

# ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Αποδείξεις - Βασικές.

## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

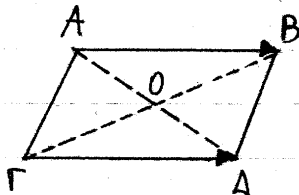
### Υ Εφαρμοσμένο Διάνυσμα

Ορισμός:  $(A, B) \sim (Γ, Δ) \Leftrightarrow (A, B), (Γ, Δ)$  έχουν ίδια  $\left\{ \begin{array}{l} \text{διευθύνση} \\ \text{φορά} \\ \text{μέτρο.} \end{array} \right.$

Θ.  $(A, B) \sim (Γ, Δ) \Leftrightarrow AΔ, BΓ$  έχουν κοινό μέσο.

Αποδείξη:

ι) Αν  $AB$  και  $ΓΔ$  δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία



Ευθύ:  $(A, B) \sim (Γ, Δ) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB \parallel ΓΔ \text{ (ίδια διεύθυνση)} \\ AB = ΓΔ \text{ (ίδιο μέτρο)} \end{array} \right. \Rightarrow ABΓΔ \# \Rightarrow \delta.\delta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AO = OΔ \\ BO = OΓ \end{array} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow O$  μέσο  $AΔ, BΓ \Rightarrow O \in AΔ, BΓ$  έχουν κοινό μέσο (όπου  $O = AΔ \cap BΓ$ ).

Αντιστροφή:  $AΔ, BΓ$  έχουν κοινό μέσο  $\Rightarrow O = AΔ \cap BΓ$  μέσο  $AΔ, BΓ \Rightarrow AO = OΔ \wedge BO = OΓ \Rightarrow \delta.\delta. \Rightarrow ABΓΔ \# \Rightarrow AB = ΓΔ \wedge AB \parallel ΓΔ \Rightarrow (A, B), (Γ, Δ)$  έχουν ίδια διεύθυνση και μέτρο (1)

θα δείξω ότι έχουν και ίδια φορά.

Αρκεί  $B, Δ \in \eta\mu.\epsilon\pi. (AΓ, Δ)$

$Δ \in \eta\mu. (AΓ, Δ)$  ισχύει προφανώς

Εστω  $B \notin \eta\mu.\epsilon\pi. (AΓ, Δ) \Rightarrow BΔ \cap AΓ \neq \emptyset \Rightarrow BΔ \nparallel AΓ \leftarrow$  Ας υποθέσουμε  $ABΓΔ \#$   
 $Δ \in \eta\mu.\epsilon\pi. (AΓ, Δ) \hookrightarrow$  Αξίωμα

αρα  $B, Δ \in \eta\mu.\epsilon\pi. (AΓ, Δ) \Rightarrow (A, B), (Γ, Δ)$  έχουν ίδια φορά  
 $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{διευθύνση} \\ \text{μέτρο} \end{array} \right. \Rightarrow (A, B) \sim (Γ, Δ).$

ii) Αν  $AB, \Gamma\Delta$  στην ίδια ευθεία



Εστω  $AD > BG$

Ευθύ  $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta) \Rightarrow AB = \Gamma\Delta$   $\Rightarrow AB + BM = \Gamma\Delta + M\Gamma \Rightarrow AM = M\Delta \Rightarrow$

Εστω  $M$  μέσο  $B\Gamma \Rightarrow BM = M\Gamma$

$\Rightarrow M$  μέσο  $AD$ .

Αντίστροφο Εστω  $M$  μέσο  $AD, B\Gamma$ .

$M$  μέσο  $B\Gamma \Rightarrow BM = M\Gamma$   $\Rightarrow AM - MB = M\Delta - MB \Rightarrow AB = \Gamma\Delta$  (ίδω μέτρο)  
 $M$  μέσο  $AD \Rightarrow AM = M\Delta$

Έχουν ίδια διεύθυνση (δύο  $AB, \Gamma\Delta \in (\epsilon)$ )

Αποδεικνύεται ότι έχουν ίδια φορά  
 οπότε  $(A, B) \sim (\Gamma, \Delta)$ .



$M$  μέσο  $AB \Leftrightarrow (A, M) \sim (M, B)$

Αποδείξη: Ευθύ  $M$  μέσο  $AB$   $\Rightarrow (A, M) \sim (M, B)$   
 $M$  μέσο  $MM$

Αντίστροφο  $(A, M) \sim (M, B) \Rightarrow AB, MM$  έχουν κοινό μέσο  $\Rightarrow$   
 $M$  μέσο του  $AB$

$\Rightarrow M$  μέσο  $AB$ .

▼ Ελεύθερο διάνυσμα

▼ Μια βασική απεικόνιση.

•  $E \rightarrow$  σύνολο των σημείων του χώρου

$\mathcal{E} \rightarrow$  σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων  $\mathcal{E} = \{\vec{OM} : M \in E\}$ .

Θ.

$0 \in E \Rightarrow \exists$  "1-1", επι  $\varphi_0 : \forall \vec{a} \in \mathcal{E} \rightarrow A \in E : \vec{OA} = \vec{a}$

Απόδειξη: Η  $\varphi_0$  ορίζεται ως εξής

$$\varphi_0: \forall \vec{a} \in \mathcal{E} \longrightarrow A \in E: \vec{OA} = \vec{a}$$

i) Θα δείξω ότι η  $\varphi_0$  είναι ~~τα~~ απεικόνιση.

Έστω  $\vec{a} = \vec{b}$ ,  $(O, A)$  αντιπροσώπων του  $\vec{a}$ ,  $(O, B)$  αντιπροσώπων του  $\vec{b}$  Μμμ...

$\vec{OA} = \vec{OB} \Rightarrow (O, A) \sim (O, B) \Rightarrow OB, OA$  έχουν κοινό μέσο  $\Rightarrow A \equiv B$  (ευκολία με άτοπο)  $\Rightarrow \varphi_0(\vec{a}) = \varphi_0(\vec{b})$  άρα  $\varphi_0$  απεικόνιση.

ii) Θα δείξω  $\varphi_0$  "1-1". Άρκει  $\varphi_0(\vec{a}) = \varphi_0(\vec{b}) \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$ .

$\varphi_0(\vec{a}) = \varphi_0(\vec{b}) \Rightarrow A \equiv B \Rightarrow OA, OB$  έχουν κοινό μέσο  $\Rightarrow (O, A) \sim (O, B) \Rightarrow \vec{OA} = \vec{OB} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$ . άρα η  $\varphi_0$  είναι "1-1".

iii) Θα δείξω  $\varphi_0$  επί. Άρκει  $\varphi_0(\mathcal{E}) = E$

Έστω ότι  $\varphi_0(\mathcal{E}) \neq E \Rightarrow \varphi_0(\mathcal{E}) \subset E$

Έστω  $\exists M \in E: M \notin \varphi_0(\mathcal{E}) \Rightarrow \nexists \vec{OM} \in \mathcal{E} \leftarrow$  Άτοπο διότι  
 τότε  $\vec{OM} \in \mathcal{E} \Rightarrow \varphi_0(\vec{OM}) \in E \Rightarrow M \in E \quad \forall O, M \in E, \vec{OM} \in \mathcal{E}$   
 $\varphi_0$  απεικόνιση  $\mathcal{E} \rightarrow E$

άρα  $\varphi_0(\mathcal{E}) = E \Rightarrow \varphi_0$  επί.

### ▼ Πράξεις στα διανύσματα

•  $\vec{A_1 A_n} = \vec{A_1 A_2} + \vec{A_2 A_3} + \dots + \vec{A_{n-1} A_n} + \vec{A_n A_1}$  (Αποδεικνύεται επαγωγικά)

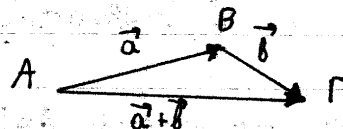
•  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$   $\rightarrow$   $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GA} = \vec{0}$   $\leftarrow$  Στο τρίγωνο  $ABG$

Θ.  $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}$  ισχύει  $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$  ( $|\vec{a}|$  = μέτρο του  $\vec{a}$ ).

$\hookrightarrow ||\vec{a}| - |\vec{b}||$  είναι η ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ του  $|\vec{a}| - |\vec{b}|$

Αποδείξτε:

i) Αν  $\vec{a} \nparallel \vec{b} \neq \vec{0}$  τότε θεωρώ  $A, B, \Gamma$  έτσι ώστε  $\vec{a} = \vec{AB}$ ,  $\vec{b} = \vec{B\Gamma}$   
 Τότε  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$

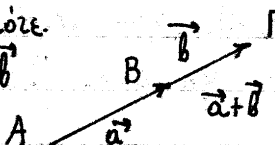


Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τριγ. ανισότητα:  $|(AB) - (B\Gamma)| < (A\Gamma) < (AB) + (B\Gamma) \Rightarrow$

$$\Rightarrow ||\vec{AB}| - |\vec{B\Gamma}|| < |\vec{A\Gamma}| < |\vec{AB}| + |\vec{B\Gamma}| \Rightarrow ||\vec{a}| - |\vec{b}|| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

ii) Αν  $\vec{a} \parallel \vec{b} \neq \vec{0}$  τότε

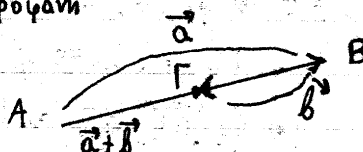
α) Αν  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$



$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{AB} + \vec{B\Gamma}| = |\vec{A\Gamma}| = A\Gamma = AB + B\Gamma = |\vec{AB}| + |\vec{B\Gamma}|$$

Είναι  $||\vec{AB}| - |\vec{B\Gamma}|| < |\vec{AB}| + |\vec{B\Gamma}| = |\vec{AB} + \vec{B\Gamma}|$  άρα ισχύει  
προφανή

β) Αν  $\vec{a} \downarrow \vec{b}$  τότε



$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{AB} + \vec{B\Gamma}| = |\vec{A\Gamma}| = A\Gamma = |AB - B\Gamma| = ||\vec{AB}| - |\vec{B\Gamma}||$$

$$\text{Είναι } ||\vec{AB}| - |\vec{B\Gamma}|| = |\vec{AB} + \vec{B\Gamma}| \leq |\vec{AB}| + |\vec{B\Gamma}|$$

άρα ισχύει.

διότι  $A\Gamma < AB + B\Gamma < AB + AB\Gamma$ .

iii)  $\vec{b} = \vec{0}$  τότε  $||\vec{a}| < |\vec{a}| < |\vec{a}|$  ισχύει

Άρα: Ισχύει  $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}$

▼ Αφαίρεση διανυσμάτων  $\rightarrow \boxed{\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})}$

Θ.  $\boxed{a, b, x \in \mathcal{E}, \text{ τότε } \vec{b} + \vec{x} = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}}$

Αποδείξη: Έσθ:  $\vec{x} = \vec{0} + \vec{x} =$  (Ουδέτερο στοιχείο)  
 $= [(-\vec{b}) + \vec{b}] + \vec{x} =$  (Αντιθέτος του  $\vec{b}$ )  
 $= (-\vec{b}) + [\vec{b} + \vec{x}] =$  (Προσεταιριστικότητα)



$$\begin{aligned}
 &= (-\vec{b}) + \vec{a} = (\text{Υπόθεση}) \\
 &= \vec{a} + (-\vec{b}) = (\text{Αντιμεταθετική}) \\
 &= \vec{a} - \vec{b} \quad (\text{ορισμός αφαίρεσης})
 \end{aligned}$$

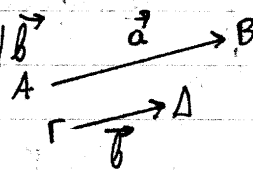
$$\begin{aligned}
 &\text{Αντίστροφο:} \\
 &\vec{b} + \vec{x} = \vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = (\text{Υπόθεση}) \\
 &= \vec{b} + [\vec{a} + (-\vec{b})] = (\text{ορ. αφαίρεσης}) \\
 &= \vec{b} + [(-\vec{b}) + \vec{a}] = (\text{αντιμεταθετική}) \\
 &= [\vec{b} + (-\vec{b})] + \vec{a} = (\text{προσεταιριστική}) \\
 &= \vec{0} + \vec{a} = (\text{ακτίδως}) \\
 &= \vec{a} \quad (\text{ουδέτερο στοιχείο})
 \end{aligned}$$

$\nabla$  Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό  $\bullet \vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{b} \parallel \vec{a} \\ \vec{b}, \vec{a} \text{ ομορ. αν } \lambda > 0, \text{ αντίρ. αν } \lambda < 0 \\ |\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}| \end{cases}$

$$\bullet \quad \boxed{\vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}}$$

Απόδειξη: Ευθύ: Ισχύει εξ' ορισμού

Αντίστροφο: Έστω  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}$  έτσι ώστε  $\vec{a} \parallel \vec{b}$



$$\blacktriangleright \text{Θέτω } k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{b}| = k |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}| = k |\vec{AB}| \Rightarrow |\vec{b}| = k |\vec{AB}|$$

$$\Rightarrow |\vec{b}| = |k \vec{AB}| \Rightarrow |\vec{b}| = |k| |\vec{AB}|$$

$$\blacktriangleright \text{Θέτω } k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{b}| = k |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}| = |k| |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}| = |k| |\vec{AB}| \Rightarrow |\vec{b}| = |k| |\vec{AB}| \Rightarrow |\vec{b}| = |k| |\vec{AB}|$$

$$\Rightarrow |\vec{b}| = |k| |\vec{a}| \Rightarrow \begin{cases} \vec{b} = k \cdot \vec{a} \quad (\text{αν } k \geq 0 \text{ είναι ομορροπα}) \\ \vec{b} = -k \cdot \vec{a} \quad (\text{αν } k < 0 \text{ είναι αντίρροπα}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = k \vee \lambda = -k$$

### ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

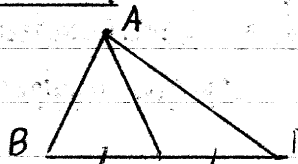
$$\bullet \vec{AB} = \begin{cases} \vec{AO} + \vec{OB} \\ \vec{OB} - \vec{OA} \end{cases}$$

$$\text{Π1. } \boxed{M \text{ μέσο } AB \Leftrightarrow (A, M) \sim (M, B)}$$

Απόδειξη:  $(A, M) \sim (M, B) \Leftrightarrow AB, MM$  κοινό μέσο  $\Leftrightarrow M$  μέσο  $AB$ .

Π2.  $\boxed{\text{Αν } AM \text{ διάμεσος } \triangle AB\Gamma \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{AM}}$

Απόδειξη: Ευνδυ: Αν AM διάμεσος



α τρόπος:  $\begin{cases} \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} \\ \vec{AM} = \vec{A\Gamma} + \vec{GM} \end{cases} \Rightarrow 2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma} + \vec{BM} + \vec{GM} \Rightarrow$

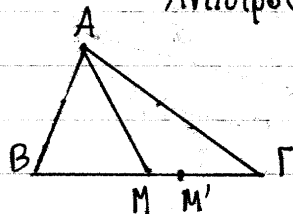
$\Rightarrow 2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{A\Gamma}$

β τρόπος:  $\vec{A} = \vec{AB} + \vec{BM} = (\vec{AM} + \vec{MB}) + (\vec{AM} + \vec{MG}) = 2\vec{AM} + (\vec{MB} + \vec{MG}) =$   
 $= 2\vec{AM} + \vec{0} = 2\vec{AM} = \vec{B}.$

γ τρόπος:  $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{AM} \Leftrightarrow (\vec{AB} - \vec{AM}) + (\vec{A\Gamma} - \vec{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}$  λογύει, αρα

λογύει και αντιστρόφως  $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{AM}$ .

Αντίστροφοι: Αν  $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{AM}$



α τρόπος:  $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{AM} \Rightarrow (\vec{AB} - \vec{AM}) + (\vec{A\Gamma} - \vec{AM}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{MB} = -\vec{M\Gamma} \Rightarrow (Γ, M) \sim (M, B) \Rightarrow M$  μέσο  $B\Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow AM$  διάμεσος  $\triangle AB\Gamma$

β τρόπος: Έστω  $M'$  μέσο. Αρκεί  $M \equiv M'$

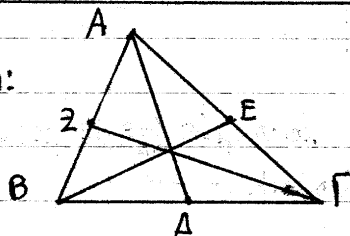
Ευνδυ  $\rightarrow \vec{AB} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{AM'} \Rightarrow 2\vec{AM'} = 2\vec{AM} \Rightarrow \vec{AM'} = \vec{AM} \Rightarrow$

υποθ  $\rightarrow \vec{AB} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{AM}$

$\Rightarrow \vec{AM'} - \vec{AM} = \vec{0} \Rightarrow \vec{MM'} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv M'$   $\Rightarrow M$  μέσο  $B\Gamma \Rightarrow AM$  διάμεσος  $\triangle AB\Gamma$ .

Π3.  $\boxed{\text{Αν } AD, BE, \Gamma Z \text{ διαμέσοι } \triangle AB\Gamma \Rightarrow \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{\Gamma Z} = \vec{0}} \quad (\text{ΒΑΣΙΚΗ})$

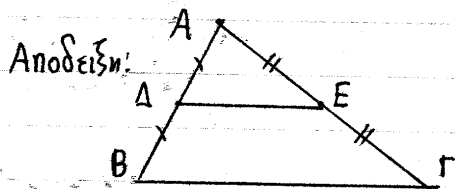
Απόδειξη:



$$\begin{aligned}
 \text{ΑΔ διαμ.} &\Rightarrow \vec{AD} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) \\
 \text{ΒΕ διαμ.} &\Rightarrow \vec{BE} = \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{BC}) \\
 \text{ΓΖ διαμ.} &\Rightarrow \vec{GZ} = \frac{1}{2} (\vec{GA} + \vec{GB})
 \end{aligned}
 \Rightarrow \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{GZ} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) + \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{BC}) + \frac{1}{2} (\vec{GA} + \vec{GB}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{GA} + \vec{GB}) = \frac{1}{2} (\vec{0} + \vec{0}) = \vec{0}.$$

Π4.  $\Delta, E$  μέσα  $AB, AC \Rightarrow \vec{DE} = \frac{1}{2} \vec{BC}$

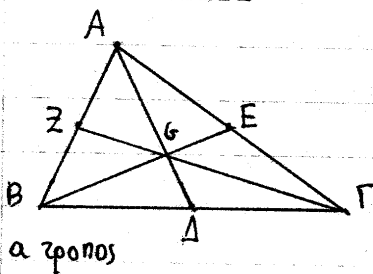


$$\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} = \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{2} \vec{BC}$$

Δ, E μέσα AB, AC

Π5.  $G$  βαρύκεντρο  $\triangle ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Αποδείξει: ευθύ: Έστω  $G$  βαρύκεντρο.



$$G \text{ βαρύκεντρο} \Rightarrow \begin{cases} GA = \frac{2}{3} AD \Rightarrow \vec{GA} = -\frac{2}{3} \vec{AD} \\ GB = \frac{2}{3} BE \Rightarrow \vec{GB} = -\frac{2}{3} \vec{BE} \\ GC = \frac{2}{3} CF \Rightarrow \vec{GC} = -\frac{2}{3} \vec{CF} \end{cases} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = -\frac{2}{3} (\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}) =$$

Π3

$$= -\frac{2}{3} \vec{0} = \vec{0}$$

• β τρόπος:  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} =$

$$\begin{aligned}
 &\xrightarrow{\text{GA διάμεσος στο GBΓ}} \vec{GA} + 2\vec{GD} = \vec{GA} + \vec{AG} = \vec{GG} = \vec{0} \\
 &= \vec{GA} + 2\vec{GD} = \vec{GA} + \vec{AG} = \vec{GG} = \vec{0}
 \end{aligned}$$

Αντίστροφο: Αν  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ , έστω  $G'$  βαρύκεντρο.

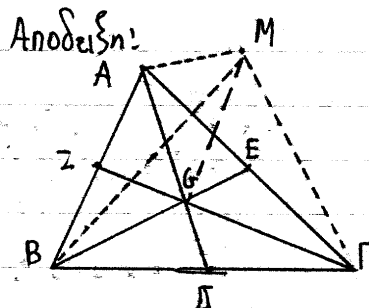
$$G' \text{ βαρύκεντρο} \xrightarrow{\text{ευθύ}} \vec{G'A} + \vec{G'B} + \vec{G'C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{G'A} + \vec{GB} + \vec{GC} \Rightarrow$$

υπόθεση  $\rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (\vec{GA} - \vec{G'A}) + (\vec{GB} - \vec{G'B}) + (\vec{GC} - \vec{G'C}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{G'G} + \vec{G'G} + \vec{G'G} = \vec{0} \Rightarrow 3\vec{G'G} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G'G} = \vec{0} \Rightarrow$$

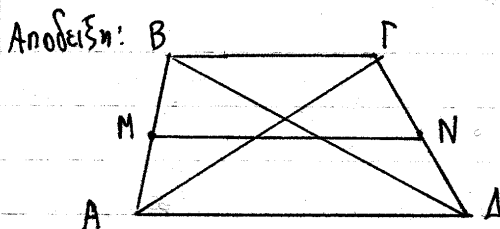
$$\Rightarrow G \equiv G' \quad \left. \begin{array}{l} G \text{ βαρύκεντρο} \\ G' \text{ βαρύκεντρο} \end{array} \right\} \Rightarrow G \text{ βαρύκεντρο.}$$

$$\text{Π}_7. \quad \left. \begin{array}{l} G \text{ βαρύκεντρο } \triangle AB\Gamma \\ M \in E \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = 3\vec{MG}$$



$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = (\vec{MG} + \vec{GA}) + (\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{G\Gamma}) = 3\vec{MG} + (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{G\Gamma}) \stackrel{\text{Π}_6}{=} 3\vec{MG} + \vec{0} = 3\vec{MG}.$$

$$\text{Π}_8. \quad \left. \begin{array}{l} M \text{ μέσο } AB \\ N \text{ μέσο } \Gamma\Delta \end{array} \right\} \Rightarrow 2\vec{MN} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta}$$



$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{MB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma N} \\ \vec{MN} &= \vec{MA} + \vec{A\Gamma} + \vec{\Delta N} \end{aligned} \Rightarrow 2\vec{MN} = (\vec{MB} + \vec{MA}) + (\vec{B\Gamma} + \vec{A\Delta}) + (\vec{\Gamma N} + \vec{\Delta N}) =$$

$$\stackrel{\substack{\downarrow M \text{ μέσο } AB \\ \downarrow M \text{ μέσο } \Gamma\Delta}}{=} \vec{0} + (\vec{B\Gamma} + \vec{A\Delta}) + \vec{0} = \vec{B\Gamma} + \vec{A\Delta}$$

$$\text{Άρκει } \vec{B\Gamma} + \vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} \Leftrightarrow (\vec{B\Gamma} - \vec{A\Gamma}) + (\vec{A\Delta} - \vec{B\Delta}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} \text{ ισχύει}$$

$$\text{αρα ισχύει και αντίστροφα } \left. \begin{array}{l} \vec{B\Gamma} + \vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} \\ 2\vec{MN} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\vec{MN} = \vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta}$$

$$\text{Π}_9. \quad \boxed{\text{Σε τρίγωνο } \triangle AB\Gamma : \vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{0}}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

▼ Η διανοματική ευθεία

Εστω  $\vec{a} \in \mathcal{E}^*$  και  $\mathcal{A} = \{\lambda \vec{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ .  
το  $\mathcal{A}$  λέγεται διανυσματική ευθεία που παράγεται από το  $\vec{a}$ .

Εστω η βασική απεικόνιση

$$\varphi_0: \forall \vec{a} \in E \longrightarrow A \in E, \quad \vec{0}A = \vec{a}$$

θα δείξουμε ότι

$$\Theta. \quad \left. \begin{array}{l} 0, A \in (\varepsilon) \\ \mathcal{A} = \{\lambda \vec{OA} : \lambda \in \mathbb{R}\} \end{array} \right\} \Rightarrow (\varepsilon) = \varphi_0(\mathcal{A})$$

Αποδείξτε: Έστω  $\vec{\sigma} \in \mathcal{A}$  με  $\varphi_0(\vec{\sigma}) = B$ , άρα  $\vec{\sigma} = \vec{OB}$

Θα δείξω ότι η  $(\varepsilon)$  περιέχει όλα τα στοιχεία του  $\varphi(\mathcal{X})$ .

$$\vec{s} \in \mathcal{A} \Rightarrow \vec{s} = \lambda \vec{OA} \Rightarrow \vec{s} \parallel \vec{OA} \Rightarrow \vec{OB} \parallel \vec{OA} \Rightarrow \vec{OB} \parallel \vec{OA} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O, A, B \text{ συνευθειακα} \\ O \text{ κοινό} \end{array} \right\} \Rightarrow O, A \in (\epsilon)$$

$\Rightarrow B \in (\varepsilon) \Rightarrow A \quad \varphi_0(\vec{\sigma}) \in (\varepsilon), \forall \vec{\sigma} \in \mathcal{A}$  άρα η  $(\varepsilon)$  περιέχει όλα τα στοιχεία του  $\mathcal{A}$ . Θα δείξω ότι περιέχει μόνο τα στοιχεία του  $\mathcal{A}$ .

$$\forall B = \varphi_0(\vec{\sigma}) \in (\varepsilon) \Rightarrow O, B, A \text{ συνευθεία} \Rightarrow OA \parallel OB \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{OB} = \lambda \vec{OA} \Rightarrow \vec{OB} \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi_0(\vec{OB}) \in \varphi_0(\mathcal{A}) \Rightarrow B \in \varphi_0(\mathcal{A})$$

Επειτα:  $B \in (\varepsilon) \Leftrightarrow B \in \varphi_0(\mathcal{A})$  ορα  $(\varepsilon) = \varphi_0(\mathcal{A})$

- Το σύνολο  $\{\vec{a}\}$  είναι μια βάση της  $\mathcal{X} = \{\lambda \vec{a} : \lambda \in \mathcal{X}\}$ .

▼ Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων : Έστω  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}$ . Τότε:

1)  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{b} = \lambda \vec{a}$ . Άρα τα  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{A} = \{\lambda \vec{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , γι'αυτο:  
 $\vec{a}, \vec{b}$  γραμμ. εξαρτημένα.

2)  $\vec{a} \# \vec{b} \Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{b} = \lambda \vec{a} \vee \vec{a} = \lambda \vec{b}$ , Άρα δεν υπάρχει  $\mathcal{A} : \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{A}$ , γιατί ο  $\vec{a}, \vec{b}$  γραμμ. ανεξάρτητα

▼ Το διανυσματικό επίπεδο: Έστω  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}^*$

Κάθε  $\vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  λέγεται γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{a}, \vec{b}$  με συντελεστές  $\lambda, \mu$ .

•  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{A} \Rightarrow \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in \mathcal{A}$

Έστω  $\vec{a}, \vec{b}$  γραμμ. ανεξάρτητα. Το σύνολο  $\mathbb{P} = \{ \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

λέγεται διανυσματικό επίπεδο.

Θ.  $\left. \begin{array}{l} p \text{ επίπεδο : } O, A, B \in p \\ \mathbb{P} = \{ \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB} : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \} \end{array} \right\} \Rightarrow p = \varphi_0(\mathbb{P})$

Αποδείξην: Αρκεί  $M \in \varphi_0(\mathbb{P}) \Leftrightarrow M \in p$

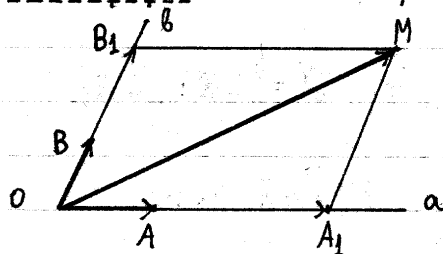
Ευθύ  $M \in \varphi_0(\mathbb{P}) \Rightarrow \vec{OM} \in \mathbb{P} \Rightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} : \vec{OM} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$

► Φέρνω  $A_1 = \varphi_0(\lambda \vec{OA}) \Rightarrow \vec{OA_1} = \lambda \vec{OA} \Rightarrow O, A, A_1$  συνευθειακά  $\Rightarrow A_1 \in p$ .  
 $O, A \in p$

► Φέρνω  $B_1 = \varphi_0(\mu \vec{OB}) \Rightarrow \vec{OB_1} = \mu \vec{OB} \Rightarrow O, B, B_1$  συνευθειακά  $\Rightarrow B_1 \in p$ .  
 $O, B \in p$

Αρα,  $\vec{OM} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} \Rightarrow O, A_1, B_1 \nparallel \Rightarrow M \in p$  (Διοτι  $B_1 M \parallel O, A_1$ )  
 $O, A_1, B_1 \in p$

Αντίστροφο Έστω  $M \in p$ .



► Στις <sup>ευθείες</sup> ημιευθείες  $\alpha, \beta$  των  $OA, OB$   
 φέρνω  $A_1 \in \alpha : MA_1 \parallel B_1 O$   
 $B_1 \in \beta : MB_1 \parallel A_1 O$   
 $\Rightarrow OA_1 \parallel MB_1 \nparallel \Rightarrow \vec{OM} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} \quad (1)$

$A_1 \in \alpha \Rightarrow O, A, A_1$  συνευθειακά  $\Rightarrow \vec{OA_1} \parallel \vec{OA} \Rightarrow \exists \lambda : \vec{OA_1} = \lambda \vec{OA}$

$B_1 \in \beta \Rightarrow O, B, B_1$  συνευθειακά  $\Rightarrow \vec{OB_1} \parallel \vec{OB} \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} : \vec{OB_1} = \mu \vec{OB}$

(1)  $\Rightarrow \vec{OM} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB} \Rightarrow \vec{OM}$  γρ. συνδ.  $\vec{OA}, \vec{OB} \Rightarrow \vec{OM} \in \mathbb{P} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_0(\vec{OM}) \in \varphi_0(\mathbb{P}) \Rightarrow M \in \varphi_0(\mathbb{P})$ .

( $\varphi_0$  απεικόνιση)

Έτσι:  $M \in p \Leftrightarrow M \in \varphi_0(\mathbb{P})$  αρα  $p = \varphi_0(\mathbb{P})$ .

Θ.  $\forall \vec{\gamma} \in \mathbb{P}, \exists$  μοναδικά  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ , όπου  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{P}$  γρ. ανεξ.

Απόδειξη:  $\vec{\gamma} \in \mathbb{P} \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Rightarrow \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \lambda' \vec{a} + \mu' \vec{b} \Rightarrow$   
 $\text{έστω } \lambda', \mu' \in \mathbb{R} : \vec{\gamma} = \lambda' \vec{a} + \mu' \vec{b}$   
 $\Rightarrow (\lambda - \lambda') \vec{a} + (\mu - \mu') \vec{b} = \vec{0}$

θα δείξω ότι  $\lambda' = \lambda$  και  $\mu' = \mu$ .  
 Αν  $\lambda' \neq \lambda$  τότε  $(\lambda - \lambda') \vec{a} + (\mu - \mu') \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda - \lambda') \vec{a} = -(\mu - \mu') \vec{b} \Rightarrow$   $\lambda' \neq \lambda$

$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{\mu - \mu'}{\lambda - \lambda'} \vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$  γρ. εξαρτιμένα  $\leftarrow$  άτοπο διότι  $\vec{a}, \vec{b}$  γρ. ανεξάρτητα.

Άρα  $(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu) \Rightarrow (\lambda, \mu)$  μοναδικά.

$\mapsto (\lambda, \mu)$  λέγονται συντεταγμένες του  $\vec{\gamma}$  με βάση το σύνολο  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ .

▼ Γραμμική εξάρτηση τριών διανυσμάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathcal{E}$ , λέγονται

• 1 γραμμικώς εξαρτιμένα, όταν ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

• 2 γραμμικώς ανεξάρτητα, όταν δεν είναι γραμμικώς εξαρτιμένα

1)  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} + 0 \cdot \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$  γρ. εξαρτ. \* (οχι αντίστροφο)

2)  $\vec{a} \nparallel \vec{b} \wedge \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{P} \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$  γρ. εξαρτ.

3)  $\vec{a} \nparallel \vec{b} \wedge \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{P} \wedge \vec{\gamma} \notin \mathbb{P} \Rightarrow \nexists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$  γρ. ανεξάρτητα.

▼ Το σύνολο  $\mathcal{E}$  εστω  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathcal{E}^*$ . Κάθε διάνυσμα  $\vec{\delta} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma}$  όπου  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$  λέγεται γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$  με συντελεστές  $\lambda, \mu, \nu$ .

• Αν  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$  γρ. εξαρτ.  $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathcal{X} \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{P}$   
 οπότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους  $\vec{\delta} \in \mathcal{X} \forall \vec{\delta} \in \mathbb{P}$

• Αν  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$  γρ. ανεξαρτ.  $\Rightarrow$  ορίσω  $\mathcal{E}_1 = \{ \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \}$

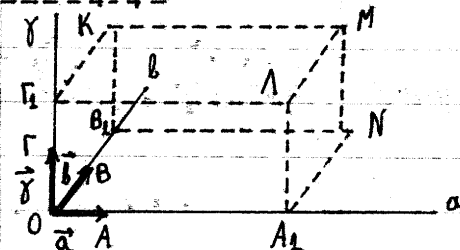
Θ.  $\boxed{\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}}$

Απόδειξη: Αρκεί,  $\vec{OM} \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \vec{OM} \in \mathcal{E}$

Ευθύ: Αν  $\mathcal{E}_1 = \{ \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \}$ , τότε

$$\vec{\delta} \in \mathcal{E}_1 \Rightarrow \vec{\delta} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\delta} \in \mathcal{E}.$$

Αντιστροφή: Εστω  $M \in \mathcal{E}$ .



► Αν  $\mathcal{E}_1 = \{ \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \}$  και  $O \in \mathcal{E}$

παιρνω  $A = \varphi_0(\vec{a})$ ,  $B = \varphi_0(\vec{b})$ ,  $\Gamma = \varphi_0(\vec{\gamma}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ γρ. ανεξαρτ.} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nexists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{a} \notin \mathcal{P}(\vec{b}, \vec{\gamma}) \Rightarrow A \notin p(OB, O\Gamma) \\ \nexists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{b} = \lambda \vec{\gamma} + \mu \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \notin \mathcal{P}(\vec{\gamma}, \vec{a}) \Rightarrow B \notin p(O\Gamma, OA) \\ \nexists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Rightarrow \vec{\gamma} \notin \mathcal{P}(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \Gamma \notin p(OA, OB) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \emptyset \neq p(OB, O\Gamma), p(O\Gamma, OA), p(OA, OB)$  δεν ταυτίζονται.

► Φέρνω  $p(MK, ML) \parallel p(OA, OB) \Rightarrow \Gamma A_1 = p(MK, ML) \cap O\gamma \Rightarrow O, \Gamma, \Gamma_1$  συνευθ.  
 $p(M\Lambda, MN) \parallel p(OB, O\Gamma) \Rightarrow A B_1 = p(M\Lambda, MN) \cap Oa \Rightarrow O, A, A_1$  συνευθ.  
 $p(MN, MK) \parallel p(O\Gamma, OA) \Rightarrow B_1 = p(MN, MK) \cap Ob \Rightarrow O, B, B_1$  συνευθ.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{O\Gamma} \parallel \vec{O\Gamma_1} \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{R} : \vec{O\Gamma_1} = \nu \vec{O\Gamma} \\ \vec{OA} \parallel \vec{OA_1} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{OA_1} = \lambda \vec{OA} \\ \vec{OB} \parallel \vec{OB_1} \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} : \vec{OB_1} = \mu \vec{OB} \end{array} \right.$$

$$\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM} = (\vec{OA_1} + \vec{OB_1}) + \vec{O\Gamma_1} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB} + \nu \vec{O\Gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{OM} \in \mathcal{E}_1$$

Αρα  $\vec{OM} \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \vec{OM} \in \mathcal{E}$  οπότε  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ .



Θ.  $\forall \vec{\delta} \in \mathcal{E}, \exists$  μοναδικά  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} : \vec{\delta} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma}$ , όπου  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$  χρ. ανεξ.

Απόδειξη:  $\vec{\delta} \in \mathcal{E} \Rightarrow \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} : \vec{\delta} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma}$   $\Rightarrow \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma} = \lambda' \vec{a} + \mu' \vec{b} + \nu' \vec{\gamma}$   
 Έστω  $\lambda', \mu', \nu' \in \mathbb{R} : \vec{\delta} = \lambda' \vec{a} + \mu' \vec{b} + \nu' \vec{\gamma}$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda') \vec{a} + (\mu - \mu') \vec{b} + (\nu - \nu') \vec{\gamma} = \vec{0}$$

Θα δείξω ότι  $\lambda' = \lambda, \mu' = \mu, \nu' = \nu$ .

Έστω  $\lambda' \neq \lambda$ . Τότε

$$(\lambda - \lambda') \vec{a} + (\mu - \mu') \vec{b} + (\nu - \nu') \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda - \lambda') \vec{a} = -(\mu - \mu') \vec{b} - (\nu - \nu') \vec{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{\mu - \mu'}{\lambda - \lambda'} \vec{b} - \frac{\nu - \nu'}{\lambda - \lambda'} \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ χρ. εξαρτιμένα} \leftarrow \text{Απορο, διότι}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$  χρ. ανεξάρτητα

Απο,  $\lambda' = \lambda, \mu' = \mu, \nu' = \nu \Rightarrow \lambda, \mu, \nu$  μοναδικά.

$\hookrightarrow$  Οι αριθμοί  $(\lambda, \mu, \nu)$  λέγονται συντεταγμένες του  $\vec{\delta}$  με βάση το σύνολο  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}\}$ .

$\forall$  Γραμμική εξάρτηση τεσσάρων διανυσμάτων. Έστω  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathcal{E}$

$$1) \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ γραμ. εξαρτιμένα} \Rightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{\gamma} + 0 \cdot \vec{\delta} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \text{ γραμ. εξαρτ.}$$

$$2) \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \text{ γραμ. ανεξαρτητά} \Rightarrow \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \text{ μοναδικά} : \vec{\delta} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{\gamma} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \text{ γραμ. εξαρτητά ανεξαρτιμένα.}$$

• ΑΡΑ:  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathcal{E}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \text{ χρ. εξαρτιμένα.}$

Προφανώς:  $\forall$  διανύσματα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  με  $n > 4$  είναι πάντοτε γραμμικός εξαρτιμένα.

$\forall$  Διάσταση

Είδαμε ότι

• Το  $\mathcal{A} = \{\lambda \vec{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  έχει μία βάση  $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$  με πληθάρημο  $|\mathcal{B}| = 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Το  $\mathcal{A}$  έχει διάσταση 1 ( $d(\mathcal{A}) = 1$ )

• Το  $\mathcal{P} = \{\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  έχει μία βάση  $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$  με πλ.  $|\mathcal{B}| = 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow d(\mathcal{P}) = 2$ .

• Ομοία,  $d(\mathcal{E}) = 3$ .

✓ Άλλες βάσεις των  $\mathcal{X}, \mathcal{P}, \mathcal{E}$ .

Πρόταση 1: Αν  $\mathcal{X} = \{ \lambda \vec{a} : \lambda \in \mathbb{R} \}$ , τότε  
 $\boxed{\vec{x} \in \mathcal{X}^* \iff B = \{ \vec{x} \} \text{ βάση του } \mathcal{X}}$

Απόδειξη: Ευθύ : Αν  $\vec{x} \in \mathcal{X}^* \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* : \vec{x} = k\vec{a}$  (1)

Για κάθε  $\vec{\delta} \in \mathcal{X} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{\delta} = \lambda \vec{a} = \frac{\lambda}{k} (k\vec{a}) = \left(\frac{\lambda}{k}\right) \vec{x}$ . Αν  $v = \frac{\lambda}{k}$

τότε  $\forall \vec{\delta} \in \mathcal{X}, \exists v \in \mathbb{R} : \vec{\delta} = v\vec{x} \Rightarrow B = \{x\}$  βάση του  $\mathcal{X}$

Αντίστροφο : Προφανές.

Πρόταση 2: Αν  $\mathcal{P} = \{ \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$   
 $\boxed{\begin{array}{l} \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{P} \\ \vec{u}, \vec{v} \text{ γραμμ. ανεξάρτητα} \end{array} \iff \{ \vec{u}, \vec{v} \} \text{ βάση του } \mathcal{P}.}$

Ευθύ Εστω  $O \in \mathcal{P}$  και  $A = \varphi_0(\vec{a}) \Rightarrow \vec{a} = O\vec{A}$   
 $B = \varphi_0(\vec{b}) \Rightarrow \vec{b} = O\vec{B}$   
 $\left. \begin{array}{l} \{ \vec{a}, \vec{b} \} \text{ βάση } \{ \vec{a}, \vec{b} \} \subset \mathcal{P} \end{array} \right\} \Rightarrow O, A, B \in \varphi_0(\mathcal{P}) = \mathcal{P}.$

$\Rightarrow O, A, B$  ορίζουν επίπεδο  $\mathcal{P} = \varphi_0(\mathcal{P})$ .

► Φέρνω  $A' = \varphi_0(\vec{u})$ ,  $B' = \varphi_0(\vec{v})$

και  $\mathcal{P}' = \{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$  με  $\mathcal{P}' = \varphi_0(\mathcal{P})$ . (ως γραμμικώς ανεξάρτητα)

Αλλά  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{P} \Rightarrow A', B' \in \mathcal{P}$  (κατ'  $O \in \mathcal{P}$ )  $\Rightarrow \mathcal{P}' = \mathcal{P} \Rightarrow \varphi_0(\mathcal{P}') = \varphi_0(\mathcal{P}) \xRightarrow{\varphi_0^{-1} \circ \varphi_0} \varphi_0^{-1}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{P}' \Rightarrow O, A', B' \in \mathcal{P}'$

$\Rightarrow \mathcal{P}' = \mathcal{P} \iff \{ \vec{u}, \vec{v} \} \text{ βάση των } \mathcal{P}.$

$\{ \vec{u}, \vec{v} \} \text{ βάση } \mathcal{P}'$

Αντίστροφο : προφανές

Πρόταση 3  $\boxed{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ γρ. ανεξ.} \iff \{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \} \text{ βάση του } \mathcal{E}}$

Ευθύ : Έχει αποδειχτεί ότι κάθε  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  γρ. ανεξ. παράγουν το  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$

Αντίστροφο : Προφανές

• ΚΡΙΤΗΡΙΑ: γραμμικής ανεξαρτησίας / εξαρτησης. (Θεωρία)

$$\textcircled{1} \quad \text{Αν ισχύει η} \quad \left. \begin{array}{l} p: \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ γρ. ανεξαρτητά.}$$

Απόδειξη: Θα δείξω ευθύ: Θα δείξω το αντιθετοαντίστροφο.

Εστω  $\vec{u}, \vec{v}$  γρ. εξαρτ.  $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{u} = \lambda \vec{v} \Rightarrow \vec{u} - \lambda \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow p$  ψευδής,  
διότι ισχύει η  $\bar{p}: \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \wedge (\lambda_1 \neq 0 \vee \lambda_2 \neq 0)$  για  $\lambda_1 = 1$  και  $\lambda_2 = -\lambda$ .

Αρα, αντιθετοαντίστροφα,  $p$  αληθής  $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$  γρ. ανεξ.

Αντίστροφο: Εστω  $\vec{u}, \vec{v}$  γρ. ανεξαρτητά.  $\Rightarrow \left( \forall \lambda_1, \lambda_2: \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \right)$   
Είναι,  $0\vec{u} + 0\vec{v} = \vec{0}$

διότι δείξαμε ότι αν  $\vec{u}, \vec{v}$  γρ. ανεξ. υπάρχει μόνο ένα ζεύγος  $\Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$  βάση  
(~~και  $\vec{0} \in \mathbb{P}$  μοναδικά~~)  $\Rightarrow$  υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές  $\lambda_1, \lambda_2$  που  
να δείχνουν  $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \in \mathbb{P}$  (οι  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ). Αρα ισχύει η  $p$ .

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} \lambda_1 \neq 0 \vee \lambda_2 \neq 0 \\ \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ γρ. εξαρτ.}$$

είναι αντιθετοαντίστροφη της  $\textcircled{1}$ .

(Απόδειξη: Με ατοπο. Εστω  $\vec{u}, \vec{v}$  γρ. εξαρτ. ανεξαρτητά  $\stackrel{\textcircled{2}}{\Rightarrow}$  ισχύει η  
 $p: \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \leftarrow$  Ατοπο. διότι ισχύει εξ' υποθέσεως  
η  $\bar{p}: (\lambda_1 \neq 0 \vee \lambda_2 \neq 0) \wedge \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0}$

$$\textcircled{3} \quad \text{Αν ισχύει η} \quad \left. \begin{array}{l} p: \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ γρ. ανεξαρτητά.}$$

Απόδειξη: ευθύ: Θα δείξω το αντιθετοαντίστροφο.

Εστω  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  γρ. εξαρτ.  $\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \Rightarrow \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow p$  ψευδής. διότι  $\bar{p}: \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \vec{0} \wedge |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$

αληθής για  $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \mu, \lambda_3 = -1$

Αρα αντιθετοαντίστροφα,  $p$  αληθής  $\Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  γρ. ανεξ.

Αντίστροφο

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ γρ. ανεξαρτ.} \Rightarrow (\nexists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0) \Rightarrow$$

$$0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$  ρ αληθής διότι οι  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ορίζονται μονοσήμαντα (υπάρχουν οι μοναδικοί συντελεστές  $0, 0, 0 : 0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$ .)

$$(4) \quad \left( \begin{array}{l} \lambda_1 \neq 0 \vee \lambda_2 \neq 0 \vee \lambda_3 \neq 0 \\ \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \vec{0} \end{array} \right) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ γρ. εξαρτ.}$$

ισχύει ως αντιστροφή της 3.

• Τα σύνολα  $\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{E}$  είναι κλειστά ως προς την πρόσθεση.

→ ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

$$(P_{10}) \quad \left( \begin{array}{l} \text{Αν για τα } \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OG} \text{ υπάρχουν } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} : \\ |k_1| + |k_2| + |k_3| \neq 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 \vec{OA} + k_2 \vec{OB} + k_3 \vec{OG} = \vec{0} \end{array} \right) \Leftrightarrow A, B, G \text{ συνευθειακά.}$$

Απόδειξη : Ευθύνη : Αρκεί  $\vec{AB}, \vec{BG}$  γρ. εξαρτ. (αφά  $\vec{AB}, \vec{AG} \in \mathcal{A}$ )

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0 \Rightarrow k_3 = -k_1 - k_2 \Rightarrow k_1 \vec{OA} + k_2 \vec{OB} + (-k_1 - k_2) \vec{OG} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$k_1 \vec{OA} + k_2 \vec{OB} + k_3 \vec{OG} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k_1 (\vec{OA} - \vec{OG}) + k_2 (\vec{OB} - \vec{OG}) = \vec{0} \Rightarrow k_1 \vec{GA} + k_2 \vec{GB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$$

$$\text{Αν } k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow k_3 = -k_1 - k_2 = 0 \leftarrow \text{Ατομό} \Rightarrow k_1 \neq 0 \vee k_2 \neq 0 \quad \vec{GA}, \vec{GB} \text{ γρ. εξαρτ.}$$

(Διότι  $|k_1| + |k_2| + |k_3| \neq 0$ )

$$\Rightarrow \vec{GA} \parallel \vec{GB} \Rightarrow A, B, G \text{ συνευθειακά.}$$

Γ κοίνο

Αντίστροφο :

$$\text{Αν } A, B, G \text{ συνευθειακά} \Rightarrow \vec{AB} = \lambda \vec{BG} \Rightarrow \vec{OB} - \vec{OA} = \lambda (\vec{OG} - \vec{OB}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{OB} - \vec{OA} - \lambda \vec{OG} + \lambda \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{OA} + (1 + \lambda) \vec{OB} - \lambda \vec{OG} = \vec{0}$$

Αρα για  $k_1 = -1, k_2 = 1 + \lambda, k_3 = -\lambda$  ισχύουν

$$|k_1| + |k_2| + |k_3| = |-1| + |1 + \lambda| + |-\lambda| \neq 0$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = -1 + (1 + \lambda) + (-\lambda) = 0$$

$$\text{και } k_1 \vec{OA} + k_2 \vec{OB} + k_3 \vec{OG} = \vec{0}.$$

Π<sub>11</sub> Αν για τα  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OG}, \vec{OD}$  υπάρχουν  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$  :

$$\left. \begin{aligned} &|k_1| + |k_2| + |k_3| + |k_4| \neq 0 \\ &k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ &k_1 \vec{OA} + k_2 \vec{OB} + k_3 \vec{OG} + k_4 \vec{OD} = \vec{0} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow A, B, \Gamma, D \text{ συνεπίπεδα}$$

Απόδειξη: Ευθύ

(2)  $\Rightarrow k_4 = -k_1 - k_2 - k_3$ , ορα (3)  $\Rightarrow k_1 \vec{OA} + k_2 \vec{OB} + k_3 \vec{OG} + (-k_1 - k_2 - k_3) \vec{OD} = \vec{0} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow k_1 (\vec{OA} - \vec{OD}) + k_2 (\vec{OB} - \vec{OD}) + k_3 (\vec{OG} - \vec{OD}) = \vec{0} \Rightarrow k_1 \vec{DA} + k_2 \vec{DB} + k_3 \vec{DG} = \vec{0}$ .

Αν  $k_1 = k_2 = k_3 = 0 \Rightarrow k_4 = -k_1 - k_2 - k_3 = 0 \Rightarrow |k_1| + |k_2| + |k_3| + |k_4| = 0 \leftarrow \text{Ατοπο}$

ορα  $k_1 \neq 0 \vee k_2 \neq 0 \vee k_3 \neq 0 \Rightarrow \vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DG}$  γρ. εξαρτημένα  $\Rightarrow$   
 $k_1 \vec{DA} + k_2 \vec{DB} + k_3 \vec{DG} = \vec{0}$

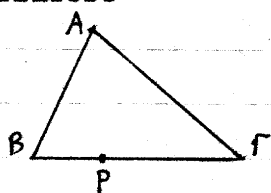
$\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \vec{DA} = \lambda \vec{DB} + \mu \vec{DG} \Rightarrow A, B, \Gamma, D \text{ συνεπίπεδα}$

~~Αντιπαράδοξο~~

Π<sub>12</sub> Αν σε τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$

$$\left. \begin{aligned} &P \in B\Gamma \\ &\vec{AP} = \xi_1 \vec{AB} + \xi_2 \vec{A\Gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 = 1$$

Απόδειξη:



Εστω βάση  $\{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}\}$  του  $P$  (διότι  $\vec{AB} \neq \vec{A\Gamma}$ )

1<sup>η</sup> διαδρομή:  $\xi_1 \vec{AB} + \xi_2 \vec{A\Gamma} = \vec{AP}$  (α)

2<sup>η</sup> διαδρομή:  $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} \xrightarrow{P \in B\Gamma} \vec{AP} = \vec{AB} + \lambda \vec{B\Gamma} = \vec{AB} + \lambda (\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) = (1-\lambda) \vec{AB} + \lambda \vec{A\Gamma}$  (β)

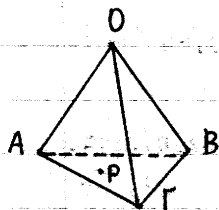
(1), (2)  $\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 1-\lambda \\ \xi_2 = \lambda \end{cases}$  (διότι ορίζονται  $\Rightarrow \xi_1 + \xi_2 = (1-\lambda) + \lambda = 1$ .  
 μονοσήμαντα)

Π<sub>13</sub> Σε τετράεδρο  $OAB\Gamma$

$$\left. \begin{aligned} &P \in (AB\Gamma) \\ &\vec{OP} = \xi_1 \vec{OA} + \xi_2 \vec{OB} + \xi_3 \vec{O\Gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$

Απόδειξη:

Εστω βάση  $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OG}\}$  του  $\varepsilon$  διότι  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OG}$  γρ. ανεξ.  
2<sup>η</sup> διαδρομή:



$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + \kappa \vec{AB} + \lambda \vec{AG} = \vec{OA} + \kappa(\vec{OB} - \vec{OA}) + \lambda(\vec{OG} - \vec{OA}) =$$

$\uparrow$   
 $P \in (AB\Gamma)$  και  $\{\vec{AB}, \vec{AG}\}$  βάση  
 του διανυσμ. επιπέδου  $(AB\Gamma)$  διότι  
 $\vec{AB} \neq \vec{AG}$

$$= (1-\kappa-\lambda)\vec{OA} + \kappa\vec{OB} + \lambda\vec{OG} \quad (1)$$

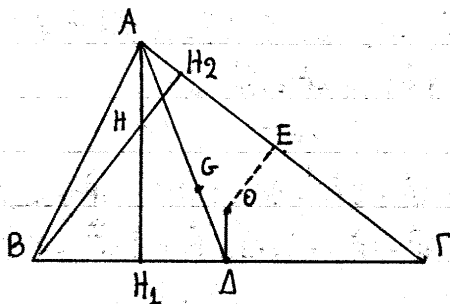
$$(1), \text{ υπ } \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 1-\kappa-\lambda \\ \xi_2 = \kappa \\ \xi_3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = (1-\kappa-\lambda) + \kappa + \lambda = 1$$

(διότι τα  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  ορ.  
 μονοσήμαντα)

• Προτάσεις πάνω στην ευθεία Euler.

(Π14) Σε τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$   
 $O$  περίκεντρο  
 $\Delta$  μέσο  $B\Gamma$   
 $H$  ορθόκεντρο  $\Rightarrow \vec{OD} = \frac{1}{2} \vec{AH}$

Απόδειξη



$$\Delta \text{ μέσο } B\Gamma \Rightarrow OD \text{ απόστημα} \Rightarrow OD \perp B\Gamma \Rightarrow AH \parallel OD \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{AH} = \lambda \vec{OD} \Rightarrow \vec{OD} = \frac{1}{\lambda} \vec{AH} \quad (1)$$

$$O \text{ περίκεντρο} \quad AH_1 \text{ ύψος} \Rightarrow AH \perp B\Gamma$$

$$Ομοια, \text{ Αν } E \text{ μέσο } A\Gamma \Rightarrow OE \parallel BH \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}: \vec{OE} = \mu \vec{BH} \Rightarrow \vec{OD} - \vec{OE} = \frac{1}{\lambda} \vec{AH} - \mu \vec{BH} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{ED} = \frac{1}{\lambda} \vec{AH} - \mu \vec{BH} \Rightarrow \frac{1}{2} \vec{AB} = \frac{1}{\lambda} \vec{AH} - \mu \vec{BH} \Rightarrow \frac{1}{2} (\vec{AH} - \mu \vec{BH}) = \frac{1}{\lambda} \vec{AH} - \mu \vec{BH} \Rightarrow$$

$$E \text{ μέσο } A\Gamma \Rightarrow \vec{ED} = \frac{1}{2} \vec{AB}$$

$$\Delta \text{ μέσο } B\Gamma$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \vec{AH} - \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \vec{BH} = \vec{0} \quad (2)$$

Θα δείξω ότι  $\vec{AH}, \vec{BH}$  γρ. ανεξ.



## ▼ Αλλαγή βάσης στο $\mathcal{E}$ (Μέθοδος)

Εστω  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  βάση στο  $\mathcal{E}$  και  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  για τα οποία

$$\vec{u} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$\vec{v} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

$$\vec{w} = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}$$

$$\Theta. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ βάση του } \mathcal{E}$$

Απόδειξη: Εστω  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) + \lambda_2 (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) + \lambda_3 (\gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 \gamma_1) \vec{i} + (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 \gamma_2) \vec{j} + (\lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 \gamma_3) \vec{k} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  βάση  $\Leftrightarrow \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  γρ. ανεξαρτητά

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 + \gamma_1 \lambda_3 = 0 \\ a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \gamma_2 \lambda_3 = 0 \\ a_3 \lambda_1 + b_3 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (Σ)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \text{το ομογενές } (Σ) \text{ έχει μια μόνο λύση}$$

$$\text{την } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ γρ. ανεξαρτητά} \Leftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ βάση του } \mathcal{E}.$$

• Για να μετατρέψω τις συτεταγμένες ενός διανύσματος  $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  σε συτεταγμένες με βάση τα  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ,

• Βρίσκω τα  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  συναρτήσει των  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ . Είναι (Cramer)

$$\vec{i} = \frac{1}{D} \vec{D}_i, \quad \vec{j} = \frac{1}{D} \vec{D}_j, \quad \vec{k} = \frac{1}{D} \vec{D}_k$$

$$\text{οπου, } D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \vec{D}_i = \begin{vmatrix} \vec{u} & a_2 & a_3 \\ \vec{v} & b_2 & b_3 \\ \vec{w} & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \vec{D}_j = \begin{vmatrix} a_1 & \vec{u} & a_3 \\ a_1 & \vec{v} & b_3 \\ \gamma_1 & \vec{w} & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \vec{D}_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \vec{u} \\ b_1 & b_2 & \vec{v} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \vec{w} \end{vmatrix}$$

$$\text{και αντικαθιστώ στην } \vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \dots = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}.$$



## ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΜΕΔΟ

### ▼ Αλγεβρική τιμή διανύσματος σε άξονα

Ορ. Έστω  $\vec{z} = \vec{OI}$  μοναδιαίο  $\rightarrow |\vec{z}| = 1$  το οποίο ορίζει την διανυσματική ευθεία  $\mathcal{A} = \{\lambda \vec{z} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Η εικόνα του  $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi_0} x'x$  στην οποία ορίζουμε την φορά του  $\vec{z}$  λέγεται άξονας  $x'x$  με αρχή 0

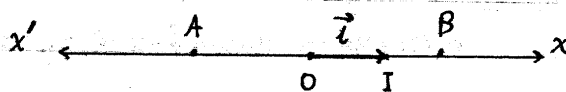
Ορ.  $\forall \vec{AB} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{AB} = \lambda \vec{z} \rightarrow \lambda = \overline{AB} \in \mathbb{R}$  (αλγεβρική τιμή διανύσματος)

•<sub>1</sub>  $\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AB} = \vec{0}$

•<sub>2</sub>  $\vec{AB} = -\vec{BA}$

•<sub>3</sub>  $\vec{AB} = \begin{cases} |\vec{AB}| \Leftrightarrow \vec{AB} \parallel \vec{z} \\ -|\vec{AB}| \Leftrightarrow \vec{AB} \uparrow \vec{z} \end{cases}$

•<sub>4</sub>  $\forall \vec{AB}, \vec{\Gamma\Delta} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \boxed{\vec{AB} = \lambda \vec{\Gamma\Delta}} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{z} = \lambda \vec{\Gamma\Delta} \cdot \vec{z} \Leftrightarrow \boxed{\overline{AB} = \lambda \overline{\Gamma\Delta}}$



Θ. Chasles

$$\boxed{\forall A, B, \Gamma \in (x'x), \overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}}$$

Απόδειξη  $A, B, \Gamma \in (x'x) \Rightarrow \vec{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{z} \wedge \vec{B\Gamma} = \overline{B\Gamma} \cdot \vec{z} \wedge \vec{A\Gamma} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{z}$

Έτσι,  $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \vec{z} + \overline{B\Gamma} \cdot \vec{z} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{z} \Rightarrow (\overline{AB} + \overline{B\Gamma}) \vec{z} = \overline{A\Gamma} \cdot \vec{z} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$ .

↳ Πορίσματα: 1)  $\overline{AB} = \overline{\Gamma B} - \overline{\Gamma A}$

2)  $\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} = \overline{A_1 A_n}$ , για σημεία του άξονα.

### ▼ Τετμημένη σημείου

Έστω μια απεικόνιση  $\mathcal{C}: (x'x) \rightarrow \mathbb{R}$  με την οποία

$$\forall M \in (x'x) \xrightarrow{\mathcal{C}} x \in \mathbb{R} : \vec{OM} = x \vec{z}$$

• Η  $\mathcal{C}$  είναι "1-1" και "επι" (Απόδειξη προφανής)  $\Rightarrow \boxed{(x'x) \sim \mathbb{R}}$

Έτσι ορίζεται και η  $\mathcal{C}^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (x'x)$  με την οποία

$$\forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^{-1}} M \in (x'x) : \vec{OM} = x \vec{z}$$

Ορ. Ο αριθμός που με την  $\mathcal{C}$  αντιστοιχεί στο σημείο  $M$  λέγεται τετμημένη του  $M$ . Συμβολισμός:  $M(x)$ .

Ορ. Το ζεύγος  $(0, \vec{z})$  λέγεται σύστημα αναφοράς στην  $x'x \rightarrow O\vec{z}$ .

$$\textcircled{\Pi_1} \quad \begin{matrix} A(x_1) \\ B(x_2) \end{matrix} \Rightarrow \overline{AB} = x_2 - x_1$$

Απόδειξη : Θ. Chasles :  $A \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_2 - x_1$   
 δίνει 0 αρχή.

$$\textcircled{\Pi_2} \quad \begin{matrix} M \text{ μέσο } AB \\ A(a), B(b), M(\mu) \end{matrix} \Rightarrow \mu = \frac{a+b}{2}$$

Απόδειξη :  $M \text{ μέσο } AB \Rightarrow (A, M) \sim (M, B) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{i} = \overrightarrow{MB} \cdot \vec{i} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{MB} \Rightarrow \mu - a = b - \mu \Rightarrow 2\mu = a + b \Rightarrow \mu = \frac{a+b}{2}$

Βασική

$$\textcircled{\Pi_3} \quad \begin{matrix} \forall A, B, \Gamma \in (x'x) \\ \overline{A\Gamma} = \lambda \overline{AB} \\ \overline{B\Gamma} = \lambda' \overline{BA} \end{matrix} \Rightarrow \lambda + \lambda' = 1$$

Απόδειξη :  $\overline{B\Gamma} = \lambda' \overline{BA} \Rightarrow \overline{BA} + \overline{A\Gamma} = \lambda' \overline{BA} \Rightarrow \overline{A\Gamma} = (\lambda' - 1) \overline{BA} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \overline{A\Gamma} = (1 - \lambda') \overline{AB} \Rightarrow 1 - \lambda' = \lambda \Rightarrow \lambda + \lambda' = 1.$   
 υπ  $\rightarrow \overline{A\Gamma} = \lambda \overline{AB}$

● Σημείο του Leibniz.

$$\forall A(a), B(b) \Rightarrow \exists G \in (x'x) : a \overline{GA} + b \overline{GB} = 0$$

$a+b \neq 0$        $G$  μοναδικό

Απόδειξη : Έστω  $G(g) : a \overline{GA} + b \overline{GB} = 0 \Leftrightarrow a(a-g) + b(b-g) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow a^2 - ag + b^2 - bg = 0 \Leftrightarrow (a+b)g = a^2 + b^2 \xrightarrow{a+b \neq 0} \text{ΜΜΛ. } g = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$

Το σημείο  $G$  είναι το σημείο Leibniz. Τότε

Θ. Για κάθε  $M \in (x'x)$

$$a \overline{MA}^2 + b \overline{MB}^2 - (a+b) \overline{MG}^2 = a \overline{GA}^2 + b \overline{GB}^2$$

Απόδειξη: Έστω  $M$  ένα τυχαίο σημείο και  
 $A(a), B(b), G\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right).$

$$\begin{aligned}
 A &= a \overline{MA}^2 + b \overline{MB}^2 - (a+b) \overline{MG}^2 = a(\overline{MG} + \overline{GA})^2 + b(\overline{MG} + \overline{GB})^2 - (a+b) \overline{MG}^2 = \\
 &= a(\overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GA} + \overline{GA}^2) + b(\overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GB} + \overline{GB}^2) - a\overline{MG}^2 - b\overline{MG}^2 = \\
 &= (a\overline{GA}^2 + b\overline{GB}^2) + (2a\overline{MG} \cdot \overline{GA} + 2b\overline{MG} \cdot \overline{GB}) = (a\overline{GA}^2 + b\overline{GB}^2) + 2\overline{MG}(a\overline{GA} + b\overline{GB}) = \\
 &= a\overline{GA}^2 + b\overline{GB}^2 = B.
 \end{aligned}$$

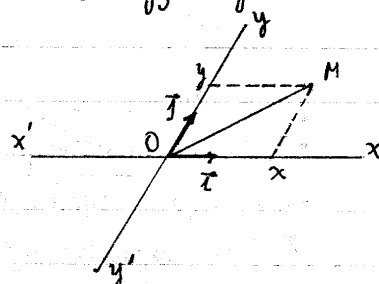
### ▼ Συντεταγμένες σημείου σε επίπεδο

Έστω δύο άξονες  $x'x, y'y$  με  $x'x \perp y'y = 0$  και  $\vec{i}, \vec{j}$  μοναδιαία διανύσματα τους αντιστοίχως, που ορίζουν επίπεδο  $P$  και  $P = \{x\vec{i} + y\vec{j} : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Έστω η απεικόνιση:  $c: P \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c: \forall M \in P \longrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Θ. Η  $c$  είναι απεικόνιση "1-1" και "επι".



Απόδειξη: i) Θα δείξω ότι η σχέση  $c$  είναι απεικόνιση.

$$\text{Αρκεί } M_1 = M_2 \overset{P}{\Rightarrow} c(M_1) = c(M_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Έστω } M_1 = M_2 \Rightarrow \vec{OM}_1 = \vec{OM}_2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{OM}_1 \in P &\Rightarrow \vec{OM}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \\
 \vec{OM}_2 \in P &\Rightarrow \vec{OM}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}
 \end{aligned}
 \xrightarrow{(1)}
 \begin{aligned}
 (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} &= \vec{0} \\
 \vec{i}, \vec{j} \text{ γρ. ανεξ.} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow c(M_1) = c(M_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ άρα } c \text{ απεικόνιση.}$$

ii) Θα δείξω ότι η απεικόνιση  $c$  είναι "1-1". Αρκεί  $c(M_1) = c(M_2) \Rightarrow M_1 = M_2$ .

$$\text{Έστω } c(M_1) = (x_1, y_1) \Rightarrow \vec{OM}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$c(M_2) = (x_2, y_2) \Rightarrow \vec{OM}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Αν } c(M_1) = c(M_2) &\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow x_1\vec{i} = x_2\vec{i} \wedge y_1\vec{j} = y_2\vec{j} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \Rightarrow \vec{OM}_1 = \vec{OM}_2 \Rightarrow M_1M_2 = \vec{0} \Rightarrow M_1 = M_2 \text{ άρα } c \text{ "1-1".}
 \end{aligned}$$

iii) Θα δείξω ότι η απεικόνιση  $c$  είναι "επι". Αρκεί  $c(P) = \mathbb{R}^2$ .

και για να είναι αυτά τα σύνολα ίσα αρκεί  $\forall (x,y) \in c(P) \iff (x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

Ξυθύ:  $(x,y) \in c(P) \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ , ισχύει προφανώς διότι  $c(P) \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Αντίστροφο:

$$\begin{aligned}
 \text{Αν } (x,y) \in \mathbb{R}^2 &\Rightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \in P \xrightarrow[\text{απεικ.}]{\varphi_0} \varphi_0(\vec{OM}) \in \varphi_0(P) \Rightarrow M \in P \xrightarrow[\text{απεικ.}]{c} c(M) \in c(P) \\
 &\quad \text{Ομως, } \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow c(M) = (x,y)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in c(P)$$

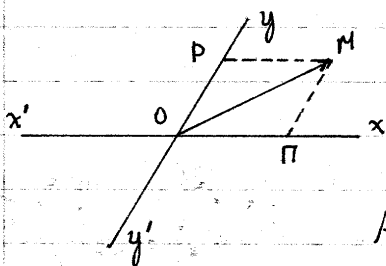
$$\text{Άρα } c(P) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow c \text{ "επι".}$$

→ Έτσι, ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση

$$c^{-1}: \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow M \in \rho: \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

η οποία είναι επίσης "1-1" και "επι".

•  $\rho, \mathbb{R}^2$  ισομορφικά



• Έστω ένα σημείο  $M \in \rho$ .

• Φαίνεται  $MP \parallel x'x$  με  $P \in y'y$  →  $OPMP \#$ .

$MQ \parallel y'y$  με  $Q \in x'x$ .

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OP} \cdot \vec{i} + \vec{OQ} \cdot \vec{j} \Rightarrow c(M) = (\vec{OP}, \vec{OQ})$$

Άρα η  $c$  και  $c: \rho \rightarrow \mathbb{R}^2$  κατασκευάζεται  
 $c$  "1-1", "επι"

→  $\rho, \mathbb{R}^2$  ισομορφικά.

→ Επίσης  $\rho \sim \mathbb{R}^2$

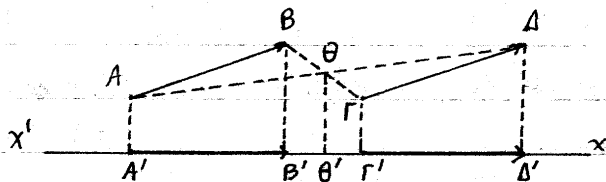
• Συντεταγμένες σημείου  $M$ , είναι το ζεύγος  $(\vec{OP}, \vec{OQ})$  ως προς  $(\vec{i}, \vec{j}) \leftarrow \pi, \rho$  προβολές του  $M$

▼ Συντεταγμένες διανυσμάτων σε διανυσματικό επίπεδο

Έστω  $(A, B), (C, D)$  εφαρμοσμένα διανύσματα και  $(A', B'), (C', D')$  οι προβολές τους σε άξονα  $x'x$ .

$$\Theta. (A, B) \sim (C, D) \Rightarrow (A', B') \sim (C', D')$$

Απόδειξη:



$$(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow AB, CD \text{ έχουν κοινό μέσο, έστω } \Theta$$

• Έστω  $\Theta'$  η προβολή του  $\Theta$  στην  $x'x$ .

$\Theta$  μέσο  $AB$

$BB' \Gamma' \Gamma$  τραπέζιο

$\Theta'$  προβολή  $\Theta$

$\Theta$  μέσο  $AD$

$AA' \Delta' \Delta$  τραπέζιο

$\Theta'$  προβολή  $\Theta$

$$\Theta' \text{ μέσο } A'D' \Rightarrow (A', B') \sim (C', D').$$

$\Theta' \text{ μέσο } B' \Gamma'$

$$\rightarrow \text{Άρα } \vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow \vec{A'B'} = \vec{C'D'}$$

δηλαδή η προβολή ενός διανύσματος  $\vec{\delta}$  σε άξονα είναι ανεξάρτητη

από τον αντιπροσωπευτικό  $\vec{\delta}$  και συμβολίζεται

$$\vec{A'B'} = \text{προβ}_{x'x} \vec{\delta} \text{ (ή } \text{proj}_{x'x} \vec{\delta})$$

Θ. Αν  $(A,B)$  αντιπροσωπεύει τον  $\vec{\delta}$  με  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  ως προς  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  και  $(x, y)$  οι συντεταγμένες του  $\vec{\delta}$  ως προς την βάση  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ , είναι

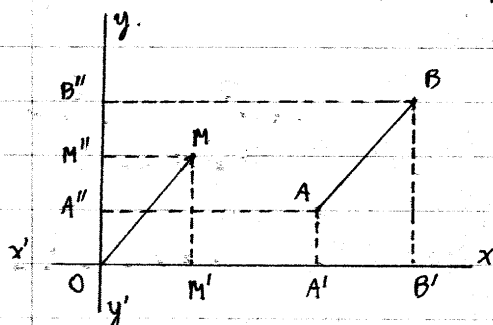
$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1.$$

Απόδειξη: Έστω  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  ως προς  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

$\vec{\delta} = (A, B) \in \vec{\delta}$  με συντεταγμένες  $(x, y)$  ως προς  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ .

► Φέρνω  $M = \varphi_0(\vec{\delta}) \Rightarrow \vec{OM} = \vec{AB} \vec{\delta} \Rightarrow \vec{OM} = \vec{AB}$   
 $(A, B) \in \vec{\delta} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{\delta}$

► Φέρνω  $M', A', B'$  προβολές των  $M, A, B$  στην  $x'x$   
 $M'', A'', B''$  προβολές των  $M, A, B$  στην  $y'y$ .



$A(x_1, y_1) \rightarrow \begin{cases} A'(x_1) \\ A''(y_1) \end{cases}$ ,  $B(x_2, y_2) \rightarrow \begin{cases} B'(x_2) \\ B''(y_2) \end{cases}$   
 $A', A''$  προβ. του  $A$ ,  $B', B''$  προβ. του  $B$

αρα  $\vec{A'B'} = x_2 - x_1$ ,  $\vec{A''B''} = y_2 - y_1$ .

Είναι  $\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M} = \vec{OM'} + \vec{OM''} = \vec{OM'} \cdot \vec{i} + \vec{OM''} \cdot \vec{j} \rightarrow \begin{cases} \vec{OM'} = x \\ \vec{OM''} = y \end{cases}$   
 $(x, y)$  συντεταγμένες  $\vec{\delta} = \vec{OM} \Rightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Αλλά  $\vec{\delta} = \vec{OM} = \vec{AB} \xrightarrow[\text{προβ.}]{\Theta.} \begin{cases} \vec{OM'} = \vec{A'B'} \Rightarrow x = x_2 - x_1 \\ \vec{OM''} = \vec{A''B''} \Rightarrow y = y_2 - y_1 \end{cases}$

Ετσι, συσχετίσαμε τις συντεταγμένες διανυσμάτων με τις συντεταγμένες σημείων.

▼ Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων.

Έστω τρία διανίσματα  $\vec{\delta}(x, y), \vec{\delta}_1(x_1, y_1), \vec{\delta}_2(x_2, y_2)$  ως προς βάση  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ .

Θ.  $\vec{\delta} = \lambda_1 \vec{\delta}_1 + \lambda_2 \vec{\delta}_2 \iff \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \end{cases}$

Απόδειξη:  $\vec{\delta} = \lambda_1 \vec{\delta}_1 + \lambda_2 \vec{\delta}_2 = \lambda_1(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + \lambda_2(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = \lambda_1 x_1 \vec{i} + \lambda_1 y_1 \vec{j} + \lambda_2 x_2 \vec{i} + \lambda_2 y_2 \vec{j} =$   
 $= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \vec{i} + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \vec{j} \iff \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \end{cases}$   
 $\vec{\delta} = x\vec{i} + y\vec{j}$

→ Ειδικές περιπτώσεις

$$1) \vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + y_1 \\ y = x_2 + y_2 \end{cases} \quad 2) \vec{d} = \lambda \vec{d}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda x_1 \\ y = \lambda y_1 \end{cases}$$

$$3) \vec{d} = -\vec{d}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x_1 \\ y = -y_1 \end{cases} \quad 4) \vec{d} = \vec{d}_1 - \vec{d}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 - x_2 \\ y = y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$5) \vec{d}_1 = \vec{d}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \text{ (ισότης διανυσμάτων)}$$

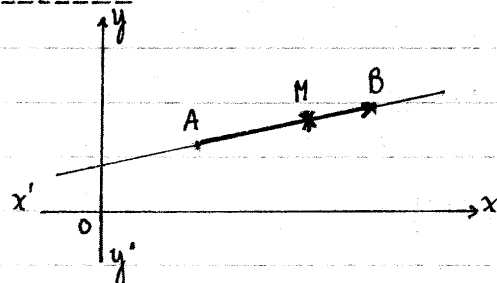
▼ Μερικός λόγος : Εστω εφαρμολο (A,B) με  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

Κάθε σημείο  $M \neq B$  της AB ορίζει τον λόγο

$$\lambda = \frac{AM}{MB} \rightarrow \text{Μερικός λόγος της τριάδας } (A, B, M)$$

$$\Theta. \begin{matrix} A, M \in (E)_{AB} \\ A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

Απόδειξη:



$$\text{Εστω } \lambda \text{ ο μερικός λόγος της } (A, B, M) \Rightarrow \lambda = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \vec{AM} = \lambda \vec{MB} \Rightarrow M \in AB \Rightarrow A, M, B \text{ συνευθ.} \Rightarrow \vec{AM} \parallel \vec{MB}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \lambda \vec{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M - x_A = \lambda(x_B - x_M) \Rightarrow x_M - x_A = \lambda x_B - \lambda x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \text{ αν} \\ y_M - y_A = \lambda(y_B - y_M) \Rightarrow y_M - y_A = \lambda y_B - \lambda y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \lambda \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Αν } \lambda = 1 \Rightarrow \vec{AM} = \vec{MB} \Rightarrow \vec{AM} = \vec{BM} \Rightarrow A = B \leftarrow \text{Ατοπο.}$$

$$\rightarrow 1) \text{Αν } \lambda = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow A = M$$

$$\lambda = 1 \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow M \text{ μέσο } AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

$$2) \text{Αν } \lambda > 0 \Rightarrow \vec{AM} \parallel \vec{MB} \Rightarrow M \in AB$$

$$\text{Αν } \lambda < 0 \Rightarrow \vec{AM} \nparallel \vec{MB} \Rightarrow \begin{cases} \lambda < -1 \Rightarrow M \in \text{pr. } AB \Rightarrow M \notin \text{BA} \\ -1 < \lambda < 0 \Rightarrow M \in \text{pr. } BA \Rightarrow A \in MB \end{cases}$$

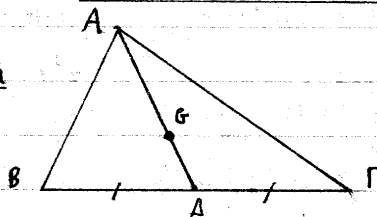
$$-1 < \lambda < 0 \Rightarrow M \in \text{pr. } BA \Rightarrow A \in MB$$

• Εφαρμογή

$$\text{Αν } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3) \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$

G βαρικόκετρο ΑΒΓ

Απόδειξη



• Εστω ΑΔ διάμεσος  
G βαρικόκετρο  $\Rightarrow G \in AD$  με μερικό λόγο  $\frac{AG}{GD} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_1 + 2x_D}{1+2} = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} & (x_D = \frac{x_2 + x_3}{2}, \text{ διότι Δ μέσο ΒΓ}) \\ y_G = \frac{y_1 + 2y_D}{1+2} = \frac{y_1 + 2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} & (y_D = \frac{y_2 + y_3}{2}, \text{ διότι Δ μέσο ΒΓ}) \end{cases}$$

▼ Συνθήκη συγχρημικότητας διανυσμάτων, εστω  $\vec{\delta}_1(x_1, y_1), \vec{\delta}_2(x_2, y_2)$ .

$$\Theta. \quad \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2 \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη: Ευθύ

$$\text{Αν } \vec{\delta}_1 \neq \vec{0}, \text{ τότε } \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : \vec{\delta}_1 = \lambda \vec{\delta}_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_2 \\ y_1 & \lambda y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Αν } \vec{\delta}_1 = \vec{0} \Rightarrow x_1 = y_1 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Αντιθέτως: Αν  $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0 \Rightarrow \vec{\delta}_1 = \vec{\delta}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2$ . Εστω  $x_1 \neq 0$

$$\text{Αν } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \xrightarrow{x_1 \neq 0} y_2 = \frac{x_2}{x_1} y_1 = \lambda y_1,$$

όπου  $\lambda = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \lambda x_1 \Rightarrow \vec{\delta}_2 = \lambda \vec{\delta}_1 \Rightarrow \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2.$

• Αντιστροφo αντίστα:  $\vec{\delta}_1 \nparallel \vec{\delta}_2 \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \iff \{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2\} \text{ βάση του } \mathbb{R}^2$

▼ Ανάλυση διανύσματος  $\vec{a}(x,y)$  σε συνιστώσες  $\vec{u}(u_x, u_y), \vec{v}(v_x, v_y)$

Πρέπει  $\vec{u}, \vec{v}$  γραμμικώς ανεξάρτητα  $\Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \neq 0$ .

$$\text{Εστω } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \vec{a} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x \\ y = \lambda_1 u_y + \lambda_2 v_y \end{cases} \quad (\Sigma)$$

$$D = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{το } (\Sigma) \text{ έχει ΜΜΛ } \lambda_1 = \frac{D_1}{D}, \lambda_2 = \frac{D_2}{D} \text{ όπου,}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} x & v_x \\ y & v_y \end{vmatrix} = xv_y - yv_x \quad \text{και} \quad D_2 = \begin{vmatrix} u_x & x \\ u_y & y \end{vmatrix} = yu_x - xu_y.$$

$$\text{Άρα} \quad \boxed{\vec{a} = \frac{xv_y - yv_x}{u_x v_y - u_y v_x} \vec{u} + \frac{yu_x - xu_y}{u_x v_y - u_y v_x} \vec{v}}$$

▼ Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος

Ορισμός: Αν  $\vec{\delta}(a,b) : \vec{a} \neq \vec{0}$  και  $\vec{\delta} \nparallel y'y$  ) συντελεστής διεύθυνσης λέγεται ο λόγος  $\boxed{\lambda = \frac{b}{a}}$

Θ. Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ο ίδιος για τα διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση.

Απόδειξη

$$\text{Εστω } \vec{\delta}(a,b) \parallel \vec{\delta}'(a',b') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0 \Leftrightarrow ab' = a'b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Leftrightarrow \lambda = \lambda'.$$

→ Έτσι, ο συντελεστής διεύθυνσης λέμε ότι αποτελεί ιδιότητα της διεύθυνσης και όχι μόνο των συγκεκριμένων διανυσμάτων.

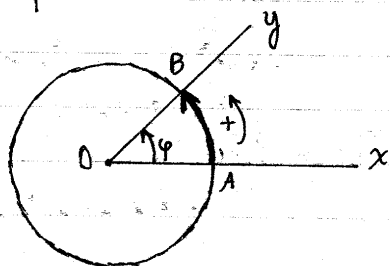
•<sub>1</sub> Αν  $b=0 \Leftrightarrow \vec{\delta} \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda=0$

•<sub>2</sub> Αν  $a=0 \Leftrightarrow \vec{\delta} \parallel y'y \Leftrightarrow \lambda \notin \mathbb{R}$



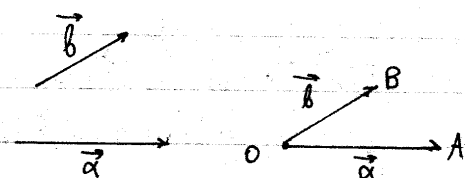
## Εσωτερικό γινόμενο και εφαρμογές του

▼ Γωνία δύο ημιευθειών  $(Ox, Oy) \rightarrow$  κυρτή προσανατολισμένη γωνία με αρχική πλευρά  $Ox$  και τελική  $Oy$ . Η φορά της (+ ή -) συμπίπτει με την φορά του τόξου  $AB$  ενός προσανατολισμένου κύκλου. Η αλγεβρική της τιμή συμπίπτει με την φορά του τόξου είναι η αλγεβρική τιμή του  $\widehat{AB}$ .



Αν  $\varphi = (Ox, Oy), \forall Ox, Oy$   
τότε 
$$-\pi < \varphi \leq \pi.$$

▼ Γωνία δύο διανυσμάτων  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$



► Έστω  $O \in \mathbb{R}^n$  σημείο.

$$A = \varphi_0(\vec{a}), B = \varphi_0(\vec{b})$$

$$\text{Ορίσω } \boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$$

• Αν  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$

• Αν  $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = \pi$

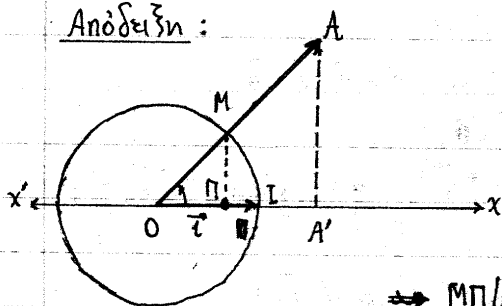
•  $(\vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{b})$

• Η γωνία που σχηματίζει το τυχαίο  $\vec{d}$  με έναν άξονα  $x'x$  στον οποίο ορίζεται μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{i}$  είναι  $(\vec{i}, \vec{d})$

▼ Αλγεβρική τιμή προβολής διανύσματος

Αν  $x'x$  άξονας με μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{i}$ , και  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  τότε  
Θ. 
$$\boxed{\text{προβ}_{x'x} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi(\vec{i}, \vec{a})}$$

Απόδειξη:



► Αν  $O$  αρχή του άξονα, παίρνω  $A = \varphi_0(\vec{a}) \rightarrow \overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .  
και  $A' = \text{προβ}_{x'x} A$ .

► Φέρνω κύκλο  $(O, OI)$  όπου  $I = \varphi_0(\vec{i})$  και

παίρνω  $M = (O, OI) \cap OA$  και  $\Pi = \text{προβ}_{x'x} M$ .

$$M \in OA \Rightarrow \overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OA'} \Rightarrow \frac{OA'}{OP} = \frac{OA'}{OP} \quad (1)$$

$$\Rightarrow MP \parallel AA' \text{ (ως } \perp x'x) \Rightarrow \frac{OA'}{OP} = \frac{OA}{OM} = (\overrightarrow{OA}) =$$

(διότι  $OM = OI \rightarrow$  μονάδα)

$$= |\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}|, \text{ Αλλά } (1) \Rightarrow \frac{OA'}{OP} = \frac{OA'}{OP} = |\vec{a}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\text{προβ}_{\chi\chi} \vec{a}} = \overline{OA'} = |\vec{a}| \cdot \overline{OP} \quad \left. \begin{array}{l} \overline{OP} = \sin(\vec{r}, \vec{a}) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{\text{προβ}_{\chi\chi} \vec{a}} = |\vec{a}| \sin(\vec{r}, \vec{a})$$

▼ Προβολή διανύσματος  $\vec{a}\vec{b}$  στα  $\vec{a}$   $\rightarrow$  λέγεται η προβολή του  $\vec{b}$  σε άξονα παρ/λο στο  $\vec{a}$ .

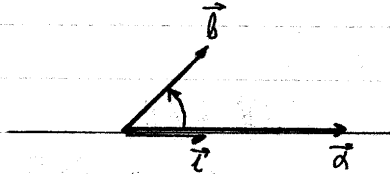
Συμβολισμός:  $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b}$ , όπου  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}^*$

Εστω άξονας  $\chi\chi$  με  $\vec{r} \parallel \vec{a}$ .

$$\Theta. \quad \begin{array}{l} \vec{r} \parallel \vec{a} \Rightarrow \overline{\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b}} = |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{r} \nparallel \vec{a} \Rightarrow \overline{\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b}} = -|\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \end{array}$$

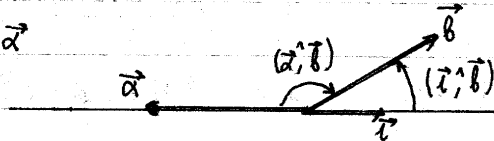
Απόδειξη: Είναι  $\overline{\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b}} = \overline{\text{προβ}_{\chi\chi} \vec{b}} = |\vec{b}| \sin(\vec{r}, \vec{b})$ . (1)

i) Εστω  $\vec{r} \parallel \vec{a}$



$$\vec{r} \parallel \vec{a} \Rightarrow (\vec{r}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \sin(\vec{r}, \vec{b}) = \sin(\vec{a}, \vec{b}) \xrightarrow{(1)} \overline{\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b}} = |\vec{b}| \sin(\vec{r}, \vec{b}) = |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

ii) Εστω  $\vec{r} \nparallel \vec{a}$



$$\begin{aligned} \vec{r} \nparallel \vec{a} \Rightarrow (\vec{r}, \vec{b}) &= -[180 - (\vec{a}, \vec{b})] \Rightarrow \sin(\vec{r}, \vec{b}) = \sin\{-[180 - (\vec{a}, \vec{b})]\} = \\ &= \sin[180 - (\vec{a}, \vec{b})] = -\sin(\vec{a}, \vec{b}) \xrightarrow{(1)} \overline{\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b}} = |\vec{b}| \sin(\vec{r}, \vec{b}) = -|\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

### ▼ Εσωτερικό γινόμενο

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{b}$  και το συμβολίζουμε  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  τον αριθμό

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}), & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}. \end{cases}$$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \bullet (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \bullet \text{Εν γένει } (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{\gamma} \neq \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{\gamma}).$$

• ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sin \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

• Εσωτερικό γινόμενο συγγραμμικών διανυσμάτων.  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}^*$

Θ.  ~~$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$~~

Θ.  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$ , όπου  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  σε άξονα  $\chi\chi'$

Απόδειξη:  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b} \vee \vec{a} \downarrow \vec{b}$

i) Αν  $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 1$

οπότε  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$ .

Αλλά  $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Rightarrow \vec{OA}, \vec{OB}$  ομόσημα  $\Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0$

ii) Αν  $\vec{a} \downarrow \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = \pi \Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = -1$ .

οπότε  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}$ .

Αλλά  $\vec{a} \downarrow \vec{b} \Rightarrow \vec{OA}, \vec{OB}$  ετερόσημα  $\Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} < 0$

• Εσωτερικό τετράγωνο  $\rightarrow \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

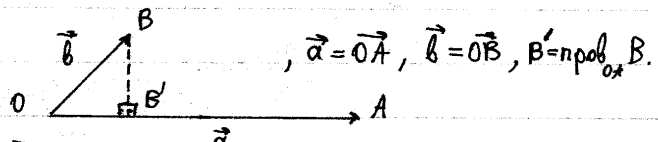
Θ. Το εσωτερικό τετράγωνο ενός διανύσματος είναι ίσο με το τετράγωνο του μέτρου του, δηλ.  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Απόδειξη:  $\vec{a} \uparrow \vec{a} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{a}) = 1 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$ .

$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{a})$

• Άλλες μορφές του εσωτερικού γινόμενου

Θ.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = (\vec{OA} \cdot \vec{OB}') = \vec{OA} \cdot \vec{OB}'$



Απόδειξη: i) Θα δείξω ότι  $\vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}'$ .

$A = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}' = \vec{OA} \cdot \vec{OB}' = B$ .

$\vec{OA} \parallel \vec{OB}'$

ii) Θα δείξω ότι  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}'$ .

► Εστω άξονας  $\chi\chi' \parallel \vec{a}$  με μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{e}$ .

α) Αν  $\vec{e} \uparrow \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{OA} = |\vec{a}| \vec{e} \\ \vec{OB}' = \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB}' = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ .

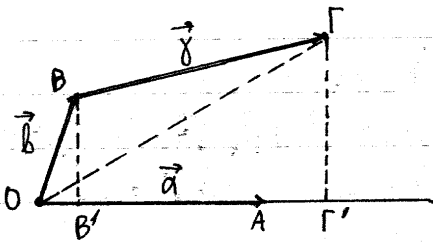
β) Αν  $\vec{e} \downarrow \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \vec{OA} = -|\vec{a}| \vec{e} = -|\vec{a}| \vec{e} \\ \vec{OB}' = -|\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \vec{e} \end{cases} \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB}' = -|\vec{a}| \cdot (-|\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Έτσι έχουμε  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB}' = \vec{OA} \cdot \vec{OB}'$

- Σημειωτική ιδιότητα

$$\theta. \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in E, \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}.$$

Απόδειξη



► Παίρνω σημείο Ο και τα σημεία

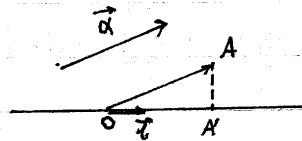
$$A = \varphi_0(\vec{a}) \Rightarrow \vec{a} = \vec{OA}$$

$$B = \varphi_0(\vec{b}) \Rightarrow \vec{b} = \vec{OB}$$

$$\Gamma = \psi_B(\vec{\gamma}) \Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\theta}\Gamma$$

οπότε έχω:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot (\vec{0B} + \vec{0\Gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{0\Gamma} = \vec{0A} \cdot \vec{0\Gamma}' \stackrel{\text{Check}}{=} \vec{0A} \cdot (\vec{0B}' + \vec{0\Gamma}') =$   
 $= \vec{0A} \cdot \vec{0B}' + \vec{0A} \cdot \vec{0\Gamma}' = \vec{0A} \cdot \vec{0B} + \vec{0A} \cdot \vec{0\Gamma} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathcal{E}.$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{l} = \vec{OA} \cdot \vec{l} = \vec{OA} \cdot \vec{x} = \vec{OA}'$$



## ● ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

$$1) \forall \vec{a}, \vec{b} \in E, (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

Απόδειξη

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in E, (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \\ = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$2) \forall \vec{a}, \vec{b} \in E, (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

Απόδειξη

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in E, (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} - \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

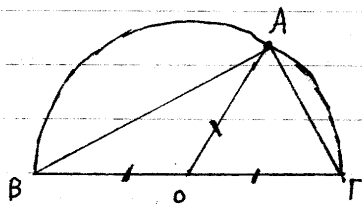
3)  $\forall \vec{a}, \vec{b} \in E, |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} -1 \leq \overline{\text{cov}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq 1 &\Rightarrow |\text{cov}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})| \leq 1 \Rightarrow |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\text{cov}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\text{cov}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Rightarrow |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|, \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E. \end{aligned}$$

▼ Εφαρμογές στην Ευκλείδειο γεωμετρία → (βλ. συνθήκη καθετότητας)

1) Κάθε γωία εφαρμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.



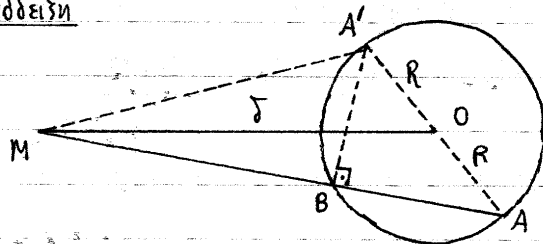
Απόδειξη: Αρκεί  $\vec{BA} \cdot \vec{AF} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{BA} \cdot \vec{AF} &= (\vec{OA} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OF}) = (\vec{OA} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \\ &= \vec{OA}^2 - \vec{OB}^2 = |\vec{OA}|^2 - |\vec{OB}|^2 = R^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \vec{BA} \perp \vec{AF} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{A} = 90. \end{aligned}$$

2) Από σημείο M φέρνουμε ευθεία η οποία τέμνει κύκλο  $(O, R)$  στα σημεία A και B.

$$\chi_o(M) = \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \text{σταθ.}$$

Απόδειξη



► Φέρνω  $AA'$  διάμετρο και τα  $MA', A'B, AA'$ .

$$\begin{aligned} \hat{B} \text{ εγγ. σε ημικύκλιο} &\Rightarrow \hat{B} = 90 \Rightarrow B = \text{προβ}_{\vec{MA}} A' \Rightarrow \vec{MB} = \text{προβ}_{\vec{MA}} \vec{MA'} \\ \chi_o(M) = \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MA'} = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OA'}) = \\ &= (\vec{MO} + \vec{OA})(\vec{MO} - \vec{OA}) = \vec{MO}^2 - \vec{OA}^2 = \delta^2 - R^2 \end{aligned}$$

▼ Συνθήκη καθετότητας διανυσμάτων

$$\Theta. \boxed{\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}^*, \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

Απόδειξη

$$\text{Ευθυ: } \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

Αντίστροφο

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

▼ Αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου.

Εστω ένα σύστημα αναφοράς  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\bullet \boxed{(O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ ορθογώνιο} \iff \vec{i} \perp \vec{j}}$$

$$\bullet \boxed{(O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ ορθοκανονικό} \iff \vec{i} \perp \vec{j} \wedge |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1}$$

Απο εδώ και πέρα, θα θεωρούμε ορθοκανονικά συστήματα αναφοράς.

$$\Theta. \text{ Αν } \vec{a}(\alpha_1, \alpha_2), \vec{b}(\beta_1, \beta_2) \text{ ως προς } \left. \begin{array}{l} \text{βάση } \{\vec{i}, \vec{j}\} \text{ ορθοκανονική} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

Απόδειξη :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}) \cdot (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}) = \alpha_1 \beta_1 \vec{i}^2 + \alpha_1 \beta_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + \alpha_2 \beta_1 \vec{i} \cdot \vec{j} + \alpha_2 \beta_2 \vec{j}^2$   
 $= \alpha_1 \beta_1 \vec{i}^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \vec{i} \cdot \vec{j} + \alpha_2 \beta_2 \vec{j}^2$ .

Αλλά  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  ορθοκανονική  $\Rightarrow \begin{cases} |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \Rightarrow \vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1 \wedge \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases}$

οπότε  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$ .

1)  $|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$  2)  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0$

• Ειδική συνθήκη καθετότητας (με συντελεστή διευθύνσεως)

Θ.  $\left. \begin{matrix} \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}^* \\ \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \end{matrix} \right\} \Rightarrow (\vec{a} \perp \vec{b}) \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

Απόδειξη :  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 \neq 0 \wedge \beta_1 \neq 0$   
 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \cdot \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

▼ Απόσταση δύο σημείων  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \rightarrow$  λέγεται το μέτρο του διανύσματος  $\vec{AB}$  και συμβολίζεται  $d(A, B)$ .

Θ.  $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόδειξη :  $A(x_1, y_1) \rightarrow \vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Rightarrow |\vec{AB}|^2 = \vec{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} =$   
 $= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

▼ Συνημίτονο γωνίας δύο διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}^*$

Θ.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$

Απόδειξη :

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$

• Ανάλυση διανύσματος σε κάθετες συνιστώσες  $\vec{p}, \vec{q}$

άπο τις οποίες η μία έχει διεύθυνση γνωστού διανύσματος  $\vec{a}$

Εστω  $\vec{b} \in \mathcal{E}^*$  το διάνυσμα,  $\vec{p} \perp \vec{q}$ ,  $\vec{q} \parallel \vec{a}$ . άπου

Είναί  $\vec{p} + \vec{q} = \vec{b}$ . (1)

$$\vec{p} \perp \vec{q} \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$$

$$\vec{q} \parallel \vec{a} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* : \vec{q} = k\vec{a}$$

$$\vec{p} \cdot (k\vec{a}) = 0 \Rightarrow k \cdot (\vec{p} \cdot \vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{a} = 0 \quad (2)$$

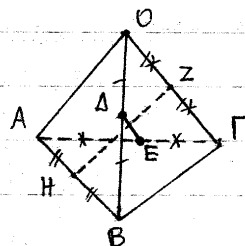
$$(1) \Rightarrow \vec{b} = \vec{p} + \vec{q} \Rightarrow \vec{b} = \vec{p} + k\vec{a} \xrightarrow{\cdot \vec{a}} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{p} + k\vec{a} \cdot \vec{a} \xrightarrow{(2)} k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

$$\text{οπότε } \vec{q} = k\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \alpha_1 \\ q_2 = \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{q} \left( \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \alpha_1, \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \alpha_2 \right)$$

$$\text{και } \vec{p} = \vec{b} - \vec{q} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = b_1 - \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \alpha_1 \\ p_2 = b_2 - \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{p} \left( b_1 - \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, b_2 - \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \alpha_2 \right)$$

• Βασική πρόταση στο τετράεδρο

$$1) \begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{BG} = 0 \\ \vec{OB} \cdot \vec{GA} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{OG} \cdot \vec{AB} = 0$$



$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη : } \vec{OA} \cdot \vec{BG} = 0 &\Rightarrow \vec{OA}(\vec{OG} - \vec{OB}) = 0 \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OG} - \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \\ \vec{OB} \cdot \vec{GA} = 0 &\Rightarrow \vec{OB}(\vec{OA} - \vec{OG}) = 0 \Rightarrow \vec{OB} \cdot \vec{OA} - \vec{OB} \cdot \vec{OG} = 0 \\ \Rightarrow \vec{OG}(\vec{OA} - \vec{OB}) &= 0 \Rightarrow \vec{OG} \cdot \vec{BA} = 0 \Rightarrow \vec{OG} \cdot \vec{AB} = 0. \quad (\text{τα τμήματα } OG, AB \text{ είναι ασυμβάτως κάθετα}) \end{aligned}$$

$$2) \text{ Αν } H \text{ μέσο } AB, Z \text{ μέσο } OG, \Delta \text{ μέσο } OB, E \text{ μέσο } OG \text{ και } d_1 = DE, d_2 = HZ \text{ τότε } \vec{OA} \cdot \vec{BG} = 0 \Rightarrow d_1 = d_2$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \vec{DE} &= \vec{DO} + \vec{OE} = \vec{DE} \Rightarrow 2\vec{DE} = (\vec{DO} + \vec{OE}) + (\vec{DE} + \vec{DE}) = (\vec{OA} + \vec{OB}) + (\vec{DO} + \vec{OB}) + (\vec{AE} + \vec{GE}) = \\ &= (\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{0} + \vec{0} = \vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow d_1 = |\vec{DE}| = \frac{1}{2} |\vec{OA} + \vec{OB}| \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ομοια, } 2\vec{ZH} = \vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{ZH} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB}) \Rightarrow d_2 = |\vec{ZH}| = \frac{1}{2} |\vec{OA} + \vec{OB}| \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow d_1^2 = \frac{1}{4} (\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB}) = \frac{1}{4} (\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2) \Rightarrow d_1^2 = d_2^2$$

$$(2) \Rightarrow d_2^2 = \frac{1}{4} (\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB}) = \frac{1}{4} (\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2) \quad d_1 > 0, d_2 > 0 \Rightarrow d_1 = d_2$$

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η ΕΥΘΕΙΑ

#### ▼ Γραμμές

- Γράφημα  $G$  μιας συνάρτησης  $f \in F_A$ , λέγεται το σύνολο  

$$G = \{ (x, f(x)) : x \in A \}$$

- Γραφική παράσταση της  $f$ , λέγεται το σύνολο των σημείων  

$$C = \{ M(x, y) : (x, y) \in G \}$$

Αν  $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  η απεικόνιση του επιπέδου στο σύνολο  $\mathbb{R}^2$ , είναι

$$G_f = C(C_f) \quad \text{και} \quad C_f = C^{-1}(G_f)$$

- Ευθεία  $\mathbb{R}^2$  μπορεί να τέμνει την  $C_f$  σε ένα το πολύ σημείο διότι  $f$  συνάρτηση.  
Γενικότερα

- Γραμμή της εξίσωσης  $\varphi(x, y) = 0$  λέμε το σύνολο  

$$C_\varphi = \{ M \in \mathbb{R}^2 : M(x, y) \wedge \varphi(x, y) = 0 \}$$

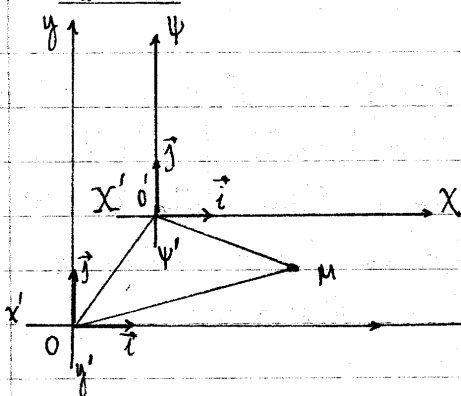
Φυσικά, ισχύει

$$\begin{aligned} M(x, y) \in C_\varphi &\Rightarrow \varphi(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 &\Rightarrow M(x, y) \in C_\varphi \end{aligned}$$

#### ▼ Αλλαγή συστήματος αναφοράς

Θέσω  $(x, y)$  οι συντεταγμένες του  $M$  ως προς το  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  και  $(X, \Psi)$  ως προς το  $(0', \vec{i}', \vec{j}')$  όπου  $0' = (x_0, y_0)$ . Τότε  $x = x_0 + X$ ,  $y = y_0 + \Psi$ .

Απόδειξη



$$\begin{aligned} M(x, y) \text{ ως προς } (0, \vec{i}, \vec{j}) &\Rightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ O'(x_0, y_0) \text{ ως προς } (0', \vec{i}', \vec{j}') &\Rightarrow \vec{O'D'} = x_0\vec{i}' + y_0\vec{j}' \\ \Rightarrow \vec{O'M} &= \vec{O'O} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{O'D'} = \\ &= (x\vec{i} + y\vec{j}) - (x_0\vec{i}' + y_0\vec{j}') = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M(x_0 + X, y_0 + \Psi) \\ &\Rightarrow M(x - x_0, y - y_0) \text{ ως προς } (0', \vec{i}', \vec{j}') \\ &\text{Είναι και } M(X, \Psi) \text{ ως προς } (0', \vec{i}', \vec{j}') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x - x_0 = X \wedge y - y_0 = \Psi \Rightarrow x = x_0 + X \wedge y = y_0 + \Psi$$

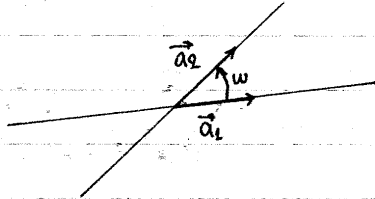


- Αν  $f(x,y)=0$  η εξίσωση της  $C$  ως προς  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  τότε η εξίσωση της ως προς το  $(0', \vec{i}', \vec{j}')$  είναι  $f(x-x_0, y-y_0)=0 \Rightarrow F(X, Y)=0$ .

### ▼ Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας $(\epsilon)$

Εστω δύο ευθείες  $(\epsilon_1)$  και  $(\epsilon_2)$ . και  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{E} : \vec{a}_1 \parallel (\epsilon_1) \wedge \vec{a}_2 \parallel (\epsilon_2) \wedge (\vec{a}_1, \vec{a}_2) > 0$

(γενικά ισχύει  $-\pi < (\vec{a}_1, \vec{a}_2) \leq +\pi$  αλλά  
θέλουμε την ειδική περίπτωση).



▼ Γωνία των  $(\epsilon_1)$  και  $(\epsilon_2)$  λέμε την δεδιχη κυρτή γωνία  $\omega = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) > 0$

Συμβολισμός:  $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \omega \rightarrow \boxed{n(\epsilon_2) \text{ σχηματίζει με την } (\epsilon_1) \text{ γωνία } \omega}$

•  $\boxed{(\epsilon_1^\wedge, \epsilon_2) + (\epsilon_2^\wedge, \epsilon_1) = \pi}$

▼ Συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  της  $(\epsilon) \nparallel y'y$  είναι ο σταθερός συντελεστής διεύθυνσης κάθε διανύσματος  $\vec{a} \parallel (\epsilon)$ .

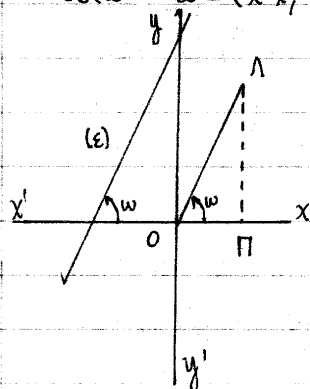
•  $(\epsilon) \parallel x'x \Rightarrow$

Θ.

Θ.  $\boxed{\forall (\epsilon), \lambda = \epsilon \varphi(x'x^\wedge, (\epsilon))}$

Απόδειξη

Εστω  $\omega = (x'x^\wedge, \epsilon) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{0}\vec{\lambda} \parallel \epsilon \xrightarrow{\mu\epsilon} \varphi(\vec{0}\vec{\lambda}, (\vec{i}, \vec{0}\vec{\lambda})) > 0 \Rightarrow \omega = (\vec{i}, \vec{0}\vec{\lambda}) \Rightarrow$



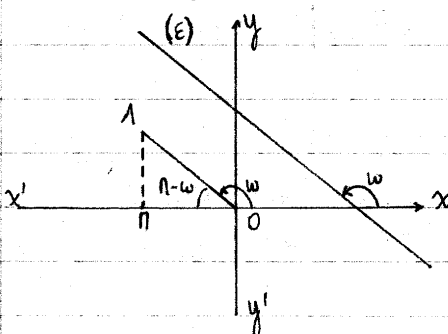
$\Rightarrow 1) \text{ Αν } \omega < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \epsilon \varphi \omega = \frac{\pi \lambda}{\sigma \pi} = \frac{\pi \lambda}{\overline{\sigma \pi}} = \lambda \text{ (διότι } \lambda \in x' \hat{y} \Rightarrow \overline{\sigma \pi}, \overline{\pi \lambda} > 0)$

οπότε επειδή  $\omega = (x'x^\wedge, \epsilon) \Rightarrow \lambda = \epsilon \varphi(x'x^\wedge, \epsilon)$

Ομοια 2) Αν  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \epsilon \varphi \omega = -\epsilon \varphi(\pi - \omega) = -\frac{\pi \lambda}{\sigma \pi} = \frac{\pi \lambda}{-\overline{\sigma \pi}} = \frac{\pi \lambda}{\overline{\sigma \pi}} = \lambda$

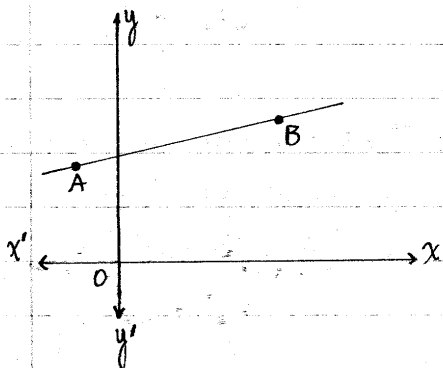
οπότε επειδή  $\omega = (x'x^\wedge, \epsilon) \Rightarrow \lambda = \epsilon \varphi(x'x^\wedge, \epsilon)$



$\left\{ \begin{array}{l} \omega = 0 \iff (\epsilon) \parallel x'x \iff \lambda = 0 \\ \omega = \pi/2 \iff (\epsilon) \parallel y'y' \iff \lambda \notin \mathbb{R} \end{array} \right.$

Θ.  $\boxed{A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{(\varepsilon)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \quad , \text{όπου } x_2 \neq x_1.$

Απόδειξη



$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &\rightarrow \vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rightarrow \lambda \vec{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1) \\ B(x_2, y_2) & \\ A, B \in (\varepsilon) &\rightarrow \vec{AB} \parallel (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{(\varepsilon)} = \lambda_{\vec{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1) \end{aligned}$$

▼ Συνθήκες παραλληλότητας - καθετότητας δύο ευθειών  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$

Εστω  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2) \nparallel y'y$  με συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Θ<sub>1</sub>.  $\boxed{(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2}$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \text{Εστω } \vec{a}, \vec{b} \in \varepsilon : \vec{a} \parallel (\varepsilon_1) \wedge \vec{b} \parallel (\varepsilon_2) \wedge (\vec{a}, \vec{b}) > 0 &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_{\vec{a}} \wedge \lambda_2 = \lambda_{\vec{b}} \\ (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) &\Leftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}_1} = \lambda_{\vec{a}_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ \vec{a}_1 \parallel (\varepsilon_1) & \\ \vec{a}_2 \parallel (\varepsilon_2) & \end{aligned}$$

Θ<sub>2</sub>.  $\boxed{(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1}$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \text{Εστω } \vec{a}, \vec{b} \in \varepsilon : \vec{a} \parallel (\varepsilon_1) \wedge \vec{b} \parallel (\varepsilon_2) \wedge (\vec{a}, \vec{b}) > 0 &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_{\vec{a}} \wedge \lambda_2 = \lambda_{\vec{b}} \\ (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) &\Leftrightarrow \vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}_1} \cdot \lambda_{\vec{a}_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1 \\ \vec{a}_1 \parallel (\varepsilon_1) & \\ \vec{a}_2 \parallel (\varepsilon_2) & \end{aligned}$$

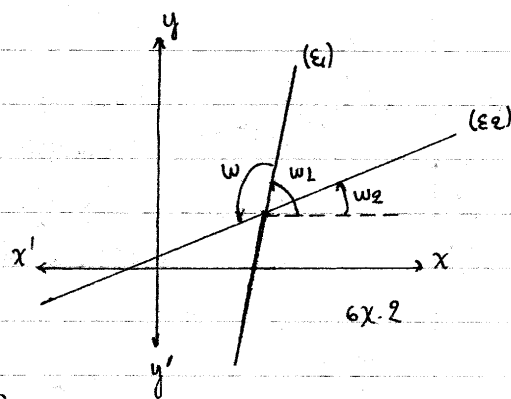
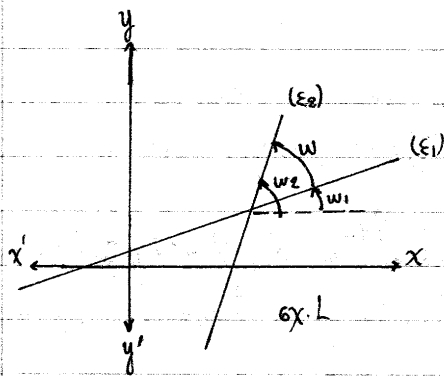
▼ Εφαπτόμενη γωνίας δύο ημιευθειών

Εστω  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  δύο ευθείες θ με  $(\varepsilon_1) \nparallel (\varepsilon_2)$  και  $(\varepsilon_1^\wedge, \varepsilon_2) = \omega$ .

Θ.  $\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \begin{cases} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \lambda_2} & , \text{αν } (\varepsilon_1) \nparallel y'y \text{ και } (\varepsilon_2) \nparallel y'y \\ \frac{1}{\lambda_1} & , \text{αν } (\varepsilon_2) \parallel y'y \end{cases}}$

Απόδειξη

Εστω  $\omega = (\varepsilon_1^\wedge, \varepsilon_2)$ ,  $\omega_1 = (x'x, \varepsilon_1)$ ,  $\omega_2 = (x'x, \varepsilon_2)$ .



$$\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad \vee \quad \omega = \pi + (\omega_2 - \omega_1) \quad (1)$$

(σx·1)                      (σx·2)

1) Αν  $(\epsilon_1) \nparallel y'y$  και  $(\epsilon_2) \nparallel y'y$  τότε

i) Αν  $\omega = \omega_2 - \omega_1 \Rightarrow \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi(\omega_2 - \omega_1) = \frac{\epsilon\varphi\omega_2 - \epsilon\varphi\omega_1}{1 + \epsilon\varphi\omega_1 \cdot \epsilon\varphi\omega_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}$

ii) Αν  $\omega = \pi + (\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi[\pi + (\omega_2 - \omega_1)] = \epsilon\varphi(\omega_2 - \omega_1) = \dots = \dots = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}$

2) Αν  $(\epsilon_2) \parallel y'y \Rightarrow \omega_2 = (\epsilon_2) \perp x'x \Rightarrow \omega_2 = (\epsilon_2 \wedge x'x) = \frac{\pi}{2}$

, οπότε  $(1) \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} - \omega_1 \quad \vee \quad \omega = \pi + (\frac{\pi}{2} - \omega_1)$

i) Αν  $\omega = \frac{\pi}{2} - \omega_1 \Rightarrow \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \omega_1) = \epsilon\varphi\omega_1 = \frac{1}{\epsilon\varphi\omega_1} = \frac{1}{\lambda_1}$

ii) Αν  $\omega = \pi + (\frac{\pi}{2} - \omega_1) \Rightarrow \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi[\pi + (\frac{\pi}{2} - \omega_1)] = \epsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \omega_1) = \dots = \dots = \frac{1}{\lambda_1}$

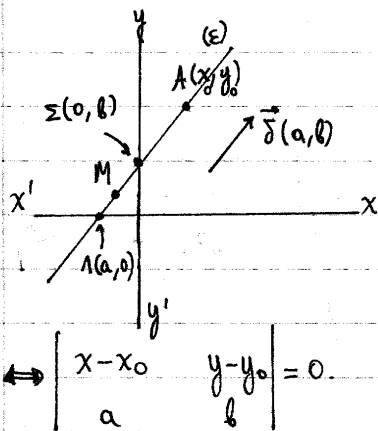
οπότε γενικά  $\epsilon\varphi\omega = \begin{cases} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1\lambda_2} & , \text{αν } (\epsilon_1) \nparallel y'y, (\epsilon_2) \nparallel y'y \\ \frac{1}{\lambda_1} & , \text{αν } (\epsilon_2) \parallel y'y. \end{cases}$

### ▼ Προσδιορισμός εξίσωσης ευθείας (ε)

$$\left( \begin{array}{l} (\epsilon) \parallel \vec{\sigma}(a,b) \neq 0 \\ A(x_0, y_0) \in (\epsilon) \end{array} \right) \Rightarrow (\epsilon): \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη  $M \in (\epsilon) \iff$  Έστω  $M(x_0, y_0)$  σημείο της  $(\epsilon)$ .

$$\begin{aligned} M \in (\epsilon) &\iff \vec{AM} \parallel (\epsilon) \\ A \in (\epsilon) &\iff \vec{\sigma} \parallel (\epsilon) \end{aligned} \iff \vec{AM} \parallel \vec{\sigma}$$



Έστω  $M(x_0, y_0)$  σημείο της  $(\epsilon)$ .

$$M(x_0, y_0) \rightarrow \vec{AM}(x-x_0, y-y_0)$$

$$A(x_0, y_0) \rightarrow \vec{AM}(x-x_0, y-y_0)$$

$$M \in (\epsilon) \iff \vec{AM} \parallel (\epsilon) \iff \vec{AM} \parallel \vec{\delta} \iff \begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Παρατηρήσεις

•  $1 \text{ Av } \boxed{\vec{\delta} \parallel y'y} \Rightarrow a=0 \Rightarrow (\epsilon): b(x-x_0)=0 \Rightarrow (\epsilon): x-x_0=0 \Rightarrow (\epsilon): x=x_0 \Rightarrow \boxed{(\epsilon) \parallel y'y}$   
 $a=0 \wedge \vec{\delta} \neq \vec{0} \Rightarrow b \neq 0$

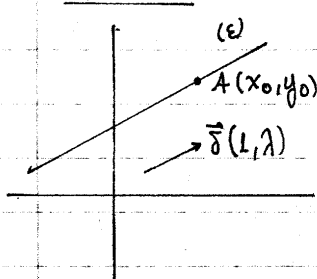
•  $2 \text{ Av } \boxed{\vec{\delta} \parallel x'x} \Rightarrow b=0 \Rightarrow (\epsilon): a(y-y_0)=0 \Rightarrow (\epsilon): y-y_0=0 \Rightarrow (\epsilon): y=y_0 \Rightarrow \boxed{(\epsilon) \parallel x'x}$   
 $b=0 \wedge \vec{\delta} \neq \vec{0} \Rightarrow a \neq 0$

•  $\text{Av } \begin{cases} \vec{\delta} \nparallel x'x \\ \vec{\delta} \nparallel y'y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (\epsilon): a(y-y_0) - b(x-x_0) = 0 \Rightarrow \frac{y-y_0}{b} - \frac{x-x_0}{a} = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \boxed{(\epsilon): \frac{y-y_0}{b} = \frac{x-x_0}{a}} \rightarrow \text{Av } (x_0, y_0) = (0, 0) \quad \boxed{y = \frac{b}{a}x}$

•  $H \begin{cases} (\epsilon) \cap (x'x) = \Lambda(a, 0) \\ (\epsilon) \cap (y'y) = \Sigma(0, b) \end{cases} \rightarrow (a, b) \text{ συντεταγμένες επί την αρχή.}$

②  $\left. \begin{matrix} A(x_0, y_0) \in (\epsilon) \nparallel (y'y) \\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ γνωστός λόγος διεύθυνσης} \end{matrix} \right\} \Rightarrow (\epsilon): y-y_0 = \lambda(x-x_0)$

Απόδειξη



Έστω το διάνυσμα  $\vec{\delta}(1, \lambda)$

$$\lambda \delta = \frac{\lambda}{1} = \lambda \epsilon \Rightarrow (\epsilon) \parallel \vec{\delta}(1, \lambda) \xrightarrow{①} (\epsilon): \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(x-x_0) - (y-y_0) = 0 \Rightarrow (\epsilon): y-y_0 = \lambda(x-x_0)$$

Παρατηρήσεις

•  $1 \text{ Av } \lambda = 0 \Rightarrow y-y_0 = 0 \Rightarrow (\epsilon): y=y_0 \Rightarrow (\epsilon) \parallel x'x.$

•  $2 \text{ Av } \boxed{A(0, b) \in (\epsilon)} \Rightarrow (\epsilon): y-b = \lambda(x-0) \Rightarrow \boxed{(\epsilon): y = \lambda x + b}$

•  $3 \text{ Av } \boxed{O(0, 0) \in (\epsilon)} \Rightarrow (\epsilon): y-0 = \lambda(x-0) \Rightarrow \boxed{(\epsilon): y = \lambda x}$

$$\textcircled{3} \quad \begin{matrix} A(x_1, y_1) \in (\epsilon) \\ B(x_2, y_2) \in (\epsilon) \end{matrix} \Rightarrow (\epsilon): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη  $\begin{matrix} A(x_1, y_1) \in (\epsilon) \\ B(x_2, y_2) \in (\epsilon) \end{matrix} \Rightarrow \vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \parallel (\epsilon) \xrightarrow{(1)} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$

Είναι  $\forall (x, y) \in (\epsilon)$ ,  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\epsilon): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} A(a, 0) \in (\epsilon) \\ B(0, b) \in (\epsilon) \end{matrix} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Παρατήρηση

$$\begin{matrix} (\epsilon) \nparallel x'x \text{ και } A(x_1, y_1) \\ (\epsilon) \nparallel y'y' \text{ και } B(x_2, y_2) \end{matrix} \Rightarrow (\epsilon): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Απόδειξη  $\begin{matrix} (\epsilon) \nparallel x'x \text{ και } A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{matrix} \Rightarrow \vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \parallel (\epsilon) \Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 \neq 0 & (1) \\ y_2 - y_1 \neq 0 & (2) \end{cases}$

$$\begin{matrix} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{matrix} \Rightarrow (\epsilon): \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0 \xrightarrow{(2)}$$

$$\Rightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1) \xrightarrow{(1)} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow (\epsilon): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

▼ Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

$$\Theta_1 \quad \forall (\epsilon) \text{ ευθεία}, \exists A, B, \Gamma \in \mathbb{R} \text{ με } |A| + |B| \neq 0 : (\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0$$

Απόδειξη

Έστω  $(\epsilon)$  ευθεία.

► Παίρνω  $A(x_0, y_0) \in (\epsilon)$  και  $\vec{\delta}(a, b) \parallel \epsilon \xrightarrow{(1)} (\epsilon): \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$   
 όπου  $\vec{\delta} \in \mathcal{E}^*$

$$\Rightarrow b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \Rightarrow bx + (-a)y + (ay_0 - bx_0) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτω } A = b, B = -a, \Gamma = ay_0 - bx_0 \xrightarrow{(1)} (\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0.$$

$$\text{Είναι και } \vec{\delta} \in \mathcal{E}^* \Rightarrow \vec{\delta} \neq \vec{0} \Rightarrow b \neq 0 \text{ ή } -a \neq 0 \Rightarrow |a| + |b| \neq 0 \Rightarrow b$$

$$\Rightarrow |A| + |B| = |b| + |-a| = |a| + |b| \neq 0$$

$$\text{άρα } \exists A, B, \Gamma \in \mathbb{R} \text{ με } |A| + |B| \neq 0 : (\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0$$

$$\Theta_2. \left. \begin{array}{l} |A|+|B| \neq 0 \\ (c): Ax+By+\Gamma=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (c) \text{ ευθεία}$$

Απόδειξη: i)  $\forall B \neq 0, (c): Ax+By+\Gamma=0 \Rightarrow By = -Ax-\Gamma \Rightarrow$   
 $\Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B} \leftarrow \text{ευθεία με } \lambda = -\frac{A}{B} \text{ και τεταγμένη επί την αρχή } -\frac{\Gamma}{B}$

ii)  $\forall B=0, (c): Ax+\Gamma=0 \Rightarrow x = -\frac{\Gamma}{A} \leftarrow \text{ευθεία με παράλληλη με την } y'y.$   
 $|A|+|B| \neq 0 \Rightarrow A \neq 0$

• Η μορφή  $Ax+By+\Gamma=0$  με  $|A|+|B| \neq 0$  παριστάνει ευθεία και κάθε ευθεία γράφεται σε αυτή την μορφή. Η μορφή λέγεται γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

$$\begin{array}{l} \swarrow \forall B=0 \Rightarrow (c) \parallel y'y \\ \searrow \forall B \neq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_c = -\frac{A}{B}} \end{array}$$

▼ Διάνυσμα παράλληλο ή κάθετο σε ευθεία

$$\Theta_3. \boxed{(c): Ax+By+\Gamma=0 \text{ με } |A|+|B| \neq 0 \Rightarrow \vec{\delta}(B, -A) \parallel (c) \wedge \vec{\delta}'(A, B) \perp (c)}$$

Απόδειξη. Έστω  $(c): Ax+By+\Gamma=0$  με  $|A|+|B| \neq 0$ .

i)  $\forall B \neq 0 \Rightarrow \lambda_c = -\frac{A}{B}$  οπότε

$$\lambda \vec{\delta} = \frac{-A}{B} = \lambda_c \Rightarrow (c) \parallel \vec{\delta} \quad \text{και} \quad \lambda \vec{\delta}' = \frac{B}{A} = \frac{-1}{-\frac{A}{B}} = \frac{-1}{\lambda_c}$$

$\forall B=0 \Rightarrow (c) \parallel y'y \wedge \vec{\delta} \parallel y'y \Rightarrow (c) \parallel \vec{\delta}.$

ii)  $\vec{\delta}' \cdot \vec{\delta} = A \cdot B + B \cdot (-A) = 0 \Rightarrow \vec{\delta}' \perp \vec{\delta} \Rightarrow \vec{\delta}' \parallel (c).$   
 $\vec{\delta} \parallel (c)$

▼ Συντρέχουσες ευθείες  $\Leftrightarrow \{(c_1), (c_2), (c_3)\} \text{ συντρέχουσες} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{E} : (c_1) \cap (c_2) \cap (c_3) = \{M\}$

$\Theta.$  Έστω  $(c_1): a_1x+b_1y+\gamma_1=0, (c_2): a_2x+b_2y+\gamma_2=0, (c_3): a_3x+b_3y+\gamma_3=0.$

$$(c_1), (c_2), (c_3) \text{ συντρέχουσες} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \wedge |a_1|+|a_2|+|a_3| \neq 0$$

όπου  $\Gamma$  όπου  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  οι ελάσσονες ορίζουσες των  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

### Απόδειξη

$$\text{Εστω } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \wedge |\Gamma_1| + |\Gamma_2| + |\Gamma_3| \neq 0 \Rightarrow \text{Το } 3 \times 2 \text{ σύστημα } \begin{cases} a_1 x + b_1 y + \gamma_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + \gamma_2 = 0 \\ a_3 x + b_3 y + \gamma_3 = 0 \end{cases} \text{ έχει ΜΗΛ}$$

$$\text{Έστω την } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + \gamma_1 = 0 \Leftrightarrow M(x_0, y_0) \in (\epsilon_1) \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + \gamma_2 = 0 \Leftrightarrow M(x_0, y_0) \in (\epsilon_2) \\ a_3 x_0 + b_3 y_0 + \gamma_3 = 0 \Leftrightarrow M(x_0, y_0) \in (\epsilon_3) \end{cases} \Leftrightarrow \{M\} = \epsilon_1 \cap \epsilon_2 \cap \epsilon_3 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  συνευθεύονται.

▼ Σημεία συνευθεία  $\Leftrightarrow A, B, \Gamma$  συνευθεία  $\Leftrightarrow \exists (\epsilon) \text{ ευθεία} : A, B, \Gamma \in (\epsilon)$

$$\Theta. \quad \begin{matrix} A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \Gamma(x_3, y_3) \\ A, B, \Gamma \text{ συνευθεία} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

### Απόδειξη

$$\triangleright \text{Έστω } (\epsilon) \text{ η ευθεία των } B, \Gamma. \quad \begin{matrix} B(x_2, y_2) \\ \Gamma(x_3, y_3) \end{matrix} \Rightarrow (\epsilon): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A, B, \Gamma \text{ συνευθεία} \Leftrightarrow A \in (\epsilon) \Leftrightarrow \begin{matrix} A(x_1, y_1) \\ A(x_1, y_1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

▼ Σχετική θέση δύο ευθειών  $(\epsilon_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 = 0$   $(\epsilon_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 = 0$

$$1) \epsilon_1 \cap \epsilon_2 = \{M\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$2) \epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \left( \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

$$3) \epsilon_1 \equiv \epsilon_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

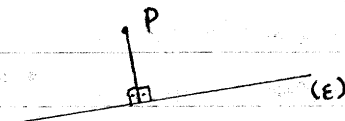
• Με τον περιορισμό  $A_2 B_2 \Gamma_2 \neq 0$  οι συνθήκες αυτές γράφονται

$$\epsilon_1 \cap \epsilon_2 = \{M\} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \quad \epsilon_1 \equiv \epsilon_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$$

## ▼ Απόσταση σημείου από ευθεία

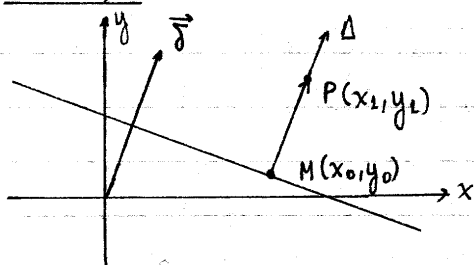
Ορίσμος : Έστω μία ευθεία  $(\epsilon)$  και  $P$  σημείο.

Απόσταση  $d(P, \epsilon)$  του σημείου  $P$  από την  $(\epsilon)$  λέγεται το μήκος του κάθετου τμήματος που συνδέει την  $(\epsilon)$  με το  $P$ .



$$\theta) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Αν } P(x_1, y_1) \\ (\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \epsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Απόδειξη



► Έστω  $M(x_0, y_0)$  το ίχνος της κάθετου στην  $(\epsilon)$  από το  $P$ .

$$\vec{MP} (x_1 - x_0, y_1 - y_0). \quad (1) \quad \text{Αρκεί } d(P, \epsilon) = |\vec{MP}|.$$

$$M \in (\epsilon) \Rightarrow Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0 \Rightarrow \Gamma = -(Ax_0 + By_0) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{► Έστω } \vec{\delta}(A, B) \in \mathcal{E} & \Rightarrow \vec{\delta} \perp (\epsilon) \Rightarrow \vec{MP} \parallel \vec{\delta} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{\delta} = \lambda \vec{MP} \\ (\epsilon): Ax + By + \Gamma = 0 & \quad \vec{MP} \perp (\epsilon) \end{aligned}$$

$$\text{► Έστω } \Delta = \varphi_M(\vec{\delta}) \Rightarrow \vec{\delta} = \vec{M\Delta} = \lambda \vec{MP} \Rightarrow M, \Delta, P \text{ συνευθειακά} \quad (3)$$

$$\text{► Έστω } \Delta = \varphi_M(\vec{\delta}) \Rightarrow \vec{\delta} = \vec{M\Delta} \parallel \vec{MP} \Rightarrow \vec{\delta} \cdot \vec{MP} = \vec{M\Delta} \cdot \vec{MP} = \vec{M\Delta} \cdot \vec{MP} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι και } \vec{\delta} \cdot \vec{MP} &= A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0) \quad (2) \\ \vec{\delta}(A, B) & \xrightarrow{(1)} \vec{\delta} \cdot \vec{MP} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0) \\ \vec{MP}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) & \xrightarrow{(1)} \vec{\delta} \cdot \vec{MP} = Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0) = Ax_1 + By_1 + \Gamma - (Ax_0 + By_0 + \Gamma) \\ & \xrightarrow{(2)} Ax_1 + By_1 + \Gamma = \vec{M\Delta} \cdot \vec{MP} \Rightarrow \\ & \xrightarrow{(3)} \vec{\delta} \cdot \vec{MP} = \vec{M\Delta} \cdot \vec{MP} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |Ax_1 + By_1 + \Gamma| = |\vec{M\Delta} \cdot \vec{MP}| = |\vec{M\Delta}| \cdot |\vec{MP}| = |\vec{M\Delta}| \cdot |\vec{MP}| = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot d(P, \epsilon) \Rightarrow$$

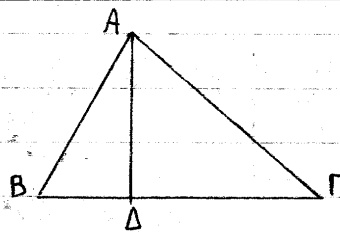
$$\Rightarrow d(P, \epsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Εφαρμογή - θεωρία : Εμβαδό τριγώνου.

$$\begin{pmatrix} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \\ \Gamma(x_3, y_3) \end{pmatrix} \Rightarrow (\hat{A\hat{B}\hat{\Gamma}}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Απόδειξη



$$E = (\hat{A\hat{B}\hat{\Gamma}}) = \frac{1}{2} (B\Gamma) \cdot (A\Delta) = \frac{1}{2} |\vec{B\Gamma}| \cdot d(A, B\Gamma). \quad \text{Αρκεί να βρω το } d(A, B\Gamma).$$

$$\begin{pmatrix} B(x_2, y_2) \\ \Gamma(x_3, y_3) \end{pmatrix} \Rightarrow (B\Gamma): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (B\Gamma): \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & & B & & \Gamma \end{matrix}$

$A(x_1, y_1)$

$$\Rightarrow d(P, \epsilon) = \frac{\left| \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}^2}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}} = \frac{1}{|\vec{B\Gamma}|} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow (\hat{A\hat{B}\hat{\Gamma}}) = \frac{1}{2} |\vec{B\Gamma}| \cdot d(A, B\Gamma) =$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{B\Gamma}| \cdot \frac{1}{|\vec{B\Gamma}|} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

## ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΕΥΘΕΙΩΝ

Μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών, λέμε γενικά:

για πρωτοβάθμια ως προς  $x, y$  εξίσωση που περιέχει μια παράμετρο, και η οποία για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου στο  $\mathbb{R}$ , ορίζει ένα σύνολο ευθειών.

- <sub>1</sub> Η οικογένεια όλων των  $(\epsilon_k)$  με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = a$  είναι η  $(\epsilon_k): y = ax + k, k \in \mathbb{R}$ .

- <sub>2</sub> Η οικογένεια όλων των ευθειών που διέρχονται από το  $O(0,0)$  είναι η  $(\epsilon_k): y = kx, k \in \mathbb{R}$  \* μαζί με την  $(\epsilon): x = 0$ .

- Η οικογένεια όλων των ευθειών που διέρχονται από το  $P(x_0, y_0)$  είναι η  $(\epsilon_k): y - y_0 = k(x - x_0)$  \* μαζί με την  $(\epsilon): x = x_0$ .

Θ. Δέσμης ευθειών  $(\delta_k) \text{ P-δέσμη} \iff \bigcup (\epsilon) \in (\delta_k): P \in (\epsilon)$

Έστω  $P(x_0, y_0) = \epsilon_1 \cap \epsilon_2$  όπου  $(\epsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$  και  $(\epsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ .

$(\delta_k) \text{ P-δέσμη} \iff (\delta_k) = (\epsilon_k) \cup (\epsilon_2)$  όπου  $(\epsilon_k): (A_1 + kA_2)x + (B_1 + kB_2)y + (\Gamma_1 + k\Gamma_2) = 0$

Απόδειξη: Ευθύ: Έστω  $(\delta_k) \text{ P-δέσμη} \iff (\delta_k) = \{ (\epsilon): P \in (\epsilon) \}$

► Θα δείξω ότι  $(\epsilon_k)$  οικογένεια ευθειών

Έστω ότι  $\exists k \in \mathbb{R}: (\epsilon_k)$  όχι ευθεία  $\Rightarrow |A_1 + kA_2| + |B_1 + kB_2| = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_1 + kA_2 = 0 \\ B_1 + kB_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = -kA_2 \\ B_1 = -kB_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -kA_2 & -kB_2 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_1 \cap \epsilon_2 = \emptyset$  άτοπο  
δωτί  $P = \epsilon_1 \cap \epsilon_2$

Αρα  $\forall k \in \mathbb{R}: (\epsilon_k)$  ευθεία  $\Rightarrow (\epsilon_k)$  οικογένεια ευθειών.

► Θα δείξω ότι όλες οι  $(\epsilon_k)$  διέρχονται από το  $P$ .

$P \in P = \epsilon_1 \cap \epsilon_2 \Rightarrow \begin{cases} P \in (\epsilon_1) \Rightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 = 0 \\ P \in (\epsilon_2) \Rightarrow A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}, (A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1) + k(A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2) = 0 + k \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}, (A_1 + kA_2)x_0 + (B_1 + kB_2)y_0 + (\Gamma_1 + k\Gamma_2) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}, P(x_0, y_0) \in (\epsilon_k)$ .

Αρα είναι και  $P \in (\epsilon_2) \Rightarrow$  Αρα  $(\epsilon_k) \cup (\epsilon_2) \subseteq (\delta_k)$

### Αντίστροφο

► Θα δείξω ότι όλα τα στοιχεία της  $(\delta_k)$  ανήκουν στο  $(\epsilon_k) \cup (\epsilon)$

Έστω  $(\epsilon) \in (\delta_k) : P_1(x_1, y_1) \in (\epsilon) \wedge P_1 \notin (\epsilon_2) \wedge \forall x_1, y_1 \in \mathbb{R}$

$$i) \forall P_1 \in (\epsilon_2) \rightarrow (P_1 P) \equiv (\epsilon_2) \rightarrow (\epsilon) \equiv (\epsilon_2) \rightarrow (\epsilon) \in (\epsilon_k) \cup (\epsilon_2).$$
$$P \in (\epsilon_2) \quad (P_1 P) \equiv (\epsilon)$$

ii)  $\forall P_1 \notin (\epsilon_2) \Rightarrow A_2 x_1 + B_2 y_1 + \Gamma_2 \neq 0$ . Θα δείξω ότι  $\exists k \in \mathbb{R} : (\epsilon) \equiv (\epsilon_k)$ .

Είναι  $(\epsilon) \equiv (PP_1) : P \in (\epsilon_k), \forall k \in \mathbb{R}$ . άρα πρέπει  $P_1(x_1, y_1) \in (\epsilon_k) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (A_1 + kA_2)x_1 + (B_1 + kB_2)y_1 + (\Gamma_1 + k\Gamma_2) = 0 \Leftrightarrow (A_1 x_1 + B_1 y_1 + \Gamma_1) + k(A_2 x_1 + B_2 y_1 + \Gamma_2) = 0$$
$$A_2 x_1 + B_2 y_1 + \Gamma_2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{A_1 x_1 + B_1 y_1 + \Gamma_1}{A_2 x_1 + B_2 y_1 + \Gamma_2} \quad \text{Για την τιμή αυτή } (\epsilon) \equiv (\epsilon_k)$$

$$\text{Άρα } \forall (\epsilon) \in (\delta_k) : (\epsilon) \in (\epsilon_k) \cup (\epsilon_2) \Rightarrow (\delta_k) \subseteq (\epsilon_k) \cup (\epsilon_2) \Rightarrow (\delta_k) = (\epsilon_k) \cup (\epsilon_2).$$
$$(\epsilon_k) \cup (\epsilon_2) \subseteq (\delta_k)$$

Παράδειγμα: Δείξτε ότι η  $(\epsilon) : (\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 5 = 0$  είναι ευθεία εκτός από μια τιμή του  $\mu$  και διέρχεται από το ίδιο σημείο.

### Λύση

$$(\epsilon) \text{ ευθεία} \Leftrightarrow |\mu^2 - 1| + |3\mu^2 - 2\mu - 1| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^2 - 1 \neq 0 & (1) \\ 3\mu^2 - 2\mu - 1 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\mu^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = \pm 1$$

$$3\mu^2 - 2\mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\text{Άρα } (1) \wedge (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \neq +1 \wedge \mu \neq -1 \\ \mu \neq +1 \wedge \mu \neq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \mu \neq +1. \text{ Άρα } (\epsilon) \text{ ευθεία, } \forall \mu \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Έστω } P(x_0, y_0) \in (\epsilon), \forall \mu \in \mathbb{R} - \{1\} \Leftrightarrow (\mu^2 - 1)x_0 + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y_0 - 5\mu^2 + 5 = 0, \forall \mu \in \mathbb{R} - \{1\}$$
$$\Leftrightarrow (x_0 + 3y_0 - 5)\mu^2 + (-2y_0)\mu + (-x_0 - y_0 + 5) = 0, \forall \mu \in \mathbb{R} - \{1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3y_0 - 5 = 0 \\ -2y_0 = 0 \\ -x_0 - y_0 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3 \cdot 0 - 5 = 0 \\ y_0 = 0 \\ -x_0 - 0 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = 0 \\ x_0 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(x_0, y_0) = (5, 0)$$

Άρα οι  $(\epsilon)$  διέρχονται από το  $P(5, 0), \forall \mu \in \mathbb{R} - \{1\}$ .

▼ Μεσοπαράλληλος παραλλήλων ευθειών - απόσταση ευθειών.

Έστω  $\epsilon_1 // \epsilon_2$  με  $(\epsilon_1): Ax + By + \Gamma_1 = 0$

$(\epsilon_2): Ax + By + \Gamma_2 = 0$

Ορισμός:  $(\mu)$  μεσοπαράλληλος  $(\epsilon_1), (\epsilon_2) \iff \forall M \in (\mu): d(M, \epsilon_1) = d(M, \epsilon_2)$

Θ<sub>1</sub>)  $(\epsilon_1) // (\epsilon_2) \implies \forall M \in (\epsilon_1): d(M, \epsilon_2) = \frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \text{σταθ}$

Απόδειξη

Έστω  $M(x_0, y_0) \in (\epsilon_1) \implies Ax_0 + By_0 + \Gamma_1 = 0 \implies \Gamma_1 = -Ax_0 - By_0$  (1)

$M(x_0, y_0) \in (\epsilon_2): Ax + By + \Gamma_2 = 0 \implies d(M, \epsilon_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-\Gamma_1 + \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

→ Η σταθερή απόσταση  $d(M, \epsilon_2)$  λέγεται απόσταση των παραλλήλων ευθειών  $\epsilon_1 // \epsilon_2$ :

$$d(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{|\Gamma_1 - \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Θ<sub>2</sub>)  $(\mu)$  μεσοπαράλληλος  $\epsilon_1 // \epsilon_2 \iff (\mu): Ax + By + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = 0$

Απόδειξη:  $M \in (\mu)$  μεσοπαράλληλος των  $\epsilon_1, \epsilon_2 \iff d(M, \epsilon_1) = d(M, \epsilon_2), \forall M \in (\mu) \iff$   
 $\iff (\mu): d(M, \epsilon_1) = d(M, \epsilon_2) \iff \frac{|Ax + By + \Gamma_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax + By + \Gamma_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \iff$

$\iff |Ax + By + \Gamma_1| = |Ax + By + \Gamma_2| \iff \begin{cases} Ax + By + \Gamma_1 = Ax + By + \Gamma_2 \iff \Gamma_1 = \Gamma_2 \leftarrow \text{Αδύνατη} \\ Ax + By + \Gamma_1 = -Ax - By - \Gamma_2 \iff \end{cases}$

$\iff 2Ax + 2By + (\Gamma_1 + \Gamma_2) = 0 \iff Ax + By + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = 0 \implies (\mu): Ax + By + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = 0$

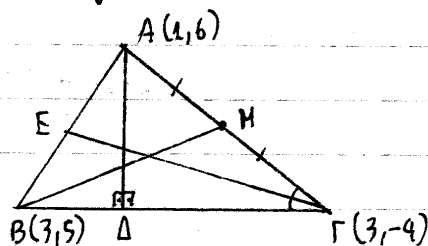
( $\epsilon_1$ )

( $\mu$ )

( $\epsilon_2$ )

## ▼ Προσδιορισμός στοιχείων τριγώνου

παράδειγμα: Αν  $A(1,6), B(3,5), \Gamma(3,-4)$  να βρεθούν τα  $\nu\alpha$ ,  $\mu\alpha\beta$ ,  $\delta\gamma$  του  $\triangle AB\Gamma$



i) το  $\nu\alpha = AD$   $\left. \begin{array}{l} x_B = x_\Gamma = 3 \Rightarrow BG \parallel y'y \\ AD \text{ ύψος} \Rightarrow AD \perp BG \\ A(1,6) \in AD \end{array} \right\} \Rightarrow (AD): y = 6.$

ii) το  $\mu\alpha = BM$

$BM \text{ διάμεσος } \triangle AB\Gamma \Rightarrow M \text{ μέσο } B\Gamma \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_M = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \frac{6-4}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow M(2,1) \in BM \Rightarrow BM: \frac{x-2}{2-3} = \frac{y-1}{1-5}$   
 $\Leftrightarrow -4(x-2) = -(y-1) \Leftrightarrow -4x+8 = -y+1 \Leftrightarrow 4x-y-7=0 \Rightarrow BM: 4x-y-7=0.$

iii) Οι διχοτόμοι εσωτερικοί-εξωτερικοί προκύπτουν άπο την σχέση

$(\delta\gamma): d(\Sigma, A\Gamma) = d(\Sigma, B\Gamma), \forall \Sigma(x,y) \in \delta\gamma \quad (1)$

$\left. \begin{array}{l} A(1,6) \\ \Gamma(3,-4) \end{array} \right\} \Rightarrow A\Gamma: \frac{x-1}{1-3} = \frac{y-6}{6+4} \Leftrightarrow 10(x-1) = -2(y-6) \Leftrightarrow 5(x-1) = -(y-6) \Leftrightarrow 5x-5 = -y+6$

$\Leftrightarrow 5x+y-11=0 \Rightarrow A\Gamma: 5x+y-11=0.$

$\left. \begin{array}{l} B(3,5) \\ \Gamma(3,-4) \end{array} \right\} \Rightarrow x_B = x_\Gamma = 3 \Rightarrow B\Gamma: x=3 \Leftrightarrow x-3=0 \Rightarrow B\Gamma: x-3=0.$

$(1) \Leftrightarrow \frac{|5x+y-11|}{\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{|x-3|}{\sqrt{1^2+0^2}} \Leftrightarrow |5x+y-11| = \sqrt{26} |x-3| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x+y-11 = \sqrt{26}(x-3) \Leftrightarrow (5-\sqrt{26})x+y-11+3\sqrt{26}=0. \text{ εσωτερική και} \\ 5x+y-11 = -\sqrt{26}(x-3) \Leftrightarrow (5+\sqrt{26})x+y-11-3\sqrt{26}=0. \text{ εξωτερική διχοτόμος.} \end{array} \right.$

• Βρίσκω το  $E = \delta\gamma \cap AB$  και έστω  $E(x_E, y_E)$

Αν  $x_A < x_E < x_B \Leftrightarrow E \in AB \Leftrightarrow \delta\gamma$  εσωτερική διχοτόμος.

$\left. \begin{array}{l} A(1,6) \\ B(3,5) \end{array} \right\} \Rightarrow AB: \frac{x-1}{1-3} = \frac{y-6}{6-5} \Leftrightarrow x-1 = -2(y-6) \Leftrightarrow x-1 = -2y+12 \Leftrightarrow x+2y-13=0.$

$E = AB \cap \delta\gamma: \left\{ \begin{array}{l} (5-\sqrt{26})x+y-11+3\sqrt{26}=0 \\ x+2y-13=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (5-\sqrt{26})x+y = 11-3\sqrt{26} \\ x+2y = 13 \end{array} \right.$

$D = \begin{vmatrix} 5-\sqrt{26} & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(5-\sqrt{26})-1 = 10-2\sqrt{26}-1 = 9-2\sqrt{26} \neq 0 \Rightarrow$  το  $2 \times 2$  σύστημα έχει μία μόνο λύση την  $(x,y) = \left( \frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)$  όπου

$$Dx = \begin{vmatrix} 11-3\sqrt{26} & 1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} = 2(11-3\sqrt{26}) - 13 = 22 - 6\sqrt{26} - 13 = 9 - 6\sqrt{26}$$

$$\text{Αρα } x_E = \frac{Dx}{D} = \frac{9-6\sqrt{26}}{9-2\sqrt{26}} \approx -21 \Rightarrow x_E \notin (1,3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma\epsilon: (5-\sqrt{26})x + y - 11 + 3\sqrt{26} = 0 \text{ εσωτερική διχοτόμος} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\delta\gamma): (5+\sqrt{26})x + y - 11 - 3\sqrt{26} = 0 \text{ εξωτερική διχοτόμος.}$$

## ΚΟΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

### Κύκλος

Ορισμός:

(c) κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$   $\Leftrightarrow \forall M \in (c): |KM| = \rho$ .

### Εξισώσεις του κύκλου

$$1) \left. \begin{array}{l} K(x_0, y_0) \\ \rho = \text{ακτίνα} \end{array} \right\} \Rightarrow (c): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$$

Απόδειξη

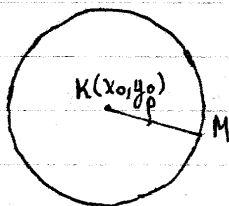
$$\forall M \in (c): |KM| = \rho \Leftrightarrow |KM|^2 = \rho^2$$

Έστω  $M(x, y)$ .

$$\forall M \in (c): |KM| = \rho \Leftrightarrow |KM|^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})^2 = \rho^2$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2.$$



$$2) \left. \begin{array}{l} A^2 + B^2 - 4\Gamma \geq 0 \\ K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) \text{ και } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (c): x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ κύκλος με}$$

Ευθύ

Απόδειξη: Εάν (c) κύκλος  $\Rightarrow \exists x_0, y_0, \rho: (c): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \rho^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - \rho^2) = 0.$$

Θέσω  $A = -2x_0$ ,  $B = -2y_0$ ,  $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$  οπότε

$$(c): x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0.$$

(Εκτός βιβλίου: είναι λοιπόν

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4x_0^2 + 4y_0^2 - 4(x_0^2 + y_0^2 - \rho^2) = 4\rho^2 \geq 0 \text{ αρα το ευθύ ισχύει.}$$

Αντίστροφο: Έστω  $A^2+B^2-4\Gamma \geq 0$

$$(c): x^2+y^2+Ax+B\gamma+\Gamma=0 \Leftrightarrow x^2+Ax+\left(\frac{A}{2}\right)^2+y^2+Bx+\left(\frac{B}{2}\right)^2=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4} \quad (3)$$

Εάν  $A^2+B^2-4\Gamma > 0$  η (3) άρα και η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  και ακτίνα  $\rho$ .

Εάν  $A^2+B^2-4\Gamma < 0$  τότε δεν υπάρχουν σημεία που να επαληθεύουν την (3) άρα και τη (2).

Μεθόδος: Για να βρω την εξίσωση κύκλου (c), πρέπει να προσδιορίσω:

ή το κέντρο  $K(a,b)$  και την ακτίνα  $\rho$

ή τα  $A, B, \Gamma$ .

Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις, τρεις αγνώστους.  $\begin{cases} a, b, \rho \\ \text{ή } A, B, \Gamma \end{cases}$

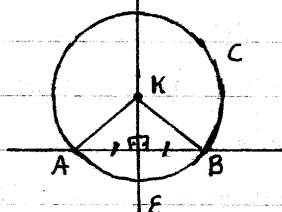
✓ Αν είναι γνωστό το κέντρο  $K(a,b)$ , τότε η  $\rho$  προσδιορίζεται ως εξής:

1) Αν  $A \in (c) \Rightarrow \rho = d(K, A)$

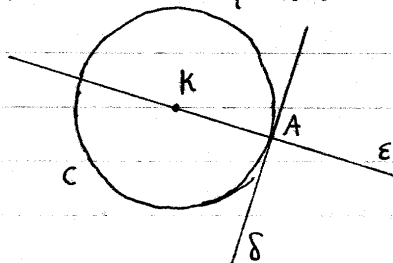
2) Αν  $(\epsilon)$  εφάπτεται  $(c) \Rightarrow \rho = d(K, \epsilon)$ .

✓ Το κέντρο  $K$  προσδιορίζεται συνήθως εάν τομή δύο γραμμών (τόπων)

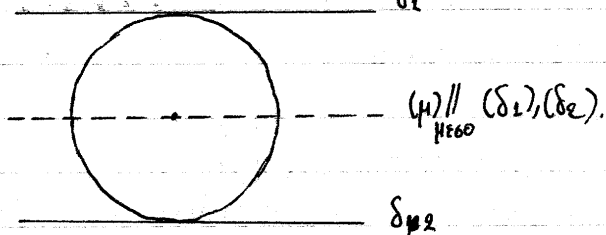
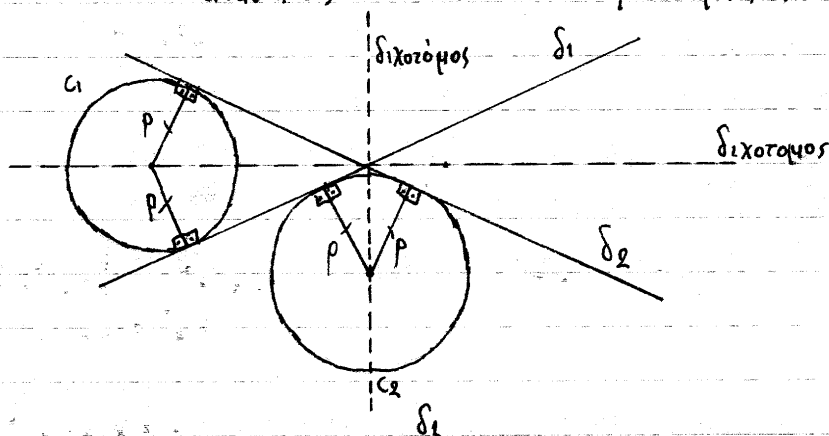
ΕΤΣΙ: 1) Αν  $A, B \in (c) \Rightarrow K \in (\epsilon) \perp_{\text{μέσο}} AB$ .



2) Αν ο  $\omega$  (c) εφάπτεται ευθείας  $(\delta)$  στο  $A \Rightarrow K \in (\epsilon) \perp (\delta)$  στο  $A$ .



3) Ο (C) εφαπτεται στις  $(\delta_1), (\delta_2) \Rightarrow d(K, \delta_1) = d(K, \delta_2) \Rightarrow (=r)$   
 αν οι ευθείες  $\begin{cases} \text{τέμνονται, το } K \text{ είναι στην διχοτόμο } (E_6-E_7) \text{ της γωνίας τους} \\ \text{είναι } \parallel, \text{ το } K \text{ είναι στην μεσοπαράλληλο των } (\delta_1), (\delta_2). \end{cases}$

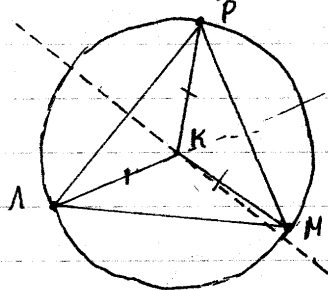


4) Αν ο κύκλος διέρχεται από τρία σημεία P, Λ, Μ τότε το κέντρο του είναι  
 i) Η λύση του συστήματος  $\{d(K, P) = d(K, \Lambda) = d(K, M)\}$ . ή  
 ii) Η τομή των μεσοκαθέτων  $\mu_1 \perp_{\text{μεσο}} P\Lambda, \mu_2 \perp_{\text{μεσο}} P\text{M} \Rightarrow K = \mu_1 \cap \mu_2$ .

Υποθέτω ότι (C):  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  (1).

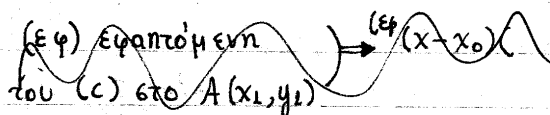
$P, \Lambda, M \in (C) \Rightarrow$  εφαπτεύουν την (1)  $\Rightarrow$  προσδιορίζω τα A, B, Γ.

από το σύστημα (Γραμμικό 3x3) που προκύπτει  $\Rightarrow$  βρίσκω τον (C) από την (1) και άρα το  $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$  και την  $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$





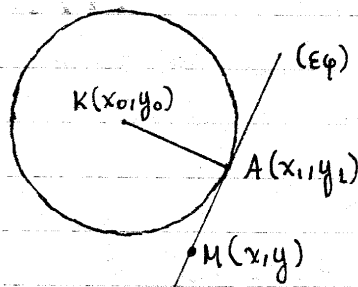
▼ Εξίσωση της εφαπτομένης (εφ) του (c) στο  $A(x_1, y_1) \in (c)$



$$\left. \begin{array}{l} \text{(εφ) εφαπτομένη} \\ \text{του } c(K(x_0, y_0), r) \text{ στο } A(x_1, y_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(εφ): } (x-x_0)(x_1-x_0) + (y-y_0)(y_1-y_0) = r^2$$

• Ειδικά α  $K(0,0) \Rightarrow \text{(εφ): } xx_1 + yy_1 = r^2$

Απόδειξη : (εφ) εφαπτομένη του (c) στο A  $\Rightarrow M(x, y) \in (\text{εφ}) \Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{KA} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{KA} = 0 \Leftrightarrow (1)$



$$\begin{array}{l} A(x_1, y_1) \wedge M(x, y) \Rightarrow \vec{AM}(x-x_1, y-y_1) \\ A(x_1, y_1) \wedge K(x_0, y_0) \Rightarrow \vec{KA}(x_1-x_0, y_1-y_0) \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{l} (x-x_1)(x_1-x_0) + (y-y_1)(y_1-y_0) = 0 \\ A \in (c) \Leftrightarrow (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 = r^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x_1-x_0)(x-x_1+x_1-x_0) + (y_1-y_0)(y-y_1+y_1-y_0) = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(x_1-x_0) + (y-y_0)(y_1-y_0) = r^2$$

β' τρόπος : (εκτος βιβλίου) Έστω  $M \in (\text{εφ})$ .  $M \in M(x, y)$ .

$$\left. \begin{array}{l} K(x_0, y_0) \wedge M(x, y) \Rightarrow \vec{KM}(x-x_0, y-y_0) \\ M(x, y) \wedge A(x_1, y_1) \Rightarrow \vec{MA}(x_1-x, y_1-y) \\ K(x_0, y_0) \wedge A(x_1, y_1) \Rightarrow \vec{KA}(x_1-x_0, y_1-y_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{KM} \cdot \vec{KA} = (x-x_0)(x_1-x_0) + (y-y_0)(y_1-y_0) \quad (1)$$

$$M \in (\text{εφ}) \Leftrightarrow \vec{KA} \perp \vec{AM} \Leftrightarrow \vec{KA} = \text{προβ}_{\vec{KA}} \vec{KM} \Leftrightarrow \vec{KM} \cdot \vec{KA} = \vec{KA} \cdot \text{προβ}_{\vec{KA}} \vec{KM} = \vec{KA} \cdot \vec{KA} = |\vec{KA}|^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(x_1-x_0) + (y-y_0)(y_1-y_0) = r^2.$$

Για να βρώ εξίσωση εφαπτομένης  $(\epsilon)$  ενός κύκλου  $(c)$ , τότε:

1) Αν ξέρω το σημείο επαφής  $A(x_1, y_1) \Rightarrow (\epsilon): (x-x_0)(x_1-x_0) + (y-y_0)(y_1-y_0) = r^2$ .

2) Αν  $A(x_1, y_1) \in (\epsilon)$  αλλά δεν είναι το σημείο επαφής τότε

από το  $A$  παίρνω οι ευθείες  $(\epsilon): x=x_1$  και  $(\epsilon): y-y_1 = \lambda(x-x_1)$ .

• 1. Αν ο τόπος  $(c) \cap (\epsilon)$  με  $(\epsilon): x=x_1$  είναι ένα σημείο τότε η  $(\epsilon): x=x_1$  είναι μία εφαπτομένη.

• 2. α' τρόπος: Η  $(\epsilon): y-y_1 = \lambda(x-x_1)$  είναι εφαπτομένη του  $(c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d(K, \epsilon) = r$ , όπου  $K$  το κέντρο του κύκλου  $\Leftrightarrow$  λύνω ως προς  $\lambda$ .

Αν β' τρόπος: Παίρνω τον τόπο  $(\epsilon) \cap (c)$  και απαιτώ να έχει ΜΜΛ.

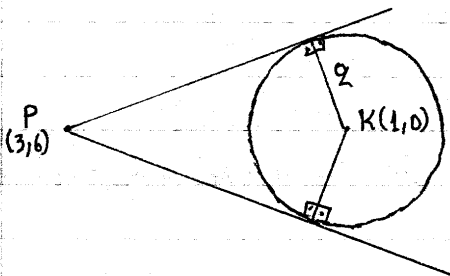
Έτσι καταλήγω σε δευτεροβάθμια εξίσωση και από την συνθήκη

$\Delta = 0$  βρίσκω το  $\lambda$ .

Παραδειγμα: Να βρεθούν οι εφαπτόμενες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  του κύκλου

$$(c): (x-1)^2 + y^2 = 4 \text{ από το σημείο } P(3,6)$$

Λύση



$$(c): (x-1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ K(1,0) \end{cases}$$

$$P(3,6) \notin (c)$$

Από το  $P(3,6)$  διέρχονται οι ευθείες

$$(\epsilon): x=3, (\epsilon): y-6 = \lambda(x-3).$$

• Η  $(\epsilon): x=3$

$$(\epsilon) \cap (c): \begin{cases} x=3 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 4 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

Αρα  $(\epsilon) \cap (c) = A(3,0) \Rightarrow (\epsilon): x=3$  εφαπτεται στον  $(c)$ .

• Η  $(\epsilon): y-6 = \lambda(x-3) \Leftrightarrow y-6 = \lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow \lambda x - y + 6 - 3\lambda = 0 \Rightarrow (\epsilon): \lambda x - y + 6 - 3\lambda = 0$ .

α' τρόπος

$$(\epsilon) \text{ εφαπτομένη } (c) \Leftrightarrow d(K, \epsilon) = r \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 1 - 0 + 6 - 3\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |6 - 2\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow 2|3 - \lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow |3 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 6\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

$$\text{Αρα } (\epsilon): \frac{4}{3}x - y + 6 - 3 \cdot \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow (\epsilon): 4x - 3y + 6 = 0 \text{ εφ. } (c).$$

Αρα ο  $(c)$  δέχεται από το  $P$  εφαπτόμενες  $(\epsilon_1): x=3$

$$(\epsilon_2): 4x - 3y + 6 = 0$$

β' τρόπος: Δεν συμφέρει.

παράδειγμα: Να μελετηθεί η σχετική θέση της ευθείας (ε):  $y = \lambda x$  ως προς τον κύκλο (c):  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ .

Λύση

$$(ε) \cap (c) : \begin{cases} y = \lambda x \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ x^2 + \lambda^2 x^2 - 6x - 8\lambda x + 21 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Το σύστημα έχει τόσες λύσεις όσες η εξίσωση (1)  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1 + \lambda^2)x^2 - 2(3 + 4\lambda)x + 21 = 0$$

$$\Delta = 4(3 + 4\lambda)^2 - 4 \cdot 21 \cdot (1 + \lambda^2) = 4[9 + 24\lambda + 16\lambda^2 - 21 - 21\lambda^2] =$$

$$= 4[-5\lambda^2 + 24\lambda - 12]$$

$$5\lambda^2 - 24\lambda + 12 = 0$$

$$\Delta = 576 - 240 = 336 = 4^2 \cdot 21$$

$$\Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-24 \pm 4\sqrt{21}}{20} = \frac{-6 \pm \sqrt{21}}{5} = \begin{cases} \frac{-6 + \sqrt{21}}{5} = \rho_1 \\ \frac{-6 - \sqrt{21}}{5} = \rho_2 \end{cases}$$

| $\lambda$                     | $\rho_1$ | $\rho_2$ |
|-------------------------------|----------|----------|
| $5\lambda^2 - 24\lambda + 12$ | $+$      | $-$      |

i) Αν  $\lambda \in (-\infty, \frac{-6 - \sqrt{21}}{5}) \cup (\frac{-6 + \sqrt{21}}{5}, +\infty) \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow$  Η (1) έχει δύο <sup>μόνο</sup> λύσεις  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  Η (ε) ∩ (c) είναι δύο σημεία (δηλ. η (ε) τέμνει την (c) σε δύο σημεία)

ii) Αν  $\lambda = \frac{-6 - \sqrt{21}}{5} \vee \lambda = \frac{-6 + \sqrt{21}}{5} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow$  Η (1) έχει ΜΜΛ  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  Η (ε) τέμνει την (c) σε ένα μόνο σημείο  $\Leftrightarrow$  Η (ε) εφάπτεται στην (c).

iii) Αν  $\lambda \in (\frac{-6 - \sqrt{21}}{5}, \frac{-6 + \sqrt{21}}{5}) \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow$  Η (1) δεν έχει λύση στο  $\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  Η (ε) ∩ (c) =  $\emptyset$ .

• Εάν γνωρίζω ότι  $\lambda \notin \mathbb{R} \Rightarrow$  (ε):  $x = k$  και δουλεύω όπως όταν:

• Εάν γνωρίζω το  $\lambda$  της εφαπτόμενης, θεωρώ  $k \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η εφαπτόμενη (ε):  $y = \lambda x + k$

α' τρόπος: (ε) εφάπτεται (c)  $\Leftrightarrow d(k, ε) = r \Leftrightarrow$  λύνω ως προς k.

β' τρόπος: (ε) ∩ (c) έχει ΜΜΛ  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$  Η  $ax^2 + bx + \gamma$  έχει ΜΜΛ  $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow$  Λύνω ως προς k.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εφαπτόμενη (ε) του κύκλου

(c):  $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0$  η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (δ):  $2x + y - 5 = 0$ .

Λύση

$$(c): x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0 \Rightarrow \begin{cases} K(1, -5) \\ r = \frac{\sqrt{4 + 100 - 68}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3 \end{cases}$$

$$(δ): 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{\delta} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \lambda_{\epsilon} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Εφαπτή}$$

$$(\epsilon) \perp (\delta)$$

α' τρόπος: Έστω  $(\epsilon): y = \frac{1}{2}x + k \Leftrightarrow x - 2y + 2k = 0.$

$$d(K', \epsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-5) + 2 \cdot k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|-11 + 2k|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow |2k - 11| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k - 11 = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow k = \frac{11 + 3\sqrt{5}}{2} \\ 2k - 11 = -3\sqrt{5} \Leftrightarrow k = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow (\epsilon_1): x - 2y + 11 + 3\sqrt{5} = 0$$

$$(\epsilon_2): x - 2y + 11 - 3\sqrt{5} = 0.$$

β' τρόπος

(ε) εφαπτεται (c)  $\Leftrightarrow (\epsilon) \cap (c): \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + k \\ x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 = 0 \end{cases}$  έχει ΜΜ  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rightarrow x^2 + (\frac{1}{2}x + k)^2 + 2x - 10(\frac{1}{2}x + k) + 17 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \rightarrow x^2 + \frac{1}{4}x^2 + kx + k^2 + 2x - 5x - 10k + 17 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

έχει ΜΜ  $\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 + (k-3)x + k^2 - 10k + 17 = 0$  έχει ΜΜ  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (k-3)^2 - 5(k^2 - 10k + 17) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 6k + 9 - 5k^2 + 50k - 85 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4k^2 + 44k - 76 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 11k + 19 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{11 \pm 3\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{11 + 3\sqrt{5}}{2} \\ \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Delta' = 121 - 76 = 45 = 3^2 \cdot 5$$

↑ 0 β' τρόπος αν και δεν διαφέρει στον κύκλο, είναι γενικός, δηλ. εφαρμόζεται στην παραβολή, έλλειψη, υπερβολή

→ Βασικές Προτάσεις

(Π1) Η εφαπτόμενη (ε) του κύκλου (c):  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

στο σημείο επαφής  $P(x_1, y_1)$  είναι η

$$(\epsilon): x x_1 + y y_1 + A \left( \frac{x+x_1}{2} \right) + B \left( \frac{y+y_1}{2} \right) + \Gamma = 0.$$

Απόδειξη

$$(c): x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} K \left( \frac{-A}{2}, \frac{-B}{2} \right) \\ \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \end{cases}$$

(ε) εφαπτεται (c) στο  $P(x_1, y_1) \Rightarrow (\epsilon): (x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = \rho^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right) \left(x_1 + \frac{A}{2}\right) + \left(y + \frac{B}{2}\right) \left(y_1 + \frac{B}{2}\right) = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x x_1 + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{A^2}{4} + y y_1 + \frac{B}{2}(y + y_1) + \frac{B^2}{4} = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma$$

$$\Leftrightarrow xx_1 + yy_1 + \frac{A}{2}(x+x_1) + \frac{B}{2}(y+y_1) + \Gamma = 0 \Rightarrow (\epsilon): xx_1 + yy_1 + \frac{A}{2}(x+x_1) + \frac{B}{2}(y+y_1) + \Gamma = 0.$$

1  $\rightarrow$  Συντελεστές διευθύνσης εφαπτόμενης  
α' τρόπος

Είναι  $(\epsilon): (x_1 + \frac{A}{2})x + (y_1 + \frac{B}{2})y + \frac{Ax_1 + By_1}{2} + \Gamma = 0$  ορα

1) Αν  $y_1 \neq -\frac{B}{2} \Rightarrow \lambda_\epsilon = -\frac{x_1 + \frac{A}{2}}{y_1 + \frac{B}{2}}$

2) Αν  $y_1 = -\frac{B}{2} \Rightarrow \lambda_\epsilon \notin \mathbb{R}.$

• β τρόπος: καλύτερος

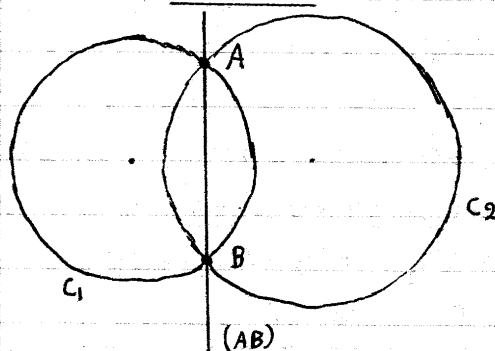
$K(x_0, y_0) = (\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}) \in KP \rightarrow \lambda_{KP} \text{ γνωστό.} \rightarrow \lambda_\epsilon \text{ γνωστό.}$   
 $P(x_1, y_1) \in KP \quad (\epsilon) \perp (KP)$

Π2) Η κοινή χορδή AB δύο κύκλων

$(c_1): x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, (c_2): x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$

Αν  $(c_1) \cap (c_2) = \{A, B\} \Rightarrow (AB): (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0.$

~~δωδ.~~ Αποδείξη



Έστω  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ . Εάν  $(c_1) \cap (c_2) = \{A, B\}$  τότε.

$A \in (c_1) \cap (c_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (A_1 - A_2)x_1 + (B_1 - B_2)y_1 + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A \in (\epsilon): (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0.$

$B \in (c_1) \cap (c_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2^2 + y_2^2 + A_1x_2 + B_1y_2 + \Gamma_1 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + A_2x_2 + B_2y_2 + \Gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (A_1 - A_2)x_2 + (B_1 - B_2)y_2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B \in (\epsilon): (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0.$

Αρα  $A, B \in (\epsilon) \Rightarrow AB \equiv (\epsilon) \Rightarrow (AB): (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0.$

→ Εάν δεν γνωρίζω την σχετική θέση των δύο κύκλων τότε βρίσκω το  $(c_1) \cap (c_2)$  ως εξής.

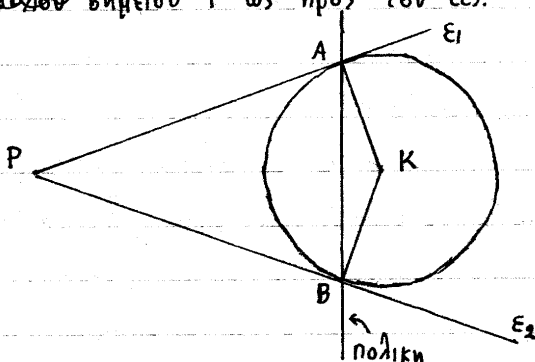
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases}$$

$$(c_1) \cap (c_2): \begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \\ (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{α' βαθμια} \\ \text{με β' βαθμια} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{cases} \Rightarrow AB.$$

▼ Πολική σημείου P ως προς κύκλο (c)

ορ: Έστω  $P \notin (c)$ . Αν  $\epsilon_1, \epsilon_2$  οι εφαπτόμενες του (c) από το P και  $(\epsilon_1) \cap (c) = \{A\}$ ,  $(\epsilon_2) \cap (c) = \{B\}$  τότε η ευθεία AB λέγεται πολική του κύκλου σημείου P ως προς τον (c).



Θα δείξουμε ότι η εξίσωση της πολικής είναι η ίδια με την εξίσωση της εφαπτομένης αν το P ήταν σημείο επαφής. Δηλαδή ότι:

$$\textcircled{\Pi_3} \quad \begin{array}{l} (c): (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ P(x_1, y_1) \notin (c) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (AB): (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2 \\ \text{πολική του P ως προς (c)} \end{array}$$

Απόδειξη

Μεφέρνω από το P εφαπτόμενες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  και έστω  $\{A\} = (\epsilon_1) \cap (c)$ ,  $\{B\} = (\epsilon_2) \cap (c)$   
Έστω  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$

► Έστω  $\epsilon_1, \epsilon_2$  εφαπτόμενες (c) από το P.

και έστω  $\{A\} = (\epsilon_1) \cap (c)$ ,  $\{B\} = (\epsilon_2) \cap (c)$ .

Έστω  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ .

$$A(x_A, y_A) \in (\epsilon_1) \Rightarrow (\epsilon_1): (x-a)(x_A-a) + (y-b)(y_A-b) = r^2$$

$$B(x_B, y_B) \in (\epsilon_2)$$

### Αποδείξη

► Έστω  $\epsilon_1, \epsilon_2$  εφαπτόμενες στο  $(C)$  από το  $P$  και έστω  $\{A\} = (\epsilon_1) \cap (C)$ ,  $\{B\} = (\epsilon_2) \cap (C)$

Έστω  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ .

$$\{A\} = (\epsilon_1) \cap (C) \Rightarrow (\epsilon_1): (x-a)(x_A-a) + (y-b)(y_A-b) = r^2$$

$$\{B\} = (\epsilon_2) \cap (C) \Rightarrow (\epsilon_2): (x-a)(x_B-a) + (y-b)(y_B-b) = r^2$$

$$P \in (\epsilon_1) \cap (\epsilon_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-a)(x_A-a) + (y_1-b)(y_A-b) = r^2 \\ (x_1-a)(x_B-a) + (y_1-b)(y_B-b) = r^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A, B \in (\epsilon): (x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2 \Rightarrow (AB) = (e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB): (x_1-a)(x_1-a) + (y_1-b)(y_1-b) = r^2.$$

• Χρήσεις της πολικής

1) Βρίσκω τα σημεία επαφής:

- 1 Βρίσκω τις  $\epsilon_1, \epsilon_2$
- 2 Βρίσκω την πολική  $(AB)$
- 3  $A = (\epsilon_1) \cap (AB)$ ,  $B = (\epsilon_2) \cap (AB)$

• 1 Βρίσκω την πολική  $(AB)$ .

• 2  $\{A, B\} = (AB) \cap (C)$

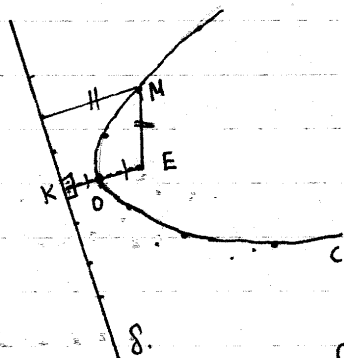
2) Το εμβαδό  $PAB \rightarrow \boxed{(PAB) = \frac{1}{2} d(A, B) \cdot d(P, AB)}$

• 1 Βρίσκω την πολική  $(AB) \Rightarrow$  Βρίσκω το  $d(P, AB)$ .  $\rightarrow$  Βρίσκω το  $(PAB)$ .

• 2  $\{A, B\} = (AB) \cap (C) \Rightarrow$  Βρίσκω το  $d(A, B)$

## ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Ορ. Έστω ευθεία  $(\delta)$  και σημείο  $E \notin (\delta)$ . Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από την  $(\delta)$  και το  $E$  λέγεται παράβολο με εστία  $E$  και διευθέτουσα  $(\delta)$ .



$$\bullet \quad M \in (c) \Leftrightarrow d(M, E) = d(M, \delta)$$

ο. Έστω  $KE \perp (\delta)$

$$O \bullet \text{ μέσο } KE \Rightarrow d(O, E) = d(O, K)$$

$$KE \perp (\delta) \Rightarrow d(O, K) = d(O, \delta)$$

$$\Rightarrow d(O, E) = d(O, \delta) \Rightarrow O \in (c).$$

στοιχεία παραβολής:  $\left\{ \begin{array}{l} E \text{ εστία της παραβολής } (c) \\ O \text{ κορυφή της παραβολής } (c) \\ (\delta) \text{ διευθέτουσα της παραβολής } (c) \end{array} \right.$

παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με εστία  $E(1,1)$  και διευθέτουσα  $(\delta): 2x+y+1=0$ .

Λύση

$$(c) \text{ παραβολή με } \left\{ \begin{array}{l} (\delta): 2x+y+1=0 \\ E(1,1) \end{array} \right. \Rightarrow \forall M \in (c): d(M, E) = d(M, \delta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}} \Leftrightarrow |2x+y+1| = \sqrt{5} \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x+y+1)^2 = 5(x-1)^2 + 5(y-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy + 2y + 4x = 5x^2 - 10x + 5 + 5y^2 - 10y + 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 4xy - 14x - 12y + 9 = 0 \Rightarrow (c): x^2 + 4y^2 - 4xy - 14x - 12y + 9 = 0.$$

▼ Εξίσωση Παραβολής σε ειδικές περιπτώσεις

Αν κορυφή  $O(0,0)$ ,  $OE \in x'x$ ,  $Oy \parallel \delta$   
και  $p = \overline{KE}$

1) Αν κορυφή  $O(0,0)$ .

εστία  $E \in x'x$ .

διευθέτουσα  $(\delta) \parallel Oy$

$p = \overline{KE}$ ;  $KE \perp (\delta)$

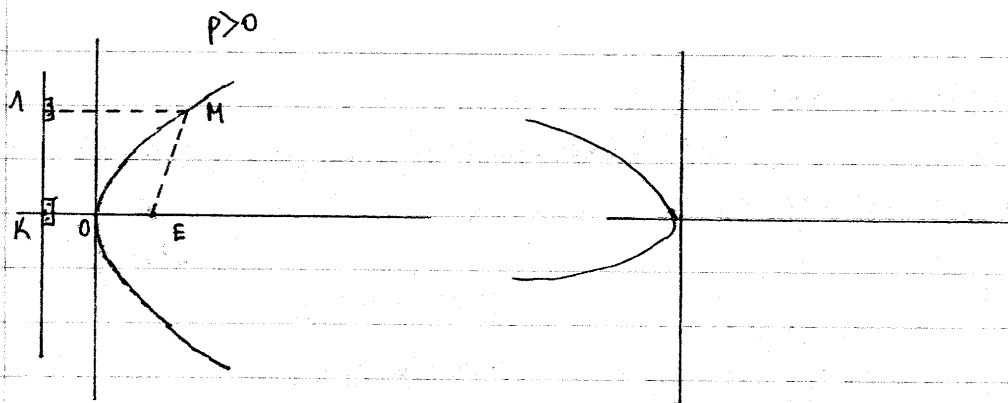
$$(c): y^2 = 2px$$

με  $\left\{ \begin{array}{l} \text{εστία } E(\frac{p}{2}, 0) \\ \text{διευθέτουσα } (\delta): x = -\frac{p}{2} \end{array} \right.$

Αποδείξη

Έστω  $Oxy$ :  $O$  κορυφή  $(c)$ ,  $x'x \perp OE$ ,  $y'y \parallel \delta$





Εστω  $K = x'x \cap \delta$ . ▶ Θέτω  $p = \overline{KE} \Rightarrow \begin{cases} E(\frac{p}{2}, 0) \\ (\delta): x = -\frac{p}{2} \end{cases} \left| \begin{matrix} M(x, y) \end{matrix} \right.$

Εστω  $M(x, y) \in (c) \Rightarrow \text{Θέτω } l = \text{προβ}_\delta M \Rightarrow l(-\frac{p}{2}, y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(M, \delta) = d(M, l) = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2} = |x + \frac{p}{2}|. \quad (\text{διότι } M(x, y) \in (c))$$

$$M(x, y) \xrightarrow{E(\frac{p}{2}, 0)} d(M, E) = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

(c) παραβολή με εστία E και διευθετούσα  $(\delta) \Leftrightarrow \forall M \in (c): d(M, \delta) = d(M, E) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |x + \frac{p}{2}| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} \Leftrightarrow (x + \frac{p}{2})^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px \Rightarrow (c): y^2 = 2px.$$

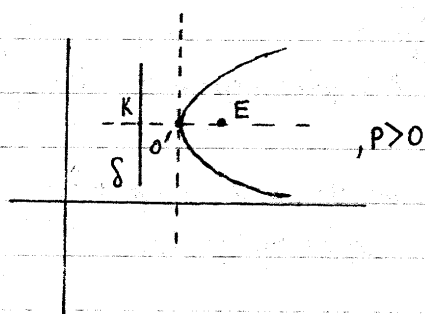
↑ Ιδιότητες παραβολής

• 1) Η (c) έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία OE

2)  $p > 0 \Rightarrow \forall M \in (c): M$  δεξιά του  $Oy \Rightarrow \forall M \in (c): M \in (Oy, E).$

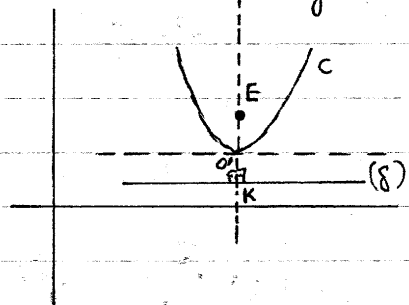
$p < 0 \Rightarrow \forall M \in (c): M$  αριστερά του  $Oy$

▼ Γενικά  $O'(x_0, y_0)$  κορυφή της (c)  
 $(\delta) \parallel Oy.$   
 $E$  εστία της (c)  $\wedge OE \parallel Ox$   $\Rightarrow \begin{cases} E(\frac{p}{2} + x_0, y_0) \\ (\delta): x = -\frac{p}{2} + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) : p = \overline{KE}, KE \perp \delta. \end{cases}$



$$\begin{cases} E(\frac{p}{2} + x_0, y_0) \\ (\delta): x = -\frac{p}{2} + x_0 \end{cases}$$

$O'(x_0, y_0)$  κορυφή της  $(c)$   
 $(\delta) \parallel Ox$   
 $E$  εστία της  $(c)$ :  $OE \parallel Oy$



$$\begin{cases} E(x_0, y_0 + \frac{p}{2}) \\ (\delta): y = y_0 - \frac{p}{2} \end{cases}$$

$\bullet$  Η  $(c): ax^2 + bx + \gamma = 0 \Rightarrow (c)$  παραβολή με κορυφή  $K(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ .

$\nabla$  Σχετική θέση παραβολής  $(c): y^2 = 2px$  και ευθείας  $(\epsilon): y = \lambda x + \kappa$ .

1) Αν  $\lambda = 0 \Leftrightarrow 1$  κοινό σημείο  $M_1(\frac{\kappa^2}{2p}, \kappa)$

2) Αν  $\lambda \neq 0$  τότε

i) αν  $p > 0$  και  $\begin{cases} p > 2\lambda\kappa \Leftrightarrow 2 \text{ κοινά σημεία} \\ p = 2\lambda\kappa \Leftrightarrow 1 \text{ διπλό κοινό σημείο } M(\frac{\kappa}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}) \\ p < 2\lambda\kappa \Leftrightarrow \text{κανένα κοινό σημείο} \end{cases}$

ii) αν  $p < 0$  και  $\begin{cases} p < 2\lambda\kappa \Leftrightarrow 2 \text{ κοινά σημεία} \\ p = 2\lambda\kappa \Leftrightarrow 1 \text{ διπλό κοινό σημείο } M(\frac{\kappa}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}) \\ p > 2\lambda\kappa \Leftrightarrow \text{κανένα κοινό σημείο} \end{cases}$

Απόδειξη

$$(\epsilon) \cap (c): \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \lambda x + \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda x + \kappa)^2 = 2px \\ y = \lambda x + \kappa \end{cases} \text{ έχει τότες λύσεις όσες η}$$

$$\text{εξίσωση } (\lambda x + \kappa)^2 = 2px \Leftrightarrow \lambda^2 x^2 + 2\lambda\kappa x + \kappa^2 = 2px \Leftrightarrow \lambda^2 x^2 + 2(\lambda\kappa - p)x + \kappa^2 = 0 \quad (1)$$

1) Αν  $\lambda = 0 \Rightarrow (\epsilon): y = \kappa \Rightarrow (\epsilon) \parallel x'x$ .

$$(1) \Leftrightarrow -2px + \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow 2px = \kappa^2 \Leftrightarrow x = \frac{\kappa^2}{2p}$$

Αρα η  $(\epsilon)$  τέμνει την  $(c)$  σε  $\neq 1$  μόνο σημείο το  $M(\frac{\kappa^2}{2p}, \kappa)$ .

2) Αν  $\lambda \neq 0 \Rightarrow (1)$  δευτεροβάθμια με  $\Delta = 4(\lambda\kappa - p)^2 - 4\lambda^2 \kappa^2 =$   
 $= 4(\lambda^2 \kappa^2 - 2\lambda\kappa p + p^2 - \lambda^2 \kappa^2) = 4(p^2 - 2\lambda\kappa p) = 4p(p - 2\lambda\kappa)$ .

$p > 2\lambda k \Leftrightarrow \Delta = 4p(p - 2\lambda k) > 0 \Leftrightarrow \text{H (1) έχει δύο ανίσες ρίζες} \Leftrightarrow 2 \text{ κοινά σημεία}$   
 Αν  $p > 0$  και  $p = 2\lambda k \Leftrightarrow \Delta = 4p(p - 2\lambda k) = 0 \Leftrightarrow \text{H (1) έχει μία διπλή ρίζα} \Leftrightarrow 1 \text{ κοινό σημείο}$   
 $p < 2\lambda k \Leftrightarrow \Delta = 4p(p - 2\lambda k) < 0 \Leftrightarrow \text{H (1) δεν έχει ρίζες στο } \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{κανένα κοινό σημείο}$   
 Αν  $p < 0$ , οι συνθήκες αλλάζουν φορά.

$$\boxed{\text{Αν } p = 2\lambda k \Leftrightarrow \text{H (ε): } y = \lambda x + k \text{ τέμνει την (c): } y^2 = 2px \text{ σε ένα σημείο το } M\left(\frac{k}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}\right)}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \Rightarrow \lambda^2 x^2 + 2(\lambda k - p)x + k^2 &= 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-(\lambda k - p)}{\lambda^2} = \frac{2\lambda k - \lambda k}{\lambda^2} = \frac{\lambda k}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda} \\ p = 2\lambda k \Rightarrow \Delta &= 0 \\ M(x_1, y_1) \in (ε) \Rightarrow y_1 &= \lambda x_1 + k = \lambda \cdot \frac{k}{\lambda} + k = k + k = 2k = \frac{2k\lambda}{\lambda} = \frac{p}{\lambda} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{k}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}\right)$$

✓ Εφαπτόμενη της (c):  $y^2 = 2px$  στο  $M(x_1, y_1) \in (c)$ .

Θ. Η παραβολή (c):  $y^2 = 2px$  δέχεται για κάθε σημείο  $M(x_1, y_1) \in (c)$  εφαπτόμενη την

$$\boxed{(ε_φ): y y_1 = p(x + x_1)}, \text{ με } \boxed{\lambda_{ε_φ} = \frac{p}{y_1}}$$

Απόδειξη: Έστω ότι το  $M(x_1, y_1) \neq O(0, 0)$ .

Από το  $M(x_1, y_1)$  διέρχονται οι ευθείες (ε):  $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$  και (ε):  $x = x_1$ .

• Η (ε):  $x = x_1$

$$(ε) \cap (c): \begin{cases} x = x_1 \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2px_1 > 0 \end{cases} \leftarrow \text{Το (Σ) έχει δύο λύσεις άρα η (ε): } x = x_1 \text{ όχι εφαπτόμενη}$$

$x_1 \neq 0, p \neq 0$

• Η (ε):  $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$   $\Rightarrow$  Ο συντ. διευθ. της (ε) είναι  $\lambda$ .

$$\text{Εάν (ε) εφαπτεται (c)} \Rightarrow (ε) \cap (c) = M\left(\frac{k}{\lambda}, \frac{p}{\lambda}\right) \Rightarrow y_1 = \frac{p}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{p}{y_1}$$

$$\Rightarrow (ε): y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \Leftrightarrow (y - y_1)y_1 = p(x - x_1) \Leftrightarrow y y_1 - y_1^2 = px - px_1 \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} M(x_1, y_1) \in (c) \Rightarrow y_1^2 &= 2px_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow y y_1 - 2px_1 = px - px_1 \Leftrightarrow y y_1 = px + px_1 \Rightarrow (ε): y y_1 = p(x + x_1).$$

Αν  $M(x_1, y_1) = O(0,0)$  τότε θα δείξω ότι  $(\epsilon): x=0$  εφαπτεται  $(c)$  στο  $O(0,0)$

$$(\epsilon) \cap (c): \begin{cases} x=0 \\ y^2=2px \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \leftarrow \text{Το } (S) \text{ έχει ΜΜΛ την } M(0,0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Η  $(\epsilon): x=0$  εφαπτεται  $(c)$  στο  $O(0,0)$ .

Αλλά για  $x_1=0, y_1=0$  η  $(\epsilon): yy_1 = p(x+x_1) \Leftrightarrow 0 = px + 0 \Leftrightarrow px=0 \Leftrightarrow x=0$

Αρα η σχέση ισχύει και όταν ακόμη  $M=O$ .

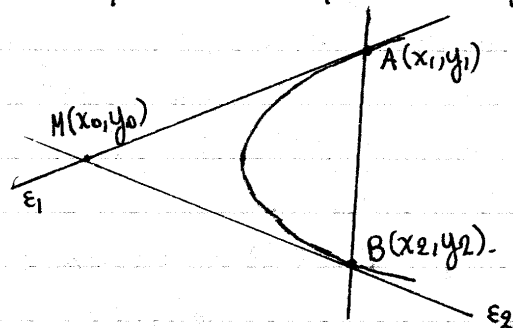
1  $\rightarrow$  ΓΕΝΙΚΑ: Αν η παραβολή  $(c)$  δεν δίνεται στην μορφή  $(c): y^2 = 2px$

1) Για να βρω την σχετική θέση μιας ευθείας  $(\epsilon)$  με την  $(c)$ , βρίσκω τον τόπο  $(\epsilon) \cap (c)$ .

2) Για να βρω την εφαπτόμενη που διέρχεται από ένα σημείο  $M(x_1, y_1)$  (είτε  $M \in (c)$ , είτε  $M \notin (c)$ ) θεωρώ τις ευθείες  $(\epsilon): y - y_1 = \lambda(x - x_1)$  και  $(\epsilon): x = x_1$  και εξετάζω για ποιες τιμές του  $\lambda$  το  $(\epsilon) \cap (c)$  έχει ΜΜΛ.

▼ Πολική ευθεία  $AB$  σημείου  $M(x_0, y_0)$  ως προς  $(c): y^2 = 2px$

ορισμός: Έστω  $M(x_0, y_0) \notin (c)$ . Αν  $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$  εφαπτόμενες του  $(c)$  από το  $M$  και  $\{A\} = (\epsilon_1) \cap (c)$ ,  $\{B\} = (\epsilon_2) \cap (c)$  τότε η ευθεία  $(AB)$  λέγεται πολική του σημείου  $M$  ως προς την παραβολή  $(c)$



• Η πολική σημείο  $M(x_0, y_0)$  ως προς την  $(c): y^2 = 2px$  είναι η

$$(AB): yy_0 = p(x+x_0)$$

Απόδειξη: Έστω  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  τα σημεία επαφής.

$(\epsilon_1)$  εφαπτόμενη  $(c)$  στο  $A(x_1, y_1) \rightarrow (\epsilon_1): yy_1 = p(x+x_1)$

$(\epsilon_2)$  εφαπτόμενη  $(c)$  στο  $B(x_2, y_2) \Rightarrow (\epsilon_2): yy_2 = p(x+x_2)$

$$M(x_0, y_0) \in (\epsilon_1) \cap (\epsilon_2) \Rightarrow \begin{cases} y_0 y_1 = p(x_0 + x_1) \\ y_0 y_2 = p(x_0 + x_2) \end{cases} \Rightarrow A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in (\epsilon): y_0 y = p(x_0 + x)$$

$$\Rightarrow (AB): yy_0 = p(x+x_0)$$

### Εφαρμογή

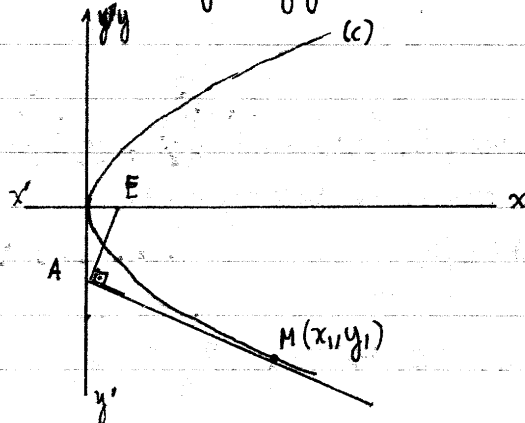
Έστω  $(c)$  παραβολή,  $(\epsilon)$  εφαπτομένη της  $(c)$  στην κορυφή της  $O$ ,  $(\epsilon\varphi)$  εφαπτομένη της  $(c)$  στο  $M \in (c)$ .

$$\{A\} = (\epsilon) \cap (\epsilon\varphi) \Rightarrow EA \perp AM : E \text{ εστία της } (c).$$

### Απόδειξη

► Παίρνω  $xOy$  :  $y'y = (\epsilon) \Rightarrow (c) : y^2 = 2px \Rightarrow E(\frac{p}{2}, 0)$ . Έστω  $M(x_1, y_1) \in (c) \Rightarrow y_1^2 = 2px_1$ .

$$\{A\} = (\epsilon) \cap (\epsilon\varphi) = (y'y) \cap (\epsilon\varphi) \Rightarrow A(0, y_A).$$



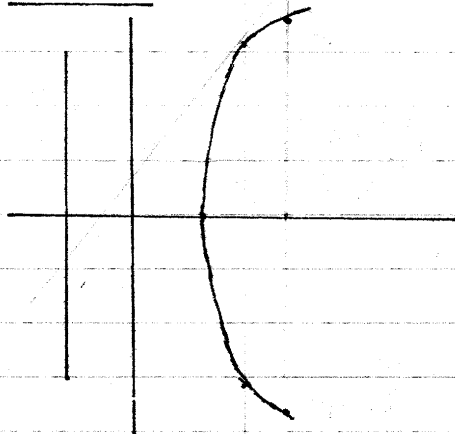
$$A(0, y_A) \in (\epsilon\varphi) : yy_1 = p(x+x_1) \Rightarrow y_A y_1 = px_1 \Rightarrow y_A = \frac{px_1}{y_1} \Rightarrow A(0, \frac{px_1}{y_1}).$$

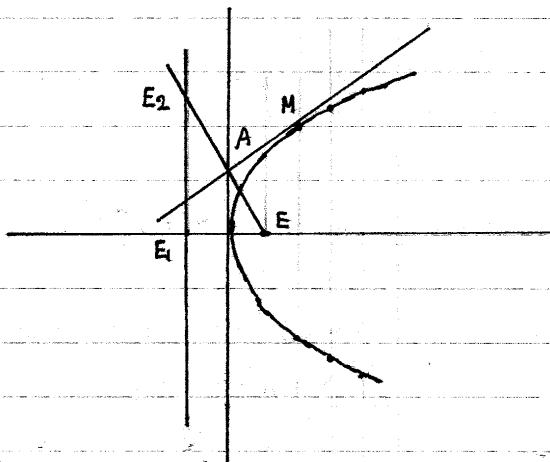
$$\begin{aligned} M(x_1, y_1) \in (\epsilon\varphi) \text{ της } (c) \\ A(0, \frac{px_1}{y_1}) \Rightarrow \lambda_{AM_1} &= \frac{\frac{px_1}{y_1} - y_1}{0 - x_1} = \frac{px_1 - y_1^2}{-x_1 y_1} = \frac{px_1 - 2px_1}{-x_1 y_1} = \frac{-px_1}{-x_1 y_1} = \frac{p}{y_1} \\ M(x_1, y_1) \\ A(0, \frac{px_1}{y_1}) \Rightarrow \lambda_{AE} &= \frac{\frac{px_1}{y_1} - 0}{0 - \frac{p}{2}} = \frac{2px_1}{-py_1} = -\frac{2x_1}{y_1} \\ E(\frac{p}{2}, 0) \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{AM} \cdot \lambda_{AE} = \frac{p}{y_1} \cdot (-\frac{2x_1}{y_1}) = -\frac{2px_1}{y_1^2} = -\frac{2px_1}{2px_1} = -1 \Rightarrow AM \perp AE$$

Έστω  $(c)$  παραβολή,  $(\epsilon\varphi)$  εφαπτομένη της  $(c)$ ,  $(\delta)$  διευθετούσα,  $E$  εστία  
τότε συμμ  $(\epsilon\varphi)$   $E \in (\delta)$

### Απόδειξη





$$\begin{aligned} \text{Εστω } (c): y^2 = 2px \\ \Rightarrow E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \\ (\delta): x = -\frac{p}{2} \end{aligned}$$

Αν η  $(\varepsilon\varphi)$  είναι η  $(\varepsilon\varphi): x=0 \Rightarrow \text{συμμεφ } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = E_1\left(-\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow E_1 \in (\delta)$ .

Αν  $(\varepsilon\varphi)$  η εφαπτόμενη της  $(c)$  στο  $M(x_1, y_1) \Rightarrow (\varepsilon\varphi): yy_1 = p(x+x_1)$

► Παιρνω  $\{A\} = y'y \cap (\varepsilon\varphi) \Rightarrow AE \perp (\varepsilon\varphi)$

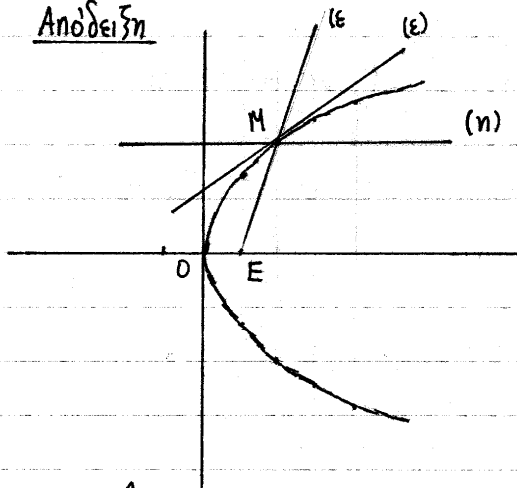
$y'y$  εφ. της  $(c)$  στην κορυφή

$$E_2 = \text{συμμεφ } E \Leftrightarrow E_2 \in AE \wedge A \text{ μέσο } EE_2 \Rightarrow x_A = \frac{x_E + x_{E_2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\frac{p}{2} + x_{E_2}}{2} \Leftrightarrow x_{E_2} = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow E_2 \in (\delta).$$

Αν  $(c)$  παραβολή,  $E$  εστία  $(c)$ ,  $(\varepsilon)$  εφαπτόμενη  $(c)$  στο  $M \in (c)$   
 $(n) \parallel \acute{\alpha}\xi\omicron\nu\alpha \ (c) \wedge M \in (n)$   
 τότε  $(n, \varepsilon) = (\hat{\varepsilon}, EH)$ .

Απόδειξη



$$\text{Εστω } x \neq 0 \text{ επιβι ώστε } (c): y^2 = 2px \Rightarrow \begin{cases} E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \\ (\delta): x = -\frac{p}{2} \end{cases}$$

Εστω  $M(x_1, y_1) \in (c) \Rightarrow y_1^2 = 2px_1$  με  $M \neq O$

i) Αν  $M \notin y'y$ .

$$\frac{M(x_1, y_1)}{E\left(\frac{p}{2}, 0\right)} \Rightarrow \lambda_{ME} = \frac{0 - y_1}{\frac{p}{2} - x_1} = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} = \frac{2y_1}{2x_1 - p}$$

$$\begin{aligned} (n) // \alpha \zeta \omicron \alpha (c) &\Rightarrow (n) // x'x \Rightarrow \lambda_n = 0 \\ (ε) \text{ εφαπτόμενη } (c) \text{ στο } M(x_1, y_1) \in (c) &\Rightarrow \lambda_ε = \frac{P}{y_1} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} (n) // \alpha \zeta \omicron \alpha (c) &\Rightarrow (n) // x'x \Rightarrow \lambda_n = 0 \\ (ε) \text{ εφαπτόμενη } (c) \text{ στο } M(x_1, y_1) \in (c) &\Rightarrow \lambda_ε = \frac{P}{y_1} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \varepsilon \varphi(n, \varepsilon) = \frac{\lambda_ε - \lambda_n}{1 + \lambda_ε \lambda_n} = \frac{\frac{P}{y_1} - 0}{1 + \frac{P}{y_1} \cdot 0} = \frac{P}{y_1}$$

$$\begin{aligned} \lambda_ε = \frac{P}{y_1} \quad \lambda_{ME} = \frac{2y_1}{2x_1 - P} \quad \left. \vphantom{\lambda_ε = \frac{P}{y_1} \quad \lambda_{ME} = \frac{2y_1}{2x_1 - P}} \right\} \Rightarrow \varepsilon \varphi(ε, ME) &= \frac{\lambda_{ME} - \lambda_ε}{1 + \lambda_{ME} \cdot \lambda_ε} = \frac{\frac{2y_1}{2x_1 - P} - \frac{P}{y_1}}{1 + \frac{2y_1}{2x_1 - P} \cdot \frac{P}{y_1}} = \\ &= \frac{2y_1^2 - P(2x_1 - P)}{y_1(2x_1 - P) + 2Py_1} = \frac{2y_1^2 - 2Px_1 + P^2}{2x_1y_1 - Py_1 + 2Py_1} = \frac{4Px_1 - 2Px_1 + P^2}{2x_1y_1 + Py_1} = \frac{2Px_1 + P^2}{2x_1y_1 + Py_1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{P(2x_1 + P)}{y_1(2x_1 + P)} = \frac{P}{y_1} = \varepsilon \varphi(n, \varepsilon) \Rightarrow (n, \varepsilon) = (ε, ME)$$

$$\text{ii) } \Delta \nu \quad ME // y'y \Rightarrow \begin{cases} x_M = x_E = \frac{P}{2} \\ y_M^2 = 2Px_M = 2P \cdot \frac{P}{2} = P^2 \Rightarrow y_M = \pm P, \text{ ε } \omega \tau \omega \quad y_M = P \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{P}{2}, P\right)$$

$$\Rightarrow (ε) \text{ εφαπτόμενη } (c) \text{ στο } M\left(\frac{P}{2}, P\right) \Rightarrow \lambda_ε = \frac{P}{y_1} = \frac{P}{P} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \varepsilon \varphi(n, \varepsilon) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n, \varepsilon) = \frac{n}{4}.$$

$$\begin{aligned} ME // y'y. \quad \left. \vphantom{ME // y'y.} \right\} (n) \perp ME \Rightarrow (n, ME) &= \frac{n}{2} = (n, \varepsilon) + (ε, ME) = \frac{n}{4} + (ε, ME) \Rightarrow \\ (n) // \alpha \zeta \omicron \alpha (c) &\Rightarrow (n) // x'x \\ \Rightarrow (ε, ME) &= \frac{n}{4} = (n, \varepsilon). \end{aligned}$$

↑  
→ Η παραπάνω άσκηση είναι μέθοδος χάραξης της εφαπτόμενης.

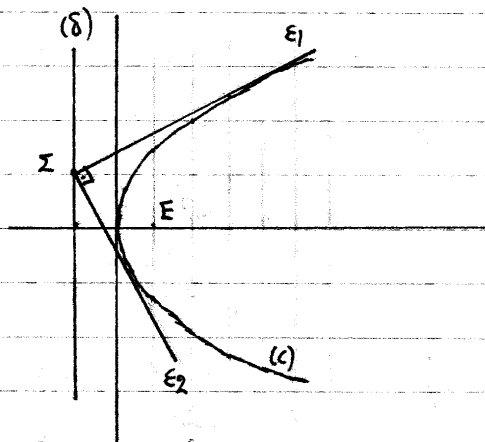
$$\begin{aligned} \Delta \nu \quad (c) \text{ παραβολή, } (\delta) \text{ διευθέτουσα } (c), (ε_1), (ε_2) \text{ εφαπτόμενες } (c), \\ \Sigma = (ε_1) \cap (ε_2) \in (\delta) \\ \text{τότε } (ε_1) \perp (ε_2). \end{aligned}$$

Απόδειξη

$$\text{Ε } \omega \tau \omega \quad \text{πο } \gamma : (c): y^2 = 2px \Rightarrow (\delta): x = -\frac{P}{2} \left. \vphantom{(c): y^2 = 2px} \right\} \Rightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R} : \Sigma\left(-\frac{P}{2}, y_0\right) \\ \Sigma \in (\delta)$$

Ε } \omega \tau \omega \quad (ε \varphi) \text{ μια εφαπτόμενη της } (c) \text{ που διέρχεται ά } \eta \nu \text{ το } \Sigma \text{ (δηλ. μία ά } \eta \nu \text{ τις } ε\_1, ε\_2)

$$\Sigma \in (ε \varphi) \Rightarrow (ε \varphi): y - y_0 = \lambda \left(x + \frac{P}{2}\right) \Leftrightarrow y = \lambda x + \left(\frac{\lambda P}{2} + y_0\right)$$



$$\begin{aligned}
 (\text{εφ}) \text{ εμφανίζεται } (c) &\Leftrightarrow p = 2\lambda k \Leftrightarrow p = 2\lambda \left( \frac{\lambda p}{2} + y_0 \right) \Leftrightarrow p = p\lambda^2 + 2y_0\lambda \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow p\lambda^2 + 2y_0\lambda - p = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = \frac{-p}{p} = -1 \Rightarrow (E_1) \perp (E_2)
 \end{aligned}$$

### ΕΛΛΕΙΨΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζεται έλλειψη με εστίες  $E_1, E_2$  ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από τα  $E_1, E_2$  έχουν σταθερό άθροισμα  $2a$ .

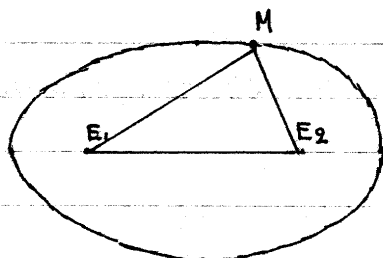
Δηλ.

$$\begin{aligned}
 &\text{Αν } (c) \text{ έλλειψη με εστίες } E_1, E_2 \\
 &M \in (c) \Leftrightarrow d(M, E_1) + d(M, E_2) = 2a
 \end{aligned}$$

Εστιακή απόσταση:  $d(E_1, E_2) = 2\gamma$ .

Εκκεντρότητα έλλειψης:  $\epsilon = \frac{\gamma}{a}$

Αν  $M \in (c)$ ,  $r_1 = d(M, E_1)$ ,  $r_2 = d(M, E_2)$  } εστιακές ακτίνες.



Θ. Είναι  $\frac{\gamma}{a} < 1$ .

Αποδείξη: Στο  $\triangle ME_1E_2$ :  $(E_1E_2) = (ME_1) + (ME_2) \Rightarrow (E_1E_2) < 2a \Rightarrow$   
 $M \in (c) \Rightarrow (ME_1) + (ME_2) = 2a$

$$\rightarrow 2\gamma < 2a \rightarrow \gamma < a \rightarrow \frac{\gamma}{a} < 1.$$

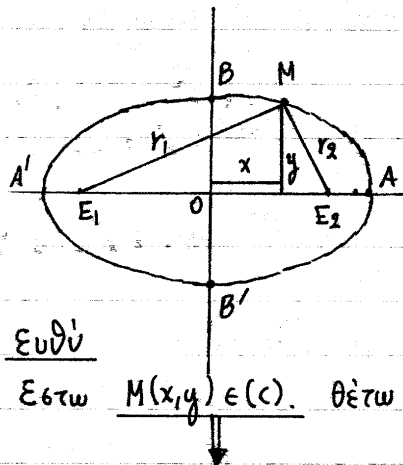


# ▼ Εξίσωση έλλειψης

$$(c) \text{ έλλειψη με εστίες} \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: (c): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

$$E_1(-\gamma, 0), E_2(\gamma, 0) \text{ και μάλιστα, } 2a = r_1 + r_2, \forall M \in (c), \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$$

Απόδειξη



Ευθύ

Εστω  $M(x, y) \in (c)$ . Θέτω  $r_1 = d(M, E_1) \wedge r_2 = d(M, E_2)$ .

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (1).$$

$$\begin{aligned} M(x, y) \\ E_1(-\gamma, 0), E_2(\gamma, 0) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} r_1^2 = d^2(M, E_1) = (x + \gamma)^2 + y^2 \\ r_2^2 = d^2(M, E_2) = (x - \gamma)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow r_1^2 - r_2^2 = [(x + \gamma)^2 + y^2] - [(x - \gamma)^2 + y^2]$$

$$= x^2 + 2x\gamma + \gamma^2 + y^2 - x^2 + 2x\gamma - \gamma^2 - y^2 = 4\gamma x \Rightarrow (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4\gamma x \Rightarrow 2a(r_1 - r_2) = 4\gamma x$$

$$(1) \Rightarrow r_1 + r_2 = 2a$$

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{4\gamma x}{2a} = \frac{2\gamma x}{a} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_1 - r_2 = \frac{2\gamma x}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = a + \frac{\gamma x}{a} \\ r_1 + r_2 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ a + \frac{\gamma x}{a} + r_2 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2r_1 = 2a + \frac{2\gamma x}{a}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = a + \frac{\gamma x}{a} \\ r_2 = a - \frac{\gamma x}{a} \end{cases} \text{ APA } \boxed{r_1 = a + \varepsilon x} \quad \text{όπου } \varepsilon \text{ η εκκεντρότητα.}$$

$$\boxed{r_2 = a - \varepsilon x}$$

$$\text{Είναι } r_1^2 = (x + \gamma)^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(a + \frac{\gamma x}{a}\right)^2 = (x + \gamma)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2\gamma x + \frac{\gamma^2 x^2}{a^2} = x^2 + 2\gamma x + \gamma^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \frac{a^2 - \gamma^2}{a^2} + y^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \gamma^2} = 1.$$

Είναι  $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1 \Rightarrow a^2 - \gamma^2 > 0 \Rightarrow a > \gamma \Rightarrow a^2 > \gamma^2 \Rightarrow a^2 - \gamma^2 > 0$

Άρα θέτω  $b^2 = a^2 - \gamma^2$  και άρα

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ με } b^2 < a^2.$$

Αντίστροφο : Αν  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$  αποδεικνύεται ότι  $M(x, y) \in (c)$ .

→ Έστω η έλλειψη  $(c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  με  $b^2 < a^2$ .

1) Οι άξονες  $x'x, y'y$  είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης και η αρχή

ο κέντρο συμμετρίας.

$A(a, 0), A'(-a, 0), B(0, b), B'(0, -b) \rightarrow$  κορυφές έλλειψης.

$AA' \rightarrow$  μεγάλος άξονας

$BB' \rightarrow$  μικρός άξονας της έλλειψης.

$O \rightarrow$  κέντρο της έλλειψης

• Γενικά:

1) Η  $(c): \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, a > b$  είναι έλλειψη με.

εστίες  $E_1(x_0 - \gamma, y_0), E_2(x_0 + \gamma, y_0)$  όπου  $\gamma^2 = a^2 - b^2$

κορυφές  $A'(x_0 - a, y_0), A(x_0 + a, y_0)$

$B'(x_0, y_0 - b), B(x_0, y_0 + b)$

κέντρο  $O'(x_0, y_0)$ . (• Μεγάλος άξονας  $\parallel x'x$ ).

2) Η  $(c): \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1, a > b$  είναι έλλειψη με

εστίες  $E_1(x_0, y_0 - \gamma), E_2(x_0, y_0 + \gamma)$  όπου  $\gamma^2 = a^2 - b^2$

κορυφές  $A'(x_0, y_0 - a), A(x_0, y_0 + a)$

$B'(x_0 - b, y_0), B(x_0 + b, y_0)$

κέντρο  $O'(x_0, y_0)$  (• Μεγάλος άξονας  $\parallel y'y$ ).

▼ Σχετική θέση έλλειψης - ευθείας.

Αν (C):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\forall a, b \in (0, +\infty)$  (δηλ. και για οριζόντια και για κατακόρυφη έλλειψη) και (E):  $y = \lambda x + \kappa$ . τότε

- Θ. 
 1) Αν  $b^2 + \lambda^2 a^2 > \kappa^2 \Leftrightarrow$  2 κοινά σημεία  
 2) Αν  $b^2 + \lambda^2 a^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow$  1 κοινό σημείο το  $M(-\frac{a^2 \lambda}{\kappa}, \frac{b^2}{\kappa})$   
 3) Αν  $b^2 + \lambda^2 a^2 < \kappa^2 \Leftrightarrow$  κανένα κοινό σημείο

Απόδειξη.

$$H \quad (C) \cap (E): \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \lambda x + \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(\lambda x + \kappa)^2}{b^2} = 1 \\ y = \lambda x + \kappa \end{cases} \rightarrow \text{έχει τόσες λύσεις όσες}$$

$$n \text{ εξίσωση } \frac{x^2}{a^2} + \frac{(\lambda x + \kappa)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 (\lambda x + \kappa)^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 \lambda^2 x^2 + 2a^2 \lambda \kappa x + a^2 \kappa^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + \lambda^2 a^2) x^2 + 2a^2 \lambda \kappa x + a^2 (\kappa^2 - b^2) = 0 \quad (1).$$

$$b \neq 0 \Rightarrow b^2 > 0 \Rightarrow b^2 + \lambda^2 a^2 > 0 \Rightarrow b^2 + \lambda^2 a^2 \neq 0 \Rightarrow H \text{ (1) είναι β' βαθμού.}$$

$$\Delta = 4a^4 \lambda^2 \kappa^2 - 4(b^2 + \lambda^2 a^2) \cdot a^2 (\kappa^2 - b^2) = 4a^2 [\lambda^2 a^2 \kappa^2 - (b^2 + \lambda^2 a^2)(\kappa^2 - b^2)] =$$

$$= 4a^2 (\lambda^2 a^2 \kappa^2 - b^2 \kappa^2 + b^4 - \lambda^2 a^2 \kappa^2 + \lambda^2 a^2 b^2) = \underbrace{4a^2 b^2}_{+} (b^2 + \lambda^2 a^2 - \kappa^2)$$

Αν  $b^2 + \lambda^2 a^2 > \kappa^2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow H \text{ (1) έχει δύο ρίζες} \Leftrightarrow H' \text{ (E) και (C) έχουν δύο κοινά σημεία.}$

Αν  $b^2 + \lambda^2 a^2 = \kappa^2 \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow H \text{ (1) έχει μία ρίζα (διπλή)} \Leftrightarrow H' \text{ (E) και (C) έχουν 1 κοινό σημείο το } M(x_1, y_1).$

$$A \quad \Delta = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2a^2 \lambda \kappa}{2(b^2 + \lambda^2 a^2)} = \frac{-a^2 \lambda \kappa}{b^2 + \lambda^2 a^2} \xrightarrow{b^2 + \lambda^2 a^2 = \kappa^2} = \frac{-a^2 \lambda \kappa}{\kappa^2} = \frac{-a^2 \lambda}{\kappa}$$

$$M(x_1, y_1) \in (E): y = \lambda x + \kappa \Rightarrow y_1 = \lambda x_1 + \kappa = \lambda \cdot \frac{-a^2 \lambda}{\kappa} + \kappa = \frac{\kappa^2 - a^2 \lambda^2}{\kappa} = \frac{b^2}{\kappa}$$

$$\text{Αρα } M\left(-\frac{a^2 \lambda}{\kappa}, \frac{b^2}{\kappa}\right)$$

Αν  $b^2 + \lambda^2 a^2 < \kappa^2 \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow H \text{ (1) δεν έχει ρίζες στο } \mathbb{R} \Leftrightarrow (E) \cap (C) = \emptyset.$

## Υφαπτόμενη της έλλειψης

H (ε): εφαπτεται

$$\left. \begin{array}{l} H (ε): y = λx + κ \text{ εφαπτεται} \\ \text{στην } (c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow b^2 + λ^2 a^2 = κ^2 \quad \text{Τύπος του "βλάκα"}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_v (ε) \cap (c) = \{M\} \\ \text{όπου } (ε): y = λx + κ \\ (c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(-\frac{a^2 λ}{κ}, \frac{b^2}{κ}\right)$$

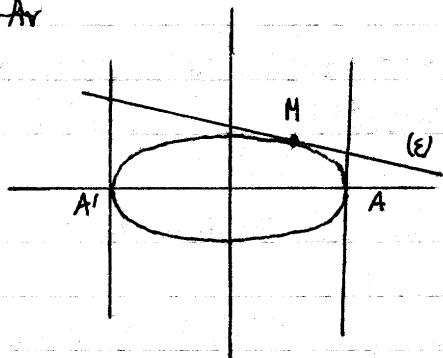
Θα δείξουμε ότι:

$$\Theta. \quad H \text{ εφαπτόμενη της } (c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ στο } M(x_1, y_1) \text{ είναι}$$

$$n \quad (ε): \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

Απόδειξη

•  $A_v$



•  $A_v \quad M(x_1, y_1) \neq A'(-a, 0), A(a, 0) \Rightarrow -a < x_1 < a \Rightarrow x_1^2 < a^2$

i)  $H (ε): x = x_1$  δεν είναι εφαπτόμενη διότι

$$n (ε) \cap (c): \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ b^2 x_1^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x_1^2) > 0 \end{array} \right\} \quad \text{έχει δύο λύσεις}$$

ii)  $H (ε): y = λx + κ$  εφαπτεται (c)

iii)  $H (ε): y =$

$$\left( \begin{aligned} H^{(k)}: y - y_1 &= \lambda(x - x_1) \Leftrightarrow y = \lambda x + (y_1 - \lambda x_1) \text{ εφαρτεται } (c) \Leftrightarrow b^2 + \lambda^2 a^2 = k^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b^2 + \lambda^2 a^2 = (y_1 - \lambda x_1)^2 \Leftrightarrow b^2 + \lambda^2 a^2 = y_1^2 - 2\lambda x_1 y_1 + \lambda^2 x_1^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 (a^2 - x_1^2) + 2\lambda x_1 y_1 + b^2 - y_1^2 = 0. \end{aligned} \right)$$

$$H^{(k)}: y - y_1 = \lambda(x - x_1) \text{ εφαρτεται } (c) \text{ στο } M(x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{a^2 \lambda}{k} \\ y_1 = \frac{b^2}{k} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ k = \frac{b^2}{y_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{a^2 \lambda}{\frac{b^2}{y_1}} = -\frac{a^2 \lambda y_1}{b^2} \\ \rightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} \\ \rightarrow \end{cases}$$

$$\text{Αρα } (ε): y - y_1 = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \Leftrightarrow a^2 y_1 (y - y_1) = -b^2 x_1 (x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2 \Leftrightarrow \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$M(x_1, y_1) \in (c): \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow (ε): \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

• Στο  $M = A'(-a, 0)$

$$H^{(ε)}: x = -a \text{ εφαρτόμενη, διότι η } (ε) \cap (c): \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = 0 \end{cases} \text{ έχει ΜΜΛ}$$

$$\text{Αλλά, για } x_1 = -a \text{ και } y_1 = 0, (ε): \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{-a x}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x = -a$$

• Στο  $M = A(a, 0)$  η  $(ε): x = a$  εφαρτόμενη, διότι η

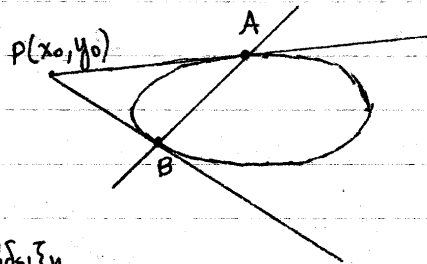
$$(ε) \cap (c): \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \text{ έχει ΜΜΛ}$$

$$\text{Αλλά, για } x_1 = a \text{ και } y_1 = 0, (ε): \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a x}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x = a.$$

$$\text{Αρα η } (ε): \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \text{ καλύπτει και τις περιπτώσεις } M = A' \vee M = A.$$

και είναι πάντα η εφαρτόμενη της  $(c)$  στο  $M(x_1, y_1) \in (c)$ .

✓ Πολική ευθεία AB σημείου  $M(x_0, y_0)$  ως προς  $(c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



$$(AB): \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Απόδειξη

Έστω  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$A(x_1, y_1)$  σημείο επαφής  $\Rightarrow (PA): \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$

$B(x_2, y_2)$  σημείο επαφής  $\Rightarrow (PB): \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1.$

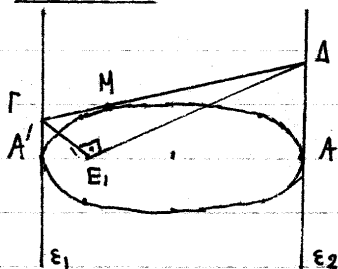
$$P(x_0, y_0) = PA \cap PB \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1 \\ \frac{x_0 x_2}{a^2} + \frac{y_0 y_2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in (\varepsilon): \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB): \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

• Εφαρμογή

Αν  $AA'$  μεγάλος άξονας έλλειψης  $(c)$   
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$  εφαπτομένες στα  $A', A, M$   
 $\Gamma = \varepsilon_1 \cap \varepsilon \wedge \Delta = \varepsilon_2 \cap \varepsilon \Rightarrow \Gamma E_1 \perp \Delta E_1 \wedge \Gamma E_2 \perp \Delta E_2.$

Απόδειξη



Παίρνω σύστημα  $xOy$ : Ο κέντρο της έλλειψης  
 $E_1, E_2 \in x'x$   
 $y'y \perp x'x$   
 $\Rightarrow (c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} E_1(-a, 0) \\ E_2(a, 0) \end{cases} \quad (1)$$

Έστω  $M(x_1, y_1)$  το σημείο επαφής  $\Rightarrow (\varepsilon): \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  εφαπτομένες στα  $A', A$   
 $AA'$  μεγάλος άξονας  $\Rightarrow (\varepsilon_1): x = -a \wedge (\varepsilon_2): x = a.$

$$\Gamma = \varepsilon \cap \varepsilon_1: \begin{cases} x = -a \\ \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} \\ \frac{-ax_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} \\ \frac{-x_1}{a} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} \\ -b^2x_1 + ay_1y = ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1} \end{cases} \Leftrightarrow \Gamma\left(-a, \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1}\right) \quad (2)$$

$$\Delta = \varepsilon \cap \varepsilon_2: \begin{cases} x = a \\ \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta\left(a, \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1}\right) \quad (3)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \vec{E_1\Gamma}\left(\gamma-a, \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1}\right) \Rightarrow \vec{E_1\Gamma} \cdot \vec{E_2\Delta} = (\gamma-a)(\gamma+a) + \frac{b^4(a^2-x_1^2)}{a^2y_1^2} =$$

$$(1) \wedge (3) \Rightarrow \vec{E_2\Delta}\left(\gamma+a, \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E_1\Gamma} \cdot \vec{E_2\Delta} = (\gamma-a)(\gamma+a) + \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1} \cdot \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1} = \gamma^2 - a^2 + \frac{b^4(a^2-x_1^2)}{a^2y_1^2} \quad (1).$$

$$M(x_1, y_1) \in (c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow a^2y_1^2 = b^2(a^2-x_1^2)$$

$$(1) \Rightarrow \vec{E_1\Gamma} \cdot \vec{E_2\Delta} = \gamma^2 - a^2 + \frac{b^4(a^2-x_1^2)}{b^2(a^2-x_1^2)} = -b^2 + b^2 = 0 \Rightarrow E_1\Gamma \perp E_2\Delta$$

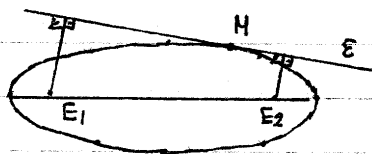
. Ομοίως  $E_2\Gamma \perp E_2\Delta$ .

$$E_1, E_2 \text{ εφαπτόμενες έλλειψης } (c) \Rightarrow d(E_1, \varepsilon_L) \cdot d(E_2, \varepsilon_L) = d(E_1, \varepsilon_R) \cdot d(E_2, \varepsilon_R)$$

Απόδειξη: Παίρνω συστήμα αναφοράς  $xOy$ : ~~εδώ~~  $x'x // E_1\Gamma$

$E_1, E_2 \in x'x$ , ο μέσο  $E_1E_2$ ,  $y'y \perp x'x$

στο οποίο  $(c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$\text{Έστω } (c): y = \lambda x + k \text{ εφαπτόμενη } (c) \Rightarrow b^2 + \lambda^2 a^2 = k^2 \quad (1).$$

(c):  $\lambda x - y + k = 0$

$$d(E_1, \varepsilon) \cdot d(E_2, \varepsilon)$$

$$E_1(-\gamma, 0), E_2(\gamma, 0) \Rightarrow d(E_1, \varepsilon) \cdot d(E_2, \varepsilon) = \frac{|-\lambda\gamma + k|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \cdot \frac{|\lambda\gamma + k|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|k^2 - \lambda^2\gamma^2|}{\lambda^2 + 1} =$$

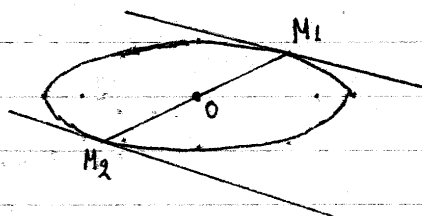
$$= \frac{|b^2 + a^2\lambda^2 - \lambda^2\gamma^2|}{\lambda^2 + 1} = \frac{|b^2 + (a^2 - \gamma^2)\lambda^2|}{\lambda^2 + 1} = \frac{b^2 + b^2\lambda^2}{\lambda^2 + 1} = \frac{b^2(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2 + 1} = b^2 = \text{σταθ}$$

$$\text{Άρα } \forall E_1, E_2 \text{ εφαπτόμενες } (c): d(E_1, \varepsilon_L) \cdot d(E_2, \varepsilon_L) = d(E_1, \varepsilon_R) \cdot d(E_2, \varepsilon_R)$$

▼ Διάμετρος έλλειψης  $\rightarrow$  είναι κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της έλλειψης.

Θ. Έστω  $(\epsilon_1)$  εφαπτόμενη της  $(c)$  στο  $M_1 \in (c)$   
 $(\epsilon_2)$  εφαπτόμενη της  $(c)$  στο  $M_2 \in (c)$   
 $M_1 M_2$  διάμετρος  $(c) \iff \epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ .

Απόδειξη



Έστω  $\chi O y$ :  $\chi' \chi, E_1, E_2 \in \chi' \chi$ ,  $O$  μέσο  $E_1 E_2$ ,  $y' y \perp \chi' \chi$ . στο οποίο

$$(c): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ευθύ:  $M_1 M_2$  διάμετρος  $\Rightarrow M_2$  συμμετρικό του  $M_1$  ως προς  $O \Rightarrow \begin{cases} M_1(x_1, y_1) \\ M_2(-x_1, -y_1) \end{cases}$

$$\begin{aligned} (\epsilon_1) \text{ εφαπτόμενη της } (c) \text{ στο } M_1(x_1, y_1) &\Rightarrow (\epsilon_1): \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}} = -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} \\ (\epsilon_2) \text{ εφαπτόμενη της } (c) \text{ στο } M_2(x_2, y_2) &\Rightarrow (\epsilon_2): \frac{-x x_1}{a^2} + \frac{-y y_1}{b^2} = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{\frac{-x_1}{a^2}}{\frac{-y_1}{b^2}} = -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \epsilon_1 \parallel \epsilon_2$$

Αντίστροφο: Ομοία  $\lambda_1 = -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{x_2 b^2}{y_2 a^2}$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ .

$$\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow -\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} = -\frac{x_2 b^2}{y_2 a^2} \Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

$$D(O, M_1, M_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Rightarrow O, M_1, M_2 \text{ συνευθειακά} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O \in M_1 M_2 \Rightarrow M_1 M_2 \text{ διάμετρος } (c)$$



## ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζεται υπερβολή με εστίες  $E_1, E_2$  ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από τα  $E_1, E_2$  είναι, κατ'απόλυση τιμή, σταθερή και ίση με  $2a$ .

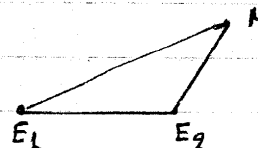
δηλ.  $M \in (c) \Leftrightarrow |d(M, E_1) - d(M, E_2)| = 2a$

Εστιακή απόσταση  $\bullet \rightarrow d(E_1, E_2) = 2\gamma$ .

Εκκεντρότητα της υπερβολής  $\bullet \rightarrow e = \frac{\gamma}{a}$ .

• Είναι  $\frac{\gamma}{a} > 1$

Απόδειξη



Στο  $M \in \overset{\Delta}{E_1 E_2} \Rightarrow |d(M, E_1) - d(M, E_2)| < d(E_1, E_2) \Rightarrow 2a < 2\gamma \Rightarrow \frac{\gamma}{a} > 1$ . Q.E.D.

Εξίσωση υπερβολής.

(c) υπερβολή με  $(2a)$   
εστίες  $E_1(-\gamma, 0), E_2(\gamma, 0)$   
με  $b^2 = a^2 - \gamma^2$ ,  $\forall M \in (c): |r_1 - r_2| = 2a$ .

$$(c): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Απόδειξη: Ευθύ

Έστω  $M(x, y) \in (c)$ . και  $r_1 = d(M, E_1)$ ,  $r_2 = d(M, E_2)$ .

$$M(x, y), E_1(-\gamma, 0), E_2(\gamma, 0) \Rightarrow \begin{cases} r_1^2 = (x+\gamma)^2 + y^2 & (1) \\ r_2^2 = (x-\gamma)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1^2 - r_2^2 = (x+\gamma)^2 - (x-\gamma)^2 = \\ = x^2 + 2\gamma x + \gamma^2 - x^2 + 2\gamma x - \gamma^2 = 4\gamma x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4\gamma x$$

$$M(x, y) \in (c) \Rightarrow |r_1 - r_2| = 2a, \text{ άρα } \begin{cases} (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4\gamma x \\ |r_1 - r_2| = 2a \end{cases}$$

• Αν  $x > 0 \Rightarrow 4\gamma x > 0 \Rightarrow (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) > 0 \Rightarrow r_1 - r_2 > 0$ . οπότε

$$\begin{cases} r_1 - r_2 = 2a \\ (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4\gamma x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = 2a \\ 2a(r_1 + r_2) = 4\gamma x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = 2a \\ r_1 + r_2 = \frac{2\gamma x}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{\gamma x}{a} + a \\ r_2 = \frac{\gamma x}{a} - a \end{cases}$$

• Αν  $x < 0 \Rightarrow r_1 - r_2 < 0$  οπότε

$$\begin{cases} r_1 - r_2 = -2a \\ (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4\gamma x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = -2a \\ -2a(r_1 + r_2) = 4\gamma x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = -2a \\ r_1 + r_2 = -\frac{2\gamma x}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -\frac{\gamma x}{a} - a \\ r_2 = -\frac{\gamma x}{a} + a \end{cases}$$

Άρα:

$$r_1 = \left| \frac{\gamma x}{a} + a \right|, r_2 = \left| \frac{\gamma x}{a} - a \right| \text{ οπότε}$$

$$(1) \Leftrightarrow r_1^2 = (x+\gamma)^2 + y^2 \Leftrightarrow \left( \frac{\gamma x}{a} + a \right)^2 = (x+\gamma)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma^2 x^2}{a^2} + 2\gamma x + a^2 = x^2 + 2\gamma x + \gamma^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\gamma^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - \gamma^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \gamma^2} = 1 \quad (2)$$

Είναι  $\frac{\gamma}{a} > 1 \Rightarrow \gamma^2 > a^2 \Rightarrow a^2 - \gamma^2 < 0 \Rightarrow \exists b \in (0, +\infty): b^2 = \gamma^2 - a^2$

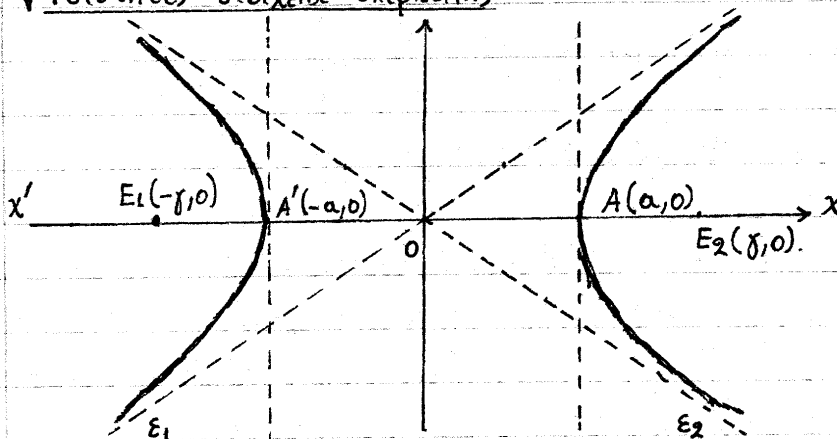
Θέτω  $b^2 = \gamma^2 - a^2$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\gamma^2 - a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Αντίστροφο: Αν  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow M(x, y) \in (c)$

• Ειδικά: Αν  $b = a \Rightarrow (c): x^2 - y^2 = a^2 \leftarrow$  ισοσκελής υπερβολή.

▼ Ιδιότητες - στοιχεία υπερβολής



1) Οι άξονες  $Ox, Oy$  είναι άξονες συμμετρίας της  $(c): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  και το  $O(0, 0)$  κέντρο συμμετρίας.

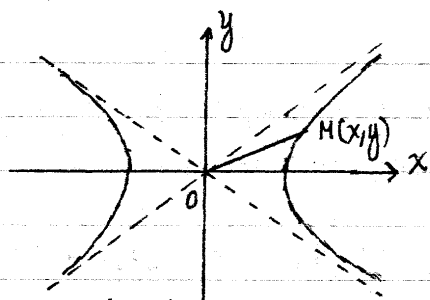
2)  $(c) \cap x'y' = \{A(a, 0), A'(-a, 0)\}$ .  $\bullet \rightarrow A, A'$  κορυφές υπερβολής  $(c)$ .  
 $(c) \cap y'y = \emptyset$ .

3) Τα σημεία της  $(c)$  βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών  $(\delta_1): x = -a, (\delta_2): x = a$ .

Ασύμπτωτες  $\rightarrow \boxed{(\epsilon_1): y = \frac{b}{a} x}, \boxed{(\epsilon_2): y = -\frac{b}{a} x}.$

είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την ΟΜ με  $M(x, y) \in (c)$  όταν  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Απόδειξη



Έστω  $M(x,y) \in (C)$ .

$$O(0,0), M(x,y) \Rightarrow \lambda_{OM} = \frac{y}{x}.$$

$$M(x,y) \in (C) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow a^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 (1 - \frac{a^2}{x^2})} = \pm \frac{b}{a} |x| \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

• Αν  $M \in 1^\circ$  ή  $3^\circ$  τεταρτημόριο  $\Rightarrow x, y$  ομόσημοι  $\Rightarrow y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_{OM} = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_{OM} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda_{OM} = \frac{b}{a}$$

Η ευθεία  $(E_1)$  με  $O \in (E_1)$   $\lambda_1 = \frac{b}{a}$   $\Rightarrow (E_1): y = \frac{b}{a} x$  είναι μία ασύμπτωτη της  $(C)$ .

• Αν  $M \in 2^\circ$  ή  $4^\circ$  τεταρτημόριο  $\Rightarrow x, y$  ετερόσημοι  $\Rightarrow y = -\frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_{OM} = \frac{y}{x} = -\frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_{OM} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda_{OM} = -\frac{b}{a}$$

Η ευθεία  $(E_2)$  με  $O \in (E_2)$   $\lambda_2 = -\frac{b}{a}$   $\Rightarrow (E_2): y = -\frac{b}{a} x$  είναι μία ασύμπτωτη της  $(C)$ .

•  $(E_1) \cap (C) = \emptyset, (E_2) \cap (C) = \emptyset$ .

• Στην ισοσκελή υπερβολή  $(C): x^2 - y^2 = a^2$  ασύμπτωτες είναι οι  $(E_1): y = x, (E_2): y = -x$ .

$$\theta. \quad d(E_1, E_1) = d(E_2, E_1) = d(E_1, E_2) = d(E_2, E_2) = b$$

Απόδειξη.

$$E_1, E_2 \text{ ασύμπτωτες } (C): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} (E_1): y = \frac{b}{a} x \Leftrightarrow bx - ay = 0. \\ (E_2): y = -\frac{b}{a} x \Leftrightarrow bx + ay = 0. \end{cases}$$

$E_1, E_2$  εφτίζε  $(C) \Rightarrow E_1(-\gamma, 0), E_2(\gamma, 0)$ .

$$E_1(-\gamma, 0) \Rightarrow d(E_1, E_1) = \frac{|b(-\gamma) - a \cdot 0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|b\gamma|}{\sqrt{\gamma^2}} = \frac{|b| \cdot |\gamma|}{|\gamma|} = |b| = b.$$

$(E_1): bx - ay = 0$

Ομοία  $d(E_2, E_1) = d(E_1, E_2) = d(E_2, E_2) = b$ .

↑ Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει η γεωμετρική έννοια του  $b$ .  
Το  $b$  είναι ίσο με τις ίσες αποστάσεις των εστιών από της ασύμπτωτες της υπερβολής.

### ▼ Γενική μορφή εξίσωσης υπερβολής

1) Η  $(c): \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  είναι υπερβολή με

εστίες  $E_1(x_0 - \gamma, y_0)$ ,  $E_2(x_0 + \gamma, y_0)$   
κορυφές  $A'(x_0 - a, y_0)$ ,  $A(x_0 + a, y_0)$   
ασύμπτωτες  $(\epsilon_1): y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0)$ ,  $(\epsilon_2): y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$ .

όπου  $\gamma^2 = a^2 + b^2$

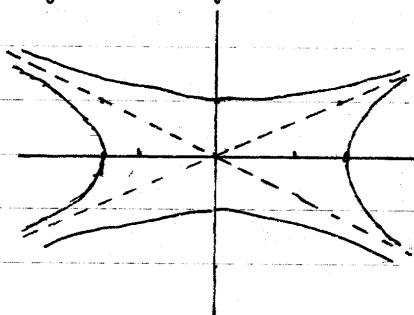
2) Η  $(c): \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$  είναι υπερβολή με

εστίες  $E_1(x_0, y_0 - \gamma)$ ,  $E_2(x_0, y_0 + \gamma)$   
κορυφές  $A'(x_0, y_0 - a)$ ,  $A(x_0, y_0 + a)$   
ασύμπτωτες  $(\epsilon_1): y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0)$ ,  $(\epsilon_2): y - y_0 = \frac{a}{b}(x - x_0)$ .

όπου  $\gamma^2 = a^2 + b^2$

### ▼ Συζυγείς υπερβολές

Οι υπερβολές  $(c_1): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $(c_2): \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$   
λέγονται συζυγείς και έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες.



▼ Σχετική θέση υπερβολής (c):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  και ευθείας (ε):  $y = \lambda x + \kappa$ .

$$i) \text{ Αν } b^2 = a^2 \lambda^2 \iff [(ε) \parallel (ε_1) \vee (ε) \parallel (ε_2)] \wedge (c) \cap (ε) = M\left(-\frac{b^2 + \kappa^2}{2\lambda\kappa}, -\frac{b^2 - \kappa^2}{2\kappa}\right)$$

ii) Αν  $b^2 \neq a^2 \lambda^2$  τότε

$$1) b^2 + \kappa^2 > a^2 \lambda^2 \iff (ε) \cap (c) = \{M_1, M_2\}$$

$$2) b^2 + \kappa^2 = a^2 \lambda^2 \iff (ε) \cap (c) = M\left(-\frac{a^2 \lambda}{\kappa}, -\frac{b^2}{\kappa}\right).$$

$$3) b^2 + \kappa^2 < a^2 \lambda^2 \iff (ε) \cap (c) = \emptyset.$$

Απόδειξη

$$(c) \cap (ε): \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \lambda x + \kappa \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{(\lambda x + \kappa)^2}{b^2} = 1 \\ \rightarrow \end{cases} \iff x^2 b^2 - a^2 (\lambda^2 x^2 + 2\lambda\kappa x + \kappa^2) = a^2 b^2$$

$$\iff (b^2 - a^2 \lambda^2) x^2 - 2a^2 \lambda \kappa x - a^2 (b^2 + \kappa^2) = 0 \quad (1).$$

$$i) \text{ Αν } b^2 - a^2 \lambda^2 = 0 \iff b^2 = a^2 \lambda^2 \iff \lambda = \pm \frac{b}{a} \iff ε \parallel ε_1 \vee ε \parallel ε_2.$$

$$(1) \iff 2a^2 \lambda \kappa x + a^2 (b^2 + \kappa^2) = 0 \iff x = -\frac{a^2 (b^2 + \kappa^2)}{2a^2 \lambda \kappa} = -\frac{b^2 + \kappa^2}{2\lambda \kappa} \quad \text{Μ.Μ.Λ.}$$

$$y = \lambda x + \kappa = \lambda \left(-\frac{b^2 + \kappa^2}{2\lambda \kappa}\right) + \kappa = -\frac{b^2 + \kappa^2}{2\kappa} + \kappa = \frac{-(b^2 + \kappa^2) + 2\kappa^2}{2\kappa} = -\frac{b^2 - \kappa^2}{2\kappa}$$

$$\text{Αρα } (c) \cap (ε) = M\left(-\frac{b^2 + \kappa^2}{2\lambda \kappa}, -\frac{b^2 - \kappa^2}{2\kappa}\right).$$

ii) Αν  $b^2 - a^2 \lambda^2 \neq 0 \Rightarrow (1)$  δευτεροβάθμια.

$$\Delta = 4a^4 \lambda^2 \kappa^2 + 4(b^2 - a^2 \lambda^2) \cdot a^2 (b^2 + \kappa^2) =$$

$$= 4a^2 [a^2 \lambda^2 \kappa^2 + b^4 + b^2 \kappa^2 - a^2 \lambda^2 b^2 - a^2 \lambda^2 \kappa^2] = 4a^2 b^2 (b^2 + \kappa^2 - a^2 \lambda^2).$$

1)  $b^2 + \kappa^2 > a^2 \lambda^2 \iff \Delta > 0 \iff \text{Η (1) έχει δύο άνισες λύσεις} \iff \text{Το } (c) \cap (ε) \text{ έχει δύο άνισες λύσεις} \iff (ε) \cap (c) = \{M_1, M_2\}.$

2)  $b^2 + \kappa^2 = a^2 \lambda^2 \iff \Delta = 0 \iff \text{Η (1) έχει μία λύση} \iff \text{Το } (c) \cap (ε) \text{ έχει μία μόνο λύση} \iff (ε) \cap (c) = \{M\}.$

3)  $b^2 + \kappa^2 < a^2 \lambda^2 \iff \Delta < 0 \iff \text{Η (1) δεν έχει ρίζες στο } \mathbb{R} \iff \text{Το } (c) \cap (ε) \text{ δεν έχει λύσεις} \iff (ε) \cap (c) = \emptyset.$

Αν  $b^2 + \kappa^2 = a^2 \lambda^2 \iff (ε) \cap (c) = \{M\}$ . Έστω  $M(x_1, y_1)$ .

$$(1) \iff x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2a^2 \lambda \kappa}{2(b^2 - a^2 \lambda^2)} = +\frac{a^2 \lambda \kappa}{b^2 - b^2 - \kappa^2} = -\frac{a^2 \lambda}{\kappa} \rightarrow M\left(-\frac{a^2 \lambda}{\kappa}, -\frac{b^2}{\kappa}\right)$$

$$y_1 = \lambda x_1 + \kappa = \lambda \left(-\frac{a^2 \lambda}{\kappa}\right) + \kappa = \frac{-a^2 \lambda^2 + \kappa^2}{\kappa} = \frac{-b^2 - \kappa^2 + \kappa^2}{\kappa} = -\frac{b^2}{\kappa}$$

▼ Εξίσωση εφαπτόμενης υπερβολής (c):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  στο  
σημείο της  $M(x_1, y_1)$ .

$$(ε) \text{ εφαπτόμενη (c): } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (ε): \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

στο  $M(x_1, y_1)$

Απόδειξη

• Αν  $M(x_1, y_1) \neq A'(-a, 0), A(a, 0) \Rightarrow (ε): y - y_1 = \lambda(x - x_1)$ .

$$M(x_1, y_1) \text{ σημείο επαφής} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{a^2 \lambda}{\frac{b^2}{k}} \\ y_1 = -\frac{b^2}{k} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{a^2 \lambda}{b^2} \Rightarrow \lambda = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

$$\text{οπότε } (ε): y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \Leftrightarrow a^2 y_1 (y - y_1) = b^2 x_1 (x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - b^2 x_1^2 \Leftrightarrow \frac{y_1 y}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \Rightarrow (ε): \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

$$\text{Αλλά } M(x_1, y_1) \in (c) \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

• Αν  $M(x_1, y_1) = A'(-a, 0) \Rightarrow (ε): x = -a$ , διότι

$$(ε) \cap (c): \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = 0 \end{cases} \text{ ΜΜΛ.}$$

• Αν  $M(x_1, y_1) = A(a, 0) \Rightarrow (ε): x = a$ , διότι

$$(ε) \cap (c): \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \text{ ΗΜΛ.}$$

Η εξίσωση  $(ε): \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$  καλύπτει και τις περιπτώσεις  
 όπου  $M = A' \vee M = A$ .

• Εφαρμογή - θεωρία:  $M(x, y) \in (c) \Rightarrow d(M)$   
 (c) υπερβολή

$$M(x, y) \in (c): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow d(M, \epsilon_1) \cdot d(M, \epsilon_2) = \frac{a^2 b^2}{y^2}$$

$\epsilon_1, \epsilon_2$  ασύμπτωτες (c)

### Απόδειξη

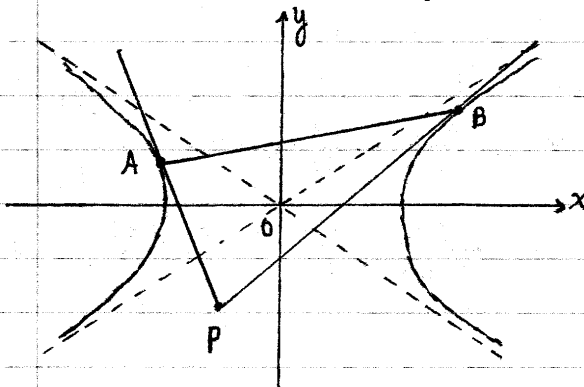
$$M(x_1, y_1) \in (c) \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2. \quad (1)$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ εφαπτόμενες } (c) \Rightarrow \begin{cases} (\varepsilon_1): y = \frac{b}{a} x \Leftrightarrow bx - ay = 0. \\ (\varepsilon_2): y = -\frac{b}{a} x \Leftrightarrow bx + ay = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x_1, y_1) \quad (\varepsilon_1): bx - ay = 0 &\Rightarrow d(M, \varepsilon_1) = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ M(x_1, y_1) \quad (\varepsilon_2): bx + ay = 0 &\Rightarrow d(M, \varepsilon_2) = \frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \Rightarrow d(M, \varepsilon_1) d(M, \varepsilon_2) = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2|}{a^2 + b^2} = \frac{|a^2 b^2|}{b^2} = \frac{a^2 b^2}{b^2}$$

$$\nabla \text{ Πολική σημείου } P(x_0, y_0) \text{ ως προς } (c): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



• Αν  $PA, PB$  εφαπτόμενες της  $(c)$  από το  $P$  τότε η ευθεία  $AB$  λέγεται πολική ευθεία σημείου  $P(x_0, y_0)$  ως προς την  $(c)$ .

$$\Theta. \quad \begin{aligned} AB \text{ πολική σημείου } P(x_0, y_0) &\Rightarrow (AB): \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \\ \text{ως προς } (c): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\end{aligned}$$

### Απόδειξη

Εστω  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  τα σημεία επαφής.

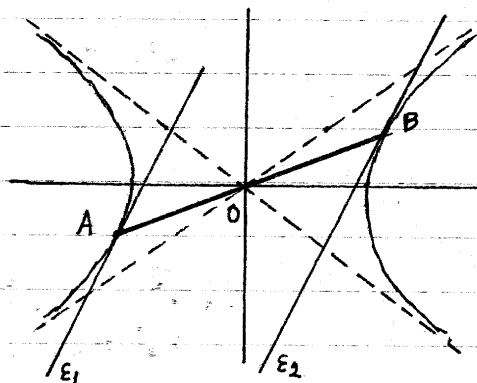
$$PA \text{ εφαπτόμενη } (c) \Rightarrow (PA): \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

$$PB \text{ εφαπτόμενη } (c) \Rightarrow (PB): \frac{xx_2}{a^2} - \frac{yy_2}{b^2} = 1.$$

$$P(x_0, y_0) \in PA \cap PB \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0 x_1}{a^2} - \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1 \\ \frac{x_0 x_2}{a^2} - \frac{y_0 y_2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in (\varepsilon): \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow (AB): \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

▼ Διάμετρος υπερβολής → λέμε κάθε τμήμα που έχει τα άκρα του στους δύο κλάδους της και διέρχεται από το κέντρο της.



Θ. Αν  $\varepsilon_1$  εφαπτόμενη (c) στο A  
 $\varepsilon_2$  εφαπτόμενη (c) στο B  
 τότε  $AB$  διάμετρος  $\iff \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ .

Απόδειξη

Ευθύ: Αν  $AB$  διάμετρος  $\Rightarrow A(x_1, y_1)$   
 ο κέντρο συμμετρίας  $B(-x_1, -y_1)$ .  
 $(\varepsilon_1)$  εφαπτόμενη (c) στο  $A(x_1, y_1) \Rightarrow (\varepsilon_1): \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\frac{x_1}{a^2}}{-\frac{y_1}{b^2}} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$   
 $(\varepsilon_2)$  εφαπτόμενη (c) στο  $B(-x_1, -y_1) \Rightarrow (\varepsilon_2): -\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ .

Αντίστροφο Αν  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$   
 Έστω  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$   
 τα σημεία επαφής  $\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \\ \lambda_2 = \frac{b^2 x_2}{a^2 y_2} \end{cases}$

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \frac{x_1 b^2}{y_1 a^2} = \frac{x_2 b^2}{y_2 a^2} \Rightarrow \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 y_2} = 0 \quad (1)$

Δι'  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), O(0,0) \Rightarrow D(O, A, B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$

$= x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Rightarrow A, B, O$  συνευθειακά  $\Rightarrow O \in AB \Rightarrow AB$  διάμετρος (c).