\lambda\leq\frac{49}{8}$.

138 Δείξτε ότι η εξίσωση $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=0$ έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 πραγματικές και $\rho_1\in(1,2)$, $\rho_2\in(2,3)$.

139 Για ποιές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ρίζες του τριωνύμου $\Phi(x)=-x^2+2x+3-\lambda$ είναι μικρότερες από το 2.

140 Όμοια, αν οι ρίζες ρ_1,ρ_2 του $\Phi(x)=x^2-6x+2\lambda-1$ πληρούν τη σχέση: $\rho_1>\rho_2>1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΜΠΕΔΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ.

Έστω $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

1) Με πόσους και ποιούς τρόπους μπορούμε να δείξουμε ότι οι ρίζες $\rho_{1,2}$ είναι πραγματικές.

2) Ποιά τριώνυμα δεν αλλάζουν πρόσημο $\forall x\in\mathbb{R}$.

3) Πότε οι ρίζες του τριωνύμου δεν είναι πραγματικές

4) » » » » » είναι ίσες.

5) » » » » » » ρητές.

6) » » » » » » ετερόσημες.

7) » » » » » » θετικές.

8) » » » » » » αρνητικές.

9) » » » » » » η μία θετική και η άλλη μηδέν.

10) » » » » » » » » αρνητική » » » ».

11) » » » » » » και οι δύο μηδέν.

12) » » » » » » αντίθετες.

13) » » » » » » αντίστροφες.

14) Πότε το τριώνυμο τρέπεται σε τέλειο τετράγωνο.

15) » » » » » διαφορά δύο τετραγώνων.

16) » » » » » άθροισμα » ».

17) Ποια είναι η εξίσωση που έχει ρίζες ρ_1,ρ_2.

18) Ποιές είναι οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε δύο αριθμοί $\xi_1<\xi_2$ (όπου $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$) να είναι:

i) $\xi_1<\xi_2<\rho_2\le\rho_1$ ii) $\xi_1<\rho_2<\xi_2<\rho_1$ iii) $\xi_1<\rho_2\le\rho_1<\xi_2$

iv) $\rho_2<\xi_1<\xi_2<\rho_1$ v) $\rho_2\le\rho_1<\xi_1<\xi_2$ vi) $\rho_2<\xi_1<\rho_1<\xi_2$

19) Πότε ο αριθμός $\xi\in\mathbb{R}$ είναι ρίζα του τριωνύμου.

20) Πότε το τριώνυμο είναι: i) Θετικό $\forall x\in\mathbb{R}$. ii) Αρνητικό $\forall x\in\mathbb{R}$.
iii) Θετικό $\forall x\in(\rho_2,\rho_1)$ ή iv) Αρνητικό $\forall x\in(\rho_2,\rho_1)$
v) Θετικό $\forall x\in(-\infty,\rho_2)\cup(\rho_1,+\infty)$. vi) Αρνητικό $\forall x\in(-\infty,\rho_2)\cup(\rho_1,+\infty)$.

21) Να βρεθούν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τα α,β,γ ώστε:

1) $\rho_1=\rho_2>0$. 2) $1<\rho_2<\rho_1$. 3) $2<\rho_2<4<\rho_1$. 4) $\rho_1^3+\rho_2^3=2$. 5) $(1-\rho_1)(1-\rho_2)<0$.

6) $-2<\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}<1$. 7) $\rho_1+3<5-\rho_2$. 8) $\varphi(x)\le0, \forall x\in\mathbb{R}$. 9) $\varphi(x)\ge0, \forall x\in\mathbb{R}$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

(Α) → ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ: είναι της μορφής $f(x)=0$

όπου $f(x)$ πολυώνυμο οιουδήποτε βαθμού ως προς x.

Λύνονται ανάλογα με το βαθμό του $f(x)$ ως εξής: ΠΟ: $A=\mathbb{R}$

Α΄ ΒΑΘΜΟΥ → $\alpha x+6=0$, $\alpha, 6 \in \mathbb{R}$.

Η λύση τους εξαρτάται απο τα $\alpha, 6$ ως εξής:

Αν
- $\alpha \neq 0$, έχει μια μόνο λύση (ρίζα) τη $x=-\frac{6}{\alpha}$.
- $\alpha=0 \wedge 6\neq 0$, είναι Αδύνατη ($\nexists x\in\mathbb{R}$ που να την επαληθεύει)
- $\alpha=0 \wedge 6=0$, ›› Ταυτότης ($\forall x\in\mathbb{R}$ αληθεύει).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(141) Να λυθούν οι εξισώσεις: 1) $3x(2x-1)+(-4x^2+1)=\frac{(2x+3)(2x-1)}{2}$

2) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+5=\frac{5x}{6}+2$ 3) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{2}=\frac{19x}{6}+\frac{3}{2}-x-\frac{3-2x}{2}$.

Β΄ ΒΑΘΜΟΥ → $\alpha x^2+6x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, $\alpha,6,\gamma\in\mathbb{R}$.

Η λύση τους εξαρτάται απο τη διακρίνουσα $\Delta=6^2-4\alpha\gamma$ ως εξής:

Αν
- $\Delta>0$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ → $x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. $(x_1\neq x_2)$.
- $\Delta=0$, έχει μια ρίζα διπλή στο $\mathbb{R}$ → $x_1=x_2=-\frac{6}{2\alpha}$.
- $\Delta<0$, δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$ $(x_{1,2}\notin\mathbb{R})$ → Αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

→ **ελλιπείς μορφές:**

1) $\alpha x^2=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=0$ (διπλή)

2) $\alpha x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(\alpha x+6)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \vee x_2=-\frac{6}{\alpha}$.

3) $\alpha x^2+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$
- → $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, αν $-\frac{\gamma}{\alpha}>0$.
- → Αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αν $-\frac{\gamma}{\alpha}<0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(142) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $3x^2-2=0$. 2) $2x^2=4x+2$. 3) $-2x^2=3x$. 4) $2x^2-5x=1$.

5) $x^2+2=-3x$ 6) $x^2+10x=-25$. 7) $x^2-(2\alpha-36)x-6\alpha 6=0$.

8) $6x^2+(9\alpha+26)x+12\alpha 6=0$. 9) $(\kappa^2-\lambda^2)x^2-2(\kappa^2+\lambda^2)x+\kappa^2-\lambda^2=0$, $\kappa\neq\pm\lambda$.

10) $\sqrt{3}x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{7})x+\sqrt{7}=0$. 11) $(\alpha^2-6^2)x^2-2\alpha^2 6x+\alpha^2 6^2=0$, $\alpha\neq\pm 6$.

12) $\alpha^4x^2+2\alpha^2 6^2x+6^4=0$. 13) $(x^2-3x+2)^2+(x-1)^2=0$. → $\alpha^2+6^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \wedge 6=0$

ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ Β' ΒΑΘΜΟΥ → $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$,

όπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$, $\alpha_\nu \neq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 3$.

Η λύση τους ανάγεται στην παραγοντοποίηση, ως εξής:

- Αναλύω το $f(x)$ σε γινόμενο α' βαθμίων ή β' βαθμίων παραγόντων.
- Θέτω καθε παράγοντα του γινομένου ίσο με μηδέν, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_\nu = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \vee \alpha_2 = 0 \vee \dots \vee \alpha_\nu = 0.$$

- Λύνω τις α' βάθμιες ή β' βάθμιες εξισώσεις που προκύπτουν ....

→ Σε όλες τις ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ εξισώσεις, οι ρίζες που βρίσκω είναι δεκτές, διότι το Πεδίο Ορισμού τους είναι όλο το $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

143 Να λυθούν οι εξισώσεις

1) $x^3 - x = \sqrt{2} \cdot (x^2 - 1)$. 2) $4x^3 - 4\sqrt{3}x^2 = x - \sqrt{3}$. 3) $2x^3 - 4x^2 - 5x + 10 = 0$.

4) $(x+1)(x^2-4) = 3(x-2)(x+1)$ 5) $(-2x^2-3) \cdot (x+1)^3 \cdot (8-x^2) \cdot (x^2-4x+3)^4 = 0$.

6) $(x^3-8) \cdot (x^3+1) \cdot (x^2-4x+4) = 0$ 7) $2x^4 + 5x^2 = x^3$. 8) $(x+1)^4 - x^4 = 4x^3$.

9) $(2x-1)^3 = 8x^3$. 10) $x^3 + (x-1)^3 + (1-2x)^3 = 0$

11) $(2x^2-1)^3 + (5x^2+2x)^3 = (7x^2+2x-1)^3$.

144 Να λυθούν οι εξισώσεις: • **Διτετράγωνες. Θέτω $x^2 = y$ ....**

1) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. 2) $2w^4 - 7w^2 - 4 = 0$. 3) $3y^4 + 5y^2 + 2 = 0$

ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ → $\alpha x^\nu + \beta = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

• Επίλυση: $\alpha x^\nu = -\beta \Leftrightarrow x^\nu = -\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε η λύση της εξαρτάται από τα α, β, ν, ως εξής: **1)** Αν $\nu = 2k$ και

i) $-\frac{\beta}{\alpha} > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες $x_{1,2} = \pm \sqrt[\nu]{-\frac{\beta}{\alpha}}$.

ii) $-\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Rightarrow$ 1 ρίζα $x = 0$ (βαθμού πολλαπλότητος ν).

iii) $-\frac{\beta}{\alpha} < 0 \Rightarrow$ **Αδύνατη** στο $\mathbb{R}$ (διότι $x^{2k} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

2) Αν $\nu = 2k+1$ έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$, την

i) $x = \sqrt[\nu]{-\frac{\beta}{\alpha}}$, αν $-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0$. ii) $x = -\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha}}$, αν $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$

145 Να λυθούν οι εξισώσεις: 1) $x^4 = 16$. 2) $x^3 = -8$ 3) $x^5 = 32$

4) $x^5 + 3 = 0$. 5) $x^6 - 2 = 0$ 6) $x^7 + 1 = 0$. 7) $16x^4 - 81 = 0$ 8) $2x^3 + 5 = 0$

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

B

Είναι εξισώσεις που έχουν άγνωστο και στον παρονομαστή ενός τουλάχιστον κλάσματος.

ΕΠΙΛΥΣΗ:

- Βρίσκω το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και από τη συνθήκη Ε.Κ.Π.$\neq 0$ βρίσκω το πεδίο ορισμού A. (Δηλαδή το σύνολο από το οποίο μπορεί να παίρνει τιμές ο άγνωστος).
- Κάνω απαλοιφή παρονομαστών (πολ/ζω και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π.)
- Έχω πολυωνυμική εξίσωση, οπότε συνεχίζω όπως στο $\boxed{A}$.
- Από τις ρίζες που βρίσκω δέχομαι μόνο αυτές που ανήκουν στο πεδίο ορισμού A και τις άλλες τις απορρίπτω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

146 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{11}{(x^2-3x+2)(x-3)}$.

2) $\dfrac{1}{x(x^2-2x+1)}+\dfrac{3}{x^2-3x}=\dfrac{3}{x^2+x-2}$.

3) $\dfrac{2x+1}{3x-3}=\dfrac{7x-1}{6x+6}+\dfrac{2x^2-3x-45}{4-4x^2}$.

4) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x^2-x-2}=0$.

5) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x+1}{3-x}=\dfrac{1}{x^2-5x+6}+2$.

6) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{6x+5}{x^2-x}$.

7) $\dfrac{13}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{5x-3}{x^2-1}$.

8) $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^3-2x^2+x}-\dfrac{3}{x^2-3x}=0$.

9) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^3}=1$

10) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0$.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ.

Είναι εξισώσεις που, εκτός από τον άγνωστο x, περιέχουν και ένα ή περισσότερα άλλα γράμματα $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa, \lambda, \mu)$ που λέγονται παράμετροι. Σε κάθε τέτοια εξίσωση βρίσκουμε τις τιμές της (των) παραμέτρου για τις οποίες η εξίσωση έχει μια λύση, και εκείνες για τις οποίες είναι αδύνατη ή ταυτότης. Η δουλειά αυτή λέγεται **διερεύνηση**. (Βλέπε Φυλ. 27 - Εξισώσεις Α΄ βαθμού).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Μονοπαραμετρικές.

147 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $(\lambda^2-4)x=\lambda^2-2\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
2) $\lambda^2(x-1)=2(2x-\lambda)$, ,,
3) $\lambda^2x+\lambda x=\lambda^2+2\lambda+6x-3$, ,,
4) $\lambda^3x-2=(4x+1)\cdot\lambda$, ,,
5) $\mu^2x-2(\mu+3)x=5\mu^2-10\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$.
6) $x-2=\frac{3}{\lambda}+\frac{x+1}{\lambda^2}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$.
7) $\frac{x+\lambda}{\lambda+1}+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2-1}$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$.
8) $\frac{x+2}{3\mu}-\frac{1}{6\mu}-\frac{\mu}{6}+\frac{x}{2\mu}=0$, $\mu\in\mathbb{R}^*$.
9) $(\lambda^2-1)y+5(3-\lambda)=8y$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
10) $\frac{w-2}{\lambda-2}+\frac{w-2}{\lambda+2}=1$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

148 Όμοια, οι εξισώσεις:

1) $\alpha^2x+2=2\alpha x+x+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
2) $2\alpha+3x=\alpha^2x+1$, ,,
3) $2\alpha^2x-5=4\alpha-x$, ,,
4) $4\alpha x+\alpha^2x=3x+2$, ,,
5) $(3\alpha x+5x)\alpha=2\alpha+5-7x$, ,,
6) $(2+\lambda^2)x=\lambda^2(x+3)-5x$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
7) $\lambda^2(x-1)+\lambda(x+2)-6x+15=0$, ,,
8) $\lambda^2x+9=\lambda^2+6\lambda x-9x$, ,,
9) $\lambda^2(x-1)+6x+2=\lambda\cdot(5x-1)$, ,,
10) $\lambda^3+\lambda^2x+\lambda^2+\lambda x+\lambda+x=0$, ,,

Διπαραμετρικές.

149 Όμοια, οι εξισώσεις:

1) $\lambda(x-3)=x+4\mu+5$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
2) $(x-\lambda)^2=(x+\lambda)^2+5(\mu-2x)+2$, ,,
3) $(\lambda+2\mu)x=(\lambda+6)(x+3)-10$, ,,
4) $\mu^2(\mu-x)+\mu^2\nu=\nu^2(\nu-x)+\mu\nu^2$, $\mu,\nu\in\mathbb{R}$.
5) $(\kappa+x)(1+\nu x)=\kappa(\nu+1)+\kappa^2\nu^2+\nu x^2$, $\kappa,\nu\in\mathbb{R}$.
6) $x(\lambda^2-\mu^2)-\lambda(\lambda+\mu)=\mu x(\lambda-\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
7) $(x-\lambda)(2x-\mu)^2=(x-\mu)(2x-\lambda)^2$, ,,
8) $\frac{4\lambda x+1}{\mu}-3=\frac{3x}{\mu}+2$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}^*$.

150 Για ποιές τιμές του λ, οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες;

1) $3(\lambda+1)x+4=2x+5(\lambda+1)$.
2) $\frac{x(5\lambda+3)}{15}+\frac{1}{3}=\frac{2(x+1)}{3}+\frac{1}{5}$.

151 Για ποιές τιμές των λ,μ οι παρακάτω εξισώσεις είναι ταυτότητες;

1) $\lambda(3x+\lambda)+7-2\lambda=\lambda^2+3(1+\mu x)$.
2) $\frac{5\lambda x-5\mu}{4}+4-8x=\frac{3\lambda-3\mu x}{4}$.

Γ → ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ.

Είναι εξισώσεις που έχουν άγνωστο σε ένα τουλάχιστον απόλυτο.

Διακρίνονται στις παρακάτω μορφές:

1) Άγνωστος ο $|x|$. Θέτω $|x|=y$ και βρίσκω το y.

Αν $y=\alpha>0 \Rightarrow x=\pm\alpha$ (βλέπε ΦΥΛΛ.)

Αν $y=\alpha<0 \Rightarrow$ Αδύνατη

Αν $y=0 \Rightarrow x=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(152) Να λυθούν οι εξισώσεις: (• $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$)

1) $2|x|-5=0$. 2) $|3x|-2=|x|+8$. 3) $|-2x|+1=2+|x|$.

4) $\dfrac{|x|-1}{3}=\dfrac{|4x|-2}{5}$. 5) $\dfrac{2+|-5x|}{|x|-1}=3$. 6) $\dfrac{3+|x|}{2|x|+1}=4$. 7) $\dfrac{2-|x|}{3-|x|}=-2$

(153) Όμοια οι εξισώσεις: (• $x^{2\kappa}=|x|^{2\kappa}$, $|x|^{2\kappa+1}=|x^{2\kappa+1}|$.

1) $x^2-5|x|+6=0$. 2) $x^2-3|x|=0$. 3) $2x^2-3|x|-1=0$.

4) $2x^2+5|x|+7=0$. 5) $x^2-6|x|+9=0$. 6) $|x^3|+x^2+|x|+1=0$.

7) $|x|^3-3x^2+3|x|-1=0$. 8) $(2|x|-3)\cdot(|-2x|-8)\cdot(x^2-5|x|)=0$.

2) Της μορφής: $|f(x)|=|\varphi(x)|$. ($\Leftrightarrow f(x)=\pm\varphi(x) \Leftrightarrow \cdots$)

(154) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $|2x|=|x-1|$. 2) $|3x-2|=|2-x|$. 3) $|x^2-1|=|2-x|$.

3) Της μορφής: $|f(x)|=\varphi(x)$. Πρέπει $\varphi(x)\geq 0 \Rightarrow$ βρίσκω το A, και τη λύνω όπως τη προηγούμενη, αλλά δέχομαι μόνο τις ρίζες που είναι στο A.

(155) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $|2x-3|=x$. 2) $|2x-1|=4$. 3) $|2x^2-5x-1|=4x$. 4) $|x^2-1|=0$.

4) ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Σε οποιαδήποτε άλλη μορφή, κάνω διάκριση περιπτώσεων ανάλογα με τις ρίζες των απολύτων. (Βλέπε πρόσημο διωνύμου, τριωνύμου. Έτσι λύνονται και όλες οι προηγούμενες μορφές. Σε κάθε περίπτωση, δέχομαι μόνο τις ρίζες που ανήκουν στη περίπτωση αυτή και τις άλλες τις απορρίπτω.

(156) Να λυθούν οι εξισώσεις: 1) $2|x|-3x+1=0$. 2) $|x|+|x-1|=2$.

3) $|3x|+|2-x|-x+1=0$. 4) $|x-3|-3|x-1|+|x|=5$. 5) $x^2-4x+2|x|-3=0$

6) $-2|2-x|-4(x+|x|)=1$. 7) $x^3-x^2+|x-1|=0$. 8) $2|x-1|-3|x+1|=1$.

9) $|x^2-4x+3|-2|3-x^2|=1$. 10) $|x^2-4|-2|x^2-x+1|+|-x^2+5x-6|=-2x^2+1$.

Δ → ΑΡΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Είναι εξισώσεις που έχουν άγνωστο μέσα σε μια τουλάχιστον ρίζα.

Είναι της μορφής: $\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$ ή $\sqrt[\nu]{f(x)}=\varphi(x)$.

▼ΕΠΙΛΥΣΗ:

- Και στις δύο περιπτώσεις πρέπει $f(x)\geq 0 \wedge \varphi(x)\geq 0 \Rightarrow$ βρίσκω το Π.Ο. A
- Υψώνω στο δείκτη ν της ρίζας και τα δύο μέλη, ώστε να φύγουν τα ριζικά, και λύνω την πολυωνυμική (ή κλασματική) εξίσωση που προκύπτει.
- Δέχομαι μόνο τις ρίζες που ανήκουν στο A και τις άλλες τις απορρίπτω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

157 Να λυθούν οι εξισώσεις: (• Πρώτα τη φέρνω στη κανονική μορφή...)

1) $\sqrt{x-2}-3\sqrt{x+1}=0$. 2) $3-\sqrt{x-4}=0$. 3) $\sqrt[6]{2x-3}=\sqrt[6]{x-3}$.
4) $\sqrt{x-2}=x-3$. 5) $\sqrt{-x-2}=x-5$. 6) $\sqrt{x^2+1}=x-7$.
7) $1-\sqrt{x}=x$. 8) $2\sqrt{3x+1}=\sqrt{5-x}$. 9) $\sqrt[3]{-x-3}-\sqrt[3]{x-2}=0$
10) $\sqrt{x^2+3}-3x=-2$. 11) $\sqrt[4]{|x|+2}=2\sqrt[4]{x}$. 12) $\sqrt{2|x|}=-3x$.
13) $\sqrt[3]{x+1}-2=0$. 14) $\sqrt[5]{x^2-4x+4}=1$ 15) $\sqrt[4]{\frac{2}{3x}}=\frac{1}{x}$.

$$\sqrt[\nu]{a_1}+\sqrt[\nu]{a_2}+\dots+\sqrt[\nu]{a_\nu}=0 \Leftrightarrow a_1=0\wedge a_2=0\wedge\dots\wedge a_\nu=0.$$

158 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-4}=0$. 2) $5\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{3-x}=0$. 3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-2x}=0$.
4) $\sqrt[3]{x^2-5x+6}+\sqrt[3]{2x-4}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x^2-4x+4}=0$. 5) $3\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{x^2-2x+1}+\sqrt[4]{x^2-x}=0$.

▼ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ.

159 Για ποιές τιμές του x το τριώνυμο $\varphi(x)=x^2-5x+8$ παίρνει τη τιμή 3.

160 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}^*$ ώστε το τριώνυμο $\varphi(x)=\lambda x^2-(\lambda-2)x+\lambda-1$ να έχει δύο ρίζες ίσες.

161 Για ποιές τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $x^2-5x+4\lambda=0$ είναι 50.

162 Να βρεθεί ο $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν διπλή ρίζα:

1) $(\mu-1)x^2-2(\mu+1)x+\mu-2=0$. 2) $(\mu-3)x^2-(\mu+2)x+2\mu+1=0$.

163 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης $9x^2-18(\lambda-1)x-8\lambda+24=0$ να είναι διπλάσια της άλλης.

(164) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης $x^2 - 2(\lambda - 2)x + \lambda - 1 = 0$ πληρούν τη σχέση:

1) $\rho_1 = \rho_2 = 0$. 2) $\rho_1 \rho_2 = -1$. 3) $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 2$

4) $\rho_1 + \rho_2 = 0$ (αντίθετες). 5) $\rho_1 \rho_2 = 1$ (αντίστροφες) 6) $\rho_1 = 3\rho_2$.

(165) Για ποιές τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης $x^2 - \mu x + 3 = 0$ πληρούν τη σχέση: $12\rho_1^2\rho_2 + 4\rho_1^3 + 12\rho_1\rho_2^2 + 4\rho_2^3 = 256$.

(166) Για ποιές τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης: $(\mu - 1)x^2 + 2(\mu - 3)x + \mu^2 - 9 = 0$ πληρούν τη σχέση $\frac{1}{\rho_1 + 1} + \frac{1}{\rho_2 + 1} = -16$.

(167) Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης: $(\mu - 2)x^2 - 2(\mu + 1)x + 7\mu - 6 = 0$ να πληρούν τη σχέση $2\rho_1 + 3\rho_2 = 4$.

(168) Να βρεθεί ο $K \in \mathbb{R}$, ώστε οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης: $x^2 + (3K + 2)x + K^2 - 2K - 5 = 0$ να είναι: 1) αντίθετες. 2) αντίστροφες.

(169) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2x + 2(1 - 3\alpha\beta) = 0$.
Αν έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$, δείξτε ότι $\alpha = \beta = 1$.
Στη συνέχεια, να λυθεί η εξίσωση.

(170) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, τα παρακάτω τριώνυμα μετασχηματίζονται σε τέλεια τετράγωνα

1) $f(x) = (\lambda + 2)x^2 - (30 + \lambda)x + \lambda + 15$. 2) $\varphi(x) = (\lambda - 3)x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda + 1$.

(171) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης $x^2 - 3x + \lambda = 0$ να πληρούν τη σχέση: $5\rho_1^3\rho_2 - 4\rho_1^2\rho_2 = 2\lambda + 3 + 4\rho_1\rho_2^2 - 5\rho_1\rho_2^3$.

(172) Να βρεθούν τα $K, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $3x^2 + 8(K - 3)x + 5(\lambda - 2) = 0$ να έχει μοναδική ρίζα το 0. (διπλή).

(173) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η διαφορά των ριζών ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης $2x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda + 3 = 0$ να ισούται με το 1.

(174) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (4\mu - 1)x + 2\mu - 3K$, όπου $\mu \in \mathbb{Q}$ και $K \in \mathbb{R}$.
Να βρεθεί ο K ώστε οι ρίζες ρ_1, ρ_2 να είναι ρητές.

(175) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 10x + \lambda^2$ να ισούται με $(x-1)(x-9)$.

(176) Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 - 4\lambda x - 20 = 0$ (1) και $x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0$ (2).
Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η μια ρίζα της (1) να ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών ρ_1, ρ_2 της (2). Στη συνέχεια, να λυθούν οι (1), (2).

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ.

(Α) → ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ. Είναι της μορφής $f(x) \gtrless 0$, όπου $f(x)$ πολυώνυμο οιουδήποτε βαθμού. Λύνονται ανάλογα με το βαθμό του $f(x)$.

▼ Α' ΒΑΘΜΟΥ → $\alpha x+\beta \gtrless 0$ Π.Ο.: $A=\mathbb{R}$

Η λύση της εξαρτάται από τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ως εξής: Έστω η $\alpha x+\beta>0 \Leftrightarrow$

$\alpha x>-\beta$, οπότε
- αν $\alpha>0$, τότε $x>-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $x\in\left(-\frac{\beta}{\alpha},+\infty\right)$.
- αν $\alpha<0$, ,, $x<-\frac{\beta}{\alpha}$, ,, $x\in\left(-\infty,-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.
- αν $\alpha=0$, είναι Αδύνατη ή Ταυτότης, ανάλογα με το β και τη φορά της ανίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(177) Να λυθούν οι ανισώσεις:

1) $5x+2\leq 0$. 2) $-3x+1>0$. 3) $-x-2<0$. 4) $0\cdot x>4$.
5) $0\cdot x<4$. 6) $0\cdot x\geq 2$. 7) $0\cdot x>-4$. 8) $0\cdot x<-4$.
9) $0\cdot x>0$. 10) $0\cdot x\geq 0$. 11) $0\cdot x\leq 2$. 12) $0\cdot x\leq 0$.

(178) Όμοια, οι ανισώσεις:

1) $2(x-1)<2x+3$. 2) $4(2x-1)\leq x-2$. 3) $3(1-x)\geq 2-3x$
4) $\frac{2x-3}{2}\geq\frac{3x-1}{3}+x$. 5) $\frac{2-3x}{3}>\frac{5-2x}{2}+1$. 6) $\frac{x-1}{2}-x+3\leq\frac{2-x}{5}+\frac{x}{10}$.

▼ Β' ΒΑΘΜΟΥ → $\alpha x^2+\beta x+\gamma \gtrless 0$.

Η λύση της εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $\Phi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Έτσι, αφού βρώ το πρόσημο στον άξονα των πραγματικών, βλέπω πού αληθεύει η ανίσωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(179) Να λυθούν οι ανισώσεις:

1) $3x^2-6x+1\geq 0$. 7) $x^2-4<0$. 13) $3x^2-x>-1$.
2) $4x^2-1<0$. 8) $x^2-5\leq 0$. 14) $2x^2+4>3x$.
3) $2x^2-20x+50\leq 0$. 9) $2x^2-3>0$. 15) $-3x^2+6x+2\geq 0$.
4) $-2x^2+x-1>0$. 10) $x^2+3>0$. 16) $2w^2-2\sqrt{2}w+1\leq 0$.
5) $x^2-3x+4\geq 0$. 11) $4x^2+25\leq 0$. 17) $-y^2+y-4<0$.
6) $4x^2-9\geq 0$. 12) $3x^2-2x-5>0$. 18) $\frac{2w^2+3w}{4}\geq\frac{w^2}{3}-\frac{2w}{5}$.

▼ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ. ⟶ $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \geq 0.$ $(\nu \geq 3)$

ΕΠΙΛΥΣΗ:

- Αναλύω το Α μέλος σε γινόμενο α΄ βαθμίων ή β΄ βαθμίων παραγόντων.
- Βρίσκω τις ρίζες κάθε παράγοντα
- Κάνω πίνακα προσήμων για κάθε παράγοντα χωριστά και για το γινόμενο.
- Βλέπω που αληθεύει η ανίσωση.

↳ Σε όλες τις ανισώσεις, πριν κάνω οτιδήποτε, τα πάω όλα στο Α μέλος ώστε το Β να γίνει 0 και μετά βλέπω τι βαθμού είναι ..... κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

180 Να λυθούν οι ανισώσεις:

1) $-3x(2x-1)^3(5-x)^2<0$.
2) $(3x-1)(x-1)^3(2-x)(2x+5)^4\geq0$.
3) $5x(x^2-4x+3)(x^2-10x+25)(x^2+x+1)\leq0$.
4) $-2(-x^2-3)(x^2-3x+1)^3\cdot(1-2x)\geq0$.
5) $(2x^4-x^2)(x^2-3)^2\cdot(2-x)^3<0$.
6) $(2x^2-5x-3)^2(x^3-x^2-x)>0$.
7) $-x(x+1)^2(-x+2)^3(x-3)^4(-x^2+x-1)^7(x^3-7x^2+10x)\leq0$.
8) $(5-x^2)(2x^2+1)(x^4-81)\geq0$.
9) $x^3+4x>5x^2$.
10) $x^3+4\geq5x^2$.
11) $x^3+x\leq x^2+1$.
12) $x^4+6\geq5x^2$.
13) $x^4\geq16$.
14) $x^3<8$.

B ⟶ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ⟶ $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq0$ (1)

ΕΠΙΛΥΣΗ:

- Τα πάω όλα στο Α μέλος και κάνω **ομώνυμα**, ώστε να έρθει στη μορφή (1)
- Βρίσκω το πεδίο ορισμού $A=\{x\in\mathbb{R} : g(x)\neq0\}$.
- Τρέπω τα $f(x)$, $g(x)$ σε γινόμενο α΄ βαθμίων ή β΄ βαθμίων παραγόντων.
- Κάνω πίνακα προσήμων για κάθε παράγοντα χωριστά και για το πηλίκο.
- Βλέπω που αληθεύει η ανίσωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

181 Να λυθούν οι ανισώσεις:

1) $\dfrac{2-x}{3x+1}\geq0$.
2) $\dfrac{-(1-x)(3+x)(-3+x)}{(x+2)^2(x+1)^3}\geq0$.
3) $\dfrac{-3(-x^2+3x-2)(x+3)}{(x^2+2)(x^2-4x+4)}\geq0$.
4) $\dfrac{-x^2(3-x)(x^2+3x+2)(x^2-3)}{3(x+1)}\geq0$.

(182) Ομοια, οι ανισώσεις:

1) $\dfrac{3x^3-7x^2+4x}{x^3-6x^2+12x-8}\geq 0$. 2) $\dfrac{x^2(-2-3x)^5(2-5x)^4}{-4(x^2-x+1)^3(-2x^2+5x-3)^5}\geq 0$.

3) $\dfrac{2x-1}{x^2+4x+3}\leq\dfrac{1}{5}$. 4) $\dfrac{x+1}{x-1}<\dfrac{2x+3}{x+1}$. 5) $\dfrac{x^2+14}{x^2+6x+8}\leq 1$.

6) $\dfrac{6x^2-3x+8}{x^2-5x+6}\leq 6$. 7) $\dfrac{x-5}{x-3}\geq\dfrac{x-2}{x-1}$. 8) $\dfrac{x+1}{x^2+x-2}\leq\dfrac{x}{x^2-1}$.

9) $\dfrac{(x+1)^3-1}{(x-1)^3-1}\leq 1$. 10) $\dfrac{x-10}{x^2+5}<\dfrac{1}{2}$. 11) $\dfrac{3x}{5x-2}\geq 1$.

Γ → ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ.

Η λύση τους στηρίζεται στα παρακάτω θεωρήματα (Βλέπε ΦΥΛ 17).

Αν $\alpha>0$ και $\begin{cases} |x|\leq\alpha \Leftrightarrow -\alpha\leq x\leq\alpha \Leftrightarrow x\in[-\alpha,\alpha], \quad |x|<\alpha \Leftrightarrow -\alpha<x<\alpha \Leftrightarrow x\in(-\alpha,\alpha). \\ |x|\geq\alpha \Leftrightarrow x\leq-\alpha \vee x\geq\alpha \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\alpha]\cup[\alpha,+\infty), \quad |x|>\alpha \Leftrightarrow x\in(-\infty,\alpha)\cup(\alpha,+\infty). \end{cases}$

• Αν $\alpha<0$ και $\begin{cases} |x|\leq\alpha \Rightarrow \text{Αδύνατη (διότι } |x|\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}). \\ |x|\geq\alpha \Rightarrow \text{Ταυτότης (,, ,, , ,,).} \end{cases}$

▼ Διακρίνονται στις εξής μορφές:

1) Αγνωστος ο $|x|$. Λύνω ως προς $|x|$ και βρίσκω το x απο τα θεωρήματα.

2) Αγνωστος ο $|f(x)|$. Λύνω ως προς $|f(x)|$, βρίσκω το $f(x)$ απο τα θεωρήματα και μετά λύνω ως προς x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(183) Να λυθούν οι ανισώσεις:

1) $|x|<5$. 5) $|x|<0$. 9) $3|x|-2>|x|+8$. 13) $\dfrac{|3x|+|-5x|}{2}\leq\dfrac{1-|x|}{3}$.

2) $|x|\geq 3$. 6) $|x|>0$. 10) $2(|x|-1)\geq 3|x|-2$. 14) $|-3x|\geq -2$.

3) $|x|<-1$. 7) $|x|>-2$. 11) $2|x|-|-2x|\geq 3-|3x|$. 15) $|-2x|\geq|2x|$.

4) $|x|\geq 0$ 8) $|x|\geq -3$. 12) $\dfrac{3|x|+1}{4}-\dfrac{4-|-x|}{3}>1$. 16) $\dfrac{2+|x|}{|x|+1}>2$.

(184) Ομοια, οι ανισώσεις:

1) $|1+2x|\leq 3$. 4) $|3x+2|-4\leq 0$. 7) $-|1-x|+2\geq 0$.

2) $|x-3|>1$. 5) $|x-5|-4\leq 0$. 8) $-3|7-x|+5\leq 0$.

3) $|x-30|-6>0$. 6) $2|x-1|-3\leq 0$. 9) $|x^2+3|\geq 4x$ •

▼ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ.

Η λύση τους στηρίζεται στη λύση και διερεύνηση της α΄ βάθμιας ανίσωσης (Βλέπε Φυλ.34).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(185) Να λυθούν οι ανισώσεις:

1) $\lambda(x+1) > x+4$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $(\kappa+x)^2+3x^2 \le (2x-1)^2+7$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

3) $3(\mu x-1)+2(2\mu-x) \le x$, $\mu \in \mathbb{R}$.

4) $\frac{\lambda x}{2} - \frac{2\lambda x}{3} > \frac{3\lambda x}{4} + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) $\frac{x}{3} + \frac{\lambda-3x}{2} > \frac{\lambda x+2}{6}$, ,,

6) $\frac{\alpha x+1}{3} - \frac{x-\alpha}{4} > \frac{2\alpha-x}{6}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

7) $\frac{\mu x+2}{3} - \frac{2\mu-x}{6} > \frac{x-\mu}{4}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

8) $\frac{\cancel{\lambda x}-2}{3} - \frac{x-\lambda}{4} \geq \frac{\lambda-2x}{6}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

9) $\frac{x-\lambda}{4} - \frac{2x-\lambda}{6} < \frac{\lambda x-2}{3}$; ,,

10) $\lambda^2 x+7 > 49x+\lambda$, ,,

11) $2\lambda^2 x+4 > \lambda^2+(5\lambda-2)x$,,

12) $\mu x - \frac{(x-1)(\mu-2)}{3} < \frac{(2x+3)(\mu-2)}{4}$, $\mu \in \mathbb{R}$

▼ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ.

Είναι της μορφής: $\begin{cases} f_1(x) \gtrless 0. \\ f_2(x) \gtrless 0. \\ \text{-----} \\ f_\nu(x) \gtrless 0. \end{cases}$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Λύνω χώρια κάθε ανίσωση και κάνω συναλήθευση (με βελάκια).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(186) Να λυθούν τα συστήματα:

1) $-3 \le \frac{x+5}{2-x} < 4$.

2) $-2x < \frac{3x-1}{4} \le x^2-1$.

3) $\begin{cases} 2x-5 < 3x-7 \\ 2x^2 \le 9 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} 3x^3+2x > 5x^2 \\ x^3+4x > x^2 \end{cases}$.

5) $\begin{cases} x^3-5x^2+4 \geq 0 \\ x^3+x^2-2x \geq 0 \end{cases}$.

6) $5x-1 < (x+1)^2 \le 7x-3$.

7) $\begin{cases} \frac{x-1}{3x+2} > 0 \\ (x^2-9)(x^2+x+5) \le 0 \end{cases}$.

8) $\begin{cases} 5x-13 \le 3x+7 \\ x^4 > 81 \\ (x-1)^5(x+4)^4(x+7)^3 \geq 0 \end{cases}$.

9) $\begin{cases} x^3-5x^2+4x > 0 \\ 2x^2-5x \geq 7 \\ -x^2+2x < 5. \end{cases}$

10) $\left\{ \frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{2} \;,\; \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} > 2 \;,\; \frac{x^2-4x+1}{x^2+x-1} \le 2 \right\}$

(187) Να λυθούν οι ανισώσεις:

1) $|x^2-3x| \le 2$

2) $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| > 3$.

▼ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

(188) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το τριώνυμο $\Phi(x)=(\lambda+1)x^2-2(\lambda-1)x+3(\lambda-1)$ να είναι αρνητικό $\forall x \in \mathbb{R}$.

(189) Για ποιές τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, η ανισότητα $(3\mu-1)x^2+2x+4\mu-1>0$ αληθεύει $\forall x \in \mathbb{R}$.

(190) Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $3\mu x^2-(\mu+1)x+3=0$ να έχει δύο ρίζες ετερόσημες με μεγαλύτερη απολύτως την αρνητική.

(191) Να λυθεί η ανίσωση $(\lambda^2+7)x<(x+4)\lambda+1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(192) Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, το τριώνυμο $\Phi(x)=(\lambda-1)x^2-3\lambda x+4\lambda$ έχει ρίζες μεγαλύτερες του 2.

(193) Δείξτε ότι το $P(x)=2x^2-10\lambda x+7\lambda-2$ έχει ρίζες πραγματικές $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(194) Για ποιές τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(\mu-2)x^2+2(\mu+3)x+2\mu-18=0$ έχει ρίζες πραγματικές.

(195) Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης $(1-\mu)^2 \cdot x^2+(\mu-1)x-\mu(1+\mu)=0$ να είναι ετερόσημες.

(196) Για ποιές τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, οι ρίζες της $(\mu-1)x^2-(2\mu-1)x+\mu-4=0$ είναι: 1) αρνητικές, 2) θετικές, 3) ετερόσημες.

(197) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ο αριθμός $\xi=-2$ να περιέχεται μεταξύ των ριζών της εξίσωσης $(\lambda+3)x^2-(4\lambda+1)x+\lambda+5=0$.

(198) Να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $(\mu^2-1)x^2-4(\mu+2)x+3=0$ να έχει δύο ρίζες μεταξύ του -1 και του 1.

(199) Δίνεται η εξίσωση: $(2K-1)x^2-2(K+1)x+K+1=0$, $K \in \mathbb{R}$.

1) Να βρεθεί ο K, ώστε οι ρίζες να είναι πραγματικές.
2) ,, ,, ,, K, ,, να ισχύει: $\rho_1^3+\rho_2^3<\rho_1\rho_2^3+\rho_1^3\rho_2$.

(200) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της $9x^2-18(\mu-1)x-8\mu+24=0$, να βρεθεί ο $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε:
1) $\rho_1=2\rho_2$. 2) $\rho_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\rho_2 \in \mathbb{R}_-^*$, $|\rho_1|>|\rho_2|$. 3) $\rho_1<1<\rho_2$. 4) $\rho_1<\rho_2<2$.

(201) Να βρεθεί για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$, έχουν νόημα πραγματικού αριθμού οι παραστάσεις: 1) $\sqrt{x^2-4x+3}$. 2) $\sqrt{3-|2x^2+x-12|}$. 3) $\sqrt{|x^2-2x+4|-7}$.

(202) Να λυθούν οι εξισώσεις: 1) $3+\sqrt{x^2-2x+6}=2x$. 2) $\sqrt{x^3-x}-\sqrt{2x^2+2x}=0$.

(203) Να λυθεί η ανίσωση: $|-x^2+2x-5|>4x+7$.

(204) Να λυθεί το σύστημα: $\left\{|x^2-3x|-4>0,\ x^2-3x-18<0,\ |x-2|\leq 3\right\}$.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

▼ Α' ΒΑΘΜΟΥ

$$2\times 2 \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2 \end{cases} : \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R}$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ 1) Αντικατάσταση 2) Αντίθετοι συντελεστές 3) Σύγκριση

▼ 4) Μέθοδος οριζουσών (Cramer).

Βρίσκω τις ορίζουσες: $D=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$.

• Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow$ Μια μόνο λύση $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$.

• Αν $D=0$ και
- $D_x\neq 0 \vee D_y\neq 0 \Rightarrow$ Αδύνατο.
- $D_x=D_y=0$
  - $|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta_1|+|\beta_2|\neq 0 \Rightarrow$ Αόριστο (άπειρες λύσεις).
  - $|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta_1|+|\beta_2|=0$ και
    - $|\gamma_1|+|\gamma_2|\neq 0 \Rightarrow$ Αδύνατο
    - $|\gamma_1|+|\gamma_2|=0 \Rightarrow$ Ταυτοτικό

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

205 Να λυθούν τα συστήματα: (και με τις 4 μεθόδους).

1) $\begin{cases} 5x-7=-y \\ 10x+2y=13 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-3y=15 \\ -6x+9y=-45 \end{cases}$

206 Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2 \end{cases}$ στις εξής περιπτώσεις:

1) $\gamma_1=\gamma_2=0 \wedge \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$. 4) $(\alpha_1=\beta_1=0)\wedge \gamma_1\neq 0 \wedge (\alpha_2\neq 0 \vee \beta_2\neq 0)$.

2) $\beta_1=\beta_2=0 \wedge \alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1\neq 0$. 5) $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0 \wedge (\gamma_1\neq 0 \vee \gamma_2\neq 0)$.

3) $(\alpha_1\neq 0 \vee \beta_1\neq 0)\wedge(\alpha_2=\beta_2=0)\wedge\gamma_2\neq 0$. 6) $\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0 \wedge (\alpha_1\neq 0 \vee \beta_1\neq 0)$.

▼ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Α' ΒΑΘΜΟΥ.

207 Να λυθούν τα συστήματα: $(\lambda\in\mathbb{R})$

1) $\begin{cases} \lambda x+(\lambda+1)y=3\lambda+2 \\ 2x+(2\lambda-1)y=8 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} 2\lambda x+\lambda y=4 \\ \lambda x+(\lambda-1)y=2 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} 2\lambda x+(\lambda-3)y=\lambda-1 \\ (\lambda-3)x+2\lambda y=\lambda-\lambda^2 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} (\lambda-1)x-y=\lambda+1 \\ (8\lambda+5)x+(\lambda+5)y=-5 \end{cases}$. 5) $\begin{cases} (\lambda^2+1)x+(\lambda^2-1)y=\lambda \\ (\lambda+1)x+(\lambda-1)y=\lambda^2 \end{cases}$. 6) $\begin{cases} (\lambda^2-1)x-(\lambda-1)y-\lambda=0 \\ (\lambda-1)^2x+(\lambda-1)y-\lambda-1=0 \end{cases}$

208 Να βρεθεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε το $\begin{cases} \alpha x-6y=5\alpha-3 \\ x+(\alpha-7)y=29-7\alpha \end{cases}$ να είναι αδύνατο.

$3\times 3 \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 w=\delta_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 w=\delta_2 \\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 w=\delta_3 \end{cases}$ $:\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3\in\mathbb{R}$.

λύνεται με τις ίδιες μεθόδους που λύνεται και το 2×2.

(Ειδικά, τη μέθοδο των οριζουσών θα την εφαρμόσουμε στη Γ' Λυκείου).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(209) Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x+y+w=6 \\ x+3y+2w=13 \\ x+2y+7w=26 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} 3x-y+z=10 \\ 2x+y+z=-12 \\ 4x+3y+z=26 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} 5-3z=x-4y \\ x+12=4z-2y \\ 8x-12=3y-z \end{cases}$.

▼ Β' ΒΑΘΜΟΥ.

2×2 με μια εξίσωση α' βάθμια και μια β' βάθμια.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Μέθοδος αντικατάστασης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(210) Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} 3x^2+4y^2+12x=7 \\ x+2y=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3xy+5y^2=1 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2+y^2=17 \\ \dfrac{4y}{x}=6 \end{cases}$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ $\longrightarrow \begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta \end{cases} \Leftrightarrow$

Τα x,y είναι ρίζες της εξίσωσης

$w^2-\alpha w+\beta=0 \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 \\ w_2 \end{cases} \Leftrightarrow x=w_1,\ y=w_2 \ \vee\ x=w_2,\ y=w_1$.

(211) Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=4 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

▼ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. $x \leftrightarrow y$.

Είναι αυτά που δεν μεταβάλλονται δια κυκλικής εναλλαγής των αγνώστων.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Με παραγοντοποίηση ή Cauchy τα μετατρέπω σε άθροισμα $x+y$ και γινόμενο xy. Θέτω $x+y=\alpha$, $xy=\beta$, βρίσκω τα α,β και από το Θεμελιώδες τα x,y.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(212) Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ xy=14 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} x+y+xy=23 \\ xy(x+y)=126 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=44 \\ 3(x^2+y^2)-4xy=87 \end{cases}$. 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{6} \\ x+y=1. \end{cases}$

213 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{97}{36} \\ x+y=13 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} 2x^2+2y^2-xy=32 \\ x^2+y^2+3xy=44 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=84 \\ x+\sqrt{xy}+y=14 \end{cases}$

▼ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Β' ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ
που επιλύονται με βοηθητική αντικατάσταση...

(ώστε να γίνουν απλούστερα)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

214 Να λυθούν τα συστήματα: (Συμμετρικά $3^{ου}$ βαθμού)

1) $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$. 4) $\begin{cases} (x+y)xy=30 \\ (x+y)(x^2+y^2)=65. \end{cases}$

215 Ομοια, τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x+y^2=7 \\ xy^2=12 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} x^2-y=23 \\ x^2y=50 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{2}xy \\ x-y=\frac{1}{4}xy \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x-y=1 \end{cases}$. 5) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=11 \\ x+y=65 \end{cases}$. 6) $\begin{cases} 2|x|+3|y|=11 \\ 3|x|-5|y|=7 \end{cases}$. 7) $\begin{cases} \frac{x^2}{7y^2}=\frac{7}{25} \\ x^2-y^2=24. \end{cases}$

▼ ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. ⟶ $\begin{cases} \alpha_1x^2+\beta_1xy+\gamma_1y^2=\delta_1 & (1) \\ \alpha_2x^2+\beta_2xy+\gamma_2y^2=\delta_2 & (2) \end{cases}$ όπου

$|\delta_1|+|\delta_2|\neq 0$, οπότε η $(0,0)$ δεν είναι λύση.

ΕΠΙΛΥΣΗ:

- Εξετάζω αν έχει λύση της μορφής $(0,\kappa)$ ή $(\kappa,0)$.
- Στη συνέχεια για να βρώ λύσεις με $x\cdot y\neq 0$, θέτω $y=\lambda x$
- Βγάζω Κοινό Παράγοντα το x^2 και διαιρώ κατά μέλη
- Λύνω τη β' βάθμια ως προς λ εξίσωση που προκύπτει και βρίσκω εν γένει δύο λύσεις λ_1, λ_2.
- Έτσι, έχω τα συστήματα: (Σ_1) $\begin{cases} y=\lambda_1 x \\ (1) \text{ ή } (2) \end{cases}$ και (Σ_2) $\begin{cases} y=\lambda_2 x \\ (1) \text{ ή } (2) \end{cases}$ που έχουν μια εξίσωση α' βάθμια και μία β' βάθμια ...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

216 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x^2+2xy-y^2=1 \\ 2x^2-xy+3y^2=12 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=1 \\ 3x^2-2xy-2y^2=-3 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} 2x^2+3xy+5y^2=8 \\ 4x^2-7xy+10y^2=16 \end{cases}$.

▼ ΚΥΚΛΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

Είναι συστήματα στα οποία η κάθε εξίσωση προκύπτει απο την προηγούμενη δια κυκλικής εναλλαγής των αγνώστων και των σταθερών όρων.

ΕΠΙΛΥΣΗ:

Προσθέτω κατά μέλη και αφαιρώ κάθε μια εξίσωση απο το άθροισμα,
ή Πολ/ζω " " " διαιρώ " " " με το γινόμενο,
ή συνδυάζω τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

217 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=3 \\ z+x=7 \end{cases}$. 2) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{3}{4} \end{cases}$. 3) $\begin{cases} xy=15 \\ yw=6 \\ wx=10 \end{cases}$. 4) $\begin{cases} x^2yw=\frac{2}{3} \\ xy^2w=\frac{8}{9} \\ xyw^2=\frac{1}{3} \end{cases}$.

5) $\begin{cases} x+y-w=1 \\ x-y+w=2 \\ -x+y+w=3 \end{cases}$. 6) $\begin{cases} \frac{yz}{x}=24 \\ \frac{zx}{y}=\frac{3}{2} \\ \frac{xy}{z}=\frac{2}{3} \end{cases}$. 7) $\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{4}{3} \\ \frac{y+z}{yz}=\frac{8}{15} \\ \frac{z+x}{zx}=\frac{6}{5} \end{cases}$. 8) $\begin{cases} (x+y)(x+y+w)=44 \\ (y+w)(x+y+w)=140 \\ (w+x)(x+y+w)=154 \end{cases}$.

▼ ΔΙΑΦΟΡΑ ΑΛΛΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

218 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} \frac{2x-3}{4}=\frac{y+5}{3}=2w+1 \\ 3x-2y+4w=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x=11+\sqrt{3y+10} \\ 4x-3y=14 \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. 4) $\begin{cases} x^2+4y^2=17 \\ xy=-2 \end{cases}$. 5) $\begin{cases} 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0 \\ x^2+y^2-4x-3y+5=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x+3(y+z)=7 \\ y-2(x+z)=-1 \\ 3z+(x+y)=-2 \end{cases}$. 7) $\begin{cases} x-2y+3w=6 \\ 2x+y-w=1 \\ x^2+y^2+w^2=14 \end{cases}$. 8) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{26}{5} \\ xy=6 \end{cases}$

9) $\left\{ \frac{xyz}{xy+yz}=\frac{3}{4} \;,\; \frac{yzw}{yz+zw}=\frac{4}{3} \;,\; \frac{zwx}{zw-wx}=\frac{3}{2} \;,\; \frac{wxy}{wx-xy}=4 \right\}$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ.

Θ35 Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $2(x^2-3x)+5(-x+1)=2x$. 2) $1-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2-x}=\frac{2x}{x^2-4}$.

3) $(x+2)^3+(x-2)^3+(x+1)^3=3(x+1)(x+2)(x-2)$. 4) $2x^4-128=0$.

5) $(2+\sqrt{3})x^2-(2\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}-1=0$. 6) $3x^3+81=0$.

7) $b^2x^2-2ab^2x+a^2b^2-1=0$. 8) $(x+a)(x-b)+2ab=2x^2$.

Θ36 Ομοια, οι εξισώσεις:

1) $\frac{|3x|+1}{2}+\frac{|-2x|-1}{3}=\frac{|x|+2}{4}$. 2) $(x+2)^2-8\cdot|x+2|-9=0$.

3) $-2|x-1|+2x-3=0$. 4) $-3|x|+x+2=0$. 5) $\frac{|x^2-1|}{|x+1|}=1$.

6) $|x+2|+4|-2x+5|=|-x|$

Θ37 Ομοια, οι εξισώσεις:

1) $\sqrt{3x-2}-4x=5$. 2) $\sqrt{x^2-1}=x-7$. 3) $\sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}}=\frac{10x+1}{10x-1}$.

4) $\sqrt[3]{x^2-4}=1$. 5) $\sqrt[3]{x^2-5x}=\sqrt[3]{-6x}$. 6) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{2x}}=1$.

7) $\sqrt[3]{x^3+9x^2}-3=x$. 8) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}-2x^2=0$.

Θ38 Ομοια, οι εξισώσεις:

1) $(x-2)^2+(x^2-5x+6)^2=0$. 2) $2|x-1|+3|x^2+4x-5|=0$

3) $\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x}=0$. 4) $(x-2)^2+(x+y)^2+(x-2y+3\omega)^2=0$.

Θ39 Ομοια, οι εξισώσεις:

1) $\lambda^2(x-1)+3\lambda x=(\lambda^2+3)x-1$ $\lambda\in\mathbb{R}$. 2) $x-\frac{2}{\mu^3}=\frac{4\mu^2x+\mu^2}{\mu^4}$, $\mu\in\mathbb{R}^*$.

3) $\frac{ax}{b}-\frac{bx-1}{a}=\frac{1}{b}$, $a,b\in\mathbb{R}^*$. 4) $\frac{x+a+b}{x+a}=\frac{x+a-b}{x-a}-\frac{a^2-b^2}{x^2-a^2}$, $x\neq\pm a$.

Θ40 Να βρεθούν τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να είναι ταυτότητες: 1) $4\lambda^2x-1=\mu^2x+2\lambda+\mu$. 2) $\frac{\lambda x+\mu}{3}+\frac{x}{2}=3x-\lambda$.

Θ41 Να λυθούν οι ανισώσεις:

1) $(x^2-4)(3x^2-2x-5)(x-3)^5(x^2+x+1)<0$. 4) $\frac{|-3x|-1}{2}<\frac{2|x|+2}{3}$.

2) $-x(x-1)(2-x)^3(5-x^2)(2x^2+1)(x^4-81)\geq 0$. 5) $|2x-3|\leq 7$.

3) $\frac{-(1-x)(x^2-9)}{(x^2+4x+4)(x^3+3x^2+3x+1)}<0$. 6) $|5x+6|-26>0$.

Θ42 Να λυθούν τα συστήματα:

1) $2\leq\frac{x+2}{x-2}<5$. 2) $\begin{cases}\frac{x^2-3x+4}{x+4}<4\\ \frac{x^2-7x-8}{x+3}\leq 0\end{cases}$. 3) $\begin{cases}2-|2x-4|\geq 0\\ \frac{4x-3}{2}>1\end{cases}$

E4

Θ43 Για ποιές τιμές του x έχουν νόημα πραγματικού αριθμού οι παραστάσεις: $A=\sqrt{x^3-1}$, $B=\sqrt[3]{x^2-3x+5}$, $\Gamma=\sqrt[4]{\frac{x-2}{3x+5}}$, $\Delta=\sqrt[5]{|3x-1|-1}$.

Θ44 Αν τα συστήματα:
$$\begin{cases}(\alpha-1)x-\beta y=2\\ \alpha x+y=0\end{cases},\quad \begin{cases}x+3y=1\\ -x+\alpha y=2\end{cases}$$
είναι αδύνατα, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Θ45 Αν $x=3-\sqrt{8}$ να υπολογιστεί η παράσταση $A=\frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{x}}$.

Θ46 Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A=\sqrt{4x^2}+\sqrt{9x^2-12x+4}+2\sqrt{x^4+2x^2+1}$.

Θ47 Αν $\alpha=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$, $\beta=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ να υπολογιστεί η παράσταση $A=3\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2$.

Θ48 Δείξτε ότι:
$$\left(\alpha^{1/2}-\alpha^{1/4}+1\right)\left(\alpha^{1/4}-\alpha^{1/8}+1\right)\left(\alpha^{1/4}+\alpha^{1/8}+1\right)=\alpha+\alpha^{1/2}+1,\quad \alpha\in\mathbb{R}_+.$$

Θ49 Αν $x<\sqrt{3}<y$ δείξτε ότι $\left(\frac{x+y}{2}+\frac{|x-y|}{2}\right)^2>3$.

Θ50 Να λυθούν οι ανισώσεις: $(\lambda\in\mathbb{R})$

1) $(x+1)^3-2x(x-4)-\lambda x>(x+1)(x^2-1)+7$. 2) $\frac{\lambda(x+2)}{6}>\frac{x+1}{6}-\frac{x+\lambda}{3}$

Θ51 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$A=\sqrt{\alpha^2}-\frac{\sqrt{\alpha^2(\alpha^2-2\alpha+1)}}{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. $B=\frac{\sqrt{x^4}-\sqrt{x^2}}{x^2-x}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2}+1}$, $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Θ52 Δείξτε ότι:

1) $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}=3\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$. 2) $(6-2\sqrt{5})^{3/2}-(6+2\sqrt{5})^{3/2}=-32$.

3) $\frac{\alpha}{\alpha^{1/2}\beta^{1/2}+\beta}+\frac{\beta}{\alpha^{1/2}\beta^{1/2}-\alpha}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha^{1/2}\beta^{1/2}}=\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}$.

Θ53 Αν $\alpha\beta(\alpha+\beta)\neq 0$ και $\alpha\beta>0$ δείξτε ότι: $\frac{\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}{\alpha+\beta}\cdot\left(\frac{\sqrt{\alpha^2}}{\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2}}{\beta}\right)=0$.

Θ54 Αν $\alpha\geq\beta>0$ δείξτε ότι $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\leq\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$.

Θ55 Δίνεται το τριώνυμο $\Phi(x)=2kx^2-(k+1)x+k-1$, με ρίζες ρ_1,ρ_2.
Να βρεθεί ο $k\in\mathbb{R}^*$, έτσι ώστε $\rho_2<\rho_1<-1$

Θ56 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda+4=0$ να έχει:

1) Διπλή ρίζα. 2) Δύο ρίζες θετικές

Θ57 Αν ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της $x^2+x-1=0$, να κατασκευαστεί εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $\omega_1=\frac{2\rho_1-\rho_2}{\rho_1+3\rho_2}$, $\omega_2=\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_2+3\rho_1}$

Θ58 Να βρεθεί ο $k\in\mathbb{R}$ ώστε οι ρίζες ρ_1,ρ_2 της εξίσωσης $2x^2-3x+k=0$ να πληρούν τη σχέση: $\left(\rho_1-\frac{5}{\rho_2}\right)\left(\rho_2-\frac{5}{\rho_1}\right)=1$.

Θ59 Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο $\Phi(x)=(3-\lambda)x^2+2\lambda x+\lambda$

1) να είναι θετικό $\forall x\in\mathbb{R}$. 2) να έχει ρίζες ρ_1,ρ_2 που πληρούν τη σχέση $\rho_1=2\rho_2$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

Συνάρτηση είναι κάθε διμελής σχέση $f: A \to B$ κατά την οποία $\forall x \in A$ αντιστοιχεί σε ένα μόνο $y = f(x) \in B$.

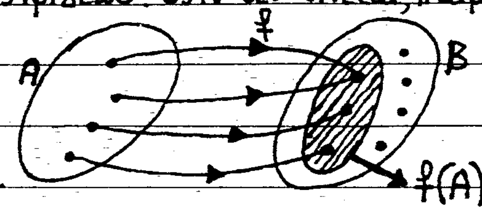
Δηλαδή κάθε απεικόνιση $f: A \to B$, όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

$A \to$ Πεδίο Ορισμού. $B \to$ Σύνολο Αφίξεως. • Αν δεν δίνεται, παίρνω $B = \mathbb{R}$.

$y = f(x) \to$ Εικόνα του x.

$x \to$ Πρότυπο ή Αρχέτυπο.

$f(A) \to$ Σύνολο εικόνων ή Πεδίο Τιμών.



• Προφανώς $f(A) \subseteq B$.

Για να δείξω ότι μια σχέση είναι συνάρτηση, δείχνω ότι:

1) Ορισμός: $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2$

ή **2) Αντιθετοαντίστροφα:** $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

▼ ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

- Η $f: A \to B$ λέγεται **σταθερή** με τιμή c, όταν $\forall x \in A, f(x) = c$.
- Η $f: A \to A$ » **ταυτοτική** στο A, » $\forall x \in A, f(x) = x$.

▼ ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Η συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται:

- **"επί"**, όταν $f(A) = B$.
- **"ένα προς ένα"** **("1-1")**, όταν $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

  ή αντιθετοαντίστροφα $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- **"1-1 και επί"**, όταν συμβαίνουν τα δύο προηγούμενα.

Όταν η $f: A \to B$ είναι "1-1 και επί", τότε υπάρχει η **αντίστροφη συνάρτηση** $f^{-1}: B \to A$ η οποία είναι επίσης "1-1 και επί".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

219 Δείξτε ότι οι παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x + \beta$. 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^2$.

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. 4) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$.

5) $f: \mathbb{R} - \{-\frac{\delta}{\gamma}\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$.

Ποιές, από τις παραπάνω συναρτήσεις, είναι "1-1";

Κάθε συνάρτηση ορίζεται από:

1) Το πεδίο ορισμού της A (δηλαδή το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές ο x)

2) το τύπο της $y=f(x)$ (δηλαδή τη διμελή σχέση που μας δείχνει την αντιστοιχία των x στα y).

▼ Όταν **δεν** δίνεται το Π.Ο., τότε παίρνουμε για **Π.Ο.** A **"το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$"** για το οποίο ο τύπος $y=f(x)$ της συνάρτησης f έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Έτσι σε:

① **ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ** ⟶ $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in\mathbb{R}$

το $\boxed{A=\mathbb{R}}$. π.χ. η $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\sqrt{2}x^3+5x-1$ έχει $A=\mathbb{R}$.

② **ΡΗΤΗ (ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ)** ⟶ $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ το $A=\mathbb{R}-\{x/g(x)=0\}$

π.χ. η $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-2}$ έχει $A=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

③ **ΑΡΡΗΤΗ** ⟶ $f(x)=\sqrt[\nu]{g(x)}$ το $A=\{x/g(x)\geq 0\}$.

π.χ. $f(x)=\sqrt[4]{x^2-9}$. Πρέπει $x^2-9\geq 0$

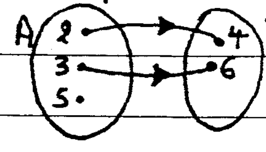
x		-3		3	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

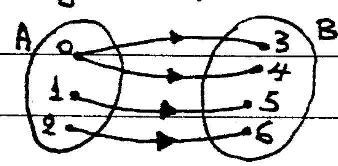
Άρα $A=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

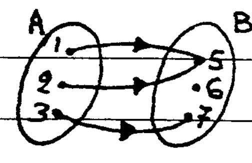
$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$. " $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \Leftrightarrow A=[1,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

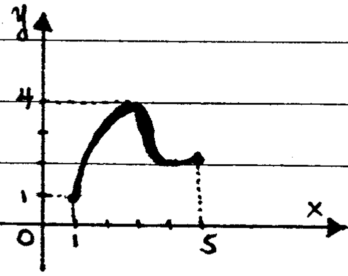
220 Εξετάστε αν τα παρακάτω σχήματα (Βέννια και καρτεσιανά διαγράμματα) είναι ή όχι συναρτήσεις. Εξηγήστε την απάντησή σας.

1) 

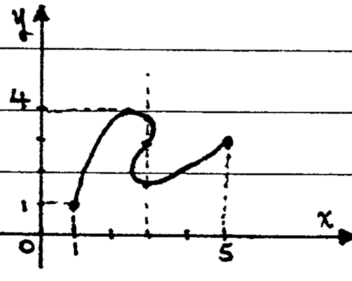
2) 

3) 

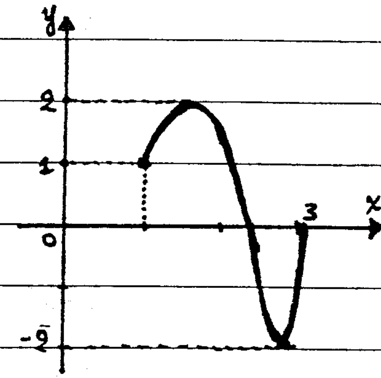
4) $f:[1,5]\to[1,4]$



5) $f:[1,5]\to[1,4]$



6) $f:[1,3]\to[-2,6]$



Σε όσες είναι συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι "1-1" ή "επί".

221) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1) $y=\sqrt{3}\,x^5-\frac{5}{2}x^2+3$
2) $y=\frac{3x}{x^2-9}$
3) $y=\frac{x-2}{x^2-6x+9}$
4) $y=\frac{1}{2x^2-5x+1}$
5) $y=\frac{3x-2}{x^2+x+3}$
6) $y=\frac{3x}{x^2+2}$
7) $y=3|x|-2$
8) $y=\frac{4}{|x|-2}$
9) $y=\frac{3x+1}{|x-2|-3}$
10) $y=\frac{-2x}{3|x|+1}$
11) $y=\frac{2-x}{-x^3+5x^2-6x}$
12) $y=\sqrt[3]{x^2-4}$
13) $y=\sqrt[4]{-x^2+x+2}$
14) $y=\sqrt[5]{x^4-256}$
15) $y=\sqrt{\frac{x^3-2x}{x^2-3}}$
16) $y=\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$
17) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$

222) Όμοια, των συναρτήσεων:

1) $y=\sqrt{|x|-4}$
2) $y=\sqrt[3]{7-|1-x|}$
3) $y=\sqrt[4]{3-2|x|}$
4) $y=\sqrt[5]{|x|+3}$
5) $y=\sqrt[3]{x-2}+\frac{5}{\sqrt{x^2-1}}$
6) $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$
7) $y=\sqrt{x^2-7x}\cdot\sqrt{x^3-7x^2+12x}$
8) $y=\sqrt{(x^2-7x)(x^3-7x^2+12x)}$

▼ΙΣΟΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$f_1=f_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} A_{f_1}=A_{f_2}=A \\ B_{f_1}=B_{f_2}=B \\ f_1(x)=f_2(x),\ \forall x\in A \end{cases}$$

▼ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ-ΕΠΕΚΤΑΣΗ

Έστω f_1, f_2 συναρτήσεις ορισμένες στα A_1, A_2 αντίστοιχα.

Αν $A_1\subset A_2 \ \wedge\ f_1(x)=f_2(x), \forall x\in A_1 \Longleftrightarrow$ **f_1 περιορισμός της f_2 στο A_1 (ή f_2 επέκταση της f_1 στο A_2).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

223) Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1: f_1(x)=\frac{x+6}{x-2}$ και $f_2: f_2(x)=\frac{x^2+8x+12}{x^2-4}$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού της A_1, A_2.

β) Δείξτε ότι η f_2 είναι περιορισμός της f_1

224) Όμοια, για τις συναρτήσεις $f_1: f_1(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ και $f_2: f_2(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$.

225) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} 4, & αν\ x\in[-3,1) \\ x-1, & αν\ x\in[1,4] \\ -3x+2, & αν\ x\in[4,6) \end{cases}$

Να βρεθούν:

α) Το πεδίο ορισμού της A. (● Σε κάθε συνάρτηση **πολλαπλού τύπου** το πεδίο ορισμού είναι η ένωση των διαστημάτων που δίνονται)

β) Οι εικόνες (αν υπάρχουν) των αριθμών $0, -2, \frac{3}{2}, 5, 6, -\frac{7}{3}, 1, -5$.

▼ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

1) **ΑΘΡΟΙΣΜΑ** $\to f_1+f_2$ με $A=A_{f_1}\cap A_{f_2}$ και $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

2) **ΑΝΤΙΘΕΤΗ** της $f \to -f$ με $A=A_f$ και $(-f)(x)=-f(x)$.

3) **ΔΙΑΦΟΡΑ** $\to f_1-f_2$ με $A=A_{f_1}\cap A_{f_2}$ και $(f_1-f_2)(x)=f_1(x)-f_2(x)$.

4) **ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΟΥ** $\lambda\in\mathbb{R}$ **ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** f $\to \lambda f$ με $A=A_f$ και $(\lambda f)(x)=\lambda\cdot f(x)$.

5) **ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ** $\to f_1 f_2$ με $A=A_{f_1}\cap A_{f_2}$ και $(f_1f_2)(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$.

6) **ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΤΗΣ** $f \to \frac{1}{f}$ με $A'=\{x\in A_f : f(x)\neq 0\}$ και $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$.

7) **ΠΗΛΙΚΟ** $\to \frac{f_1}{f_2}$ με $A=A_{f_1}\cap A'_{f_2}$ και $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

• ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι, εν γένει, $\frac{1}{f}\neq f^{-1}$, διότι η $\frac{1}{f}$ ορίζεται πάντα στο A' (εκτός αν $f(x)=0, \forall x\in A$), ενώ η f^{-1} ορίζεται μόνο όταν η f είναι "1-1 και επί".

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

226 Δίνεται η συνάρτηση $f : f(x)=\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-5x+6}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι είναι ταυτοτική.

227 Αν $f : f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{αν } x\in[1,3) \\ ax^2+bx, & \text{αν } x\in[3,4) \\ x, & \text{αν } x\in[4,6) \end{cases}$, να βρεθούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε $f(1)=f(4)$ και $f(2)=f(3)$.

228 Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1 : f_1(x)=\frac{3x^2+4}{x}$ και $f_2 : f_2(x)=\frac{-2x^2-4}{x}$. Να οριστεί η f_1+f_2 και να δείξτε ότι είναι ταυτοτική.

229 Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1 : f_1(x)=x$, $f_2 : f_2(x)=x+\frac{1}{x}$, $f_3 : f_3(x)=x-\frac{1}{x}$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $f=f_2^2-f_3^2$ και $\varphi=\frac{f_2+f_3}{f_1}$ είναι σταθερές.

230 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1 : f_1(x)=\begin{cases} x^2-5x+2, & \text{αν } x\in[-3,5] \\ 5x+2, & \text{αν } x\in\mathbb{R}-[-3,5] \end{cases} \qquad f_2 : f_2(x)=\begin{cases} -5x+7, & \text{αν } x\in[-2,7] \\ -x^2+5x-1, & \text{αν } x\notin[-2,7] \end{cases}.$$

Να οριστεί η f_1+f_2 και να βρείτε τα διαστήματα που είναι σταθερή.

231 Όμοια, για τις συναρτήσεις:

$$f_1 : f_1(x)=\begin{cases} x^2-5x+6, & \text{αν } x\in[2,6] \\ x-1, & \text{αν } x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty) \end{cases} \qquad f_2 : f_2(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x\in[5,9] \\ -x^2+5x+8, & \text{αν } x\notin[5,9] \end{cases}$$

232 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: f(x)=1-x^2$ και $g: g(x)=\frac{1}{x}$.
Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.

233 Οι παρακάτω συναρτήσεις να απαλλαγούν από τις απόλυτες τιμές, δηλαδή να γίνουν πολλαπλού τύπου:

1) $f(x)=|x|$. 2) $f(x)=3|x|-2$. 3) $f(x)=|x-2|+5x$

4) $f(x)=|x|+|x-2|-1$. 5) $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$. 6) $f(x)=|-5x|+|x^2+1|$.

234 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με $f(\nu)=(-1)^\nu$ και
$g: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με $g(\nu)=\begin{cases}1, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ -1, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$ ($f,g \to$ Ακολουθίες).
Δείξτε ότι:

α) $f=g$. β) $f(\kappa)+f(\kappa+1)=0$, $\forall \kappa\in\mathbb{N}$.

235 Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1: f_1(x)=x^2+x+1-\frac{x^3+x}{x-1}$ και $f_2: f_2(x)=x^2-x+1-\frac{x^3+x}{x+1}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους και να τις απλοποιήσετε.

β) Να ορίσετε την $\frac{f_1}{f_2}$ και να εξετάσετε αν $\frac{f_1}{f_2}=f_1^2$;

236 Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1: f_1(x)=\frac{5}{2x-4}-\frac{2x}{2x^2+4x}-\frac{x+10}{2x^2-8}$ και $f_2: f_2(x)=\frac{2x-2}{x^2-3x}-\frac{2x+2}{x^2-9}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους και να τις απλοποιήσετε

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$.

237 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1: f_1(x)=\begin{cases}x+1, & \text{αν } x\in(-\infty,0)\\ 2x-3, & \text{αν } x\in[3,+\infty)\end{cases} \qquad f_2: f_2(x)=\begin{cases}-x, & \text{αν } x\in(-5,2]\\ -x+3, & \text{αν } x\in(4,20]\end{cases}.$$

α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν διαστήματα στα οποία η f_1+f_2 είναι σταθερή ή ταυτοτική.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f_1f_2.

238 Δίνονται οι συναρτήσεις $f: f(x)=(x-5)^2$ με $x\in[1,6]$,
$g: g(x)=(x+5)^2$ με $x\in[3,7]$, $h: h(x)=x^2+3x-7$, $x\in[8,11]$.

α) Να βρεθούν οι συναρτήσεις: $f+g$, gh, $\frac{f}{g}$, $\frac{f}{h}$.

β) Αν $\varphi(x)=x^2-4$ με $x\in[9,12]$, ορίζεται η συνάρτηση $f+\varphi$;

ΚΥΚΛΙΚΕΣ (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

▼ **Μονάδες Μετρήσεως Τόξων:**

1) Μοίρα ⟷ $1\mu = \frac{1}{360}$ του κύκλου. 2) Βαθμός ⟷ $1\beta = \frac{1}{400}$ του κύκλου. 3) Ακτίνιο ⟷ $1\alpha = \frac{1}{2\pi}$ του κύκλου.

ΒΑΣΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ⟶ $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\beta}{200} = \dfrac{\alpha}{\pi}$.

▼ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ:

είναι ένας προσανατολισμένος με ακτίνα $\rho = 1$.

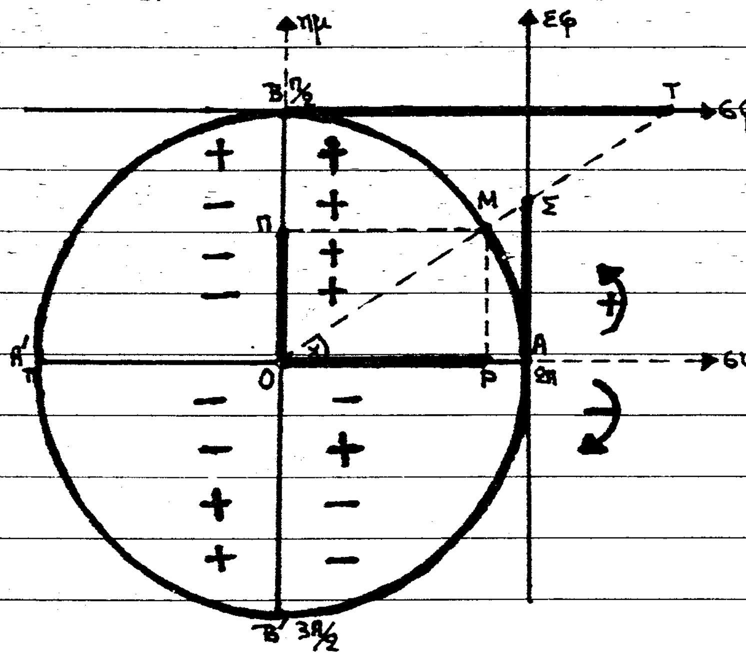
Προσανατολισμένος είναι ο κύκλος στον οποίο έχει ορισθεί η αρχή **A** και η φορά (θετική +, αρνητική −), διαγραφής των τόξων.

$\eta\mu x = \overline{O\Pi}$ → $A = \mathbb{R}$, $f(A) = [-1, 1]$

$\sigma\upsilon\nu x = \overline{OP}$ → $A = \mathbb{R}$, $f(A) = [-1, 1]$

$\varepsilon\varphi x = \overline{A\Sigma}$ → $A = \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}$, $f(A) = \mathbb{R}$.

$\sigma\varphi x = \overline{BT}$ → $A = \mathbb{R} - \{\kappa\pi\}$, $f(A) = \mathbb{R}$.



● Τόξα x και x' με το ίδιο πέρας **M** πληρούν τη σχέση: $x' = 2\kappa\pi + x,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

● Τα τόξα $2\kappa\pi$ έχουν πέρας το **A**.

" " $(2\kappa+1)\pi$ " " " **A'**.

" " $2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ " " " **B**.

" " $(2\kappa+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ " " " **B'**.

▼ Μεταβολή στο $[0, 2\pi)$ − Μονοτονία.

x	0	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$
$\eta\mu x$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$
$\sigma\upsilon\nu x$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \searrow$	$\frac{1}{2} \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$
$\varepsilon\varphi x$	$0 \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow$	$1 \nearrow$	$\sqrt{3} \nearrow$	$+\infty // -\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty // -\infty$
$\sigma\varphi x$	$-\infty // +\infty \searrow$	$\sqrt{3} \searrow$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty // +\infty \searrow$	0

Η συνάρτηση $y = \varepsilon\varphi x$ δεν ορίζεται στα $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

" " $y = \sigma\varphi x$ " " " $0, \pi$.

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι μονότονες.

Η $y = \varepsilon\varphi x$ ↑ γνησίως αύξουσα και

η $y = \sigma\varphi x$ ↓ γνησίως φθίνουσα.

e

▼ ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x. \\ \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x. \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\varphi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \\[2ex] \sigma\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \end{array}\right\} \rightarrow \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1.$$

$$1 + \varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Longleftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

$$1 + \sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x} \Longleftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$$

▼ ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ.

→ Τόξα αντίθετα έχουν το **ίδιο συν** και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$.

→ **ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ.**

1) Στα **90°** και **270°** το **ημ** γίνεται **συν** και **αντίστροφα**,
η **εφ** » **σφ** και » .

2) Στα **180°** και **360°** παραμένουν **ίδια**.

→ Το **πρόσημο** στα παραπάνω εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει **το τόξο που δίνεται**.

• **Συμπληρωματικά τόξα** → $\frac{\pi}{2} - x, x$.

$\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-x) = \eta\mu x$, $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}-x) = \sigma\varphi x$, $\sigma\varphi(\frac{\pi}{2}-x) = \varepsilon\varphi x$.

• **Παραπληρωματικά τόξα** → $\pi - x, x$.

$\eta\mu(\pi-x) = \eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(\pi-x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(\pi-x) = -\varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi(\pi-x) = -\sigma\varphi x$.

• **Τόξα με διαφορά π** → $\pi + x, x$.

$\eta\mu(\pi+x) = -\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(\pi+x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(\pi+x) = \varepsilon\varphi x$, $\sigma\varphi(\pi+x) = \sigma\varphi x$.

• **Τόξα με διαφορά $\frac{\pi}{2}$** → $\frac{\pi}{2} + x, x$.

$\eta\mu(\frac{\pi}{2}+x) = \sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+x) = -\eta\mu x$, $\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+x) = -\sigma\varphi x$, $\sigma\varphi(\frac{\pi}{2}+x) = -\varepsilon\varphi x$.

• **Τόξα με άθροισμα ή διαφορά $\frac{3\pi}{2}$** → $\frac{3\pi}{2} - x, x$ ή $\frac{3\pi}{2} + x, x$. Να βρεθούν...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

(239) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $2ημ^2 270 \cdot συν^2 30 + ημ^2 45 \cdot εφ^2 45$ 3) $\frac{4}{3}σφ^2\frac{π}{6} + 3ημ^2\frac{π}{3} - \frac{3}{4}εφ^2\frac{π}{6} - συν^2\frac{π}{4}$

2) $5σφ^2 45 - ημ30 - \frac{1}{συν^2 60}$ 4) $2ημπ - 4συν^3π - \frac{2}{3}ημ^2\frac{π}{2} + εφ^2\frac{π}{3}$

(240) 1) Αν $ημθ=\frac{4}{5}$ και $\frac{π}{2}<θ<π$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $\frac{5εφθ+4συν^2θ}{3ημθ}$

2) Αν $συνθ=\frac{12}{13}$ και $\frac{3π}{2}<θ<2π$,, ,, ,, ,, ,, ,, : $5συνθ-8ημθ+εφ^2θ$.

3) Αν $εφθ=3$ και $π<θ<\frac{3π}{2}$,, ,, ,, ,, ,, ,, : $6ημ^2θ+συνθ-3εφθ$.

4) Αν $σφθ=2$ και $0<θ<\frac{π}{2}$,, ,, ,, ,, ,, ,, : $2εφθ-4ημθ+συνθ$

(241) 1) Αν $5ημx+4=2ημx+3$ να υπολογισθεί η παράσταση: $2ημx+3συνx-5εφx+σφx$. $(\frac{3π}{2}<x<2π)$.

2) Αν $4ημ^2x-2(\sqrt{3}+1)ημx+\sqrt{3}=0$,, ,, ,, ,, : $ημx-2συνx+3εφx$. $(0<x<\frac{π}{2})$.

3) Αν $εφ^2x-(\sqrt{3}+1)εφx+\sqrt{3}=0$,, ,, ,, ,, : $2εφx-σφx+ημ^2x$ $(π<x<\frac{3π}{2})$.

(242) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $ημ(-30^\circ)\cdot συν(-60^\circ) - εφ45^\circ \cdot σφ(-30^\circ)$. 2) $ημ780^\circ \cdot συν390^\circ \cdot συν(-660^\circ) ημ(-690^\circ)$.

3) $ημ(-120^\circ)\cdot εφ(330^\circ)\cdot σφ(-210^\circ)\cdot συν(150^\circ)$. 4) $ημ(\frac{3π}{2}+x)\cdot ημ(π+x)+ημ(\frac{3π}{2}-x)\cdot ημ(π-x)$.

5) $ημ(\frac{3π}{2}+x)+συν(\frac{3π}{2}-x)-συν(\frac{π}{2}+x)$. 6) $\frac{ημ(α-\frac{3π}{2})\cdot εφ(β-π)}{σφ(\frac{3π}{2}-β)\cdot ημ(α+\frac{π}{2})}$

7) $\frac{σφ(\frac{π}{2}+x)\cdot ημ(y-\frac{π}{2})\cdot σφ(π+x)}{συν(y-π)\cdot εφ(-x)\cdot εφ(\frac{3π}{2}+x)}$

8) $\frac{ημ(α+\frac{π}{2})\cdot εφ(9π+α)\cdot συν(α-\frac{π}{2})}{συν(11π-α)\cdot ημ(\frac{7π}{2}+α)\cdot εφ(2π+α)}$ 9) $\frac{ημ(5π+α)\cdot εφ(3π+α)\cdot συν(4π+α)}{συν(7π-α)\cdot εφ(8π+α)\cdot ημα}$

(243) Δείξτε ότι:

1) $ημ30^\circ \cdot συν60^\circ + ημ60^\circ \cdot συν30^\circ = 1$. 2) $εφ^2\frac{π}{6}+εφ^2\frac{π}{4}+εφ^2\frac{π}{3}=\frac{13}{3}$.

3) $εφ^2α-ημ^2α=εφ^2α\cdot ημ^2α$ 4) $σφ^2x-συν^2x=σφ^2x\cdot συν^2x$.

5) $(ημθ+συνθ)^4-(ημθ-συνθ)^4=8ημθ\cdot συνθ$. 6) $ημ^4α-συν^4α=ημ^2α-συν^2α=2ημ^2α-1=1-2συν^2α$.

7) $εφθ(1-σφ^2θ)+σφθ(1-εφ^2θ)=0$. 8) $ημ^2x\cdot εφx-συν^2x\cdot σφx=εφx-σφx$.

9) $(ημx+συνx+1)(ημx+συνx-1)=2ημx\cdot συνx$. 10) $ημ^2α(1+σφ^2α)+συν^2α(1+εφ^2α)=2$.

11) $ημ^2x\cdot εφx+συν^2x\cdot σφx+2ημx\cdot συνx=εφx+σφx$. 12) $4(ημ^6x+συν^6x)-3(συν^4x-ημ^4x)^2=1$.

(244) Όμοια:

1) $\frac{1+εφ^2x}{1+σφ^2x}=\frac{ημ^2x}{συν^2x}$ 2) $\frac{1-εφ^2x}{1+εφ^2x}=1-2ημ^2x$.

3) $\frac{1-ημθ}{1+ημθ}-\frac{1+ημθ}{1-ημθ}=-4\frac{εφθ}{συνθ}$. 4) $\frac{ημx}{1-σφx}+\frac{συνx}{1-εφx}=ημx+συνx$.

5) $\frac{εφ^3α}{1+εφ^2α}+\frac{σφ^3α}{1+σφ^2α}=\frac{1-2ημ^2α\cdot συν^2α}{ημα\cdot συνα}$. 6) $\frac{συν^3α-συνα+ημα}{συνα}=εφα-ημ^2α$.

245 Δείξτε ότι:

1) $ημ^2α\cdot συν^2β - συν^2α\cdot ημ^2β = ημ^2α - ημ^2β$. 2) $συν^2x\cdot συν^2y - ημ^2x\cdot ημ^2y = συν^2x + συν^2y - 1$.

3) $\frac{ημα+ημβ}{συνα+συνβ} + \frac{συνα-συνβ}{ημα-ημβ} = 0$ 4) $\frac{ημ^2β-ημ^2α}{ημ^2α\cdot ημ^2β} = σφ^2α - σφ^2β$.

5) $\frac{(ημα+συνβ)^2+(συνα+ημβ)(συνα-ημβ)}{ημα+συνβ} = 2συνβ$.

6) $\frac{συν^2α-ημ^2β}{ημ^2α\cdot ημ^2β} = σφ^2α\cdot σφ^2β - 1 = \frac{1}{εφ^2α}\left(\frac{1}{ημ^2β}-\frac{1}{συν^2α}\right)$

246 Ομοια:

1) $\frac{εφx-ημx}{ημ^3x} = \frac{1}{συν^2x+συνx}$ 2) $\frac{συν^3α}{ημα} + \frac{εφα}{1+εφ^2α} = σφα$.

3) $2συν^2x - ημ^2x = \frac{2-εφ^2x}{1+εφ^2x}$ 4) $\frac{(συνα\cdot σφα - ημα\cdot εφα)ημα\cdot συνα}{συνα-ημα} = 1+ημα\cdot συνα$.

5) $\frac{1}{συν^2x}\cdot\frac{1}{ημ^2x} - 4 = (εφx-σφx)^2$. 6) $(εφα-ημα)^2+(1-συνα)^2 = \left(\frac{1}{συνα}-1\right)^2$.

247 Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι σταθερές (ανεξάρτητες του x):

1) $f(x)=ημ^6x+3ημ^2x\cdot συν^2x+συν^6x$. 2) $φ(x)=2(1-ημ^2x\cdot συν^2x)^2 - ημ^8x - συν^8x$.

3) $s(x)=ημ^6x+συν^6x-2ημ^4x-συν^4x-συν^2x$. 4) $\frac{1-συν^6x}{ημ^2x} - συν^2x - συν^4x$.

5) $q(x) = 3(ημ^8x-συν^8x)+4(συν^6x-2ημ^6x)+6ημ^4x$.

6) $r(x) = \left(1+σφx-\frac{1}{ημx}\right)\left(1+εφx+\frac{1}{συνx}\right)$. 7) $\left(\frac{1}{ημx}-ημx\right)\left(\frac{1}{συνx}-συνx\right)(εφx+σφx)$.

248 1) Αν $\frac{1+συν^2β}{1+2ημ^2β} = ημ^2α$, δείξτε ότι $ημ^2β = \frac{1+συν^2α}{1+2ημ^2α}$.

2) Αν $συνα-ημα=\sqrt2\, ημα \Rightarrow συνα+ημα=\sqrt2\, συνα$.

3) Αν $2(1+εφ^2x)=5εφx$ και $\frac{π}{4}<x<\frac{π}{2} \Rightarrow ημx-3συνx = -\frac{\sqrt5}{5}$.

4) Αν $α = x\cdot συνθ + y\cdot ημθ$ και $β = x\cdot ημθ - y\cdot συνθ$ $\Rightarrow α^2+β^2=x^2+y^2$

5) Αν $A+B=90^\circ \Rightarrow συν^2A+συν^2B=1$.

249 Αν $α,β\in R$, δείξτε ότι $2+2ημα(ημα-ημβ) \geq συν^2α+συν^2β$.
Πότε ισχύει η ισότης;

250 1) Αν $16σφ^2x=9$ και $810^\circ<x<900^\circ$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

2) Αν $3ημ^2x-συν^2x=0$ και $\frac{π}{2}<x<π$ ″ ″ ″ ″ ″.

3) Αν $9εφx=16σφx$ και $\frac{3π}{2}<x<2π$ ″ ″ ″ ″ ″.

251 Αν $Kημx+ημ^2x=1$ και $λσυνx+συν^2x=1$ $\Rightarrow K^{4/3}\cdot λ^{2/3} + K^{2/3}\cdot λ^{4/3} = 1$.