ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{R}$ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{R}$ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (§1.6)

Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχουμε:

1. Το άθροισμα $\alpha+\beta$ είναι πάντοτε ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός, καθώς και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$.

2. Αντιμεταθετική ιδιότητα: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

3. Προσεταιριστική ιδιότητα: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
$(\alpha \cdot \beta)\cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

4. Επιμεριστική ιδιότητα : $\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

5. Για κάθε πραγματικό αριθμό α είναι $\alpha+0=\alpha$, $\alpha \cdot 1 = \alpha$

6. Για κάθε πραγματικό αριθμό α υπάρχει ο **αντίθετός** του $-\alpha$ τέτοιος, ώστε $\alpha+(-\alpha)=0$.
Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ υπάρχει ο **αντίστροφός** του $\frac{1}{\alpha}$ τέτοιος, ώστε $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$.

- Η διαφορά $\alpha-\beta$ δύο πραγματικών αριθμών α και β ορίζεται από την ισότητα

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

- Το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο πραγματικών αριθμών α και $\beta \neq 0$ ορίζεται από την ισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού (§ 1.7)

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Αν α ένας πραγματικός αριθμός, η απόλυτη τιμή του α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\begin{array}{ll} |\alpha| = \alpha & , \text{αν } \alpha \geq 0 \\ |\alpha| = -\alpha & , \text{αν } \alpha < 0 \end{array}}$$

π.χ. $|+\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $\left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $|\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$.

● Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι πάντα θετικός αριθμός ή μηδέν.

● **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:** $\boxed{|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|}$ $\qquad$ $\boxed{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν τα εξαγόμενα: α) $|7-2|-5\cdot|3-1|$, β) $-3-|-2-1|-|2-7|$,
γ) $|3-5+2|+5\cdot|-3-2-1|-6\cdot|4-7|$, δ) $|2-\sqrt{3}|+3\cdot|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{5}-\sqrt{2}|$.
ε) $2|\sqrt{3}-1|-3\cdot|2-\sqrt{3}|-|8-5\sqrt{3}|$, στ) $|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|-|4\sqrt{2}-3\sqrt{3}|$.

2. Αν $x=\sqrt{2}+1$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης
$$A = -2\cdot|2x-1|-3\cdot|\sqrt{2}-x|-7\cdot|3x-(\sqrt{2}+3)|-3\cdot|x|.$$

3. Αν $\alpha>\beta>0$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης
$$B = 7|\alpha-\beta|-3|\beta-\alpha|+2|\alpha+\beta|-|2\alpha-\beta|.$$

4. Γιατί είναι $|\alpha-\beta| = |\beta-\alpha|$; $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$.

Δυνάμεις πραγματικών αριθμών (§ 1.9)

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\boxed{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} \quad , \alpha\in\mathbb{R}, \nu\in\mathbb{N}, \nu\geq 2}$

• **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:**

1) $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$, π.χ. $x^2\cdot x^4\cdot x = x^{2+4+1} = x^7$

2) $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, $(\alpha\neq 0)$, π.χ. $\frac{x^4}{x} = x^{4-1} = x^3$

3) $(\alpha\cdot\beta)^\mu = \alpha^\mu\cdot\beta^\mu$, π.χ. $(-2x\psi)^3 = (-2)^3\cdot x^3\cdot\psi^3 = -8x^3\psi^3$

4) $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$, π.χ. $(-x^2\psi^3)^2 = x^4\psi^6$

Επίσης είναι:

5) $\alpha^0 = 1$ όπου $\alpha\neq 0$, π.χ. $(-1)^0 = 1$, $-3^0 = -1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
(δεν ορίζεται το 0^0).

6) $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, $\alpha\neq 0$, π.χ. $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{1}}{-\frac{1}{8}} = -8$

6α) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$, όπου $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$.

7) $\alpha^1 = \alpha$

• **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**: 1) $(x^{-3}\psi^{2})^{-2}=(x^{-3})^{-2}\cdot(\psi^{2})^{-2}=x^{6}\cdot\psi^{-4}=x^{6}\cdot\frac{1}{\psi^{4}}=\frac{x^{6}}{\psi^{4}}$.

2) $(-2x\psi^{2})^{-3}\cdot(-3x^{2}\psi)^{2}=(-2)^{-3}\cdot x^{-3}\cdot(\psi^{2})^{-3}\cdot(-3)^{2}\cdot(x^{2})^{2}\cdot\psi^{2}=\frac{1}{(-2)^{3}}\cdot x^{-3}\cdot\psi^{-6}\cdot 9x^{4}\psi^{2}=-\frac{9x}{8\psi^{4}}$

• **ΑΣΚΗΣΕΙΣ** :

1. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις με εφαρμογή των ιδιοτήτων των δυνάμεων:

α) $\frac{x^{-2}}{x^{-5}}$ β) $\frac{(x^{-3})^{2}\cdot x^{5}}{x^{-1}}$ γ) $(-2x^{-4})^{2}$ δ) $\frac{2x^{-3}}{3\psi^{-2}}$

ε) $(\alpha^{-2}\beta)^{4}$ στ) $(-\alpha^{3}\beta^{-4}\gamma)^{3}$ ζ) $\frac{x^{0}}{\psi^{-3}}$ η) $(-\sqrt{2}\,x^{-3}\psi)^{3}$

θ) $(\alpha^{-2}\beta^{2})^{3}\cdot\gamma^{-1}$ ι) $(\alpha^{-2})^{2}\cdot(\beta^{-3})^{-1}\cdot\gamma$ ια) $\frac{(\alpha^{2})^{3}\cdot\alpha^{2}\cdot\beta^{-2}}{\beta^{-3}\cdot\alpha^{5}}$

ιβ) $\frac{(\alpha^{-2})^{2}\cdot\beta^{3}\cdot(\gamma^{-1})^{2}}{\alpha^{2}\cdot(\beta^{2})^{3}\cdot\gamma^{-3}}$ ιγ) $\frac{(x^{-3}\psi^{4})^{-2}\cdot(-x^{3}\psi^{-2})^{-3}\cdot(-x^{-1}\psi^{3})^{-2}}{(x^{-3}\psi)^{4}\cdot(-x\psi)^{-2}}$

ιδ) $\left[-(-x^{-2}\psi^{-4})^{-2}\right]^{8}$ ιε) $\left(\frac{2x^{3}\psi^{-4}}{x^{-1}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{-2x^{-3}\psi}{\psi^{-3}}\right)^{-2}$

2. Αν $x=-1$ και $\psi=-2$, να βρείτε την τιμή των:

α) $(x-2\psi+3x^{2})^{3}$ β) $(x^{-2}\psi^{3})^{-2}\cdot(x^{-3}\psi^{5})$

γ) $x^{\psi}-\psi^{x}+x^{-\psi}-\psi^{-x}-x^{\psi+1}$ δ) $(x+\psi)^{2}-x^{2}-\psi^{2}$.

3. Να αποδειχτεί ότι: $\alpha^{\lambda-\mu}\cdot\alpha^{\mu-\nu}\cdot\alpha^{\nu-\lambda}=1$, όπου $\alpha\neq 0$.

4. Αν $x=-1$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A=x^{2\nu-1}+x^{2\nu}+x^{2\nu+1}\qquad(\nu\in\mathbb{N}).$$

5. Κάθε ένα από τα παρακάτω γινόμενα να γραφτεί σαν δύναμη ενός αριθμού:

α) $3^{4}\cdot 9$ β) $2^{3}\cdot 4^{2}\cdot 8$ γ) $5^{3}\cdot 25$ δ) $(-3)^{2}\cdot 9$

ε) $(-125)\cdot 25$ στ) $7\cdot 49\cdot 343$ ζ) $27\cdot 81\cdot 9$ η) $(-64)\cdot(-4)\cdot 16$

θ) $2^{3}\cdot 3^{3}$ ι) $3^{2}\cdot 4^{2}\cdot 5^{2}$ ια) $16\cdot 9\cdot 49$ ιβ) $-27\cdot 64$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ (§ 1.10)

Αν α,β είναι θετικοί αριθμοί, τότε

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}\\ \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\end{array}}$$

• ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΡΙΖΙΚΩΝ.

Παραδείγματα: $\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

ή $\sqrt{72}=\sqrt{2^3\cdot 3^2}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3^2}=2\cdot 3\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$$\sqrt{48}+\sqrt{12}+\sqrt{32}-\sqrt{24}=\sqrt{16\cdot 3}+\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{4\cdot 6}=$$
$$=4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}=6\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$$

$$\frac{5}{\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{9\cdot 2}}=\frac{5}{3\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3\cdot(\sqrt{2})^2}=\frac{5\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι πράξεις: α) $\sqrt{7}+\sqrt{28}-\sqrt{63}$ β) $\sqrt{8}+3\sqrt{50}-4\sqrt{98}$

γ) $\sqrt{6}+\sqrt{24}-\sqrt{54}-2\sqrt{6}$ δ) $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{80}+\sqrt{20}$

ε) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{405}\cdot\sqrt{128}$ στ) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})$ ζ) $(\sqrt{20}+\sqrt{12})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

η) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{3})$ θ) $(\sqrt{48}-\sqrt{24})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$ ι) $5\sqrt{18}:\sqrt{8}$

ια) $4\sqrt{12}:2\sqrt{2}$ ιβ) $(2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{27}):\sqrt{50}$ ιγ) $\dfrac{\sqrt{0{,}0049}\cdot\sqrt{0{,}81}}{\sqrt{0{,}0036}}$

ιδ) $(6\sqrt{6}+3\sqrt{12}-5\sqrt{24}+7\sqrt{2}):2\sqrt{2}$ ιε) $\dfrac{2}{3}\sqrt{12}+\dfrac{\sqrt{27}}{3}+\sqrt{3}$

2. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις: α) $(\sqrt{2})^4$ β) $(-3\sqrt{2})^3$

γ) $(-2\sqrt{18})^2$ δ) $(2\sqrt{3}-5)^2$ ε) $(\sqrt{7}-\sqrt{63})^2$ στ) $(3\sqrt{8}-2\sqrt{72})^2$

3. Τα παρακάτω κλάσματα να μετατραπούν σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή: α) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ β) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{8}-\sqrt{50}}$

γ) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{48}}{2\sqrt{3}}$ δ) $\dfrac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{27}}$ ε) $\dfrac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{80}-\sqrt{180}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΑΡΧΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (§2.1-§2.2)

- Αλγεβρική παράσταση λέγεται μιά έκφραση που δηλώνει μιά σειρά πράξεων μεταξύ αριθμών, ορισμένοι από τους οποίους παριστάνονται με γράμματα.
- Αριθμητική τιμή μιάς αλγεβρικής παράστασης λέγεται ο αριθμός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τα γράμματά της με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις που είναι σημειωμένες.

  - Η αλγεβρική παράσταση $2x-\sqrt{\psi+1}$ δεν έχει αριθμητική τιμή για $\psi<-1$.
  - Για ποιές τιμές του x δεν έχει αριθμητική τιμή η αλγ. παρ. $3x-\frac{1}{x+1}+\frac{x^2}{x-2}$;
- Μιά αλγεβρική παράσταση λέγεται:

  - Άρρητη, όταν περιέχει γράμμα κάτω από τετραγ. ρίζα π.χ. η $3\psi-\sqrt{2\psi+1}$.
  - Κλασματική, όταν περιέχει γράμμα σε παρονομαστή π.χ. η $2\alpha+\frac{3}{\alpha-1}-2$.
  - Ακέραια, όταν δεν είναι ούτε άρρητη ούτε κλασματική π.χ. η $-\frac{1}{2}x+\sqrt{5}x^2$.

ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΟΝΩΝΥΜΟ (§2.3)

- Μονώνυμο (ακέραιο) είναι μία αλγεβρική παράσταση που περιέχει μόνο πολλαπλασιασμούς μεταξύ γραμμάτων και αριθμών.

  Τελική μορφή - Συντελεστής - Κύριο μέρος - Βαθμός μονωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η αλγ. παράσταση $-2x\psi^2x\cdot(-\frac{1}{3})x^3\psi\omega^2$ είναι (ακέραιο) μονώνυμο με "τελική μορφή" $\frac{2}{3}x^5\psi^3\omega^2$, συντελεστή το $\frac{2}{3}$, κύριο μέρος το $x^5\psi^3\omega^2$, βαθμού 5ου ως πρός x, 3ου ως προς ψ, 2ου ως προς ω, 8ου ως προς x και ψ, 5ου ως προς ψ και ω, 10ου ως προς x, ψ και ω, μηδενικού ως προς κάθε γράμμα που δεν περιέχει, π.χ. ως προς z.

- Μηδενικό μονώνυμο λέγεται κάθε μονώνυμο με συντελεστή 0, π.χ. το $0x^2\psi\omega^3$.

  - Η αριθμ. τιμή μηδενικού μονωνύμου είναι 0 για οποιεσδήποτε τιμές των γραμμάτων του.
- Όμοια μονώνυμα λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος, π.χ. τα $-\frac{1}{2}x\psi^2\omega$, $x\psi^2\omega$, $3x\psi^2\omega$, $-x\psi^2\omega$, $\frac{3}{7}x\psi^2\omega$, $\sqrt{2}x\psi^2\omega$.
- Αντίθετα μονώνυμα λέγονται δύο όμοια μονώνυμα με αντίθετους συντελεστές, π.χ. τα $\frac{3}{5}\alpha\beta^2$, $-\frac{3}{5}\alpha\beta^2$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΑ (§2.3-§2.7-§2.10-§2.13)

- Το (αλγεβρικό) άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά, που έχει συντελεστή το (αλγεβρικό) άθροισμα των συντελεστών τους.

  π.χ. $-\frac{1}{2}x\psi^2+2x\psi^2-5x\psi^2=\left(-\frac{1}{2}+2-5\right)x\psi^2=-\frac{7}{2}x\psi^2$.

- Το άθροισμα δύο αντίθετων μονωνύμων είναι μηδενικό μονώνυμο.
- Αν τα μονώνυμα δεν είναι όμοια, το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο, αλλά μιά αλγεβρική παράσταση που λέγεται <u>πολυώνυμο</u>.

  π.χ. $x\psi-(-4x^2\psi)+(-\frac{2}{3}x\psi)+5x^2+(-6x^2\psi)+(-5x^2)=$
  $=x\psi+4x^2\psi-\frac{2}{3}x\psi+\cancel{5x^2}-6x^2\psi-\cancel{5x^2}=(1-\frac{2}{3})x\psi+(4-6)x^2\psi=$
  $=\frac{1}{3}x\psi-2x^2\psi$ που δεν είναι μονώνυμό, αλλά πολυώνυμο.

- <u>Το γινόμενο μονωνύμων</u> είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών και που το κύριο μέρος του περιέχει όλα τα γράμματα που υπάρχουν στους παράγοντές του, και το καθένα με εκθέτη το άθροισμα των εκθετών του, π.χ. $3x\psi^2\omega\cdot(-\frac{1}{2}x^2\psi^3)\cdot(-x\omega^2)=\frac{3}{2}x^4\psi^5\omega^3$.
  - Για να υψώσουμε ένα μονώνυμο σε μιά δύναμη λ, υψώνουμε τον συντελεστή του στη λ δύναμη και πολ)ζουμε με λ τους εκθέτες των γραμμάτων του, π.χ. $(\sqrt{2}\,x\psi^2\omega)^3=(\sqrt{2})^3x^3\psi^6\omega^3=2\sqrt{2}\,x^3\psi^6\omega^3$.
- <u>Το πηλίκο Α : Β δύο μονωνύμων</u> είναι ένα μονώνυμο που έχει σαν συντελεστή το πηλίκο των συντελεστών και σαν κύριο μέρος όλα τα γράμματα του διαιρετέου Α και το καθένα με εκθέτη τη διαφορά που βρίσκουμε αν από τον εκθέτη του στο Α αφαιρέσουμε τον εκθέτη του στο Β,

  π.χ. $(-4x^2\psi^3\omega):(-2x\psi^3)=2x\omega$, $2x^3\psi^4\omega^2:(-\sqrt{3}\,x\psi^2\omega)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2\psi^2\omega$.
  $8x^2\psi^4\omega:\frac{1}{2}x^3\psi\omega^2=16x^{-1}\psi^3\omega^{-1}=\frac{16\psi^3}{x\omega}$ (κλασματικό).
  - Πότε το πηλίκο δύο ακεραίων μονωνύμων είναι ακέραιο μονώνυμο;

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> (ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΑ)

Να γίνουν οι πράξεις:

1. α) $-\frac{1}{3}x\psi\omega-(-\frac{1}{2}x\psi\omega)+(-x\psi\omega)$ β) $-x\psi^2\omega+(-\frac{1}{2}x\psi^2\omega)-(-\frac{1}{3}x\psi^2\omega)$

γ) $-\frac{2}{3}x\psi^2-(-x^2\psi)+(-\frac{1}{2}x\psi^2)-3x^2\psi$ δ) $x^2-(-2x^2)+(-\frac{x}{2})-5x^2+\frac{x}{3}$

2. α) $(-4x^3)\cdot(-\frac{1}{2}x^2)\cdot(-\frac{1}{5}x)$ β) $-\frac{2}{5}x^4\cdot(-\frac{3}{2}x^5)\cdot10x^2$ γ) $3x^\nu\cdot(-2x^\nu)$

δ) $(\sqrt{2}\,x^\nu)^2$ ε) $(0{,}5\alpha\gamma^2\delta)^3$ στ) $(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha\beta^2\gamma)^2\cdot(-\alpha\beta^2)\cdot(-\frac{1}{2}\alpha\gamma^2)^3$

3. α) $-7x^6:(-\frac{1}{2}x^4)$ β) $(-\sqrt{2}\,x\psi^2)^2:(-\frac{2}{3}x^2\psi^3)$ γ) $(-\frac{3}{4}x^2\psi^2):(-\frac{1}{2}x^2\psi^2)$

4. α) $(-\frac{1}{3}x^4)\cdot(-\frac{3}{2}x^2)\cdot2x-(-\frac{1}{2}x^2)^3\cdot3x$

β) $3x^\nu\cdot(-2x^\nu)-(-\frac{1}{2}x^{\nu-1})\cdot(-3x^{\nu+1})+(\frac{1}{3}x^\nu)^2$

γ) $(-\sqrt{2}\,\alpha^3\beta)^2\cdot(-\frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma)^3\cdot(-\beta\gamma^3):(-\alpha^2\beta\gamma^2)^3$

5. Για ποιές τιμές των α και β η παράσταση $3x^{\alpha+1}\psi^4+2x^3\psi^{\beta-1}$ είναι μονώνυμο;

ΑΚΕΡΑΙΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ (§ 2.4 - § 2.5)

- (Ακέραιο) πολυώνυμο λέγεται ένα άθροισμα (ακεραίων) μονωνύμων, από τα οποία δύο τουλάχιστο δεν είναι όμοια, π.χ. $\frac{1}{2}x\psi^2 - 4x\psi + 1$.

  – Αν τα μονώνυμα είναι όλα όμοια μεταξύ τους, τότε το άθροισμά τους θα είναι μονώνυμο, π.χ. $-x\psi + \frac{1}{2}x\psi - 2x\psi = -\frac{5}{2}x\psi$ (μονώνυμο).

Ανηγμένη μορφή - όροι - βαθμός πολ)μου • Διώνυμο, τριώνυμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν στο πολυώνυμο $3x^2\psi - 2x\psi + x^2\psi - x\psi - x\psi^3 + 7x\psi$ αντικαταστήσουμε τα όμοια μονώνυμα με το άθροισμά τους, παίρνουμε το πολυώνυμο με την ανηγμένη του μορφή : $4x^2\psi + 4x\psi - x\psi^3$. Τα μονώνυμα $4x^2\psi$, $4x\psi$, $-x\psi^3$ που το αποτελούν λέγονται όροι του πολυωνύμου και οι συντελεστές τους 4 , 4 , -1 λέγονται συντελεστές του πολ)μου. Το παραπάνω πολ)μο είναι 2ου βαθμού ως προς x, 3ου βαθμού ως προς ψ, 4ου βαθμού ως προς x, ψ. Ως προς γράμμα (π.χ. το ω) που δεν περιέχει είναι μηδενικού βαθμού.

Ενα πολυώνυμο με δύο όρους π.χ. το $3x - 5\psi$ λέγεται ειδικότερα διώνυμο, ενώ με τρεις όρους π.χ. το $3x^2 - x - 1$ λέγεται ειδικότερα τριώνυμο.

– Τα γράμματα που περιέχουν οι όροι ενός πολυωνύμου λέγονται μεταβλητές του πολυωνύμου. π.χ. το $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 2$ έχει μία μεταβλητή, το x , το $f(x,\psi) = 2x^2\psi - x^3 + x\psi^2 - \psi^2 + 1$ έχει δύο μεταβλητές, x και ψ κ.ο.κ.

– Σταθερός όρος πολ)μου λέγεται ο όρος που δεν περιέχει καμία μεταβλητή (γράμμα). Είναι καθαρός αριθμός και θεωρείται σαν όρος μηδενικού βαθμού, π.χ. στο πολ)μο $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + x^2 - x - 1$, το -1 είναι ο σταθ. όρος.

– Ενα πολυώνυμο, στην ανηγμένη του μορφή, θα λέμε ότι είναι διατεταγμένο κατά τις φθίνουσες (αντίστοιχα : αύξουσες) δυνάμεις ενός γράμματος (μεταβλητής) του, αν οι εκθέτες του γράμματος αυτού ελαττώνονται (αντίστοιχα: αυξάνονται). π.χ. τα $3x^4 - x^2 + x$, $2x^3\psi - x^2\psi^2 + x\psi - \frac{1}{2}$ είναι διατεταγμένα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x , ενώ το $3x\psi - x^2\psi + x^3$ κατά τις αύξουσες δυνάμεις του x.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Τα πολυώνυμα φροντίζουμε να τα έχουμε με την ανηγμένη τους μορφή και διατεταγμένα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του γράμματός (ή ενός από τα γράμματά) τους.

– Ομογενές ως προς ορισμένα γράμματα λέγεται ένα πολυώνυμο του οποίου όλοι οι όροι είναι του ίδιου βαθμού ως προς τα γράμματα αυτά, π.χ. το $3x\psi^2 - x^2\psi + x^3 - \psi^3$ είναι ομογενές 3ου βαθμού ως προς x, ψ. Το $f(x,\psi,z)$ $2x^2\psi z - x^3 + 2\psi^3 - x\psi^2 z^4$ είναι ομογενές ως προς x, ψ , όχι όμως ως προς x, ψ, z

– Ενα πολυώνυμο λέγεται <u>συμμετρικό</u> ως προς δύο ή περισσότερα γράμματά του, όταν δεν μεταβάλλεται αν αντιμεταθέσουμε κατά κυκλική τάξη ($x \rightleftarrows \psi$ ή $x \to \psi \to z \to x$ κ.ο.κ.) αυτά τα γράμματα, π.χ. τα πολυώνυμα

$$x^3+\psi^3+z^3-3(x+\psi)(\psi+z)(z+x)$$

$$x(\psi+z)+\psi(z+x)+z(x+\psi)-x\psi z+1$$

είναι συμμετρικά ως προς x, ψ, z. επίσης, τα πολυώνυμα $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_1\rho_2$, $\rho_1^3+\rho_2^3+3\rho_1^2\rho_2+3\rho_1\rho_2^2$ είναι συμμετρικά ως προς ρ_1, ρ_2.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ.</u>

1. Τα παρακάτω πολυώνυμα να γραφτούν με την ανηγμένη τους μορφή και κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x :

$$A=-4x^3+x^5-2x+3x^4-2x^5+2x^3-5x+1-x^2$$

$$B=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x+x^2-x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4}x-1-x^2$$

$$\Gamma=x\psi-\frac{1}{2}x^2\psi+x^3\psi^2+x^2\psi-\frac{1}{2}x\psi-2x^3\psi^2-1$$

$$\Delta=-\frac{1}{3}\psi^3+\frac{1}{2}\psi^2x-\frac{5}{3}\psi x^2+\frac{1}{2}\psi^3-x^3+\psi^2x-\frac{1}{3}\psi x^2-1 .$$

2. Να σχηματιστεί το πολυώνυμο με όρους τα μονώνυμα $-\frac{3}{5}x^4, 2x^3, -x, 7x^2, -\frac{1}{2}x, -4x^2, \frac{2}{5}x^4, x^3$ και να γραφτεί με την ανηγμένη του μορφή και κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

– Αν έχουμε ένα πολυώνυμο $f(x)$, γράφοντας $f(\lambda)$ εννοούμε την τιμή που παίρνει το πολυώνυμο αν θέσουμε σ' αυτό όπου x το λ, π.χ. για το $f(x)=x^3-2x^2+x+3$ είναι $f(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2+(-1)+3=-1-2\cdot1-1+3=-1$. Όμοια για το $f(x,\psi)=x^2\psi-x^3+x\psi-\psi$ είναι $f(1,-2)=1^2(-2)-1^3+1\cdot(-2)-(-2)=$ $=1\cdot(-2)-1+1\cdot(-2)-(-2)=-2-1-2+2=-3$ (Θέσαμε $x=1$, $\psi=-2$).

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Αν $f(x)=3x^4-x^5+2x^3-x^4+4x-1-2x^5+x^3-2+x$, να υπολογίσετε τα $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

2. Αν $f(x,\psi)=2x^3-3x^2\psi+x\psi^2-5x+6\psi-1$, να υπολογίσετε τα $f(1,1)$, $f(-1,1)$, $f(1,-1)$, $f(0,0)$, $f(0,1)$, $f(-1,0)$, $f(-1,-2)$, $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

3. Αν είναι $\Pi(x)=\alpha x^3+\alpha^2x^2-5\alpha^3x-2\alpha^4$, να υπολογίσετε τα $\Pi(\alpha)$, $\Pi(-\alpha)$, $\Pi(0)$, $\Pi(3)$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ - ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ (§2.8 - 2.9)

- Για να προσθέσουμε πολυώνυμα σχηματίζουμε το πολυώνυμο που περιέχει όλους τους όρους των πολυωνύμων αυτών (και μόνον αυτούς).

- Στο "άθροισμα" των πολυωνύμων φροντίζουμε να δώσουμε την ανηγμένη του μορφή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν $A = -3x^4+2x^3-x+1$ και $B = x^4-x^3+x^2-3$, είναι $A+B =$
$= (-3x^4+2x^3-x+1)+(x^4-x^3+x^2-3) = -3x^4+2x^3-x+1+x^4-x^3+x^2-3 = -2x^4+x^3+x^2-x-2.$

- Μπορούμε να βρούμε το άθροισμα πολυωνύμων, αν τα τοποθετήσουμε το ένα κάτω από το άλλο βάζοντας τους όμοιους όρους στην ίδια στήλη, όπως φαίνεται στη διπλανή διάταξη.

$$\begin{array}{rrrrrr} A+B = & -3x^4 & +2x^3 & & -x & +1 \\ & x^4 & -x^3 & +x^2 & & -3 \\ \hline & -2x^4 & +x^3 & +x^2 & -x & -2 \end{array}$$

- Δύο πολυώνυμα που οι όροι τους είναι αντίθετα μονώνυμα λέγονται <u>αντίθετα</u>. Το άθροισμα δύο αντίθετων πολυωνύμων είναι το <u>μηδενικό</u> πολυώνυμο (όλοι οι συντελεστές του μηδέν). π.χ. τα πολυώνυμα $A = -2x^3+x^2-3x-1$ και $B = 2x^3-x^2+3x+1$ είναι αντίθετα. Είναι $A+B=0$.

- Για να αφαιρέσουμε ένα πολυώνυμο Β από ένα πολυώνυμο Α, προσθέτουμε στο Α το αντίθετο του Β. Είναι δηλαδή $A-B = A+(-B)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν $A = 3x^2-5x\psi+\psi^2$ και $B = x^2-2x\psi-3\psi^2$, είναι $A-B =$
$= A+(-B) = (3x^2-5x\psi+\psi^2)+(-x^2+2x\psi+3\psi^2) = 3x^2-5x\psi+\psi^2-x^2+2x\psi+3\psi^2 = 2x^2-3x\psi+4\psi^2$

- <u>Αλγεβρικό άθροισμα</u> πολυωνύμων λέγεται μιά σειρά από προσθέσεις και αφαιρέσεις πολυωνύμων.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> (<u>εφαρμογή κανόνα απαλοιφής παρενθέσεων</u>): Αν $A = 3x^2-2x+1$, $B = -x^3+x^2-x$, $\Gamma = x^2+x+4$ και $\Delta = -2x^3-4x$, για το αλγεβρικό άθροισμα $A-B-\Gamma+\Delta$ έχουμε: $A-B-\Gamma+\Delta = (3x^2-2x+1)-(-x^3+x^2-x)-(x^2+x+4)+(-2x^3-4x) =$
$= 3x^2-2x+1+x^3-x^2+x-x^2-x-4-2x^3-4x = -x^3+x^2-6x-3.$

- Αν έχουμε αγκύλες, πρώτα απαλείφουμε τις παρενθέσεις που βρίσκονται μέσα σ' αυτές, στη συνέχεια απαλείφουμε (όλες) τις παρενθέσεις και κάνουμε "αναγωγή" όμοιων όρων για να δώσουμε στο πολυώνυμο την ανηγμένη του μορφή. π.χ. $(2x-3)-[-2x-(x^2-2)]-[3x-(x^2-4x+1)] =$

$$= (2x-3)-(-2x-x^2+2)-(3x-x^2+4x-1) =$$
$$= 2x-3+2x+x^2-2-3x+x^2-4x+1 = 2x^2-3x-4.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (πρόσθεση - αφαίρεση - αλγ. άθροισμα πολυωνύμων).

1. Αν $A=-3x^3+7x^2-4x+1$, $B=2x^3-3x^2+4$, $\Gamma=-5x^2+6x-2$ και $\Delta=$ $=-x^3-x^2+5$, να βρεθούν τα : $A-B+\Gamma-\Delta$, $A-(B+\Gamma)+\Delta$, $A-(B-\Gamma-\Delta)$, $(A+B)-(\Gamma+\Delta)$, $(A-B)-(\Gamma-\Delta)$.

2. Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πολυώνυμα της άσκ. 1, να βρεθούν τα:

$2A-B-3\Gamma+\Delta$, $A-2\cdot(B-\Gamma)+3\cdot\Delta$, $(A-2B)-2(A+\Gamma-\Delta)-\Delta$

$-3(A-B-\Gamma)+2(B+\Gamma-2\Delta)-[A-2(B-\Gamma)]$.

$\Delta=-x^2+xy$

3. Αν $A=x^2+x\varphi+\varphi^2$, $B=x^2-2x\varphi-\varphi^2$, $\Gamma=2x^2-x\varphi-3\varphi^2$, να βρεθούν τα : $-2(A-B)+3(B+\Gamma-\Delta)-(\Gamma-\Delta)$ και $-(A-B)-(B-\Gamma)-(\Gamma-\Delta)$.

4. Αν $f(x,\varphi)=3x^2-2x\varphi-\varphi^2$ και $\varphi(x,\varphi)=-x^2-3x\varphi+2\varphi^2$, να βρεθεί το $-\frac{1}{2}\cdot f(x,\varphi)+\frac{3}{4}\cdot\varphi(x,\varphi)$.

5. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(3x-1)-[-2x-(x^2-x+1)-(3x-2)]-[-(x^2-x)-(3x-4)]$

β) $-[-(-x^2+2x+2)+(3x-4)]-\{x^2-[-3x-(x^2-1)]-[2x-(-x+3)]\}$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΕΠΙ ΜΟΝΩΝΥΜΟ (§ 2.10)

- Για να πολλαπλασιάσουμε ένα πολυώνυμο επί ένα μονώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του πολυωνύμου επί το μονώνυμο και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(-3x^2+2x-2)\cdot(-\frac{1}{2}x^2)=(-3x^2)\cdot(-\frac{1}{2}x^2)+(+2x)\cdot(-\frac{1}{2}x^2)+(-2)\cdot(-\frac{1}{2}x^2)=$

$=\frac{3}{2}x^4+(-x^3)+x^2=\frac{3}{2}x^4-x^3+x^2.$

πιό απλά και σύντομα:

$$(-3x^2+2x-2)\cdot(-\frac{1}{2}x^2)=\frac{3}{2}x^4-x^3+x^2 .$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να γίνουν οι πράξεις : α) $\left(\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{3}-1\right)\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)$ β) $(-3x^2+x-5)\cdot\left(-\frac{2}{3}x^3\right)$

γ) $(\alpha^{2x}+\alpha^x+1)\cdot\alpha^x$ δ) $(2x^{\nu-1}-3x^{\nu-2}+x^{\nu-3})\cdot(-3x^3)$

ε) $(5x^3-3x^2+\frac{1}{2}x-1)\cdot(-2x)^3$ στ) $(x^2-2\varphi)\cdot3\varphi+(x\varphi+\varphi^2)\cdot(-x)+(x+\varphi)\cdot(-2x\varphi)$

ζ) $(x^2-3x\varphi)\cdot(-x)^3+(-3x)^2\cdot(2x-\varphi)-3\cdot(x^2-\varphi^2)\cdot(-\sqrt{2}x\varphi^2)^2$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΕΠΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ (§2.11)

● Για να πολλαπλασιάσουμε ένα πολυώνυμο επί ένα άλλο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του πρώτου με κάθε όρο του δεύτερου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(-2x^3+3x^2-x-1)\cdot(2x-1)=(-2x^3+3x^2-x-1)\cdot 2x+(-2x^3+3x^2-x-1)\cdot(-1)=$
$=(-4x^4+6x^3-2x^2-2x)+(2x^3-3x^2+x+1)=$
$=-4x^4+6x^3-2x^2-2x+2x^3-3x^2+x+1=-4x^4+8x^3-5x^2-x+1$

– Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

– Για να βρούμε το γινόμενο τριών (ή περισσότερων) πολυωνύμων, πολ)ζουμε πρώτα τα δύο πρώτα και το γινόμενό τους το πολ)ζουμε επί το τρίτο (κ.ο.κ.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(2x-1)\cdot(x+2)\cdot(-x+1)=[(2x-1)\cdot(x+2)]\cdot(-x+1)=$
$=(2x^2+4x-x-2)\cdot(-x+1)=-2x^3-4x^2+x^2+2x+2x^2+4x-x-2=$
$=-2x^3-x^2+5x-2.$

– ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛ)ΣΜΟΥ ΠΟΛ)ΜΩΝ

Αν A, B, Γ είναι τρία πολυώνυμα, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$A\cdot B=B\cdot A$	(αντιμεταθετική)
$(A\cdot B)\cdot\Gamma=A\cdot(B\cdot\Gamma)$	(προσεταιριστική)
$A\cdot(B+\Gamma)=A\cdot B+A\cdot\Gamma$	(επιμεριστική)

ΑΣΚΗΣΗ: Να επαληθευτούν οι παραπάνω ιδιότητες με τα πολυώνυμα
$A=2x^2-x-1$, $B=-x^2+1$, $\Gamma=2x-3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:
   α) $(3x-1)(-x^2+x-2)-(-x^2+1)(2x^2-x-3)$ β) $-3(\mu-\nu)(\mu+2\nu)-2(3\mu-\nu)(\mu+\nu)$
   γ) $\left(\frac{x}{2}-\frac{\psi}{3}+1\right)\cdot\left(-\frac{x}{3}+\frac{\psi}{2}-\frac{1}{6}\right)$ δ) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1)$
   ε) $[x(x+\alpha)-\alpha(x-\alpha)]\cdot[x(x-\alpha)-\alpha(x+\alpha)]$ στ) $(9x^{2\nu}+6x^{\nu}\psi^{2\mu}+4\psi^{4\mu})\cdot(3x^{\nu}-2\psi^{2\mu})$
   ζ) $(x+2)(\psi+2)-4(x+1)(\psi+1)+6x\psi-4(x-1)(\psi-1)+(x-2)(\psi-2)$.

2. Αν $A=2x+\psi$ και $B=x-3\psi$, να υπολογισθεί η παράσταση $2A(A+B)-4AB+3B(A-B)$ και η αριθμητική τιμή της αν $x=-1, \psi=-\frac{1}{2}$

3. Αν Π ένα ακέραιο πολυώνυμο, υπάρχει το "αντίστροφο" πολυώνυμο, δηλαδή ένα ακέραιο πολυώνυμο Π΄ τέτοιο ώστε $\Pi\cdot\Pi'=1$; Δικαιολογείστε την απάντηση.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ - ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ (§ 2.12)

- Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που επαληθεύεται για οποιεσδήποτε τιμές των γραμμάτων της.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ	ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
$\boxed{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$	$(3x+2\psi^2)^2=(3x)^2+2\cdot3x\cdot2\psi^2+(2\psi^2)^2=9x^2+12x\psi^2+4\psi^4$
$\boxed{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$	$(x^3-2\psi)^2=(x^3)^2-2\cdot x^3\cdot2\psi+(2\psi)^2=x^6-4x^3\psi+4\psi^2$
$\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}$	$(2\alpha+\frac{1}{3}\beta\gamma)(2\alpha-\frac{1}{3}\beta\gamma)=(2\alpha)^2-(\frac{1}{3}\beta\gamma)^2=4\alpha^2-\frac{1}{9}\beta^2\gamma^2$
$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha}$	$(2x+\psi+3\omega)^2=(2x)^2+\psi^2+(3\omega)^2+2\cdot2x\cdot\psi+2\cdot\psi\cdot3\omega+2\cdot3\omega\cdot2x=4x^2+\psi^2+9\omega^2+4x\psi+6\psi\omega+12\omega x$.
$\boxed{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$	$(x+2\psi)^3=x^3+3x^2\cdot2\psi+3\cdot x\cdot(2\psi)^2+(2\psi)^3=x^3+6x^2\psi+12x\psi^2+8\psi^3$
$\boxed{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$	$(\sqrt{2}x-\psi)^3=(\sqrt{2}x)^3-3\cdot(\sqrt{2}x)^2\cdot\psi+3\cdot\sqrt{2}x\cdot\psi^2-\psi^3=2\sqrt{2}x^3-6x^2\psi+3\sqrt{2}x\psi^2-\psi^3$
$\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3}$	$(x+2\psi)(x^2-2x\psi+4\psi^2)=(x+2\psi)[x^2-x\cdot2\psi+(2\psi)^2]=x^3+(2\psi)^3=x^3+8\psi^3$
$\boxed{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3}$	$(2x-3\psi)\cdot(4x^2+6x\psi+9\psi^2)=(2x-3\psi)\cdot[(2x)^2+2x\cdot3\psi+(3\psi)^2]=(2x)^3-(3\psi)^3=8x^3-27\psi^3$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Είναι :

$$(-\alpha+\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$$
$$(-\alpha-\beta)^2=[-(\alpha+\beta)]^2=(\alpha+\beta)^2$$
$$(-\alpha+\beta)^3=(\beta-\alpha)^3$$
$$(-\alpha-\beta)^3=[-(\alpha+\beta)]^3=-(\alpha+\beta)^3$$

$$(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$
$$(\alpha+\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha$$
$$(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\beta\gamma-2\gamma\alpha$$
$$(-\alpha-\beta-\gamma)^2=[-(\alpha+\beta+\gamma)]^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

α) $\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{5}{3}\psi\right)^2$ β) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}\right)^2$ γ) $\left(\frac{3\lambda}{5\nu}+\frac{\nu^2}{3}\right)^2$

δ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ ε) $\left(-2\alpha^x-\beta^\psi\right)^2$ στ) $-\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\psi\right)^2$

ζ) $\left(0{,}3x^2+0{,}1\psi^2\omega\right)^2$ η) $\left(\frac{2}{\alpha\beta^2}-\frac{1}{2\gamma}\right)^2$ θ) $\left(-0{,}5x\psi+2\omega\right)^2$

ι) $-\left(-\sqrt{2}x+\psi^2\right)^2$ ια) $\left(2x^\mu-3x^2\psi^\nu\right)^2$ ιβ) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\alpha^2x\right)^2$

2. Να βρείτε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\psi\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\psi\right)$ β) $\left(-\frac{1}{2}x\psi+\omega^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x\psi+\omega^2\right)$

γ) $\left(3x^4+2\psi\right)\cdot\left(2\psi-3x^4\right)$ δ) $\left(-\sqrt{2}x-1\right)\cdot\left(-\sqrt{2}x+1\right)$

ε) $\left(0{,}4\alpha^2+\beta^3\right)\cdot\left(\beta^3-0{,}4\alpha^2\right)$ στ) $\left(2\alpha^\nu\beta^\nu-\sqrt{2}\gamma^\mu\right)\left(2\alpha^\nu\beta^\nu+\sqrt{2}\gamma^\mu\right)$

3. Ποιών διωνύμων τετράγωνα είναι τα αναπτύγματα:

α) $25\beta^2-10\beta+1$ β) $1+2\alpha^2+\alpha^4$ γ) $\frac{9\beta^2}{16}-3\alpha\beta+4\alpha^2$

δ) $9x^6+49\psi^2\omega^2-42x^3\psi\omega$ ε) $3x^2+2\psi^2-2\sqrt{6}x\psi$ στ) $x^2\psi^4-x\psi^2+\frac{1}{4}$

ζ) $-49-14\lambda-\lambda^2$ η) $2\alpha x-\frac{9\alpha^2}{25}-\frac{25x^2}{9}$ θ) $-36\alpha^2+12\alpha-1$

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $2(2x-1)^2-3(x+2)(-x+2)-(-x+2)^2$ β) $(\alpha^x-1)^2-(\alpha^x+3)(\alpha^x-3)-(\alpha^x+2)^2$

γ) $(x^3+2\psi^2)^2-(x^3-2\psi^2)(x^3+2\psi^3)+(\psi^2-2x^3)^2$

δ) $-(2x+1)^2+(2x+1)(-2x-1)-(x+3)(-x+3)-(-x-3)(x+3)$

5. Αν είναι $\alpha=8x$, $\beta=3x^2+4$, $\gamma=3x^2+4x-4$, να αποδείξετε ότι θα είναι $\beta^2+3\alpha\gamma=(\alpha+\gamma)^2$.

6. Αν είναι $x=\alpha^2-\beta^2$, $\psi=2\alpha\beta$, $z=\alpha^2+\beta^2$, να αποδείξετε ότι θα είναι $x^2+\psi^2=z^2$.

7. Αν είναι $K=(x+1)^2$, $\Lambda=(x-1)^2$, $M=K+8$, να αποδείξετε ότι θα είναι $K-\Lambda+M=(x+3)^2$.

8. Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

α) $\left(\frac{1}{2}x-2\psi-\omega\right)^2$ β) $(-x^2+2x\psi-1)^2$ γ) $\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{3}\right)^2$

δ) $\left(-\alpha^{2x}-\alpha^{x}-\frac{1}{2}\right)^2$ ε) $-\left(\frac{1}{2}x^3-2x^2-x\right)^2$ στ) $\left(-2x^2\psi+x\psi-\frac{1}{2}x\psi^2\right)^2$

9. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $\left(\sqrt{2}x^2-\frac{1}{3}\psi\right)^3$ β) $(-2x^2+x\psi^2)^3$ γ) $(-2\alpha\beta^2-3\alpha^2\beta)^3$

δ) $(2x^3\psi-x\psi^3)^3$ ε) $\left(-\frac{x\psi}{2}+1\right)^3$ στ) $\left(-\frac{1}{2}+x^3\psi^2\omega\right)^3$

10. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $(\alpha+2\beta)^3-(2\alpha-\beta)^3+2(-\alpha+\beta)^3-(-\alpha-\beta)^3$

β) $3(2x-1)^3-2(x+3)(x-3)(x+1)+3x(x-2)^2$

γ) $(\alpha^x-1)^3-2(\alpha^x+1)^3-3(2\alpha^x+3)^3$

δ) $(\alpha-\beta)^2\cdot(x-\psi)+(\alpha-x)^2\cdot(\psi-\beta)+(\alpha-\psi)^2\cdot(\beta-x)$

ε) $(x-\psi)(x^2+\psi^2)(x^2-\psi^2)(x+\psi)-(x^2-\psi^2)(x^4-\psi^4)$

στ) $(\alpha+\beta+1)^2+(\alpha+\beta-1)^2-2(\alpha+\beta+1)\cdot(\alpha+\beta-1)$

11. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

α) $x(x+\psi)(x+2\psi)(x+3\psi)+\psi^4=(x^2+3x\psi+\psi^2)^2$

β) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$

γ) $(x^2+\psi^2)^2+4x\psi(x^2-\psi^2)=(x^2-\psi^2+2x\psi)^2$

δ) $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

ε) $2(2x-\alpha)^3-27\alpha^2x=(x-2\alpha)(4x+\alpha)^2$

12. Μετασχηματίστε την παράσταση $A=8x^3+12x^2(\psi-1)+6x(\psi^2-2\psi+1)+$ $+\psi^3-3\psi^2+3\psi-1$, έτσι που να φαίνεται ότι είναι τέλειος κύβος.

13. Αν $x-\psi=1$ και $x\psi=20$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης $B=$ $=5x^2+5\psi^2-9x\psi$.

14. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\Gamma=(x-\alpha)^3+(x+\alpha)^2(x-\alpha)-2\beta(x^2+\alpha^2)$ αν $x=\alpha+\beta$.

15. Αν $\varphi(x)=x^3-2x^2+x-1$, να βρείτε τα:

$\varphi(x+1)$, $\varphi(2x-1)$, $2\cdot\varphi(x-1)-3\cdot\varphi(2x+1)-\varphi(x)+2$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΟ (§2.13)

- Για να διαιρέσουμε ένα πολυώνυμο με ένα μονώνυμο, διαιρούμε κάθε όρο του πολυωνύμου με το μονώνυμο και προσθέτουμε τα πηλίκα που βρίσκουμε.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>: $(-12x^5+18x^3+6x^2):(-6x^2) = 2x^3-3x-1$

$$\left(\frac{12}{5}\alpha^3\beta^2-\frac{4}{5}\alpha^2\beta^3+\frac{8}{15}\alpha^2\beta^2\right):\left(-\frac{4}{5}\alpha^2\beta^2\right) = -3\alpha+\beta-\frac{2}{3}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) $(6\alpha x^5-3\alpha x^4+9\alpha^2x^3-12\alpha^3x^2):(-2\alpha x^2)$ β) $(\alpha^{3\mu}+2\alpha^{2\mu}+6\alpha^{\mu}):(-3\alpha^{\mu})$

γ) $(3\nu^3-9\nu^2x+12\nu^4x^2):(-3\nu^2)$ δ) $\left[x(x-1)^2+3x(x+2)(x-2)-2x(x+1)^2\right]:\left(-\frac{1}{2}x\right)$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ (§2.14)

- <u>Ταυτότητα διαίρεσης</u>: $\boxed{\Delta = \delta\cdot\pi + \upsilon}$ (**Δ**ιαιρετέος **=** **δ**ιαιρέτης **·** **π**ηλίκο **+** **υ**πόλοιπο)

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>: Να γίνουν οι διαιρέσεις: α) $(x^2-9x^3+6x^4+3x-1):(3x^2-1)$

β) $(-3x^4+2x^2+1):(x-1)$ γ) $(x^4-3x^3\psi+6x^2\psi^2-3x\psi^3+\psi^4):(x^2-x\psi+\psi^2)$

Η διαδικασία της διαίρεσης γίνεται με την παρακάτω διάταξη:

α)
$$\begin{array}{l|l}
\boxed{\text{Διαιρετέος}} & \boxed{\text{διαιρέτης}} \\
6x^4-9x^3+x^2+3x-1 & 3x^2-1 \\ \cline{2-2}
-6x^4 \qquad +2x^2 & 2x^2-3x+1 \\ \cline{1-1}
\quad -9x^3+3x^2+3x-1 & \quad\uparrow \\
\quad 9x^3 \qquad -3x & \boxed{\text{πηλίκο}} \\ \cline{1-1}
\qquad 3x^2 \quad -1 & \\
\qquad -3x^2 \quad +1 & \\ \cline{1-1}
\boxed{\text{υπόλοιπο}} \to 0 &
\end{array}$$

β)
$$\begin{array}{l|l}
-3x^4 \qquad +2x^2 \quad +1 & x-1 \\ \cline{2-2}
3x^4-3x^3 & -3x^3-3x^2-x-1 \\ \cline{1-1}
\quad -3x^3+2x^2 \quad +1 & \\
\quad 3x^3-3x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad -x^2 \quad +1 & \\
\qquad x^2-x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -x+1 & \\
\qquad\quad x-1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

γ)
$$\begin{array}{l|l}
x^4-3x^3\psi+6x^2\psi^2-3x\psi^3+\psi^4 & x^2-x\psi+\psi^2 \\ \cline{2-2}
-x^4+x^3\psi-x^2\psi^2 & x^2-2x\psi+3\psi^2 \\ \cline{1-1}
\quad -2x^3\psi+5x^2\psi^2-3x\psi^3+\psi^4 & \\
\quad 2x^3\psi-2x^2\psi^2+2x\psi^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 3x^2\psi^2-x\psi^3+\psi^4 & \\
\qquad -3x^2\psi^2+3x\psi^3-3\psi^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 2x\psi^3-2\psi^4 &
\end{array}$$

- ο βαθμός του πηλίκου είναι ίσος με τη διαφορά των βαθμών Διαιρετέου και διαιρέτη.
- ο βαθμός του υπολοίπου είναι μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη.
- στην τέλεια διαίρεση υ=0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) $(18x^3+9x^2-50x-25):(3x-5)$ β) $(x^3-11x-30+4x^2):(x+6-x^2)$

γ) $(-x^2+81):(x-9)$ δ) $(27x^3-1):(3x+1)$ ε) $(32x^5-1):(2x-1)$

στ) $(6\alpha^3-29\alpha^2x+17\alpha x^2+42x^3):(3\alpha-7x)$

ζ) $\left[(3x+5)^2+(2x+3)^2-3x(2x+4)-(x+1)^2\right]:(3x-2)$

η) $\left[(x^2-9)^2-(x+5)(x-3)^2\right]:(x^2+x-12)$

θ) $\left[(x+3\psi)^2+4(x+2\psi)^2-(x+\psi)^2\right]:4(x+3\psi)$

ι) $(x^4-3x^3\psi+6x^2\psi^2-3x\psi^3+\psi^4):(x^2-2x\psi+3\psi^2)$

ια) $(3\alpha^5+25\alpha^4\beta+33\alpha^3\beta^2+14\alpha^2\beta^3):(\alpha^2+7\alpha\beta)$

ιβ) $(3\alpha^{4x}+14\alpha^{3x}+9\alpha^x+2):(\alpha^{2x}+5\alpha^x+1)$

2. Να γίνει η διαίρεση $\left[\alpha\gamma x^3+(\alpha\delta-\beta\gamma)x^2-(\alpha\gamma+\beta\delta)x+\beta\gamma\right]:(\alpha x-\beta)$. Να κάνετε και επαλήθευση. (Απάντηση: το πηλίκο είναι το $\gamma x^2+\delta x-\gamma$)

3. Να βρείτε πολυώνυμο που αν πολ)στεί επί $2x^2-4$ δίνει $-2x^4+8x^3-16x+8$.

4. Όμοια, πολυώνυμο που αν πολ)στεί επί $2x-3\psi$ δίνει $2x^3+7x^2\psi-9x\psi^2-9\psi^3$.

5. Αν είναι $\varphi(x)=2x^2-5x+3$, να γίνει η διαίρεση:

$$\left[\varphi(x)+\varphi(x-2)-\varphi(x-1)\right]:(x-3)$$

6. Αν είναι $\varphi(x)=x^2+5x-6$, να γίνει η διαίρεση:

$$\left[\varphi(x-2)\cdot\varphi(x+2)-\varphi(x)-10\right]:(x^2-x-2)$$

7. Το πολυώνυμο $2x^3-7x^2+14x-12$ να γραφτεί σαν γινόμενο δύο πολυωνύμων, αν ξέρετε ότι το ένα απ' αυτά είναι το x^2-2x+4.

8. Ποιος είναι ο διαιρετέος στη διαίρεση που έχει διαιρέτη x^2-x+1, πηλίκο $2x^2+x+2$ και υπόλοιπο $-2x+3$;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

(Ασκήσεις επανάληψης)

1. Δίνεται το πολυώνυμο $\varphi(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Να βρεθούν: α) το πολυώνυμο $F(x) = -\varphi(x-1) + \varphi(2x+1) - 3\cdot\varphi(x+1)$, β) τα υπόλοιπα στις διαιρέσεις $\varphi(x) : (x-1)$ και $F(x) : (2x+1)$ χωρίς να εκτελεστούν οι πράξεις.

2. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διαίρεση $(8x^3 - \lambda^2 x^2 + 5\lambda x + 2) : (x+1)$, α) να είναι τέλεια, β) να αφήνει υπόλοιπο 2.

3. Αν $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$, να γίνει η διαίρεση

$$\left[2\cdot f(x) - 3\cdot f(2x+1) + 4\cdot f(3x-2) - 5\right] : (x^2 - 3x + 1)$$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $2(-x+1)^2 - 3(2-x)^2 + 4(-x-3)^2$

β) $3(x-2\psi)(x+2\psi) - (2x-\psi)(-2x+\psi) + (3x+\psi)(-\psi+3x)$

γ) $(6x^4 + 3x^2\psi^2 - 7x\psi^3 + 4\psi^4 - 4x^3\psi) : (3x^2 + 2\psi^2 - 5x\psi)$

δ) $(5x^2 - 3x^5 + 1) : (-2 + x^2)$

5. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

α) $(2x-1)^2 - (x-1)(x+1) - x(x-8) = 2(x+1)^2$

β) $(3x^2+1)^2 - (2x^2-1)^2 - 5x^2(x^2+2) = 0$

6. Αν $x + \psi = 5$ και $x\psi = 6$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = -3x^2 - 3\psi^2 + 2x\psi$.

7. Αν είναι $\alpha = 8x$, $\beta = 3x^2 + 4$, $\gamma = 3x^2 + 4x - 4$, να αποδείξετε ότι θα είναι $\beta^2 + 3\alpha\gamma = (\alpha + \gamma)^2$.

8. Αν είναι $\alpha = (x-3)^2$, $\beta = -(x+3)^2$, $\gamma = 12x$, να αποδείξετε ότι θα είναι $\alpha^2 - \beta\gamma = \beta^2 - \alpha\gamma = \gamma^2 - \alpha\beta$.

9. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διαίρεση $\left[(\lambda-7)x^2 + 2\lambda x - 2\right] : (2x+1)$ να αφήνει το ίδιο υπόλοιπο με τη διαίρεση $(x^3 - \lambda x + 1) : (x+1)$

10. Ποιός είναι ο διαιρετέος στη διαίρεση που έχει διαιρέτη $x^2 + x - 2$, πηλίκο $-3x^2 + x - 1$ και υπόλοιπο $-x - 2$; Να κάνετε επαλήθευση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ- ΡΗΤΕΣ ΑΛΓ. ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΜΕ $x-\alpha$ (§3.1)

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το διώνυμο $x-\alpha$ είναι $\boxed{\upsilon = P(\alpha)}$, δηλαδή ίσο με την αριθμ. τιμή $P(\alpha)$ του πολυωνύμου για $x=\alpha$.

Γενικά: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το διώνυμο $\alpha x+\beta$ $(\alpha\neq 0)$ είναι $\boxed{\upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το υπόλοιπο στις παρακάτω διαιρέσεις (χωρίς να γίνει η πράξη):

α) $(-x^2+2x^5+2x-3-2x^4):(-1+x)$ β) $(3x^3-19x^2-11x+2):(3x+2)$

γ) $(3\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3):(\alpha+\beta)$ δ) $(32x^5-243):(2x-3)$

2. Για ποιές τιμές του λ $(\lambda\in\mathbb{R})$:

α) το $f(x)=\lambda x^2-(\lambda-1)x-4\lambda$ διαιρείται με το $x+2$;

β) " $f(x)=x^3+\lambda x^2+2\lambda x-1$ " " " $x+1$;

γ) " $f(x)=2x^2-(\lambda-2)x+4$ " " " $2x+4$;

3. Αν $f(x)=x^3-\lambda x+1$, να βρείτε για ποιές τιμές του λ $(\lambda\in\mathbb{R})$ το πολυώνυμο $\varphi(x)=f(x+1)+2\cdot f(x-2)-f(x)$ διαιρείται με το $x-1$.

4. Να αποδειχτεί ότι οι παρακάτω διαιρέσεις είναι τέλειες (χωρίς να γίνει η πράξη):

α) $(x^3+9\alpha x^2+27\alpha^2x+27\alpha^3):(x+3\alpha)$ β) $\left[(x+1+\alpha)^3-x^3-1-\alpha^3\right]:(x+1)$

5. Να βρείτε τον λ $(\lambda\in\mathbb{R})$ ώστε η διαίρεση $(4x^3-\lambda x^2+5\lambda x+2):(2x+1)$ α) να είναι τέλεια, β) να αφήνει υπόλοιπο 4.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ (§3.2)

▲ 1η περίπτωση: κοινός (ή κοινοί) παράγοντες.

ΠΡΟΣΟΧΗ! 1) μπορεί κοινός παράγοντας να είναι μιά ολόκληρη παρένθεση, 2) μερικές φορές χρειάζεται να αλλάξουμε τα σημεία μιάς παράστασης για να προκύψει ο κοινός παράγοντας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$21\alpha^3\beta\gamma^2-49\alpha^2\beta\gamma^3+14\alpha^4\beta^2\gamma^4=7\alpha^2\beta\gamma^2(3\alpha-7\gamma+2\alpha^2\beta\gamma^2)$$

$$3\alpha(x-\psi)-2\beta(x-\psi)+\gamma(x-\psi)=(x-\psi)(3\alpha-2\beta+\gamma)$$

$$21\alpha^2(x+2\psi)-14\alpha(x+2\psi)^2=7\alpha(x+2\psi)\cdot[3\alpha-2(x+2\psi)]=$$
$$=7\alpha(x+2\psi)(3\alpha-2x-4\psi)$$

$$(2x-1)(\alpha-\beta)+(1-2x)(\alpha+\beta)=(2x-1)(\alpha-\beta)-(2x-1)(\alpha+\beta)=$$
$$=(2x-1)\cdot[(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)]=$$
$$=(2x-1)\cdot(\alpha-\beta-\alpha-\beta)=-2\beta\cdot(2x-1)$$

$$2x(\alpha-\beta)-\alpha+\beta=2x(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(2x-1)$$

ΑΣΚΗΣΗ: Να τραπούν σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $7\sqrt{3}\,x^2\psi^3\omega - 21\sqrt{6}\,x^3\psi^2\omega^4 + 56x^3\psi^3\omega^2 - 70x^4\psi^2\omega$

β) $\frac{2}{3}\alpha^2 x - \frac{4}{15}\alpha^3x^2 + \frac{10}{21}\alpha^4 x$ γ) $(3x-1)(\psi+2)-(1-3x)(\psi-2)$

δ) $4(\alpha-3\beta)(3x-\psi)+5(3\beta-\alpha)(x-3\psi)$ ε) $(2x+1)(3x-2)-(x-4)(2x+1)-(2x+1)^2$

στ) $(\gamma-\alpha-\beta)(2\alpha-\beta)-(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta)$ ζ) $2x-\psi+(2x-\psi)^2-2(\psi-2x)^3$

η) $3(x-1)(x-2)^2-(x-1)^2(2-x)+2(1-x)(x-2)$

▲ 2η περίπτωση: διαφορά τετραγώνων • $\boxed{\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Μπορεί να βγαίνει πρώτα κοινός παράγοντας και μετά να εμφανίζεται η διαφορά τετραγώνων (ή αντίστροφα)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

• $49\alpha^6\beta^4-16\gamma^2=(7\alpha^3\beta^2)^2-(4\gamma)^2=(7\alpha^3\beta^2+4\gamma)(7\alpha^3\beta^2-4\gamma)$

$\downarrow$ $7\alpha^3\beta^2$ $\downarrow$ 4γ

• $-16(x-\psi)^2+25(x+\psi)^2=25(x+\psi)^2-16(x-\psi)^2=[5(x+\psi)]^2-[4(x-\psi)]^2=$

$=[5(x+\psi)+4(x-\psi)]\cdot[5(x+\psi)-4(x-\psi)]=$

$=(5x+5\psi+4x-4\psi)\cdot(5x+5\psi-4x+4\psi)=(9x+\psi)(x+9\psi)$

• $20\alpha^3x^3-5\alpha x=5\alpha x(4\alpha^2x^2-1)=5\alpha x\cdot[(2\alpha x)^2-1^2]=5\alpha x(2\alpha x+1)(2\alpha x-1)$

• $5(x^2-\psi^2)-7(x+\psi)=5(x+\psi)(x-\psi)-7(x+\psi)=(x+\psi)[5(x-\psi)-7]=(x+\psi)(5x-5\psi-7)$

ΑΣΚΗΣΗ: Να τραπούν σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $49\alpha^2-(2x-\psi)^2$ β) $100(x+\psi)^2-4(x-\psi)^2$ γ) $4\alpha^2(x+\psi)^2-9$

δ) $(4x^2+3x+3)^2-(3-4x^2)^2$ ε) $28(\alpha+3\beta)^2-7(\beta-2\alpha)^2$

στ) $x^3\psi^3-\frac{x\psi}{16}$ ζ) $-27\alpha^3\beta^3+48\alpha\beta(x-1)^2$ η) $-(2x+5\psi)^2+25\alpha^4$

θ) $3(\alpha^2-9\beta^2)+5x(\alpha-3\beta)-2\psi(3\beta-\alpha)$ ι) $(2x^2-8)-(4-2x)^3$

ια) $(3x-6\psi)^2-2(x^2-4\psi^2)-5(4\psi^2-x^2)$

ιβ) $\frac{5}{3}(x-3)^2-\frac{10}{9}(x^2-9)-\frac{20}{21}(3-x)^3$

ιγ) $3-48x^4\psi^4$ ιδ) $-7x^3+63x(x-2\psi)^2$

▲ $3^{η}$ περίπτωση : τέλειο τετράγωνο • $\boxed{\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2}$

ΠΡΟΣΟΧΗ! 1) Μπορεί να βγαίνει πρώτα κοινός παράγοντας και μετά να εμφανίζεται το τέλειο τετράγωνο, 2) μπορεί να έχουμε συνδυασμό τέλειου τετραγώνου και (μετά) διαφοράς τετραγώνων, 3) στην προηγούμενη περίπτωση 2 μπορούμε να φτάσουμε και με προσθαφαίρεση ή διάσπαση κατάλληλου όρου του πολυωνύμου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- $25\alpha^2 - 20\alpha\beta + 4\beta^2 = (5\alpha - 2\beta)^2$
- $(x+\psi)^2 - 2(x+\psi) + 1 = [(x+\psi) - 1]^2 = (x+\psi-1)^2$
- $18\alpha x^2\psi^2 - 12\alpha x\psi + 2\alpha = 2\alpha(9x^2\psi^2 - 6x\psi + 1) = 2\alpha(3x\psi - 1)^2$
- $16\alpha^2 - 25x^2 + 110x - 121 = 16\alpha^2 - (25x^2 - 110x + 121) = (4\alpha)^2 - (5x-11)^2 =$
  $= [4\alpha + (5x-11)]\cdot[4\alpha - (5x-11)] = (4\alpha + 5x - 11)(4\alpha - 5x + 11)$
- $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 =$
  $= (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$
- $4x^4 - 16x^2\psi^2 + 9\psi^4 = 4x^4 - 12x^2\psi^2 - 4x^2\psi^2 + 9\psi^4 = (4x^4 - 12x^2\psi^2 + 9\psi^4) - 4x^2\psi^2 =$
  $= (2x^2 - 3\psi^2)^2 - (2x\psi)^2 = (2x^2 - 3\psi^2 + 2x\psi)(2x^2 - 3\psi^2 - 2x\psi)$

ΑΣΚΗΣΗ : Να τραπούν σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $x^4 - 2x^2\psi^3 + \psi^6$ β) $2\omega^2 + 2\omega\psi + \frac{1}{2}\psi^2$ γ) $\frac{x^4}{64} + \frac{9\psi^6}{4} - \frac{3x^2\psi^3}{8}$

δ) $(x+\psi)^2 + 6(x+\psi)(\alpha-\beta) + 9(\alpha-\beta)^2$ ε) $-8(x+\psi) + 1 + 16(x+\psi)^2$

στ) $-27\alpha^2\beta^2 + 72\alpha\beta - 48$ ζ) $-2\alpha - \alpha x^4 - \frac{\alpha}{x^4}$

η) $2x\psi - x^2 + \alpha^2 - \psi^2$ θ) $(\alpha-\beta)^2 - 6(\alpha-\beta)\gamma^3 + 9\gamma^6 - 4\delta^6$

ι) $x^4 + x^2 + 1$ ια) $4x^4 - 21x^2\psi^2 + 9\psi^4$ ιβ) $16\alpha^4 + 4\beta^4$

ιγ) $4\alpha^4 - 13\alpha^2 + 1$ ιδ) $4x^4 - 37x^2\psi^2 + 9\psi^4$

ιε) $16\alpha^4\beta^4 - 17\alpha^2\beta^2 + 1$ ιστ) $9\alpha^8 - 15\alpha^4 + 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

(ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ: κοινός παράγ.- διαφ. τετραγ.- τέλ. τετράγ.)

Να τραπούν σε γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

1. α) $12\lambda\mu^2+9\lambda^2\mu^2-3\lambda^3\mu$ β) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,x^2\psi^3-\frac{4}{15}\sqrt{6}\,x^3\psi^5-\frac{8}{27}\sqrt{15}\,x\psi^4$

γ) $2\alpha(x+\psi)+\beta(x+\psi)+(\alpha-\beta)(x+\psi)$ δ) $(2x-\psi)^2-x(\psi-2x)+3\psi(2x-\psi)$

ε) $\alpha(x-\psi)-\beta(\psi-x)^2-\gamma(\psi-x)^3-x+\psi$ στ) $2(x-1)^2-(1-x)^3-x+1$

2. α) $81x^4-16\psi^4$ β) $(\mu-4\nu)^2-16\nu^2$ γ) $\frac{25}{100}x^4\psi^2-\frac{9}{16}\alpha^2$

δ) $(3\alpha-2\beta)^2-(3\beta-2\alpha)^2$ ε) $9(\alpha-2\beta)^2-16(\alpha+2\beta)^2$

στ) $25(x-3\psi)^2-16(2x-\psi)^2$ ζ) $-(2x-\psi)^2+4x^2$

3. α) $x^2-10x\psi+25\psi^2$ β) $(\alpha+\beta)^2-10x(\alpha+\beta)+25x^2$

γ) $81-18x\psi^2+x^2\psi^4$ δ) $4(x-\psi)^2-12(x-\psi)(\alpha+\beta)+9(\alpha+\beta)^2$

ε) $-(x+\psi)^2+2(x+\psi)-1$ στ) $(3x^2-2)^2+32(3x^2-2)+256$

4. α) $\alpha^3-8\alpha^2\beta+16\alpha\beta^2$ β) x^4+1-2x^2

γ) $(x+3)(x-1)^2-4(x+3)$ δ) $\gamma^2(\alpha-\beta)+9(\beta-\alpha)$

ε) $25-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta$ στ) $9x^2-4\psi^2-4\psi-1$

ζ) $\alpha^2-10\alpha+25+2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2$ η) $(3x-1)^2(x-2)+9(2-x)$

θ) $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2$ ι) $\alpha^4+9\alpha^2\beta^2+81\beta^4$

ια) $\mu^4+4\mu^2\nu^2+16\nu^4$ ιβ) $x^4+\psi^4-11x^2\psi^2$

ιγ) $\alpha^4-23\alpha^2+1$ ιδ) $4x^4-21x^2\psi^2+\psi^4$

▲ 4η περίπτωση — ομαδοποίηση (παράγοντες κατά ομάδες)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

• $5\psi-5\omega-\lambda\omega+\lambda\psi = (5\psi-5\omega)+(\lambda\psi-\lambda\omega) =$
$= 5(\psi-\omega)+\lambda(\psi-\omega) = (\psi-\omega)(5+\lambda)$

• $2x^4-x^3+4x-2 = (2x^4-x^3)+(4x-2) =$
$= x^3(2x-1)+2(2x-1) = (2x-1)(x^3+2)$

• $\alpha^6+\beta^6-\alpha^2\beta^4-\alpha^4\beta^2 = (\alpha^6-\alpha^2\beta^4)-(\alpha^4\beta^2-\beta^6) =$
$= \alpha^2(\alpha^4-\beta^4)-\beta^2(\alpha^4-\beta^4) = (\alpha^4-\beta^4)(\alpha^2-\beta^2) =$
$= [(\alpha^2)^2-(\beta^2)^2]\cdot(\alpha^2-\beta^2) = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2) =$
$= (\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)^2 = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$

ΑΣΚΗΣΗ

Να τραπούν σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $\psi^2+\alpha\psi+\beta\psi+\alpha\beta$ β) $6x^2+3\lambda^2x+8\lambda x+4\lambda^3$

γ) $44\alpha^4\beta+77\alpha^3\beta^3-20\alpha^2\beta^2-35\alpha\beta^4$ δ) $11\alpha^3+55\alpha^2+6\alpha+30$

ε) $\alpha^2x^2-2\alpha^2\psi+4\beta\psi-2\beta x^2$ στ) $\alpha^2\beta^2-1+\beta^2-\alpha^2$

ζ) $2\alpha x^2-3\alpha x-10x+15$ η) $\alpha x-\beta x+\beta\psi+\gamma\psi-\gamma x-\alpha\psi$

θ) $(\alpha+\beta)(\lambda+\mu)-\gamma\lambda-\gamma\mu$ ι) $\alpha^2x+\alpha\beta x+\alpha\beta\psi+\beta^2\psi-\alpha\gamma-\beta\gamma$

▲ 5η περίπτωση — άθροισμα ή διαφορά δύο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη (ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΠΗΛΙΚΑ)

Χρησιμοποιούμε τις ισότητες:

αν ν περιττός

$$\boxed{\begin{aligned} x^\nu-\alpha^\nu &= (x-\alpha)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\cdot\alpha+x^{\nu-3}\cdot\alpha^2+\ldots+x\cdot\alpha^{\nu-2}+\alpha^{\nu-1}) \\ x^\nu+\alpha^\nu &= (x+\alpha)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}\cdot\alpha+x^{\nu-3}\cdot\alpha^2-\ldots-x\cdot\alpha^{\nu-2}+\alpha^{\nu-1}) \end{aligned}}$$

Αν ν άρτιος, δηλ. $\nu=2k$ ($k\in\mathbb{N}$), τότε τη διαφορά δυνάμεων τη γράφουμε πρώτα σαν διαφορά τετραγώνων και μετά εργαζόμαστε με τις παραπάνω ισότητες, δηλαδή:

αν ν άρτιος

$$\boxed{x^\nu-\alpha^\nu = x^{2k}-\alpha^{2k} = (x^k)^2-(\alpha^k)^2 = (x^k-\alpha^k)\cdot(x^k+\alpha^k) = \ldots}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αθροισμα δυνάμεων με άρτιο εκθέτη **ΔΕΝ** μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων με τα αξιοσημείωτα πηλίκα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: Για $\nu=3$ παίρνουμε τις γνωστές ισότητες:

$$\boxed{\begin{aligned} x^3+\alpha^3 &= (x+\alpha)(x^2-x\cdot\alpha+\alpha^2) \\ x^3-\alpha^3 &= (x-\alpha)(x^2+x\cdot\alpha+\alpha^2) \end{aligned}}$$

(άθροισμα κύβων)

(διαφορά κύβων)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- $8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)\cdot\left[(2x)^2-2x\cdot3+3^2\right]=$
$=(2x+3)\cdot(4x^2-6x+9)$
- $27\alpha^3-125\beta^3=(3\alpha)^3-(5\beta)^3=(3\alpha-5\beta)(9\alpha^2+15\alpha\beta+25\beta^2)$
- $\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2)^2-(\beta^2)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
- $x^5+32=x^5+2^5=(x+2)(x^4-x^3\cdot2+x^2\cdot2^2-x\cdot2^3+2^4)=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

ΠΡΟΣΟΧΗ! 1) Μπορεί να βγαίνει πρώτα κοινός παράγοντας και μετά να εμφανίζεται κάποιο από τα "αξιοσημείωτα πηλίκα", 2) μπορεί πρώτα να έχουμε "αξιοσημείωτο πηλίκο" και μετά να εμφανίζεται κοινός παράγοντας.

ΑΣΚΗΣΗ: Να τραπούν σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

1. α) $8x^3\psi^3-125\alpha^3$ β) $27(\alpha+\beta)^3-1$ γ) $64x^3+729\alpha^6$

δ) $8(\alpha+\beta)^3+(\alpha-\beta)^3$ ε) $2x^3\psi^3-16\alpha^3$ στ) $\lambda x^4-\lambda$

ζ) $\alpha\beta^4-\alpha^4\beta$ η) $\omega^6+125\alpha^6$ θ) $32\alpha^5+1$

ι) $2\alpha^5-64\beta^5$ ια) $2x^4-32\psi^4$ ιβ) $64\alpha^6-729$

ιγ) $16\alpha x^4-81(x-\psi)^4\alpha$ ιδ) $40\alpha^4x^4-5\alpha x$ ιε) $3(x+\psi)^3+81(x-\psi)^3$

2. α) $x^3+\psi^3+x^2-\psi^2$ β) $x^2-2x\psi+\psi^2+x^3-\psi^3$ γ) $x^3-\psi^3-3\alpha x+3\alpha\psi$

δ) $x\psi(x+\psi)+\omega^2(x+\psi)-x^3-\psi^3$

ε) $x^3-x\psi(x-\psi)-\psi^3$ στ) $\alpha(x^4-1)+\beta x(x^2-1)$

ζ) $(x^3-\psi^3)-(x^2-\psi^2)-(x-\psi)^2$ η) $\alpha^3+\beta^3-\alpha-\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2$

▲ $6^{η}$ περίπτωση τριώνυμο β' βαθμού $αx^2+βx+γ$ (με $α\neq 0$)

- Διακρίνουσα του τριωνύμου λέγεται ο αριθμός $Δ=β^2-4αγ$.

-

Διακρίνουσα	Είδος - πλήθος ριζών	Μετατροπή σε γινόμενο
$Δ>0$	δύο άνισες ρίζες $ρ_{1,2}=\frac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α}$	$αx^2+βx+γ=α(x-ρ_1)(x-ρ_2)$
$Δ=0$	μία ρίζα (διπλή) $ρ=\frac{-β}{2α}$	$αx^2+βx+γ=α(x-ρ)^2$
$Δ<0$	δεν έχει ρίζες (στο $\mathbb{R}$)	δεν γίνεται γινόμενο

Στην περίπτωση που $Δ>0$ έχουμε:

1) Αν $Δ=k^2$ (δηλ. τέλειο τετράγωνο), οι ρίζες του τριωνύμου είναι ρητές.

2) Αν $Δ\neq k^2$, οι ρίζες του τριωνύμου είναι άρρητες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε : 1) τους συντελεστές $α,β,γ$, 2) τη διακρίνουσα $Δ$, 3) το είδος των ριζών, 4) τις ρίζες (αν υπάρχουν) των παρακάτω τριωνύμων:

α) x^2-5x+6 β) $9+x^2-10x$ γ) $6x^2+x-12$

δ) $10-x-3x^2$ ε) $4x^2-20x+25$ στ) $3x-2+x^2$

ζ) x^2+3 η) $-x^2+3x$ θ) $-5x+2x^2+2$

ι) $-x^2+11x-24$ ια) $x^2-10x+25$ ιβ) $-9x^2+6x-1$

2. Να τραπούν (όπου είναι δυνατό) σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

α) $2x^2-7x-13$ β) $6x^2+5x+1$ γ) $-x^2+5x-6$

δ) $x^2-9x+20$ ε) $-x^2+10x-21$ στ) $-x+5+x^2$

ζ) $-3x^2-4x+2$ η) $2x^2-4x+5$ θ) $-x^2+9x-14$

ι) $4x^2-12x+9$ ια) $-x^2+14x-49$ ιβ) $x^2-7xψ+12ψ^2$

ιγ) $x^2-11xψ+24ψ^2$ ιδ) $(x-2)^2-4(x-2)+3$ ιε) x^4-x^2-12

ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ (§3.4)

● Για να βρούμε τους παράγοντες της μορφής $x-\alpha$ $(\alpha \in Z^*)$ ενός πολυωνύμου $P(x)$ που έχει ακέραιους συντελεστές και συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του τη μονάδα, εργαζόμαστε όπως στο παρακάτω παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$.

Σταθερός όρος του $P(x)$ είναι ο -6. Διαιρέτες του -6 είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Διαπιστώνουμε (με δοκιμή) ότι $P(-1) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το $P(x)$ διαιρείται με $x+1$. Εκτελώντας τη διαίρεση $P(x):(x+1)$ βρίσκουμε πηλίκο $\Pi(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$. Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι για το $\Pi(x)$ είναι $\Pi(2) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το $\Pi(x)$ διαιρείται με $x-2$. Εκτελώντας τη διαίρεση $\Pi(x):(x-2)$ βρίσκουμε πηλίκο x^2+3. Άρα, καταλήξαμε:

$$x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = (x+1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6) = (x+1)(x-2)(x^2+3).$$

● Αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ακέραιος διάφορος της μονάδας, εργαζόμαστε όπως στο παρακάτω παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να αναλυθεί σε γινόμενο το $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1$.

Σταθερός όρος του $P(x)$ είναι ο -1. Διαιρέτες του -1 είναι οι ± 1. Συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου ο 2. Διαιρέτες του 2 οι $\pm 1, \pm 2$. Πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ οι ± 1, πιθανές κλασματικές ρίζες οι $\pm \frac{1}{2}$. Διαπιστώνουμε (με δοκιμή) ότι $P(-1) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το $P(x)$ διαιρείται με $x+1$. Εκτελώντας τη διαίρεση $P(x):(x+1)$ βρίσκουμε πηλίκο $\Pi(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$. Όμοια, για το $\Pi(x)$ διαπιστώνουμε ότι $\Pi(\frac{1}{2}) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το $\Pi(x)$ διαιρείται με $x - \frac{1}{2}$. Εκτελώντας τη διαίρεση $\Pi(x):(x-\frac{1}{2})$ βρίσκουμε πηλίκο $2x^2 + 2x + 2$. Έτσι, τελικά έχουμε:

$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x+1)(2x^3 + x^2 + x - 1) = (x+1)(x-\tfrac{1}{2})(2x^2+2x+2) =$$
$$= (x+1)\cdot(x-\tfrac{1}{2})\cdot 2\cdot(x^2+x+1) = (x+1)(2x-1)(x^2+x+1).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να γίνουν γινόμενα (πρώτων) παραγόντων τα πολυώνυμα:

1. $x^3 - 7x - 6$	**2.** $x^3 - x^2 - 21x + 45$	**3.** $x^3 - 3x^2 + 4$
4. $x^3 + x^2 - 5x - 3$	**5.** $x^3 + 4x^2 + x - 6$	**6.** $x^3 + 2x^2 - 7x + 4$
7. $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$	**8.** $x^4 + x^2 - 2$	**9.** $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$
10. $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$	**11.** $6x^3 - 13x^2 + x + 2$	**12.** $2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

(ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ)

Α. ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Αν $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, να γίνει η διαίρεση:

$$[\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - \varphi(x)] : (x-2)$$

2. Αν $\varphi(x) = x^2 + 5x - 6$, να γίνει η διαίρεση:

$$[\varphi(x-2)\cdot\varphi(x+2) - \varphi(x) - 10] : (x^2 - x - 2)$$

3. Αν $\varphi(x) = x^3 - \lambda x + 1$, να βρείτε για ποιές τιμές του λ $(\lambda \in \mathbb{R})$ το πολυώνυμο $f(x) = \varphi(x+1) + 2\cdot\varphi(x-2) - \varphi(x)$ διαιρείται με το $x-1$.

4. Να βρεθεί ο λ ώστε το υπόλοιπο στη διαίρεση

$$[x^3 - (\lambda+3)x^2 + (\lambda+1)x + 3] : (2x+1)$$

να είναι 2.

5. Να γίνουν οι πράξεις: α) $2(x-\psi)^2 - 3(-x-\psi)(\psi-x) - (-x-\psi)^2$

β) $3(x-\psi)^2(x+\psi) - 2(x+\psi)^2(-x+\psi) - (-x-\psi)^3$ γ) $(5x^2 - 3x^5 + 1) : (x^2 - 2)$

Β. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1. Να τραπούν σε γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

α) $x^2 + 2x + 1 + 3\mu x^2 - 3\mu$ β) $x^2 - 10x\psi - 9\omega^2 + 25\psi^2$

γ) $(4x-3)(x+1)^2 - 16(4x-3)$ δ) $(x^2-9)^2 - (x+5)(x-3)^2$

ε) $9x^2 - 1 - 4\psi^2 + 4\psi$ στ) $25\alpha^4\beta^4 + \gamma^4 - 11\alpha^2\beta^2\gamma^2$

2. Ομοια οι παραστάσεις:

α) $\alpha^4 - 18\alpha^2 + 81$ β) $(3x^2-2)^2 + 32(3x^2-2) + 256$

γ) $2\alpha x^2 - 4\alpha^2 x - 6\alpha^3$ δ) $x^4 - 17x^2 + 16$

ε) $(x+1)^2 + 3\alpha^2(x+1) + 2\alpha^4$ στ) $x^6 - 9x^3 + 8$

3. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $4x^5 - 128\psi^5$ β) $40(x-\psi)^4 - 5(x-\psi)$

γ) $x^7 + 27x^4 - x^3 - 27$ δ) $(x-\psi)^6 - (\psi-x)^3$

ε) $32\alpha^4\beta - 162\beta^5$ στ) $2(\alpha-\beta)^3 - 16(\alpha+\beta)^3$

Γ. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (επανάληψη)

Να αναλυθούν σε γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

1) $(x-\psi)(\alpha-2)-(\psi-x)(\beta+3)-\gamma x+\gamma\psi$ 2) $5(x+\psi)^2-20(2x-\psi)^2$

3) $(\alpha+1)(2-\alpha)+(\alpha-2)^2+(\alpha^2-4)$ 4) $\frac{1}{4}\mu^2+\frac{1}{9}\nu^2+\frac{1}{3}\mu\nu$

5) $1000\omega^3-1$ 6) $4x\psi(x-\psi)-6x(\psi-x)^2+2x(x^2-\psi^2)$

7) $x+x^3-2x^2$ 8) $x^3-2x^2-9x+18$ 9) $x^7+8x^4-x^3-8$

10) $4x^4-13x^2+1$ 11) $25x^4+\psi^4-11x^2\psi^2$ 12) $x^{4\nu}-\psi^{4\nu}$

13) $4\mu^2+4\mu+1-4\nu^2+4\nu-1$ 14) $12x^2-x-6$

15) $x^2+(2\alpha+1)x+\alpha^2+\alpha$ 16) $\alpha^2\beta^2\psi^4-(\alpha^4+\beta^4)\psi^2+\alpha^2\beta^2$

17) $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$ 18) $\psi^5+2\psi^4+\psi^3-\psi^2-2\psi-1$

19) $x^{3\mu}-3x^{2\mu}+3x^{\mu}-1$ 20) $\alpha^{2\mu+3\nu}-\alpha^{2\mu}-\alpha^{3\nu}+1$

Δ. ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

Να επαληθευτούν οι παρακάτω ταυτότητες:

1) $(\alpha x+\beta\psi)^2+(\alpha\psi-\beta x)^2+\gamma^2(x^2+\psi^2)=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+\psi^2)$

2) $x^4-\psi^4-(x-\psi)^3(x+\psi)=2x\psi(x^2-\psi^2)$

3) $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\gamma+\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

4) $(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta+\gamma)^2=2[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]$

5) $(\alpha+\beta)^3+2(\alpha^3+\beta^3)=3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

6) $(\alpha x+\mu\beta\psi)^2-\mu(\alpha\psi+\beta x)^2=(\alpha^2-\mu\beta^2)(x^2-\mu\psi^2)$

7) $\alpha^2(\gamma-\beta)+\beta^2(\alpha-\gamma)+\gamma^2(\beta-\alpha)=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

8) $(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ (§ 3.5)

▲ Σε ορισμένες περιπτώσεις, με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης, μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις β' ή ανώτερου βαθμού. Εργαζόμαστε ως εξής: **α)** αν υπάρχουν όροι στο 2ο μέλος τους μεταφέρουμε στο 1ο μέλος, ώστε το 2ο μέλος να γίνει 0, **β)** με παραγοντοποίηση τρέπουμε το 1ο μέλος σε γινόμενο (πρώτων) παραγόντων, **γ)** μηδενίζοντας καθέναν παράγοντα χωριστά, βρίσκουμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης (εφαρμογή της: $A \cdot B \cdot \Gamma \cdots P = 0 \Leftrightarrow A=0 \vee B=0 \vee \Gamma=0 \vee \ldots \vee P=0$).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: **i)** αν κάποιος από τους παράγοντες δεν μπορεί να γίνει 0 για καμιά (πραγματική) τιμή του άγνωστου, τότε από αυτόν δεν παίρνουμε καμιά ρίζα, **ii)** αν, αφού μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος, παρατηρήσουμε ότι καμιά περίπτωση παραγοντοποίησης δεν εφαρμόζεται, εκτελούμε τις πράξεις που είναι σημειωμένες και τις αναγωγές όμοιων όρων και εξετάζουμε τη νέα εξίσωση που προκύπτει, **iii)** για να γίνει ένα άθροισμα τετραγώνων 0, θα πρέπει οι προσθετέοι του να γίνονται συγχρόνως 0 (εφαρμογή της: $A^2+B^2=0 \Leftrightarrow A=0 \wedge B=0$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(2x+1)(x-2)(x+3)=0$ β) $(3x-1)(x+2)(x^2+1)=0$

γ) $(x-1)(x+1)^2(1-3x)=0$ δ) $(2x-1)^3(2x^2+1)(1-x)^4=0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5x^3-20x=0$ β) $x^2+7x=-10$ γ) $x^3=x^2+6x$

δ) $3x^3-x=-2x^2$ ε) $(3x-1)(x-2)^2=9(3x-1)$

στ) $x(x-6)(x+4)=-9x-36$ ζ) $x^3-x^2-x+1=0$ η) $x^3-5x^2=10-2x$

3. Ομοια, οι εξισώσεις:

α) $(3x+4)(4x-1)-(7x-2)(x+1)=(5x-3)(x+3)+1$

β) $(5x-2)^2-2(4x-3)^2=(7x+2)(1-x)+14$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2+5=0$ β) $(3x-9)^2+(2x-6)^2=0$ γ) $(x+1)^2+(x^2-1)^2=0$

δ) $(x-2)^2+(x^2-5x+6)^2=0$ ε) $(x^2+7x+10)^2+(x^2-5x+6)^2=0$

5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $(2x+3)(x^2-1)=(x+1)(x^2-1)$ β) $5(\psi^2-2\psi+1)=4(\psi^2-1)$

γ) $(x^2-4)^2-(x+2)^2(5x-4)=0$ δ) $(x-3)(2x+1)^2-(x^2-9)(x+3)=0$

ε) $3(\psi-1)^2-2(\psi-1)(\psi+1)=(\psi+1)^2$ στ) $5x-45x^3=0$

ζ) $(3\omega+1)^2-(\omega\sqrt{2}-1)^2=7(\omega-3)(\omega-\sqrt{2})$ η) $(x-2\beta)^2=(x+2\alpha)^2$

Μ.Κ.Δ. ΚΑΙ Ε.Κ.Π. ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ (§ 3.6)

▲ Για να βρούμε τον Μ.Κ.Δ. πολυωνύμων, εργαζόμαστε ως εξής:

i) αναλύουμε όλα τα πολυώνυμα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων,

ii) σχηματίζουμε το γινόμενο <u>των κοινών μόνο</u> παραγόντων (με τον <u>μικρότερο</u> εκθέτη του τον καθένα).

Συντελεστή του Μ.Κ.Δ. θα παίρνουμε τον Μ.Κ.Δ. των συντελεστών των πολυωνύμων.

▲ Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. πολυωνύμων, εργαζόμαστε ως εξής:

i) αναλύουμε όλα τα πολυώνυμα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων,

ii) σχηματίζουμε το γινόμενο <u>των κοινών και μή κοινών</u> παραγόντων (με τον <u>μεγαλύτερο</u> εκθέτη του τον καθένα).

Συντελεστή του Ε.Κ.Π. θα παίρνουμε το Ε.Κ.Π. των συντελεστών των πολυωνύμων.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των:

1) $45\alpha^4\beta x^2\psi^5$, $-15\alpha^3\beta^2x^4\psi^2$, $5\alpha^2\beta^4x^2\psi^3\omega$

2) $3(x+1)(x-2)^2$, $6(x-2)(x+2)^3$, $12(x-2)^3$

3) $(x-1)^2(x+2)^2$, $5x(x-1)^3(x+2)^3$, $(x^2+3x+2)^2(x-1)^2$

4) x^2-1 , x^2-3x+2 , $2x^2-2x^3$, $2x^2-4x+2$

5) $(x^2-1)^2(x+3)$, $(x^2+3x)(x+1)^2$, $(x^2+6x+9)(x-1)^2$

6) $x^4\psi^2-x^2\psi^4$, $x^4\psi^3+x^3\psi^4$, $x^4\psi^2+2x^3\psi^3+x^2\psi^4$

7) x^2-4x+4 , x^2+x-6 , $(x^2+6x+9)(x-2)^2$

8) x^2-5x+6 , $3x^2-12$, $2x^3-16$, $2x-4$

9) $x^6-\psi^6$, $3x^4\psi-3x\psi^4$, $(x^2-\psi^2)^2(x-\psi)$

10) $2x^2+12x+18$, x^3+27 , $3x^2+12x+9$, $3x+9$

ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ · ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ (§3.7-§3.8)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το σύνολο ορισμού των παρακάτω κλασμάτων:

α) $\dfrac{5}{2x-6}$ β) $\dfrac{7x+1}{3x^2-12}$ γ) $\dfrac{2x^2+3}{x^2-4x+4}$

δ) $\dfrac{-3}{x^3-9x}$ ε) $\dfrac{3x-1}{3x^3-21x^2+30x}$ στ) $\dfrac{-1}{(x^2-4)(x+1)+(2-x)(x^2-1)}$

2. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

α) $\dfrac{x^2-(2x-3)^2}{x^2-1}$ β) $\dfrac{(x^2-4)^2-(x+2)^2}{x^2-4x+3}$ γ) $\dfrac{(\alpha\beta-1)^2-(\alpha+1)^2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$

δ) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}$ ε) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3+\beta^3-2\alpha\beta(\alpha+\beta)}$ στ) $\dfrac{1+x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$

ζ) $\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-x^2}{x^2-2(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)^2}$ η) $\dfrac{(x^2-1)^2-9(x+1)^2}{(x^2+6x+5)^2}$ θ) $\dfrac{(x^2-9)^2-(x+5)(x-3)^2}{(x^2+x-12)^2}$

ι) $\dfrac{(x+2)(2x+1)^2-16(x+2)}{(2x+5)(7-x)+4x^2-25}$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{1-\alpha}{\alpha-2}-\dfrac{\alpha-3}{\alpha+2}-\dfrac{4}{4-\alpha^2}$ β) $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^3+\beta^3}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}-\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^3-\beta^3}$

γ) $\dfrac{13\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\dfrac{2\alpha-5\beta}{\alpha+\beta}-\dfrac{15\alpha+4\beta}{\beta-\alpha}$ δ) $\dfrac{17\alpha^2-1}{18\alpha-9}-\dfrac{5+14\alpha^2}{12\alpha-6}+\dfrac{3\alpha^2+1}{3-6\alpha}$

ε) $\dfrac{1-2x}{1+2x}+\dfrac{1+2x}{1-2x}-\dfrac{1-2x^2}{4x^2-1}$ στ) $\dfrac{1-x}{x-3}+\dfrac{x-2}{x+4}-\dfrac{1}{x^2+x-12}$

ζ) $\dfrac{1}{\psi+\psi^2}+\dfrac{1}{\psi^2+3\psi+2}+\dfrac{1}{\psi^2+5\psi+6}+\dfrac{2}{\psi(\psi+3)}$

η) $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}+\dfrac{12-4x}{x^2-6x+9}$ θ) $7+\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}-\dfrac{3\beta}{\alpha-\beta}$

ι) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-x-2}+\dfrac{2}{x^2-1}$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

✓ α) $\dfrac{3x+2}{5x^2}\cdot\dfrac{2x}{9x^2-4}\cdot\dfrac{3x-2}{4}$ ✓ β) $\left(1-x-\dfrac{2-x^2}{1+x}\right)\cdot(1-x^2)$

γ) $\left(\dfrac{x+\psi}{x-\psi}-\dfrac{x-\psi}{x+\psi}-\dfrac{4x^2}{x^2-\psi^2}\right)\cdot\dfrac{x^2-2x\psi+\psi^2}{4x\psi}$

δ) $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right):\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}$ ε) $(\alpha^2-1)\cdot\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}-1\right)$

στ) $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right)-\dfrac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\cdot\left(\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\beta}\right)$

ζ) $\dfrac{x^3+\psi^3}{x^4-\psi^4}\cdot\dfrac{x^2\psi+\psi^3}{x^4+x^2\psi^2+\psi^4}\cdot\dfrac{x^2+x\psi+\psi^2}{x+\psi}$

η) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}:\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

✓ θ) $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}\right)$

ι) $(x+2)\cdot\left(1+\dfrac{6x+12}{x^2-x-6}\right)\cdot\left(1-\dfrac{5x+5}{x^2+3x+2}\right)$

5. Να εκτελεσθούν οι πράξεις:

α) $\left(\dfrac{3x-2}{x-3}-\dfrac{19x-1}{x^2+2x-15}-\dfrac{2x}{x+5}\right):\dfrac{4x+12}{6x+30}$

✓ β) $\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-x^2}+\dfrac{3}{\alpha+x}-\dfrac{1}{\alpha-x}\right):\left(\dfrac{\alpha^2+x^2}{\alpha x^2}+\dfrac{2}{x}\right)$

γ) $\left(\alpha-\dfrac{4\psi^2}{\alpha}\right)\cdot\left(\beta-\dfrac{4x^2}{\beta}\right):\left(1+\dfrac{2x}{\beta}+\dfrac{2\psi}{\alpha}+\dfrac{4x\psi}{\alpha\beta}\right)$

δ) $\left[\dfrac{x-\psi}{x}+\dfrac{x+\psi}{\psi}+\dfrac{(x-\psi)^2}{x}-\dfrac{(x+\psi)^2}{\psi}\right]:(x^4-\psi^4)$

6. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

α) $\dfrac{\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma+\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha+\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

β) $\dfrac{\beta\gamma(\alpha+\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma\alpha(\beta+\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha\beta(\gamma+\delta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

γ) $\dfrac{(x+\beta)(x+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(x+\gamma)(x+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

δ) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(x-\beta)^2}{\beta(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{(x-\gamma)^2}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Να απλοποιηθούν τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα:

1. $\dfrac{\dfrac{\alpha^2-4x^2}{\alpha^2+4\alpha x}}{\dfrac{\alpha^2-2\alpha x}{\alpha x+4x^2}}$

2. $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{x+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$

3. $\dfrac{\dfrac{\alpha+x}{2\alpha}-\dfrac{2x}{\alpha+x}}{\dfrac{\alpha+x}{2x}-\dfrac{2\alpha}{\alpha+x}}$

4. $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}}$

5. $\dfrac{\dfrac{\beta^2+\alpha}{\beta^2}-\dfrac{\alpha^2+\beta}{\alpha^2}}{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{2}{\alpha\beta}}$

6. $\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}+2-\dfrac{(\alpha-x)^2}{\alpha x}}{4\alpha x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\alpha}\right)}$

7. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\beta^2}}}$

8. $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha^2-1}}{1-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}}$

9. $\dfrac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

10. $\dfrac{\dfrac{x^3-\psi^3}{x^2+\psi^2}\cdot\dfrac{x^2-\psi^2}{x^3+\psi^3}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\psi^2}\right)}{\dfrac{(x+\psi)^2-x\psi}{(x-\psi)^2+x\psi}\cdot\left(\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{x}\right)}$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΡΗΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ (§ 3.9)

- Για να έχει νόημα η εξίσωση, πρέπει το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών να είναι $\neq 0$.
  Πρέπει να απορρίπτουμε από τις ρίζες που βρίσκουμε εκείνες που μηδενίζουν τους παρονομαστές της αρχικής εξίσωσης.

Να λυθούν οι παρακάτω (κλασματικές) εξισώσεις:

1. $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{4}{5x-15} = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$ **2.** $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{x^2+2}{2x+4} + \dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{1}{2}$

3. $\dfrac{2x-3}{x-3} - \dfrac{2(x+1)}{x+2} = \dfrac{15}{x^2-x-6}$ **4.** $\dfrac{13}{x+1} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{5x-3}{x^2-1}$

5. $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2+2x} = \dfrac{2x-1}{x(x+2)}$ **6.** $\dfrac{2}{x(x+2)} = \dfrac{-1}{x^2+5x+6}$

7. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{4}{x+1}\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}+1\right)$ **8.** $\dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2}{x^2+x}$

9. $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{2x^2+4}{x^2-4}$ **10.** $\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{7}{x+3} = \dfrac{37}{x^2+5x+6}$

11. $\dfrac{1}{3x-1} + \dfrac{2(x+1)}{x-1} - \dfrac{3x^2+1}{3x^2-4x+1} = 1$ **12.** $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1-\dfrac{x+1}{x-3}}} = 4$

13. $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x} - 1} = \dfrac{3}{14-x}$ **14.** $\dfrac{2x+3\beta}{x(x-\alpha)} + \dfrac{3x-5\alpha}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \dfrac{5}{x-\beta}$

15. $\dfrac{x+\alpha+\beta}{x+\alpha} = \dfrac{x+\alpha-\beta}{x-\alpha} - \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-\alpha^2}$

16. $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{1-\dfrac{1}{1+x}} + \dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{x}{1-x}} + \dfrac{\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{x}{1+x}} + \dfrac{3}{2x} = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ

1. Να αναλυθούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

1) $(2x+1)(3x-2)-(x-4)(2x+1)-3(2x+1)^2$
2) $(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\alpha)(\alpha-\beta+\gamma)$
3) $4(2x-1)^2-25(x+2)^2$
4) $3(2x-\psi)^2-300(x+2\psi)^2$
5) $(\alpha+1)(2-\alpha)+(\alpha-2)^2+\alpha^2-4$
6) $\alpha^2-\beta^2-(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)$
7) $49x^2\omega-28x\psi\omega+4\psi^2\omega$
8) $27x^3\psi-\alpha^3\beta^3\psi$
9) $8(\alpha+\beta)^3+27(\alpha-\beta)^3$
10) $\alpha^{2\mu+3\nu}-\alpha^{2\mu}-\alpha^{3\nu}+1$
11) $4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2-9\alpha^2\beta^2$
12) $4\mu^2+4\mu+1-4\nu^2-4\nu-1$
13) $4x^4-13x^2+3$
14) $16\alpha^4-17\alpha^2+1$
15) $x^4+\psi^4-11x^2\psi^2$
16) $x^7+8x^4-x^3-8$
17) $16x^5-4x$
18) x^3-2x^2-5x+6
19) $3x^3-16x^2+3x+10$
20) $2x^3-15x^2+6x+7$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $(3x-1)(x+1)^2(1-2x)=0$
2) $(x-1)^2(x^2+2)(x+1)^3=0$
3) $7x^3=63x$
4) $(2x+3)(x-1)^2=16(2x+3)$
5) $(x+3)^2+(x^2-9)^2=0$
6) $(x-1)^2+(x^2-4x+3)^2=0$
7) $x^3=5x^2-6x$
8) $2x^4+x^3+x^2+x-1=0$

3. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=3x^3+x^2-12x-\lambda$. Να βρείτε το λ άν ξέρετε ότι το $f(x)$ διαιρείται με το $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την $f(x)=0$.

4. Να βρεθεί ο λ ώστε το πολυώνυμο $\Phi(x)=x^4+(\lambda-1)x^3-(3\lambda-5)x-\lambda+1$ να διαιρείται με $x+1$. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $\Phi(x)=0$.

5. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x)=4x^3-8x^2-3x+9$ διαιρείται με $x+1$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΚΛΑΣΜΑΤΑ- ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να απλοποιηθούν τα παρακάτω κλάσματα:

1) $\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x^3-x}$ 2) $\dfrac{x^8-1}{(x^4+1)(x^2-1)}$ 3) $\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+2\alpha\gamma}$

4) $\dfrac{\alpha\beta(x^2+\psi^2)+x\psi(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(x^2-\psi^2)+x\psi(\alpha^2-\beta^2)}$ 5) $\dfrac{7\alpha^3-2\alpha^2\beta-63\alpha\beta^2+18\beta^3}{5\alpha^4-3\alpha^3\beta-45\alpha^2\beta^2+27\alpha\beta^3}$

2. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

1) $\dfrac{3}{2+2x}-\dfrac{4}{3+3x}+\dfrac{5}{4-4x^2}$ 2) $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x^2-1}{(1-x)^2}+\dfrac{2x^2+x-1}{1-x^2}$

3) $\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}-\dfrac{x^2-\alpha^2}{x^2+\alpha x+\alpha^2}-\dfrac{6\alpha^2x}{x^3-\alpha^3}$ 4) $\dfrac{2}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{25-x^2}-\dfrac{1}{2x+10}$

5) $\dfrac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2-4\alpha\beta-21\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta-3\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}:\dfrac{1}{\alpha-7\beta}$

6) $\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}:\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ 7) $\left(\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}\right):\left[1-\dfrac{1+\alpha\beta}{\alpha(\beta-\alpha)}\right]$

8) $\left(\dfrac{2x}{x+\psi}-\dfrac{\psi}{x-\psi}+\dfrac{\psi^2}{x^2-\psi^2}\right):\left(\dfrac{1}{x+\psi}+\dfrac{x}{x^2-\psi^2}\right)$

3. Να απλοποιηθούν τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα:

1) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{1+\alpha}-\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}$ 2) $\dfrac{\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)}{\dfrac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}\right)}$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{3}{2x^2-3x}=\dfrac{5}{x}$ 2) $\dfrac{2+2x}{9x^2-4}+\dfrac{x-4}{4-9x^2}=\dfrac{x-2}{9x^2+12x+4}$

3) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2+2x}=\dfrac{2x-1}{x(x+2)}$ 4) $\dfrac{1-\dfrac{5}{x^2+1}}{1-\dfrac{x^2}{x^2+1}}=0$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (§ 6.1 - § 6.2 - § 6.3)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν η συνάρτηση φ έχει τύπο $\varphi(x) = -2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ και πεδίο ορισμού το $A = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2\}$ να βρείτε το φ(A) και να γράψετε τον πίνακα τιμών της και τη γραφική της παράσταση.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -3x + 1$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A, αν είναι $f(A) = \{-2, -\frac{1}{2}, 1, 7, 10\}$. Στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

3. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x) = -\frac{x}{2} + 2$. Ποιές οι "εικόνες" που αντιστοιχούν στα "αρχέτυπα" −1, 0, 2, 5; Σε ποιά "αρχέτυπα" αντιστοιχούν οι "εικόνες" −3, −1, 1, 2;

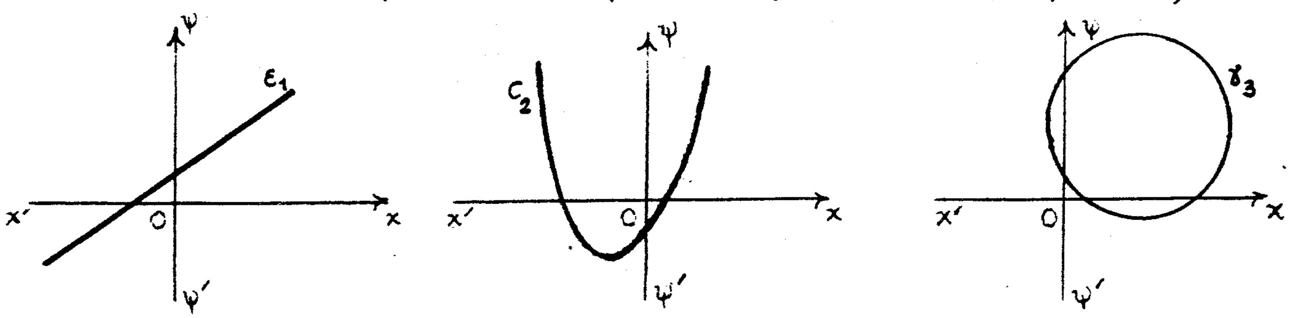
4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - x + 5$ και πεδίο ορισμού το $A = \{-1, 0, 1\}$. Να βρείτε το f(A). Τί παρατηρείτε;

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 8x$ και πεδίο ορισμού το $A = \{-3, 0, 3\}$. Να βρείτε το f(A). Τί παρατηρείτε;

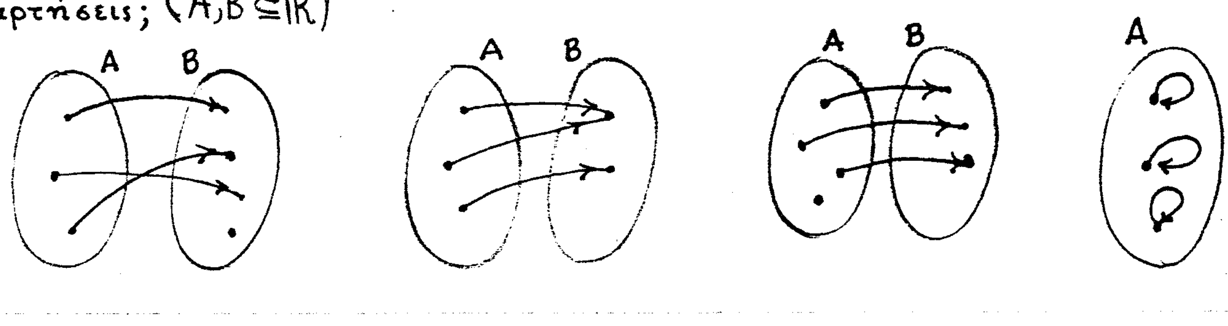
6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού σε καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\psi = -\frac{x+2}{3}, \quad \psi = \frac{x-2}{x^3 - 5x^2 + 6x}, \quad \psi = -\frac{x}{2} + \sqrt{2x-1}.$$

7. Ποιά από τα παρακάτω σχήματα παριστάνουν συναρτήσεις;



8. Ποιά από τα παρακάτω βελοειδή διαγράμματα παριστάνουν συναρτήσεις; $(A, B \subseteq \mathbb{R})$



ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ $\psi=\alpha x$ ΚΑΙ $\psi=\alpha x+\beta$

(§ 6.5 - § 6.6 - § 6.7)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $\psi=-\frac{1}{2}x$ β) $\psi=-x$ γ) $\psi=x$

δ) $\psi=-x+1$ ε) $2x-3\psi=0$ στ) $2x+3\psi=6$

ζ) $3x-4\psi=12$ η) $-\frac{1}{2}x=0$ θ) $2\psi=0$

ι) $3x=2$ ια) $-2\psi+4=0$ ιβ) $3x-7\psi=12$

2. Να βρεθεί ο α, ώστε η γραφική παράσταση της $(2\alpha-3)x+3\alpha\psi=7$ να διέρχεται από το σημείο $A(-2,4)$.

3. Να προσδιοριστεί η "παράμετρος" μ, ώστε οι εξισώσεις

$$(\mu+3)x-(\mu+1)\psi=2 \quad , \quad (\mu-2)x-(\mu+2)\psi=5$$

να παριστάνουν ευθείες παράλληλες.

4. Να προσδιοριστούν οι παράμετροι λ και μ, ώστε οι εξισώσεις

$$(\lambda+2)x+(\mu-2)\psi=3\lambda\mu \quad , \quad (\lambda-1)x+(\mu+1)\psi=2\lambda\mu$$

να παριστάνουν την ίδια ευθεία (είναι $\lambda\mu\neq 0$).

5. Να γίνει η γραφική παράσταση της $\psi=2(\lambda-3)x-2$, αν ξέρετε ότι διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

6. Η ευθεία $\psi=\alpha x+1$ διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$. Να βρείτε το α καθώς και τα σημεία στα οποία τέμνει τους δύο άξονες. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το β αν ξέρετε ότι το σημείο $A(3,\beta)$ ανήκει στην ευθεία.

7. Χωρίς να γίνει η γραφική παράσταση, να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών με εξισώσεις:

$$2x-3\psi=1 \quad , \quad -4x+\psi=-2 \quad , \quad -6x+9\psi=-3 \quad , \quad 4x-6\psi=2.$$

8. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις ευθείες που έχουν εξισώσεις:

$$1{,}5x+2\psi=6 \quad , \quad x=-2 \quad , \quad \psi=-1{,}5$$

και να βρείτε το είδος και τα μήκη των πλευρών του τριγώνου που σχηματίζουν οι τρεις αυτές ευθείες, τεμνόμενες ανά δύο.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

(§ 6.8 - §6.9 - § 6.10 - §6.11)

- Η συνάρτηση $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ($\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$) έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
- Η γραφική παράσταση της $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι μία συνεχής καμπύλη γραμμή, που λέγεται **παραβολή**, και έχει τα εξής γνωρίσματα:
  - **κορυφή** της είναι το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$,
  - έχει **άξονα συμμετρίας** την ευθεία $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, δηλαδή ευθεία κάθετη στον άξονα xx' που διέρχεται από την κορυφή της,
  - τέμνει τον άξονα $\psi\psi'$ στο σημείο $\Gamma(0,\gamma)$,
  - τον άξονα xx': i) τον τέμνει στα σημεία $A_1(x_1,0)$ και $A_2(x_2,0)$, όπου x_1, x_2 οι δύο πραγματικές άνισες ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, αν $\underline{\Delta>0}$.
    ii) εφάπτεται σ' αυτόν με σημείο επαφής την κορυφή της, αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει $\underline{\Delta=0}$.
    iii) δεν τον τέμνει σε κανένα σημείο, αν είναι $\underline{\Delta<0}$.
  - αν $\alpha>0$ "στρέφει τα κοίλα προς τα άνω", αν $\alpha<0$ "στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω".
- Για να σχεδιάσουμε την παραβολή, βρίσκουμε πρώτα την κορυφή της K και τα "χαρακτηριστικά" της σημεία (σημεία τομής με άξονες), αν υπάρχουν. Αν αυτά δεν επαρκούν, βρίσκουμε σημεία της με πίνακα τιμών.

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>: Οι συναρτήσεις $\psi=\alpha x^2$, $\psi=\alpha x^2+\gamma$, $\psi=\alpha(x+\rho)^2$ μπορεί να μελετηθούν σαν ειδικές περιπτώσεις της $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1) $\psi=2x^2$ 2) $\psi=-3x^2$ 3) $\psi=\frac{x^2}{2}$ 4) $\psi=-\frac{1}{3}x^2$

5) $\psi=3x^2+1$ 6) $\psi=-2x^2+3$ 7) $\psi=x^2-2$ 8) $\psi=-x^2+1$

9) $\psi=x^2-2x$ 10) $\psi=-2x^2+3x$ 11) $\psi=2x^2+4x+2$

12) $\psi=x^2-4x+3$ 13) $\psi=-x^2+x+2$ 14) $\psi=-2x^2-6x-4$

· 15) $\psi=x^2+x+1$ · 16) $\psi=x^2+3x+4$ · 17) $\psi=-x^2+2x-3$

2. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $\psi = \alpha x^2$ αν γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο $(-1,2)$

β) $\psi = -\frac{x^2}{4} + \beta$ " " " " " $(2,1)$

γ) $\psi = \alpha(x-1)^2$ " " " " " $(3,8)$

δ) $\psi = \alpha x^2 + \alpha x - 3$ " " " " " $(1,3)$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$
(§ 6.12)

• Υπάρχουν δύο τρόποι για να επιλύσουμε γραφικά μιά εξίσωση β' βαθμού:

1ος τρόπος:
- αν υπάρχουν όροι στο β' μέλος, τους μεταφέρουμε στο α' μέλος, ώστε η εξίσωση να πάρει τη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$,
- θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και κάνουμε τη γραφική της παράσταση (παραβολή),
- ρίζες (λύσεις) της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων στα οποία η παραβολή τέμνει τον άξονα xx'.

2ος τρόπος:
- γράφουμε την εξίσωση με τη μορφή $\alpha x^2=-\beta x-\gamma$,
- θεωρούμε τις συναρτήσεις $\psi=\alpha x^2$ και $\psi=-\beta x-\gamma$ και κάνουμε τις γραφικές τους παραστάσεις (παραβολή και ευθεία, αντίστοιχα),
- ρίζες (λύσεις) της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της παραβολής $\psi=\alpha x^2$ και της ευθείας $\psi=-\beta x-\gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθούν γραφικά οι εξισώσεις:

1) $2x^2-8=0$	2) $x^2+2x-3=0$	3) $x^2-3x=0$
4) $x^2-6x+9=0$	5) $-2x^2+3x-4=0$	6) $-2x^2+8x=-10$
7) $x^2+4=4x$	8) $x^2-x-2=0$	9) $2x^2-12x=-14$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

- Η γενική μορφή ενός συστήματος δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού είναι:

$$\alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \quad (1)$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 \psi = \gamma_2 \quad (2)$$

- <u>Γραφική μέθοδος επίλυσης</u>: Οι (1) και (2) είναι εξισώσεις ευθειών. Αν ε_1 και ε_2 οι ευθείες με εξισώσεις (1) και (2) αντίστοιχα, τότε:
  i) αν οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε ένα σημείο, οι συντεταγμένες του σημείου τομής δίνουν τη μοναδική λύση του συστήματος $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)$,
  ii) αν $\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2$, το σύστημα είναι αδύνατο, δηλ. δεν έχει λύση $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)$
  iii) αν οι ε_1 και ε_2 συμπίπτουν, το σύστημα είναι αόριστο, δηλ. έχει άπειρες λύσεις $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Να επιλυθούν γραφικά τα συστήματα:

1) $x+\psi=3$, $2x+2\psi-6=0$
2) $x+\psi=4$, $x=3$
3) $2x-\psi=4$, $\psi=2$
4) $2x+\psi=5$, $x-\psi=1$
5) $2x-\psi=4$, $4x-2\psi=7$
6) $x=-2$, $\psi=1$
7) $x+\psi=2$, $\psi=0$
8) $2x-\psi=1$, $x=0$

- <u>Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης</u>: i) μέθοδος αντικατάστασης, ii) μέθοδος σύγκρισης, iii) μέθοδος αντίθετων συντελεστών.

<u>ΑΣΚΗΣΗ:</u> Να επιλυθούν με μιά από τις αριθμητικές μεθόδους τα συστήματα:

1) $\frac{x}{3}-\frac{\psi}{2}=1$, $2x-5\psi=-2$

2) $\frac{4x-\psi}{6}=1-\frac{x}{4}$, $x+\psi=7$

3) $\frac{3x-\psi+2}{2}=\frac{x+2\psi}{5}$, $\frac{x-2\psi-3}{3}=\frac{2x-\psi}{2}$

4) $\frac{x+3\psi}{5}-\frac{2x-\psi}{4}=2\psi+\frac{1}{4}$, $\frac{2x+5\psi}{4}+\frac{x-\psi}{3}=x-3$

5) $\frac{x-2\psi+8}{3}+\frac{x+\psi-6}{2}=\frac{x+4}{3}$, $x-3\psi=\frac{3x}{4}-5$

6) $\frac{2}{4x+\psi-5}=\frac{1}{x+2\psi+10}$, $\frac{3}{4x+\psi-5}+\frac{5}{x+2\psi+10}=-\frac{13}{8}$

7) $\frac{11}{2x-3\psi}+\frac{18}{3x-2\psi}=13$, $\frac{27}{3x-2\psi}-\frac{2}{2x-3\psi}=1$

8) $(x+1)(\psi+2)=(x-1)(\psi+3)+5$
$(2x+1)(\psi-1)=(x+3)(2\psi-3)+2$

9) $\frac{x+\psi}{5}=\frac{x-\psi}{3}$
$\frac{x+\psi}{2}-\frac{x-\psi}{3}=\frac{\psi+2}{2}$

10) $\frac{(x+3)^2+(\psi-8)^2}{x^2+\psi^2+39}=1$
$\frac{2x+3\psi+8}{5x+4\psi-1}=\frac{3}{4}$

11) $0{,}3x-0{,}2\psi=0{,}01$
$1{,}2x-0{,}6\psi=0{,}6$

13) $2[x-(4-\psi)]+20=0$
$x+4\psi=0$

12) $\frac{3x-\psi}{2}+\frac{x+\psi}{5}=x+\frac{\psi+2}{3}+1$
$x-\frac{x+\psi}{2}-1=\psi-\frac{x+6}{3}$

14) $\frac{x}{0{,}2}+\frac{\psi}{0{,}5}=12{,}3$
$\frac{x}{0{,}6}+\frac{\psi}{0{,}2}=5{,}5$

15) $\frac{1}{x}+\frac{2}{\psi}=5$
$\frac{3}{x}-\frac{4}{\psi}=-5$

16) $x=5\alpha-\psi$
$\frac{x+\psi}{2}-\frac{x-\psi}{2}=\alpha$

17) $2x+\psi+z=4$
$x+2\psi+z=3$
$x+\psi+2z=5$

18) $-3x+2\psi+z=-5$
$x-4\psi-2z=-5$
$x+2\psi+3z=11$

19) $x+\frac{\psi}{2}+\frac{z}{4}=-1$
$3x+\psi+\frac{z}{2}=-3$
$2x+\frac{\psi}{2}+z=-5$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΙΑ Α΄ΒΑΘΜΙΑ ΚΑΙ ΜΙΑ Β΄ΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

1) $x-\psi=3$
$x^2-3x\psi=10$

2) $3x-\psi=1$
$\psi^2-8x^2+4=0$

3) $x-2\psi=1$
$x^2=\psi^2$

4) $x+\psi=1$
$x^2+5\psi=11$

5) $2x-\psi=2$
$x^2-\psi^2+7=0$

6) $x+2\psi=6$
$x^2-5x\psi+6\psi^2=2$

7) $3x-\psi=2$
$x^2+\psi^2=4$

8) $x+2\psi=-3$
$\psi^2=x+2$

9) $x+\psi=1$
$2x^2-3x\psi+\psi^2=15$

10) $x+3\psi=1$
$x^2-x\psi=1$

11) $-x+2\psi=0$
$x^2+x\psi+\psi^2=7$

12) $2x+3\psi=1$
$\psi^2+x=\frac{3}{2}$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

1. $$\begin{aligned} 3(x+\psi) &= 4(x-z)+18 \\ 2(x-\psi) &= 3(z-\psi) \\ 3\psi &= x-2z+12 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{z} &= 9 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{\psi}-\frac{1}{z} &= -5 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{\psi}+\frac{1}{z} &= 3 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \frac{2}{x}+\frac{3}{\psi}-\frac{1}{z} &= 1 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{\psi} &= 13 \\ \frac{1}{\psi}+\frac{2}{z}+4 &= 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \frac{1}{x}-\frac{1}{\psi} &= \frac{1}{12} \\ 4x-\psi &= 8 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{\psi}{4} &= 2\alpha \\ \frac{5x}{6}+\frac{3\psi}{8} &= 4\alpha \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 2x-5\psi &= 4\alpha+5\beta \\ \beta x+2\alpha\psi &= 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x+\psi &= 3(\alpha+\beta) \\ \alpha x-\beta\psi &= \alpha^2-\beta^2 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha}+\psi &= \alpha+\beta \\ x-\beta\psi &= \alpha^2-\beta^2 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 5x-\frac{3}{\psi} &= 5 \\ 7x+\frac{2}{\psi} &= 0{,}8 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} \frac{\psi}{\beta}+\frac{x}{\alpha} &= \frac{1}{\beta} \\ \frac{\psi}{\alpha}-\frac{x}{\beta} &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta} &= -\frac{\beta}{\alpha} \\ \frac{x}{2\alpha}+\frac{2\psi}{\beta} &= \frac{2\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x+\psi &= 4 \\ x^3+\psi^3 &= 28 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x-\psi &= 2 \\ x^3-\psi^3 &= 26 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x+\psi &= -2 \\ x^3+\psi^3 &= -26 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} x^3+8\psi^3 &= 56 \\ x+2\psi &= 2 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x^3+\psi^3 &= 2 \\ x^2-x\psi+\psi^2 &= 1 \end{aligned}$$

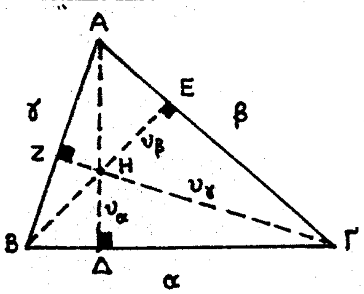
17. $$\begin{aligned} 27x^3-\psi^3 &= -19 \\ 9x^2+3x\psi+\psi^2 &= 19 \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8°

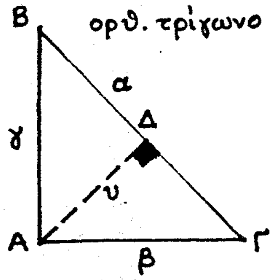
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Βασικοί τύποι από την ύλη της Β' Γυμνασίου:

• ΤΡΙΓΩΝΑ

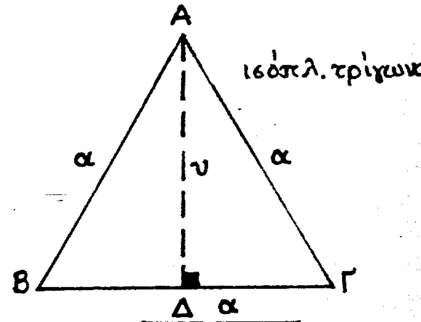


εμβαδό $E = \frac{α \cdot υ_α}{2} = \frac{β \cdot υ_β}{2} = \frac{γ \cdot υ_γ}{2}$



$E = \frac{β \cdot γ}{2} = \frac{α \cdot υ}{2}$

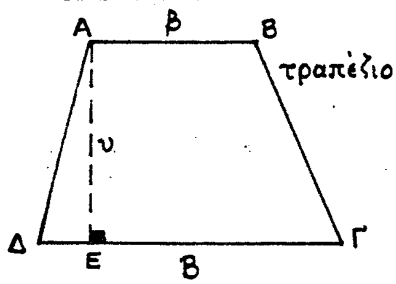
$\boxed{β \cdot γ = α \cdot υ}$



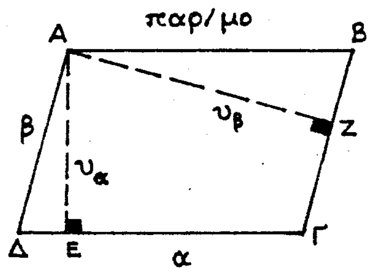
ύψος $\boxed{υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}}$

$\boxed{E = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}}$

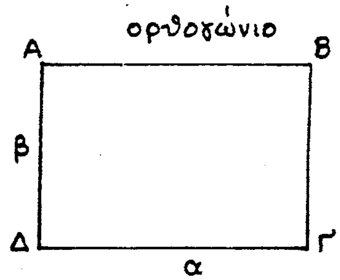
• ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ



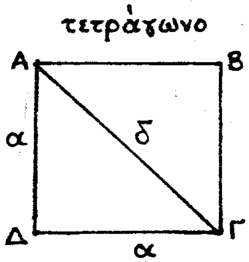
$E = \frac{(β + B)}{2} \cdot υ$



$E = α \cdot υ_α = β \cdot υ_β$

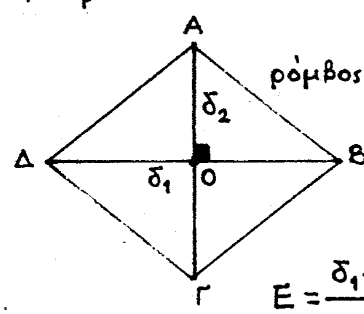


$E = α \cdot β$



$E = α^2$

$δ = α\sqrt{2}$



$E = \frac{δ_1 \cdot δ_2}{2}$

• ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

(εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R)

	ΠΛΕΥΡΑ	ΑΠΟΣΤΗΜΑ	ΕΜΒΑΔΟ
τρίγωνο	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$3 \cdot \frac{R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2}}{2}$
τετράγωνο	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$4 \cdot \frac{R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2}}{2}$
εξάγωνο	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$6 \cdot \frac{R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2}$

• ΚΥΚΛΟΣ

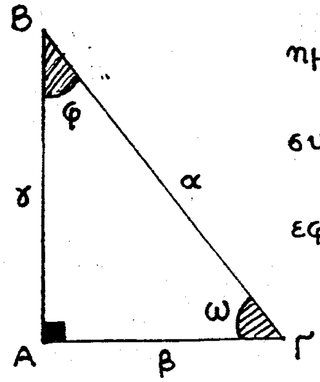
Μήκος κύκλου $Γ = 2πR$

Μήκος τόξου $τ = πR\frac{μ}{180}$

Εμβαδό κυκλ. δίσκου $E = πR^2$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ (επανάληψη)

- Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας



$$\eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\gamma}{\beta} \qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta}{\gamma}$$

- Σχέσεις μεταξύ ημω, συνω, εφω

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1} \qquad \boxed{\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega} \qquad \boxed{\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$$

- Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45°, 60°.

	30°	45°	60°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- ## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) όταν:
i) $\alpha = 14m$, $\hat{B} = 40^\circ$ ii) $\gamma = 10m$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ iii) $\alpha = 21m$, $\gamma = 15m$
iv) $\beta = 10m$, $\gamma = 14m$ v) $\alpha = 20m$, $\hat{\Gamma} = 50^\circ$ vi) $\alpha = 10m$, $\eta\mu B = 0{,}6428$

2. Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{10}{13}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{7}{13}$;

3. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\alpha = 3\beta$. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας Β.

4. Οι διαστάσεις ορθογωνίου είναι 20 cm και 15 cm. Να υπολογισθούν η διαγώνιος και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών που σχηματίζει η διαγώνιος με τις πλευρές του ορθογωνίου.

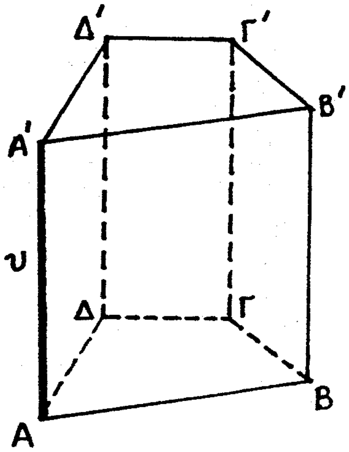
5. Να αποδειχθούν οι:

α) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x}$ β) $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

(ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ)

Α. ΔΙΒΑΣΙΚΑ ΜΕ ΙΣΕΣ ΒΑΣΕΙΣ



ΟΡΘΟ ΠΡΙΣΜΑ

$$E_\pi = \Pi_{\beta\acute{\alpha}\sigma} \cdot \upsilon$$

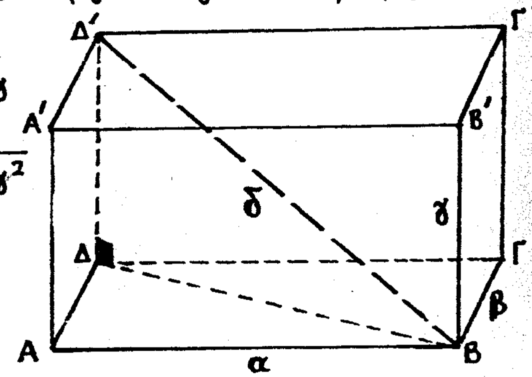
$$E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta$$

$$V = E_\beta \cdot \upsilon$$

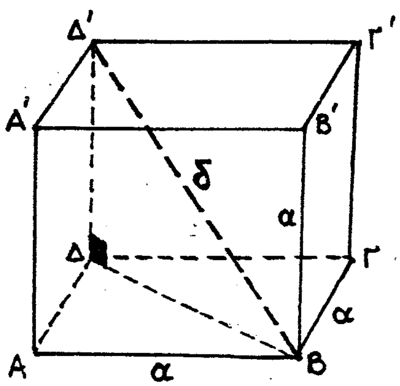
$$E_{o\lambda} = 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)$$

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$



ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ



ΚΥΒΟΣ

$$E_\pi = 4\alpha^2$$

$$E_{o\lambda} = 6\alpha^2$$

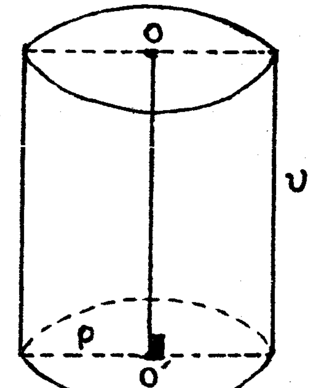
$$V = \alpha^3$$

$$\delta = \alpha\sqrt{3}$$

$$E_\pi = 2\pi\rho \cdot \upsilon$$

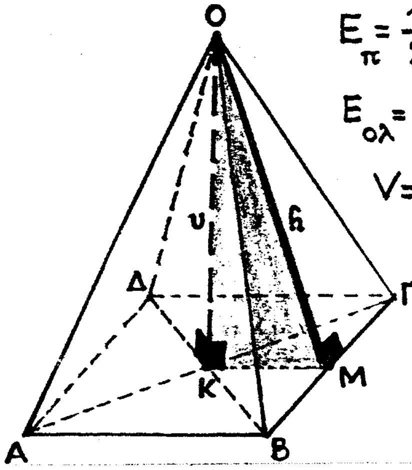
$$E_{o\lambda} = 2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2$$

$$V = \pi\rho^2\upsilon$$



ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Β. ΜΟΝΟΒΑΣΙΚΑ



$$E_\pi = \frac{1}{2} \cdot \Pi_\beta \cdot h$$

$$E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta$$

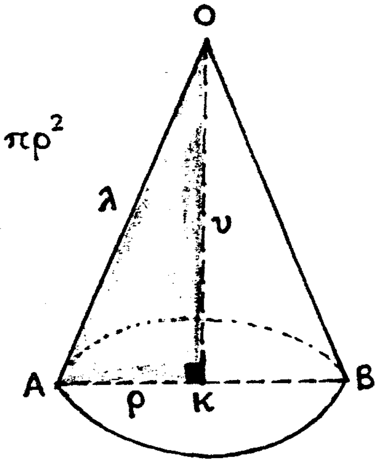
$$V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot \upsilon$$

ΠΥΡΑΜΙΔΑ (κανονική)

$$E_\pi = \pi\rho\lambda$$

$$E_{o\lambda} = \pi\rho\lambda + \pi\rho^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$$



ΚΩΝΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η διαγώνιος κύβου είναι $4\sqrt{3}$ cm. Να βρείτε την επιφάνεια και τον όγκο του.
2. Η ολική επιφάνεια κύβου είναι 294 cm^2. Να βρείτε τον όγκο του.
3. Ορθό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6cm και 8cm. Να βρείτε το $E_{ολ}$ και τον όγκο του, αν το ύψος του είναι ίσο με την υποτείνουσα της βάσης του.
4. Ορθό πρίσμα με ύψος 7cm έχει βάση ρόμβο με διαγώνιες 6cm και 8cm. Να βρείτε την ολική επιφάνεια και τον όγκο του.
5. Ορθό πρίσμα με παράπλευρη ακμή 5cm έχει βάση τετράγωνο με διαγώνιο $2\sqrt{2}$ cm. Να βρείτε την ολική επιφάνεια και τον όγκο του.
6. Ένα κιβώτιο έχει διαστάσεις 40 cm, 30 cm και 24 cm και είναι γεμάτο με πλάκες σαπούνι διαστάσεων 8 cm, 5 cm και 3 cm. Πόσες πλάκες σαπούνι περιέχει το κιβώτιο;
7. Οι διαστάσεις παραλληλεπιπέδου είναι ανάλογες των αριθμών 4, 6, 8 και ο όγκος του είναι 1536 cm^3. Να βρείτε την επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου.
8. Ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου οι διαστάσεις είναι ανάλογες των αριθμών 3, 5, 6 και έχουν άθροισμα 70 dm. Να βρείτε την επιφάνεια και τον όγκο του.
9. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 3m, 4m και 5m. Ένα άλλο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με όγκο 27 φορές μεγαλύτερο έχει διαστάσεις ανάλογες προς τις διαστάσεις του πρώτου. Να βρείτε τις διαστάσεις, την επιφάνεια και τον όγκο του δεύτερου παρ/δου.
10. Σε κανονική τριγωνική πυραμίδα δίνονται η πλευρά της βάσης $α=6$cm και το ύψος $υ=\sqrt{13}$ cm. Να βρεθούν το "παράπλευρο" ύψος h και η παράπλευρη ακμή β. Όμοια να βρεθούν τα β και h σε μιά κανονική τριγωνική πυραμίδα που έχει $α=5\sqrt{3}$ cm και $υ=12$ cm.
11. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα δίνονται $υ=4$ cm και $h=5$cm. Να βρείτε τα α και β.
12. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα δίνονται $α=5\sqrt{2}$ cm και $β=13$cm. Να βρείτε τα υ και h.
13. Σε κανονική εξαγωνική πυραμίδα δίνονται $α=10$ cm και $h=12$cm. Να βρείτε τα υ και β.

14. Το παράπλευρο ύψος h κανονικής εξαγωνικής πυραμίδας είναι 9 cm και η πλευρά της βάσης είναι 3 cm. Να βρείτε το εμβαδό της ολικής της επιφάνειας και τον όγκο της.

15. Πόσο στοιχίζει μιά σκηνή σχήματος κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης 2,2 m και ύψος 1,2 m, όταν το τετραγωνικό μέτρο του υφάσματος στοιχίζει 294 δρχ.;

16. Μιά κανονική πυραμίδα έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 6 cm. Αν το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας είναι 63,57 cm^2, να βρείτε τον όγκο της.

17. Μιά κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 48 cm^3. Αν το ύψος της είναι 9 cm, να βρείτε την πλευρά της βάσης και το $E_{ολ}$.

18. Το ύψος κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του. Αν το εμβαδό της βάσης είναι 28,26 cm^2, να βρείτε τον όγκο του.

19. Το μήκος της (κυκλικής) βάσης κυλίνδρου είναι 12,56 cm. Να βρείτε το $E_{ολ}$ και τον όγκο του κυλίνδρου, αν το ύψος του είναι 5 cm.

20. Κύλινδρος έχει ύψος 4 cm και το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι διπλάσιο από το εμβαδό της μιάς βάσης του. Να βρείτε τον όγκο του κυλίνδρου.

21. Κυλινδρικό δοχείο λαδιού με διάμετρο βάσης 42 cm έχει ύψος ίσο με τα $\frac{5}{3}$ της ακτίνας του. Πόσο στοιχίζει η κατασκευή 80 τέτοιων δοχείων, αν το τετραγωνικό μέτρο της λαμαρίνας αξίζει 200 δρχ.;

22. Κώνος έχει ύψος 7 cm και διάμετρο 6 cm. Να βρείτε την ολική επιφάνεια και τον όγκο του.

23. Κώνος έχει ύψος 8 ~~10~~ cm και γενέτειρα 10 ~~8~~ cm. Να βρείτε την ολική επιφάνεια και τον όγκο του.

24. Το εμβαδό σφαίρας είναι 113,04 cm^2. Να βρείτε τον όγκο άλλης σφαίρας με ακτίνα τριπλάσια της πρώτης.

25. Σφαίρα και κώνος έχουν ίσα ολικά εμβαδά. Ο κώνος έχει γενέτειρα 12 cm και διάμετρο 8 cm. Να βρείτε την ακτίνα της σφαίρας.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

① Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{2}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{25-x^2}+\dfrac{1}{2x+10}$ β) $\left(\dfrac{\omega^2+2\omega+1}{\omega^2-3\omega+2}:\dfrac{\omega^2+3\omega+2}{\omega^2-2\omega+1}\right)\cdot\dfrac{\omega^2-4}{\omega^2-1}$

② Να γίνει η διαίρεση: $\left[2\cdot f(x)-3\cdot f(2x+1)+4\cdot f(3x-2)-5\right]:(x^2-3x+1)$
όπου $f(x)=x^3-2x^2-x+3$.

③ Δείξτε ότι:

α) $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4=(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$.

β) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=(\alpha^2-\beta\gamma)^2+(\beta^2-\gamma\alpha)^2+(\gamma^2-\alpha\beta)^2$.

γ) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

④ Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(2x+3)(2x-3)-2x(3x-1)=(2x+5)^2-(2x-1)(2x+4)-5$

β) $\sqrt{2}(\sqrt{2}x-3)-\sqrt{3}(\sqrt{12}\cdot x+4)=3(x-1)$.

γ) $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{3}{x^2+2x}=\dfrac{x-1}{x^2-2x}+\dfrac{5}{x^2-5x+6}$

δ) $\dfrac{2+2x}{9x^2-4}+\dfrac{x-4}{4-9x^2}=\dfrac{x-2}{9x^2+12x+4}$

⑤ Να βρεθεί ο λ ώστε το πολυώνυμο $\Phi(x)=x^4+(\lambda-1)x^3-(3\lambda-5)x-\lambda+1$ να διαιρείται με $x+1$. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $\Phi(x)=0$.

⑥ Να βρεθεί ο μ ώστε η εξίσωση $\dfrac{\mu-1}{2\mu}x^2-\dfrac{\mu-1}{\mu}x-6=0$ να έχει ρίζα το $\dfrac{1}{2}$.

● Για ποιές τιμές του λ η ευθεία $(\lambda-1)x-2y=3$ διέρχεται από το κοινό σημείο των ευθειών $2x-3y=6$, $x+y=1$.

⑧ Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\kappa-\lambda)x^2-(3\kappa+\lambda)x+1$. Αν $P(-1)=2$ και το $P(x)$ έχει ρίζα το 3, να βρεθούν τα κ,λ.

⑨ Το πολυώνυμο $P(x)=-(\alpha+\beta)x^3+\alpha x^2-\beta x+2$ διαιρούμενο με $x-1$ δίνει υπόλοιπο -1, και διαιρούμενο με $x+1$ δίνει υπόλοιπο 2.
Να βρεθούν τα α,β. $(\alpha=-\beta)$

⑩ Να βρεθούν τα α,β αν ξέρουμε ότι το σύστημα

$$\begin{cases}(3\alpha+2\beta)x-(\alpha-1)y=4\alpha-3\beta+1\\(2\alpha+\beta-1)x+(\alpha+\beta-1)y=4\alpha-\beta+3\end{cases}$$

έχει λύση $(x,y)=(3,-3)$.

● Να βρεθούν τα κ,λ, αν ξέρουμε ότι η εξίσωση $\kappa x^2+(\kappa+4)x+3\lambda-2=0$ έχει ρίζες το 2 και το -5.

⑫ Να βρεθούν τα κ,λ ώστε οι ευθείες:
$(\kappa+3)x-(\lambda+1)y=1$ και $(\kappa-2)x+(\lambda+2)y=-3$
να συμπίπτουν.

(13) Δίνονται τα συστήματα:

$$\begin{cases} 2\alpha x-5y=6 \\ -\beta x+5\beta y=8 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-y=8 \end{cases}.$$

Να βρεθούν τα α,β αν ξέρουμε ότι αυτά έχουν την ίδια λύση.

[redacted] Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2\alpha x+\beta y=7 \\ 3\alpha x-2\beta y=0. \end{cases}$

Να βρεθούν τα α,β

αν ξέρουμε ότι το x είναι η μικρότερη

και το y η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης: $x^2+4x+3=0$.

(15) Να βρεθεί ο λ, αν ξέρουμε ότι οι διαιρέσεις:

$[3\lambda x^3-(\lambda-2)x^2+x-(\lambda+2)]:(x-1)$ και $[x^2-(2\lambda+1)x-\lambda]:(x+2)$,

έχουν το ίδιο υπόλοιπο.

[redacted] Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $P(x)=2x^4+x^3+x^2+x-1$

αφού αποδείξτε ότι διαιρείται με x^2+1.

(17) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=3x^3+x^2-12x-\lambda$.

Να βρεθεί ο λ ώστε να διαιρείται ακριβώς με $x-2$.

α) Να βρεθεί ο λ ώστε να διαιρείται ακριβώς με $x-2$.

β) Να αναλύσετε το $f(x)$ σε γινόμενο παραγόντων.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

(18) Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\dfrac{(x^2-1)(x+2)-(x^2-4)(x+1)}{x^2-x-6}$

και να βρεθεί (αν υπάρχει) η αριθμητική του τιμή για $x=1$ και $x=-2$.

[redacted] Να βρεθούν τα λ,μ ώστε τα πολυώνυμα

$\varphi(x)=x^3-\lambda x^2-x+\lambda$ και $f(x)=x^3-\mu x^2+x$ να διαιρούνται

με $x-2$ και $x-1$ αντίστοιχα.

Στη συνέχεια να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των $\varphi(x)$ και $f(x)$

(20) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κοινό

σημείο των ευθειών: $2x-5y+11=0$, $3x+y=9$ και από το κοινό

σημείο των ευθειών: $y=2x-3$, $3x+2y=18$.

(21) Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας $2x+4y+1=0$

με τη παραβολή $y=\frac{1}{4}x^2$.

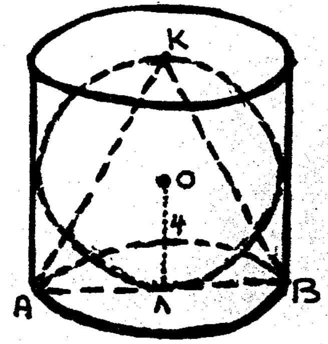
(22) Οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν συντεταγμένες

$A(2,5)$, $B(-3,2)$, $\Gamma(1,-4)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε)

που είναι παράλληλη με την ευθεία (ΒΓ) και διέρχεται από το Α.

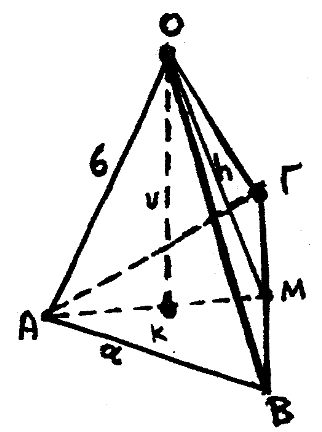
ΘΕΜΑΤΑ

1ο Στο σχήμα υπάρχουν ένας κύλινδρος, ένας κώνος και μια σφαίρα. (Η σφαίρα εφάπτεται στο κύλινδρο, η κορυφή του κώνου είναι το κέντρο της μιάς βάσης του κυλίνδρου και η βάση του κώνου ταυτίζεται με την άλλη βάση του κυλίνδρου) Αν η ακτίνα της σφαίρας είναι $\rho = 4$ cm, να βρεθούν τα $E_{ολ}$ και οι V των 3 σωμάτων, καθώς και ο όγκος του στερεού που περικλείεται μεταξύ του κυλίνδρου και της σφαίρας.



2ο Κανονική τριγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης $16\sqrt{3}$ cm². Η παράπλευρη ακμή της είναι 6 cm. Να βρεθεί το $E_{ολ}$ και ο V της.

(Δίνεται ότι: $E_{ΙΣΟΠΛΕΥΡΟΥ} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$)



● **ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ:**
- 1ο Θέμα → 12 μονάδες.
- 2ο " → 8 " .

Γ' Γυμνασίου

31/5/89.

Ωριαίο διαγώνισμα στα Μαθηματικά.

(Α) Να γίνουν οι πράξεις:

1) $(-3x^2yz^7)^2 \cdot (4x^4y^3z)^3 : (-\frac{1}{2}xy^{-2})^2 =$

2) $\dfrac{\alpha(5\alpha-9\beta)+2\beta(\alpha-3\beta)}{2\beta(4\alpha-5\beta)-3\alpha(3\beta-\alpha)} =$

3) $\dfrac{4x^2}{4x^2-9y^2} + \dfrac{x}{3y-2x} + \dfrac{2y}{3y+2x} =$

→ Να γίνουν τα 2. Μονάδες: 4 (2 + 2)

(Β) Να δείξτε ότι:

1) $(x^2+3x)\cdot(x^2+6x+9) = x(x+3)^3$.

2) $(x^2+y^2+xy)^2 = x^2y^2 + (x+y)^2\cdot(x^2+y^2)$.

3) $\dfrac{1}{2x+4} + \dfrac{1}{6-3x} + \dfrac{x+8}{3(x^2-4)} = \dfrac{1}{2(x-2)}$

→ Να γίνουν τα 2. Μονάδες: 4 (2 + 2)

(Γ) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

1) $\alpha\beta^2 - 2\alpha^2 + 2\beta^3 - 4\alpha\beta =$

2) $(x+2y)^3 - (2x-y)^3 =$

3) $x^3 - x^2 + xy + x - y - 1 =$

4) $3(x+5)(x-2)^2 - 12x - 60 =$

5) $5x^2 + 10xy + 5y^2 - 5 =$

→ Να γίνουν τα 3. Μονάδες: 3 (1+1+1)

(Δ) Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{4}{2-x} + \dfrac{8}{x^2-2x} = 0$

2) $\dfrac{1}{x^2+3x+2} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1}{2(x+2)}$

→ Να γίνει το 1. Μονάδες: 3

(Ε) Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases} \frac{1}{3}(2x+y) - \frac{15-4y}{8} = 0 \\ \frac{x+y}{2} = 3+2y \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=5 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2+3y^2-4x+y=14 \\ 2y-x=2 \end{cases}$

→ Να γίνουν τα 2. Μονάδες: 6 (3+3)