ΑΛΓΕΒΡΑ Αποδείξεις - βασικές.

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πράξεις με πίνακες → $A=[a_{ij}]\in\Pi_{\mu\nu}$, $B=[b_{ij}]\in\Pi_{\mu\nu}$, $\Gamma=[\gamma_{ij}]\in\Pi_{\mu\nu}$

$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]\in\Pi_{\mu\nu}$
$\lambda A=[\lambda a_{ij}],\ \lambda\in\mathbb{R}$
Ορισμοί

1. $\boxed{A+\Gamma=B+\Gamma \Leftrightarrow A=B}$

Απόδειξη

Ευθύ:
$A=A+\mathbf{0}=$ (Ουδέτερο στοιχείο)
$=A+[\Gamma+(-\Gamma)]=$ (Αντίθετος)
$=(A+\Gamma)+(-\Gamma)=$ (Προσεταιριστική)
$=(B+\Gamma)+(-\Gamma)=$ (Υπόθεση)
$=B+[\Gamma+(-\Gamma)]=$ (Προσεταιριστική)
$=B+\mathbf{0}=$ (Αντίθετοι)
$=B$ (Ουδέτερο στοιχείο)

Αντίστροφο
$A+\Gamma=$
(Υπόθεση)
$=B+\Gamma$.

2. $\boxed{A+B=\Gamma \Leftrightarrow A=\Gamma-B}$

$A+B=\Gamma \Leftrightarrow (A+B)+(-B)=\Gamma+(-B) \Leftrightarrow$ (Πρόταση 1)
$\Leftrightarrow A+[B+(-B)]=\Gamma+(-B) \Leftrightarrow$ (Προσεταιριστική)
$\Leftrightarrow A+\mathbf{0}=\Gamma+(-B) \Leftrightarrow$ (Αντίθετοι)
$\Leftrightarrow A=\Gamma+(-B) \Leftrightarrow$ (Ουδέτερο στοιχείο)
$\Leftrightarrow A=\Gamma-B$ (Ορισμός αφαίρεσης).

3. $\boxed{-(A+B)=(-A)+(-B)}$

Αρκεί $(A+B)+[(-A)+(-B)]=\mathbf{0}$
$(A+B)+[(-A)+(-B)]=$ (Αντιμεταθετική)
$=(A+B)+[(-B)+(-A)]=$ (Προσεταιριστική)
$=A+\{B+[(-B)+(-A)]\}=$ (Προσεταιριστική)
$=A+\{[B+(-B)]+(-A)\}=$ (Αντίθετοι)
$=A+[\mathbf{0}+(-A)]=$ (Ουδέτερο στοιχείο)
$=A+(-A)=$ (Αντίθετοι).
$=\mathbf{0} \Rightarrow (A+B), [(-A)+(-B)]$ αντίθετοι $\Rightarrow -(A+B)=(-A)+(-B)$

$\hookrightarrow$ Ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες που ισχύουν και στους αριθμούς.

Ορ. $\boxed{\text{Αν } \lambda \in \mathbb{R},\ A \in \Pi_{\mu\nu} \longrightarrow B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} \wedge B \in \Pi_{\mu\times\nu}}$

Ορ. $\boxed{\text{Αν } \left.\begin{matrix} A \in \Pi_{\nu\times\mu} \\ B \in \Pi_{\mu\times\rho} \end{matrix}\right\} \rightarrow \Gamma = A\cdot B \Leftrightarrow \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{\mu} a_{ik} b_{kj}}$

Ιδιότητες

i) $(A\cdot B)\cdot\Gamma = A\cdot(B\Gamma)$

ii) $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$, $(B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$

iii) $\mathbf{0}\cdot A = A\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$

iv) $\forall A \in \Pi_\nu : A\cdot I_\nu = I_\nu A = A$ (όπου $I_\nu = [\delta_{ij}]$)

- Ο I_ν είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού

Απόδειξη: Έστω $I_\nu' : A\cdot I_\nu' = I_\nu' A = A$. Τότε,

$\left.\begin{matrix} (I_\nu' \text{ ουδ.στ.}) & I_\nu'\cdot I_\nu = I_\nu \\ (I_\nu \text{ ουδ.στ.}) & I_\nu'\cdot I_\nu = I_\nu' \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_\nu' = I_\nu$

v) $A^\nu = \underbrace{A\cdot A\cdot A \cdots A}_{\nu \text{ φορές}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} (A^\nu)^\mu = A^{\nu\mu} \\ A^\nu A^\mu = A^{\nu+\mu} \end{matrix}}$

vi) Ενδέχεται $A \in \Pi_\nu \Rightarrow \exists A' : AA' = A'A = I_\nu$

Τότε ο A λέγεται αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A'$.

- Αν A αντιστρέψιμος, υπάρχει ένας μόνο αντίστροφος.

Απόδειξη:

Έστω $A' : AA' = A'A = I_\nu$.

και $A'' \neq A' : AA'' = A''A = I_\nu$

Τότε: $A'' = A'' I_\nu =$ (ουδέτερο στοιχείο)

$= A''(AA') =$ (αντίστροφος A')

$= (A''A)A' =$ (προσεταιριστική)

$= I_\nu A' =$ (αντίστροφος A'')

$= A' \Rightarrow$ (ουδέτερο στοιχείο).

$\Rightarrow A'' = A' \longrightarrow$ άτοπο.

- Δεν ισχύει η αντιμεταθετική εν γένει: $AB \neq BA$
- » » εν γένει $A\cdot B = \mathbf{0} \not\Rightarrow A = \mathbf{0} \wedge B = \mathbf{0}$ (π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

» » » $(AB)^\nu \neq A^\nu B^\nu$

Θ. Νομος διαγραφης: $\boxed{\left.\begin{array}{l} A\Gamma = B\Gamma \\ \exists\, \Gamma^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B}$

Αποδειξη

$A\Gamma = B\Gamma \Rightarrow$ • (πολ. κατα μέλη) → επιτρέπεται...

$\Rightarrow (A\Gamma)\Gamma^{-1} = (B\Gamma)\Gamma^{-1} \Rightarrow$ (προσεταιριστική)

$\Rightarrow A(\Gamma\Gamma^{-1}) = B(\Gamma\Gamma^{-1}) \Rightarrow$ (αντιστροφος)

$\Rightarrow A \cdot I_\nu = B \cdot I_\nu \Rightarrow$ (ουδετερο στοιχείο).

$\Rightarrow A = B$

β' τροπος: $A = A \cdot I_\nu =$ (ουδετερο στοιχειο)

$= A(\Gamma\Gamma^{-1}) =$ (αντίστροφοι - υπόθεση)

$= (A\Gamma)\Gamma^{-1} =$ (προσεταιριστική)

$= (B\Gamma)\Gamma^{-1} =$ (υπόθεση)

$= B(\Gamma\Gamma^{-1}) =$ (προσεταιριστική)

$= B \cdot I_\nu$ (αντιστροφοι)

$= B$ (ουδετερο στοιχείο).

Θ. $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

Αποδειξη : Αρκει AB, αντιστροφος του $B^{-1}A^{-1}$.

αρα αρκεί $\left\{\begin{array}{l} (A\cdot B)(B^{-1}A^{-1}) = I_\nu \\ (B^{-1}A^{-1})(A\cdot B) = I_\nu \end{array}\right.$

i) $(A\cdot B)(B^{-1}\cdot A^{-1}) =$ ← (προσεταιριστική) → ii) $(B^{-1}A^{-1})(A\cdot B) =$

$= A\cdot[B\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1})] =$ ← (προσεταιριστική) → $= B^{-1}[A^{-1}(A\cdot B)] =$

$= A\,[(B\cdot B^{-1})A^{-1}] =$ ← (αντίστροφοι) → $= B^{-1}[(A^{-1}A)B] =$

$= A\,(I_\nu A^{-1}) =$ ← (ουδετερο στ.) → $= B^{-1}(I_\nu B) =$

$= AA^{-1} =$ ← (αντίστροφοι) → $= B^{-1}B =$

$= I_\nu$ $= I_\nu$

Αρα, $(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_\nu \Rightarrow AB,\ B^{-1}A^{-1}$ αντίστροφοι $\Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

• Μέθοδος : Για να υπολογίσω το A^ν.

•1 Βρίσκω τα $A^2, A^3, A^4, \dots$

•2 Αν συναντήσω $A^k = I$ τότε κάνω την διαίρεση $\begin{array}{c|c} \nu & k \\ \hline \upsilon & \pi \end{array} \Rightarrow \nu = k\pi + \upsilon$

και έτσι $A^\nu = A^{k\pi+\upsilon} = A^{k\pi} \cdot A^\upsilon = (A^k)^\pi \cdot A^\upsilon = (I)^\upsilon A^\upsilon = I A^\upsilon$

όπου $\upsilon \in \{0,1,2,\dots,k-1\}$. Τότε όμως A^υ γνωστό, άρα κάνω διερεύνηση.

•3 Αν συναντήσω $A^k = \mathbb{0}$ τότε, $\forall\ \nu \geq k : A^\nu = A^k \cdot A^{\nu-k} = \mathbb{0} \cdot A^{\nu-k} = \mathbb{0}$

Για $\nu < k$, A^ν γνωστό.

•4 Αν δεν συμβαίνει τίποτα από τα παραπάνω, παίρνω ένδειξη και εφαρμόζω επαγωγή.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$1\times1 \longrightarrow ax = b \begin{cases} a \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{b}{a} \\ a = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow \text{ταυτότητα} \\ b \neq 0 \Rightarrow \text{αδύνατο} \end{cases} \end{cases}$

$1\times2 \longrightarrow ax + by = \gamma \begin{cases} \text{αν } a = 0 \vee b = 0 \leftarrow 1\times1 \\ \text{αν } a = b = 0 \rightarrow \gamma = 0 \leftarrow \text{ταυτοτητα},\ \gamma \neq 0 \leftarrow \text{αδύνατη} \\ \text{αν } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow x = \dfrac{\gamma}{a} - \dfrac{by}{a} \Rightarrow (x,y) = \left(\dfrac{\gamma - by}{a}, y\right) \end{cases}$

οπου y ελεύθερος άγνωστος

• Γενικα $1\times\nu$ είναι της μορφης

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_\nu x_\nu = b$$

i) Αν υπαρχει $a_i = 0$, τότε ανάγεται σε $1\times(\nu-1)$

ii) Αν $a_i = 0,\ \forall\ i = 1,2,\dots,\nu$ τοτε $\begin{cases} b = 0 \Rightarrow \text{ταυτότητα} \\ b \neq 0 \Rightarrow \text{αδύνατη} \end{cases}$

iii) Αν $a_i \neq 0,\ \forall\ i = 1,2,\dots,\nu$ τοτε

$$a_1x_1 = b - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_\nu x_\nu \Leftrightarrow x_1 = \frac{b - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_\nu x_\nu}{a_1}$$

οποτε λύσεις είναι οι $(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = \left(\dfrac{b - a_2x_2 - a_3x_3 - \dots - a_\nu x_\nu}{a_1}, x_2, x_3, \dots, x_\nu\right)$

με ελεύθερους αγνώστους $x_2, x_3, \dots, x_\nu$.

• Γραμμικό σύστημα $\nu \times \mu$, είναι της μορφής

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\mu}x_\mu = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\mu}x_\mu = b_2 \\ \dots \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \dots + a_{\nu\mu}x_\mu = b_\nu \end{cases} \iff \underline{AX = B}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}$$

• Επαυξημένος πίνακας $\rightarrow E = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\mu} & b_\nu \end{array}\right]$

• Για την επίλυση γραμμικού συστήματος, γενικά εφαρμόζουμε την μέθοδο του επαυξημένου πίνακα. (Βλ. φυλ)

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

• Ορίζουσα $2^{ης}$ τάξης

Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, τότε ορ. την $D: \Pi_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $D(A) = \alpha\delta - \beta\gamma$.

• Συμβολίζεται: $D(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$

• Ορίζουσα $3^{ης}$ τάξης $D: \Pi_3 \rightarrow \mathbb{R}$ και ορ. σύμφωνα με τον κανόνα Sarrus:

$$D(A) = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

• Ορίζουσα $\nu^{ης}$ τάξης $D: \Pi_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ και ορ. σύμφωνα με τον Sarrus:

$$D(A) = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu\nu} \end{array}\right| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(\nu-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(\nu-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \dots & a_{\nu(\nu-1)} \end{array} = \dots \text{ κτλ.}$$

ΟΡΙΣΜΟΙ : Ονομάζουμε

1) "ΕΛΑΣΣΟΝΑ" ορίζουσα του στοιχείου $a_{κλ}$ της D

π.χ. $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

2) "ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ" του $a_{κλ}$, το γινόμενο $(-1)^{κ+λ} A_{κλ}$.

• Θεώρημα Laplace.

$$A \in \Pi_ν \Rightarrow D(A)=\sum_{λ=1}^{ν} (-1)^{κ+λ} A_{κλ} \cdot a_{κλ}, \quad \forall κ=1,2,\dots,ν$$

$$A \in \Pi_ν \Rightarrow D(A)=\sum_{κ=1}^{ν} (-1)^{κ+λ} A_{κλ} \cdot a_{κλ}, \quad \forall λ=1,\dots,ν$$

• Το ανάπτυγμα ορίζουσας τάξης ν έχει ν! όρους.

▼ Ιδιότητες οριζουσών

① $\left.\begin{array}{l} A=[x_{ij}] \in \Pi_ν \\ B=[x_{ji}] \in \Pi_ν \end{array}\right\} \Rightarrow D(A)=D(B)$

② $\left.\begin{array}{l} \text{Αν } D, D' \text{ έχουν εναλλάξ} \\ \text{δύο στήλες ή γραμμές} \end{array}\right\} \Rightarrow D'=-D$

③ $\left.\begin{array}{l} A=[a_{ij}] \\ \left(\exists κ,λ,δ \underset{\forall i}{:} a_{κj}=δa_{λj}\right) \vee \left(\exists κ,λ,δ \underset{\forall i}{:} a_{iκ}=δa_{iλ}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow D(A)=0$

④ $λ \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1ν} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2ν} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ν1} & a_{ν2} \cdots & a_{νν} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1ν} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ λa_{κ1} & λa_{κ2} \cdots & λa_{κν} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ν1} & a_{ν2} \cdots & a_{νν} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots λa_{1κ} \cdots & a_{1ν} \\ a_{21} & a_{22} \cdots λa_{2κ} \cdots & a_{2ν} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ν1} & a_{ν2} \cdots λa_{νκ} \cdots & a_{νν} \end{vmatrix}$

(5) π.χ.
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2+a_2' & b_2+b_2' & \gamma_2+\gamma_2' \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2' & b_2' & \gamma_2' \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

π.χ.
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+b_1' & \gamma_1 \\ a_2 & b_2+b_2' & \gamma_2 \\ a_3 & b_3+b_3' & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1' & \gamma_1 \\ a_2 & b_2' & \gamma_2 \\ a_3 & b_3' & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

(6) π.χ.
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2+\lambda a_1 & b_2+\lambda b_1 & \gamma_2+\lambda \gamma_1 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+\lambda a_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2+\lambda a_1 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3+\lambda a_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

(7) $\boxed{A \text{ ανω ή κατω τριγωνικός} \Rightarrow D(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{\nu\nu}}$

↳ Σε μια ορίζουσα επιτρέπονται όλες οι αλλάγες που επιτρέπονται στους επαυξημένους πίνακες μονο που στην εναλλαγή στηλων γραμμών, αλλάζει το πρόσημο. και όταν πολλαπλασιάζω μια στήλη / γραμμη με + 3,4 λ, πολ. την ορίζουσα με $1/\lambda$. Επίσης (5),(1).

Αντίστροφος πίνακας.

$$\boxed{\Theta.\quad \text{Αν}\quad A=\begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},\ \text{τότε}\quad D(A)\neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & a \end{bmatrix}}$$

Απόδειξη : Ξεκινώ κατασκευάζοντας τον A^{-1} και θα δείξω ότι για ~~τον~~ υπάρχει ο $A^{-1} \Rightarrow D(A)\neq 0$.

Εστω $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$: $AX=I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax+\beta z & ay+\beta\omega \\ \gamma x+\delta z & \gamma y+\delta\omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} ax+\beta z=1 \\ \gamma x+\delta z=0 \end{cases} \wedge \begin{cases} ay+\beta\omega=0 & (3) \\ \gamma y+\delta\omega=1 & (4). \end{cases}$$

Απο την (4) αποκλείεται $\gamma=\delta=0$. Εστω $\gamma\neq 0$.

$(2) \Rightarrow \cancel{\gamma y+\delta\omega=1}\ \gamma x+\delta z=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\delta}{\gamma}z.$ (5)

αρα $(1) \Rightarrow ax+\beta z \overset{=1}{\Leftrightarrow} a\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)z+\beta z=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{a\delta}{\gamma}+\beta\right)z=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a\delta-\beta\gamma)z=-\gamma \Leftrightarrow$ (6) $\left.\begin{matrix} Dz=-\gamma \\ \gamma\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ΠΡΕΠΕΙ $D\neq 0$

Κατασκευάζω τον A^{-1}.

$(6) \Rightarrow \left.\begin{matrix} Dz=-\gamma \\ \gamma\neq D\neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow z=-\frac{\gamma}{D}$

$(5) \Rightarrow x=-\frac{\delta}{\gamma}z=-\frac{\delta}{\gamma}\left(-\frac{\gamma}{D}\right)=\frac{\delta}{D}$

Ομοια άπο τις (3), (4) $y=\frac{-\beta}{D}$, $\omega=\frac{a}{D}$

οπότε $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta/D & -\beta/D \\ -\gamma/D & a/D \end{bmatrix}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & a \end{bmatrix}$

Αντίστροφα θα δείξω ότι $XA=I$.

$$XA=\left(\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & a \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}=\frac{1}{D}\left(\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

αρα $XA=I$. αρα $A^{-1}=X$.

? Αντιστρόφως $D(A)\neq 0 \Rightarrow \exists X : AX=XA=I$ αρα $X=A^{-1}$

Θ Αν $M=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$, τοτε $D(A)\neq 0 \Leftrightarrow M$ αντιστρ. με $M^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -B_3 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$

όπου A_i, B_i, Γ_i οι ελασσονες ορίζουσες των στοιχείων a_i, b_i, γ_i.

<u>Αποδειξη:</u> Εστω $D\neq 0$

είναι $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1A_1-b_1B_1+\gamma_1\Gamma_1 & -a_1A_2+b_1B_2-\gamma_1\Gamma_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

Ομως $a_1A_1 \cancel{+a_2} b_1B_1+\gamma_1\Gamma_1 \underset{\text{Laplace}}{=} D$ και όμοια τα διαγώνια στοιχεια είναι D

$\cancel{a_2A_2}$

$$-a_1A_2+b_1B_2-\gamma_1\Gamma_2=-a_1\begin{vmatrix} b_1 & \gamma_1 \\ b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 \\ a_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}-\gamma_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}=0$$

Ομοια οι υπόλοιπες είναι 0. Ετσι

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}\cdot\left(\frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -B_1 & \Gamma_1 \\ -A_2 & B_2 & -\Gamma_2 \\ A_3 & -B_3 & \Gamma_3 \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

Αν $X=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -B_1 & \Gamma_1 \\ -A_2 & B_2 & -\Gamma_2 \\ A_3 & -B_3 & \Gamma_3 \end{bmatrix}$, τότε ομοια $XA=I$ και αφου $AX=I$ $\Rightarrow AX=XA=I \Rightarrow A^{-1}=X$.

<u>Αντίστροφο</u>: $D(A)\neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος

παραλείπεται.

• Γενικά $\boxed{\left.\begin{matrix} A\in \Pi_\nu \\ D(A)\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \text{ αντιστρέψιμος.}}$

Χρήση αντιστρόφου στην λύση γρ. συστήματος

Στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θ. $\boxed{\text{Αν } A \text{ αντιστρέψιμος, } AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B}$

Απόδειξη: ευθύ $AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow$
$\Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B.$

Αντίστροφο.

Για $X=A^{-1}B$, $AX=A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=IB=B.$

- Αν δίνεται $X\cdot A=B \Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}.$

Επίλυση

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1\nu}x_\nu=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2\nu}x_\nu=b_2 \\ \text{- - - - - - - - - - -} \\ a_{\mu1}x_1+a_{\mu2}x_2+\dots+a_{\mu\nu}x_\nu=b_\nu \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu1} & a_{\mu2} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix}}_{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX=B \overset{\Theta}{\Leftrightarrow} X=A^{-1}B=\dots \Leftrightarrow (x_1,x_2,\dots,x_\nu)=(\text{---}).$$

Λύση - διερεύνηση γραμμικού συστήματος με ορίζουσες.

- $\boxed{2\times2}$ $\begin{cases} a_1x+b_1y=\gamma_1 \\ a_2x+b_2y=\gamma_2 \end{cases}$, $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

i) $D\neq0 \Leftrightarrow$ ΜΜΛ, $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$, όπου $D_x=\begin{vmatrix} \gamma_1 & b_1 \\ \gamma_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$

ii)
$$D=0\begin{cases} D_x\neq0 \vee D_y\neq0 \Rightarrow \text{Αδύνατο} \\ D_x=D_y=0\begin{cases} |a_1|+|a_2|+|b_1|+|b_2|\neq0 \Leftrightarrow (\Sigma)\ \text{αόριστο} \\ |a_1|+|a_2|+|b_1|+|b_2|=0\begin{cases} |\gamma_1|+|\gamma_2|\neq0 \Leftrightarrow (\Sigma)\ \text{αδύνατο} \\ |\gamma_1|+|\gamma_2|=0 \Leftrightarrow (\Sigma)\ \text{ταυτοτικό} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

• $\boxed{3\times 3}$ $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=\delta_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\delta_2 \\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z=\delta_3 \end{cases}$, $D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

i) Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow$ Μ.Μ.Λ. $(x,y,z)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D},\frac{D_z}{D}\right)$

οπου $D_x=\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$, $D_z=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$

ii) Αν $D=0 \Rightarrow (\Sigma)$ αδύνατο $\vee$ αόριστο.

<u>Απόδειξη</u>: $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=\delta_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\delta_2 \\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z=\delta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}}_{B}$

i) Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος
$A\cdot X=B$ $\Big\} \Leftrightarrow X=A^{-1}B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & A_3 \\ -B_1 & B_2 & -B_3 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta_1 A_1-\delta_2 A_2+\delta_3 A_3 \\ -\delta_1 B_1+\delta_2 B_2-\delta_3 B_3 \\ \delta_1 \Gamma_1-\delta_2\Gamma_2+\delta_3\Gamma_3 \end{bmatrix}$$

Αλλα $\delta_1 A_1-\delta_2 A_2+\delta_3 A_3=\delta_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}-\delta_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\delta_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}=D_x$

και όμοια $-\delta_1 B_1+\delta_2 B_2-\delta_3 B_3=D_y$
$\delta_1\Gamma_1-\delta_2\Gamma_2+\delta_3\Gamma_3=D_z$

Αρα: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_x/D \\ D_y/D \\ D_z/D \end{bmatrix}\Leftrightarrow (x,y,z)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D},\frac{D_z}{D}\right)$

ii) Αν $D=0 \Rightarrow$ θα δείξουμε αργότερα ότι (Σ) αδύνατο $\vee$ αόριστο.

↳ Σε ομογενές, αν $D\neq 0 \Rightarrow$ ΜΜΛ $(x,y,z)=(0,0,0)$
αν $D=0 \Rightarrow (\Sigma)$ αόριστο.

$\boxed{2\times 1}$ $\begin{cases} a_1x=b_1 \ (1) \\ a_2x=b_2 \ (2) \end{cases}$ με επαυξημένο πίνακα $M=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$.

Θ. $\boxed{\text{Αν } (\Sigma) \text{ συμβιβαστό} \Rightarrow D(M)=0}$

Απόδειξη : (Σ) συμβιβαστό $\Rightarrow \exists$ λύση, έστω x_0.

i) Αν $|a_1|+|a_2|\neq 0$, έστω $a_1\neq 0 \xRightarrow{(1)} x_0=\frac{b_1}{a_1}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ επαληθεύει την (2) $\Rightarrow$
x_0 λύση (Σ) συμβ.

$\Rightarrow a_2\frac{b_1}{a_1}=b_2 \Rightarrow a_1b_2-a_2b_1=0 \Rightarrow D(M)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0.$

ii) Αν $|a_1|+|a_2|=0 \Rightarrow a_1=a_2=0$

οπότε $D(M)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix}=0.$

$\hookrightarrow$ Αντίθετο αντίστροφο: $\boxed{D(M)\neq 0 \Rightarrow (\Sigma) \text{ ασυμβίβαστο}}$

Θ. $\boxed{\left.\begin{matrix} D(M)=0 \\ |a_1|+|a_2|\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Το σύστημα έχει ΜΜΛ } x=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}}$

Απόδειξη: $|a_1|+|a_2|\neq 0 \Rightarrow \underline{a_1\neq 0} \wedge \underline{a_2\neq 0}$

Έτσι $\begin{cases} a_1x=b_1 \\ a_2x=b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{b_1}{a_1} \\ \longrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \longrightarrow \\ a_2\frac{b_1}{a_1}=b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \longrightarrow \\ a_1b_2-a_2b_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a_1}{b_1} \\ D=0 \longrightarrow \text{ισχύει } \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{a_1}{b_1}$

$D=0 \Leftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0 \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=x.$

$\boxed{3\times 2}$ $\begin{cases} a_1x+b_1y=\gamma_1 \\ a_2x+b_2y=\gamma_2 \\ a_3x+b_3y=\gamma_3 \end{cases}$ με επαυξημένο πίνακα $M=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \gamma_2 \\ a_3 & b_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$

Θ. $\boxed{\text{Αν } (\Sigma) \text{ συμβιβαστό} \Rightarrow D(M)=0}$

Απόδειξη : (Σ) συμβιβαστό $\Rightarrow \exists$ λύση, έστω (x_0,y_0).

i) Αν $|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3|\neq 0$, έστω $\Gamma_3\neq 0$.

Λύνω το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων:

$$(\Sigma')\begin{cases} a_1x+b_1y=\gamma_1 \\ a_2x+b_2y=\gamma_2\end{cases},\quad D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\Gamma_3\neq 0 \Rightarrow \text{το } 2\times 2 \ (\Sigma') \text{ έχει ΜΜΛ.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & b_1\\ \gamma_2 & b_2\end{vmatrix}}{\Gamma_3}=\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & \gamma_1\\ b_2 & \gamma_2\end{vmatrix}}{\Gamma_3}=\dfrac{-A_3}{\Gamma_3} \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & \gamma_1\\ a_2 & \gamma_2\end{vmatrix}}{\Gamma_3}=\dfrac{B_3}{\Gamma_3}\end{cases} \xRightarrow[\text{συμβ.}]{(\Sigma)} (x,y)=\left(\frac{-A_3}{\Gamma_3},\frac{B_3}{\Gamma_3}\right) \text{ επαληθεύει την } (3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3\left(-\frac{A_3}{\Gamma_3}\right)+b_3\frac{B_3}{\Gamma_3}=\gamma_3 \Rightarrow a_3A_3-b_3B_3+\gamma_3\Gamma_3=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1\\ a_2 & b_2 & \gamma_2\\ a_3 & b_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow D(M)=0.$$

ii) Αν $|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3|=0 \Leftrightarrow \Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_3=0$

$$D(M)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1\\ a_2 & b_2 & \gamma_2\\ a_3 & b_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=\gamma_1\Gamma_1-\gamma_2\Gamma_2+\gamma_3\Gamma_3=\gamma_1\cdot 0-\gamma_2 0+\gamma_3 0=0.$$

- <u>Διερεύνηση συστήματος 3Χ2.</u>

1) Αν $D\neq 0 \Rightarrow$ το (Σ) είναι αδύνατο.

2) Αν $D=0$ και

* i) $|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3|\neq 0$ τότε $\begin{cases} a_1x+b_1y=\gamma_1\\ a_2x+b_2y=\gamma_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-A_3}{\Gamma_3}\\ y=\dfrac{B_3}{\Gamma_3}\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=\left(\dfrac{-A_3}{\Gamma_3},\dfrac{B_3}{\Gamma_3}\right)$ ΜΜΛ.

$D(M)=0 \Rightarrow$ η λύση επαληθεύει την (3) : $a_3x+b_3y=\gamma_3$

ii) $|\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3|=0$ και

α) $|A_1|+|A_2|+|A_3|+|B_1|+|B_2|+|B_3|\neq 0 \Rightarrow$ ένα (Σ') 2x2 του (Σ) είναι αδύνατο $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\Sigma)$ αδύνατο.

β) $A_i=B_i=0 \Rightarrow (\Sigma)$ αδύνατο ή αόριστο.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} D(M)=0\\ |\Gamma_1|+|\Gamma_2|+|\Gamma_3|\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Το } (\Sigma) \text{ έχει ΜΜΛ } (x,y)=\left(\frac{-A_3}{\Gamma_3},\frac{B_3}{\Gamma_3}\right)}$$

● <u>3x3 ομογενές</u>

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} a_1x+b_1y+\gamma_1z=0\\ a_2x+b_2y+\gamma_2z=0\\ a_3x+b_3y+\gamma_3z=0.\end{cases}$$

Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow$ το ομογενές (Σ) έχει ΜΜΛ $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Θ. $\boxed{\text{Αν } D=0 \Leftrightarrow \text{το ομογενές } (\Sigma) \text{ έχει και μη μηδενικές λύσεις.}}$

<u>Απόδειξη:</u> $\overset{\text{Ευθύ}}{\text{Έστω}}$ $D=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}(\Sigma)\text{ αδύνατο } \veebar (\Sigma) \text{ αόριστο}\\ (x,y,z)=(0,0,0) \text{ λύση (ως ομογενές)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\Sigma)$ αόριστο $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ το (Σ) έχει και μη μηδενικές λύσεις. (• Βλέπε και βιβλίο)

<u>Αντίστροφο</u> Έστω $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ λύση του (Σ). Αν $z_0\neq 0$,

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+\gamma_1z_0=0\\ a_2x+b_2y+\gamma_2z_0=0\\ a_3x+b_3y+\gamma_3z_0=0\end{cases} \text{ συμβιβαστό (διότι επαλ. για } (x_0,y_0,z_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{το } 3\times2 \begin{cases} a_1x+b_1y=-\gamma_1z_0\\ a_2x+b_2y=-\gamma_2z_0\\ a_3x+b_3y=-\gamma_3z_0\end{cases} \text{ συμβιβαστό} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -\gamma_1z_0\\ a_2 & b_2 & -\gamma_2z_0\\ a_3 & b_3 & -\gamma_3z_0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cancel{z_0}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1\\ a_2 & b_2 & \gamma_2\\ a_3 & b_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \gamma_1\\ a_2 & b_2 & \gamma_2\\ a_3 & b_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=0.$$

διότι $z_0\neq0$

<u>Γενικεύοντας</u>

1) $\boxed{\nu\times\nu}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1\nu}x_\nu=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2\nu}x_\nu=b_2\\ \text{— — — — — —}\\ a_{\nu1}x_1+a_{\nu2}x_2+\dots+a_{\nu\nu}x_\nu=b_\nu\end{cases} \qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu}\\ - & - & - & -\\ a_{\nu1} & a_{\nu2} & \cdots & a_{\nu\nu}\end{vmatrix}$$

i) Αν $D\neq0 \Rightarrow$ το (Σ) έχει ΜΜΛ $(x_1,x_2,\dots,x_\nu)=\left(\frac{D_1}{D},\frac{D_2}{D},\dots,\frac{D_\nu}{D}\right)$

όπου $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{\nu1}\\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{\nu2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots\\ b_\nu & a_{\nu2} & a_{\nu3} & \cdots & a_{\nu\nu}\end{vmatrix}$, κτλ.

ii) Αν $D=0 \Rightarrow$ το (Σ) είναι αδύνατο $\veebar$ αόριστο.

2) Σε $\boxed{\text{ομογενές } \nu\times\nu}$, ~~$D\neq 0 \Leftrightarrow$ το ομογενές (Σ) έχει και μη μηδενικές λύσεις~~

i) ~~D~~ Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow$ το ομογενές (Σ) έχει ΜΜΛ $(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = (0, 0, \dots, 0)$.
ii) Αν $D=0 \Leftrightarrow$ το ομογενές (Σ) έχει και μη μηδενικές λύσεις.

3) $\boxed{\nu\times(\nu-1)}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1(\nu-1)}x_{\nu-1} = a_{1\nu} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2(\nu-1)}x_{\nu-1} = a_{2\nu} \\ \text{— — — — — — — —} \\ a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + \dots + a_{2(\nu-1)}x_{\nu-1} = a_{\nu\nu} \end{cases}$$

, M επαυξημένος πίνακας
$D = D(M)$

i) $D\neq 0 \Rightarrow$ Το (Σ) είναι αδύνατο.
ii) Το (Σ) είναι συμβιβαστό $\Rightarrow D=0$.
iii) Αν $D=0$, πρέπει να λυθεί το σύστημα για να διαπιστώσω αν ~~έχει~~ ΜΜΛ $\vee$ αόριστο $\vee$ αδύνατο.

Βασικές προτάσεις

(Π1) $\boxed{\text{Αν } A, B \in \Pi_2 \Longrightarrow D(AB) = D(A)\cdot D(B)}$

Απόδειξη:

$$A, B \in \Pi_2 \Rightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

$$D(A\cdot B) = D\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix} \alpha x+\beta z & \alpha y+\beta w \\ \gamma x+\delta z & \gamma y+\delta w \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \alpha x+\beta z & \alpha y+\beta w \\ \gamma x+\delta z & \gamma y+\delta w \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha x+\beta z)(\gamma y+\delta w) - (\alpha y+\beta w)(\gamma x+\delta z) = \cancel{\alpha\gamma xy} + \alpha\delta xw + \beta\gamma yz + \cancel{\beta\delta zw} - \cancel{\alpha\gamma xy} - \alpha\delta yz - \beta\gamma xw - \cancel{\beta\delta zw} =$$

$$= \alpha\delta(xw - yz) + \beta\gamma(yz - xw) = \cancel{(\beta\gamma - \alpha\delta)(yz} \; (\alpha\delta - \beta\gamma)(xw - yz) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = D(A)\cdot D(B).$$

Η πρόταση ισχύει γενικότερα: $\boxed{\text{Αν } A, B \in \Pi_\nu \Longrightarrow D(A\cdot B) = D(A)\cdot D(B)}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Π.2} \quad \left.\begin{array}{l}\text{Αν } A\in\Pi_\nu \\ a_\nu, a_{\nu-1},\dots,a_1\in\mathbb{R} \wedge a_0\in\mathbb{R}^* \\ a_\nu A^\nu + a_{\nu-1}A^{\nu-1}+\dots+a_1 A + a_0 I = \mathbb{O}\end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ αντιστρέψιμος}\end{array}}$$

Απόδειξη:

$$\text{Αν} \quad a_\nu A^\nu + a_{\nu-1}A^{\nu-1}+\dots+a_1 A + a_0 I = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} a_0 I = A(-a_\nu A^{\nu-1} - a_{\nu-1}A^{\nu-2} - \dots - a_1 I) \\ \wedge \\ a_0 I = (-a_\nu A^{\nu-1} - a_{\nu-1}A^{\nu-2} - \dots - a_1 I)A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} I = A\left(-\frac{a_\nu}{a_0}A^{\nu-1} - \frac{a_{\nu-1}}{a_0}A^{\nu-2} - \dots - \frac{a_1}{a_0} I\right) \\ I = \left(-\frac{a_\nu}{a_0}A^{\nu-1} - \frac{a_{\nu-1}}{a_0}A^{\nu-2} - \dots - \frac{a_1}{a_0} I\right)A \end{cases}\right\} \Rightarrow A \text{ αντιστρέψιμος}$$

με $A^{-1} = -\frac{a_\nu}{a_0}A^{\nu-1} - \frac{a_{\nu-1}}{a_0}A^{\nu-2} - \dots - \frac{a_1}{a_0} I$.

Π.3 $\boxed{\text{Αν } A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+\delta)A + D\cdot I = \mathbb{O}}$

Απόδειξη

$$A^2 - (a+\delta)A + DI = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} - (a+\delta)\begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} + (a\delta - \beta\gamma)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+\beta\gamma & a\beta+\beta\delta \\ a\gamma+\gamma\delta & \beta\gamma+\delta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^2-a\delta & -a\beta-\beta\delta \\ -a\gamma-\gamma\delta & -a\delta-\delta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a\delta-\beta\gamma & 0 \\ 0 & a\delta-\beta\gamma \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$$

- $A, B \in \Pi_\nu$: $ABA = I_\nu \rightarrow AB = BA$.

ΔΟΜΕΣ

Εσωτερικές πράξεις

● **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Γενικά, πράξη λέγεται κάθε απεικόνιση $f: A\times B \to E$ κατά την οποία, $\forall (a,b)\in A\times B \xrightarrow{f} afb \in E$.

- Τα σύνολα A, B, E είναι μη κενα.
- Η εικόνα afb λέγεται εξαγόμενο της πράξης f. $(afb = f[(a,b)])$

~~Π. Εστω μια πραξη $*: A\times B \to \Gamma$~~

~~Αν $a=b\in A$~~

~~$\gamma \in B$~~

Π. $\boxed{\begin{array}{l} \text{Εστω μια πράξη } *: A\times B \to \Gamma \text{ και } a,b\in A, \gamma\in B. \\ \text{Τότε, } a=b \Longrightarrow a*\gamma = b*\gamma. \\ \text{Αν } a,b\in B, \gamma\in A \text{, τότε} \\ \quad a=b \Longrightarrow \gamma * a = \gamma * b. \end{array}}$

Απόδειξη: Εσω $a,b\in A, \gamma\in B$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{υπ. } a=b \\ \text{αξ. } \gamma=\gamma \end{array}\right\} \xRightarrow{\Lambda 3} (a,\gamma)=(b,\gamma) \xRightarrow[\text{απεικ.}]{*} *[(a,\gamma)] = *[(b,\gamma)] \Rightarrow a*\gamma = b*\gamma.$$

Ομοια, αν $a,b\in B, \gamma\in A$.

$$\left.\begin{array}{r} \gamma=\gamma \\ a=b \end{array}\right\} \Rightarrow (\gamma,a)=(\gamma,b) \xRightarrow[\text{απεικ}]{*} \gamma*a=\gamma*b.$$

● **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Αν $E\neq\emptyset$, τότε εσωτερική πράξη στο E λέγεται κάθε απεικόνιση $f: E\times E \to E$ κάτα την οποία

$$\forall (a,b)\in E\times E \xrightarrow{f} afb \in E.$$

● **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Εστω μια πράξη $*$ στο E. Ενα σύνολο $E_1: \emptyset\neq E_1 \subseteq E$ θα λέγεται κλειστό ως προς την πράξη $*$ όταν

$$\forall (a,b)\in E_1\times E_1,\ a*b\in E_1$$

● **Γνωστά σύνολα**

- Στα αριθμητικά σύνολα.

1) Το $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ είναι κλειστό ως προς $+, \cdot$

2) Το $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ είναι κλειστο ως προς $+,-,\cdot$

3) Το $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b} : a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}^*\}$ είναι κλειστό ως προς $+,-,\cdot$

4) Το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι κλειστο ως προς $+,-,\cdot$

5) Ειδικά, τα σύνολα $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ είναι κλειστα ως πρός <u>την $\div$</u> και $\cdot$
<u>αλλά</u> δεν είναι κλειστά ως προς $+,-$

6) Το σύνολο $\mathbb{Z}^*$ είναι κλειστό ως προς $\cdot$
<u>αλλά</u> δεν είναι κλειστο ως προς $+,-,\div$

7) Το σύνολο $\mathbb{N}^*$ είναι το μοναδικό σύνολο με άστρο το οποίο είναι κλειστο <u>στην $+$</u> ! Επίσης είναι κλειστό ως προς $\cdot$.
Φυσικά, δεν είναι κλειστό στην $-,\div$!

• Στα σύνολα πινάκων

1) Το Π_ν είναι κλειστο ως προς $+,-$ και $\cdot$ (πολ/σμό πίνακα με πίνακα).

2) Το $\Pi_{\mu\times\nu}$ είναι κλειστό μόνο ως προς $+,-$.

• Στα σύνολα συναρτήσεων

1) Τα $F_A=\{f / A_f=A\}$ είναι κλειστα ως προς $+,-,\cdot$

Να δειχτον:

2) Το $A=\{f: f$ αρτια$\}$ είναι κλειστο ως προς $+,-,\cdot$ του F.

3) Το $P=\{f: f$ περιττή$\}$ είναι κλεστο ως προς $+,-$ και μη κλειστό στο $\cdot$ του F.

4) Το $\mathcal{P}=\{f: f$ περιοδικη$\}$ είναι κλειστό ως προς $+,-,\cdot$ του F

παρ. βιβλίου:

• Αν E ένα μη κενο σύνολο, τότε
το <u>δυναμοσύνολο</u> του $\mathcal{P}(E)=\{X : X\subseteq E\}$ είναι κλειστο στις πράξεις "$\cap$" και "$\cup$".

<u>V Ιδιοτητες των πράξεων</u>

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Μια πράξη $*$ στο E λέγεται
αντιμεταθετική $\Longleftrightarrow \forall a,b\in E: a*b=b*a$
προσεταιριστική $\Longleftrightarrow \forall a,b\in E: (a*b)*\gamma = a*(b*\gamma)$

• <u>Παρατήρηση</u> Αν $E\subseteq K$ και $*$ εσωτερική πράξη των E,K.
<u>ΚΡΙΤΗΡΙΟ</u>
$*$ αντιμεταθετική στο $K \Longrightarrow *$ αντιμεταθετική στο E
$*$ προσεταιριστική στο $K \Longrightarrow *$ προσεταιριστική στο E.

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u>. e ουδετερο στοιχειο στο $(E,*) \Longleftrightarrow \forall x\in E,\ x*e=e*x=x$.
- Το e σε προσθετική πράξη συμβολίζεται $0 \longrightarrow$ <u>μηδενικό στοιχειο</u>
- Το e σε πολ/κη πράξη συμβολίζεται $1 \longrightarrow$ <u>μοναδιαίο στοιχείο.</u>

Θ. $\boxed{\text{Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο } e \text{ ως προς την πράξη } * \text{ του } E\text{, τότε αυτό είναι μοναδικό.}}$

<u>Απόδειξη:</u> e ουδέτερο στοιχειο $\Rightarrow \forall x \in E,\ x*e = e*x = e.$ (1)
Εστω ότι υπάρχει και άλλο e' ουδέτερο στοιχείο $\Rightarrow e*e' = e$
Για $x = e' \xrightarrow{(1)} e*$

Εστω ότι υπαρχει και άλλου ουδέτερο στοιχείο e'.

$$e' \text{ ουδ. στοιχ.} \Rightarrow \left.\begin{cases} e*e' = e & (e' \text{ ουδ. στ.}) \\ e*e' = e' & (e \text{ ουδ. στ.}) \end{cases}\right\} \Rightarrow e = e'.$$

- <u>Παρατήρηση-κριτήριο</u> : Αν $E \subseteq K$ και $*$ εσωτερική πράξη του E, K τότε

$$\left.\begin{array}{l} \text{"}e\text{" ουδέτερο στοιχειο στο } K \\ e \in E \subseteq K \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}e\text{" ουδέτερο στοιχειο στο } E.$$

- Αν $e \notin E$, τότε "ίσως" το E να έχει δικό του ουδέτερο στοιχείο.

- <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : a, a' συμμετρικα ως προς την $*$ του $E \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ ουδέτερο στοιχείο } e \in E, \text{ στην } * \\ a*a' = a'*a = e. \end{cases}$

- Ο συμμετρικός e' του e είναι $e' = e$ διότι $e*e = e$.

Θ. $$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{Η } * \text{ προσεταιριστική στο } E \\ e \in E \\ a' \text{ συμμ. στο } a \in E \end{array}\right\} \Rightarrow a' \text{ μοναδικο.}}$$

<u>Απόδειξη</u> : Εστω a', a'' συμμετρικά του $a \in E$ ως προς την προσεταιριστική πράξη $*$ του E. Τότε
$a'*a = a*a' = e$ (1)
$a''*a = a*a'' = e.$ (2)

$$\begin{aligned} a'' &= a''*e = && (e \text{ ουδέτερο στοιχείο}) \\ &= a''*(a*a') = && (1) \\ &= (a''*a)*a' = && (* \text{ προσεταιριστική}) \\ &= e*a' = && (2) \\ &= a' && (e \text{ ουδέτερο στοιχείο}). \end{aligned}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{Αν για ένα } a \in E \text{ υπάρχουν} \\ \text{δύο ή περισσότερα συμμετρικά} \\ \text{ως προς την } * \text{ του } E \end{array}\right\} \Rightarrow * \text{ όχι προσεταιριστική.}}$$

Θ.
$$\left.\begin{array}{l} * \text{ προσεταιριστική στο } E \\ e\in E \\ \alpha' \text{ συμμετρικό του } \alpha\in E \\ \beta' \text{ συμμετρικό του } \beta\in E \end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha*\beta)' = \beta'*\alpha'$$

δηλαδή και το $\alpha*\beta$ έχει συμμετρικό το $\beta'*\alpha'$.

<u>Απόδειξη:</u> Αρκεί $(\alpha*\beta)*(\beta'*\alpha') = (\beta'*\alpha')*(\alpha*\beta) = e$.

$(\alpha*\beta)*(\beta'*\alpha') =$ ($*$ προσεταιριστική)
$= \alpha*[\beta*(\beta'*\alpha')] =$ ($*$ προσεταιριστική)
$= \alpha*[(\beta*\beta')*\alpha'] =$ (β,β' συμμετρικά)
$= \alpha*(e*\alpha') =$ (e ουδέτερο στοιχείο)
$= \alpha*\alpha' =$ (α,α' συμμετρικά)
$= e$

$(\beta'*\alpha')*(\alpha*\beta) =$ ($*$ προσεταιριστική)
$= \beta'*[\alpha'*(\alpha*\beta)] =$ ($*$ προσεταιριστική)
$= \beta'*[(\alpha'*\alpha)*\beta] =$ (α,α' συμμετρικά)
$= \beta'*(e*\beta) =$ (e ουδέτερο στοιχείο)
$= \beta'*\beta =$ (β,β' συμμετρικά)
$= e$.

Έτσι, $\left.\begin{array}{l} (\alpha*\beta)*(\beta'*\alpha') = e \\ (\beta'*\alpha')*(\alpha*\beta) = e \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha*\beta)*(\beta'*\alpha') = (\beta'*\alpha')*(\alpha*\beta) = e \Rightarrow (\alpha*\beta), (\beta'*\alpha')$ συμμ.

$\Rightarrow (\alpha*\beta)' = \beta'*\alpha'$.

Θ.
$$\left.\begin{array}{l} * \text{ προσεταιριστική στο } E \\ e\in E \\ \alpha' \text{ συμμετρικό του } \alpha\in E \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha')' = \alpha.$$

<u>Απόδειξη</u>

$(\alpha')' = \cancel{(\alpha')'*e} =$ (e ουδέτερο στοιχείο)
$= (\alpha')'*e =$ (α,α' συμμετρικά)
$= (\alpha')'*(\alpha'*\alpha) =$ ($*$ προσεταιριστική)
$= [(\alpha')'*\alpha']*\alpha =$ ($(\alpha')', \alpha'$ συμμετρικά)
$= e*\alpha =$ (e ουδέτερο στοιχείο)
$= \alpha$

↳ Αντιστροφοαντίθετα:

$$\left.\begin{array}{l} e\in E \text{ ως προς } * \\ (\alpha')'\neq\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow * \text{ όχι προσεταιριστική.}$$

● <u>Παρατήρηση</u>

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } \emptyset\neq E_1\subseteq E \\ E_1 \text{ κλειστό ως προς } * \text{ του } E \\ \alpha,\alpha' \text{ συμμετρικά } \wedge \alpha,\alpha'\in E_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow e\in E_1$$

● Όταν μια πράξη σημειώνεται

1) <u>Προσθετικά</u>

το συμμετρικό του a συμβολίζεται $-a$ και έτσι έχουμε

$a+(-a)=(-a)+a=0$

2) <u>Πολλαπλασιαστικά</u>

το συμμ. του a συμβολίζεται a^{-1} και έτσι έχουμε

$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$

▼<u>Μέθοδος</u>. Για να δείξω ότι

1) Ένα σύνολο $\emptyset\subset A\subset E$ είναι "<u>κλειστό</u>" ως προς την πράξη $*$ του E, δείχνω ότι $\forall (a,b)\in A\times A \Longrightarrow a*b\in A$.

2) Το A <u>δεν</u> είναι "<u>κλειστό</u>", δείχνω ότι

$\exists (a,b)\in A\times A: a*b\notin A$ (Μέθοδος αντιπαραδείγματος)

3) Για να ~~βρω~~ δείξω την αντιμεταθετική ή προσεταιριστική ιδιότητα μιας πράξης, δείχνω πρώτα ότι η πράξη είναι εσωτερική στο A.

4) Για να βρω ουδέτερο, λέω

έστω $e\in A: x*e=x$, <u>$\forall x\in A$</u> και με <u>εκ ταυτότητας μηδενικά πολυώνυμα</u> βρίσκω το πιθανό e. Αν και $e*x=x$, τότε e ουδέτερο στοιχείο.

• <u>Εκ ταυτότητος μηδενικά πολυώνυμα</u>

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots+\alpha_1x+\alpha_0=0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow \alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}=\dots=\alpha_1=\alpha_0=0$$

(ισχύει και για <u>υπερσύνολα</u> του συνόλου των ριζών)

5) Για να βρω το συμμετρικό, εξετάζω πρώτα αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο. Αν υπάρχει e ουδέτερο, λύνω την εξίσωση $\alpha*\alpha'=e$. Δεκτές είναι οι ρίζες α' για τις οποίες $\alpha'*\alpha=e$. Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερα συμμετρικά, αυτό οφείλεται στο ότι η πράξη δεν είναι προσεταιριστική.

• Πριν αποδείξω οποιαδήποτε ιδιότητα, δείχνω ότι η πράξη είναι εσωτερική στο A.

● ΒΑΣΙΚΗ ●

Εστω "o" προσεταιριστική στο A, τότε $\boxed{(\forall a\in A, \exists b, \gamma \in A : b o a = a o \gamma = e) \Rightarrow b=\gamma \wedge b \text{ συμμ. του } a}$ (1) (3)

με $e\in A$ ουδέτερο στοιχείο (2)

Απόδειξη

Είναι $b \overset{(2)}{=} b o e \overset{(3)}{=} b o (a o \gamma) \overset{(1)}{=} (b o a) o \gamma \overset{(3)}{=} e o \gamma = \gamma \Rightarrow b=\gamma.$

$(3) \Rightarrow \left.\begin{matrix} b o a = a o \gamma = e \\ b=\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow b o a = a o b = e \Rightarrow b$ συμμ. του a

• Παράδειγμα πράξης με στοιχεία που έχουν περισσότερα από ένα συμμετρικά.

$(\mathbb{R},*) : x*y = x+y+x^2y^2.$

Αν $x<\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow$ το x έχει δύο συμμετρικά στοιχεία ως προς $*$.

Απόδειξη: Πρέπει να υπάρχει ουδέτερο στοιχείο.

Εστω $e\in\mathbb{R} : \forall x\in\mathbb{R},\ x*e = e*x = x.$

$x*e = x \Leftrightarrow x+e+x^2e^2 = x \Leftrightarrow e^2x^2+e=0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} e^2=0 \\ e=0 \end{cases} \Leftrightarrow e=0$

Είναι και $e*x = 0*x = 0+x+0^2x^2 = x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, Άρα $e=0$ ουδέτερο.

Εστω x' συμμετρικό του $x\in\mathbb{R}$.

τότε $x*x' = x'*x = e \Leftrightarrow \begin{cases} x+x'+x^2x'^2=0 \\ x'+x+x'^2x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+x'+x^2x'^2=0 \Leftrightarrow \underline{x^2\cdot x'^2+x'+x=0.}$ (1)

Το x έχει δύο συμμετρικά ως προς $*$ $\Leftrightarrow$ Η (1) έχει δύο λύσεις στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = 1-4x^3>0 \Leftrightarrow 4x^3<1 \Leftrightarrow x^3<\frac{1}{4} \Leftrightarrow x<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$

Τα συμμετρικά αυτά είναι τα $x'_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4x^3}}{2x^2}$

• Εαν μια πράξη $(E,*)$ έχει ουδέτερο στοιχείο το e και $e\notin A\subset E$ (όπου A κλειστό ως προς την $*$) τότε το A έχει εν γένει άλλο ουδέτερο στοιχείο. Π.χ.

Στο $E: \emptyset\neq E\subset \Pi_2$ με $E=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2a & 0\end{bmatrix} : a\in\mathbb{R}\right\}$ υπάρχει ουδέτερο στοιχείο

ως προς την "•" του Π_2 διάφορο του I_2.

Απόδειξη

• Κλειστότητα : Εστω $A_1, A_2\in E \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0\end{bmatrix} \\ A_2 = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 2y & 0\end{bmatrix} \end{cases}$

Τότε $A_1A_2=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y & 0 \\ 2y & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} xy & 0 \\ 2xy & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z & 0 \\ 2z & 0 \end{bmatrix} : z\in\mathbb{R} \Rightarrow A_1A_2\in E$

άρα E κλειστό ως προς "$\cdot$" του Π_2.

• <u>Ουδέτερο στοιχείο</u>: Εστω I' ουδέτερο στοιχείο, $I'\in E \Rightarrow I=\begin{bmatrix} e & 0 \\ 2e & 0 \end{bmatrix}$.

$AI'=A, \forall A\in E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & 0 \\ 2e & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ex & 0 \\ 2ex & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow ex=x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (e-1)x=0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow e-1=0 \Leftrightarrow e=1$, οπότε $I'=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\neq I_2$.

Είναι και $I'A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & 0 \end{bmatrix}=A$, $\forall A\in E$ άρα I' ουδέτερο.

▼ <u>Θεώρημα προσεταιριστικότητας</u>

Εστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu \in E$ και πράξη $*$ στο E.

<u>Ορισμός</u>: Η παράσταση $\alpha_1*\alpha_2*\alpha_3 \cdots *\alpha_\nu$ ορίζεται επαγωγικά άπο τον τύπο

$$\boxed{\alpha_1*\alpha_2*\alpha_3*\cdots*\alpha_\nu=(\alpha_1*\alpha_2*\alpha_3*\cdots*\alpha_{\nu-1})*\alpha_\nu}$$

Θ1. Αν η πράξη $*$ είναι <u>προσεταιριστική</u>, το εξαγόμενο $\alpha_1*\alpha_2*\alpha_3*\cdots*\alpha_\nu=A$ είναι ανεξάρτητο άπο την προτεραιότητα με την οποία γίνονται οι πράξεις εφ'όσον τηρείται η διάταξη των όρων.

π.χ. $\alpha*[(\beta*\gamma)*\delta]=(\alpha*\beta)*(\gamma*\delta)=[\alpha*(\beta*\gamma)]*\delta=\alpha*\beta*\gamma*\delta$.

Θ2. Αν η πράξη $*$ είναι <u>προσεταιριστική και αντιμεταθετική</u>, ~~είναι ανεξάρτητο άπο την προτ~~, το εξαγόμενο $\alpha_1*\alpha_2*\alpha_3*\cdots*\alpha_\nu=A$ είναι ανεξάρτητο άπο την προτεραιότητα και την διάταξη με την οποία γίνονται οι πράξεις.

π.χ. $\alpha*[(\beta*\gamma)*\delta]=(\beta*\delta)*(\gamma*\alpha)=(\gamma*\beta)*(\delta*\alpha)=\alpha*\beta*\gamma*\delta$

• Όταν οι παράσταση σημειώνεται προσθετικά, συμβολίζεται ως

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu}$$

ενώ, όταν συμβολίζεται πολλαπλασιαστικά, ως

$$\boxed{\prod_{i=1}^{\nu}\alpha_i=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_\nu}$$

Ειδικα στο σύνολο $\mathbb{R}$ και γενικά, σε κάθε σύνολο στο οποίο οι "+", "·" είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές, ισχύει:

1) $\boxed{\sum_{i=1}^{\nu}(\alpha_i+b_i)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i+\sum_{i=1}^{\nu}b_i}$

<u>Απόδειξη:</u> $A=\sum_{i=1}^{\nu}(a_i+b_i)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_\nu+b_\nu)=$
$=(a_1+a_2+\dots+a_\nu)+(b_1+b_2+\dots+b_\nu)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i+\sum_{i=1}^{\nu}b_i=B.$

2) $\boxed{\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda+\alpha_i)=\nu\lambda+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i}$

<u>Απόδειξη:</u> $A=\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda+\alpha_i)=(\lambda+a_1)+(\lambda+\alpha_2)+\dots+(\lambda+\alpha_\nu)=\nu\lambda+(a_1+a_2+\dots+a_\nu)=$
$=\nu\lambda+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i=B.$

3) $\boxed{\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda\alpha_i)=\lambda\cdot\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i}$

<u>Απόδειξη:</u> $A=\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda\alpha_i)=\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2+\dots+\lambda\alpha_\nu=\lambda(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu)=\lambda\cdot\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i.$

4) $\boxed{\prod_{i=1}^{\nu}(a_ib_i)=\left(\prod_{i=1}^{\nu}\alpha_i\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{\nu}b_i\right)}$

<u>Απόδειξη:</u> $A=\prod_{i=1}^{\nu}(a_ib_i)=(a_1b_1)(a_2b_2)\cdots(\alpha_\nu b_\nu)=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu)(b_1b_2\cdots b_\nu)=$
$=\left(\prod_{i=1}^{\nu}\alpha_i\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{\nu}b_i\right)=B.$

● <u>ΒΑΣΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ</u> → $S_1=1+2+3+\dots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$

<u>στο $\mathbb{N}$.</u>

$S_2=1^2+2^2+3^2+\dots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

$S_3=1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$ ● $\underline{S_3=S_1^2}$

▼ <u>Δυνάμεις - πολλαπλάσια.</u>

γενικά σε ένα σύνολο E.

Αν το σύνολο E έχει μια εσωτερική πράξη, <u>προσεταιριστική</u> η οποία είναι

<u>πολλαπλασιαστική</u> (·)	<u>προσθετική</u> (+)
<u>Ορ</u> $\alpha^\nu=\begin{cases}\alpha, & \nu=1\\ \alpha^{\nu-1}\cdot\alpha, & \nu>1\end{cases}$ "δυναμη α^ν"	$\nu\alpha=\begin{cases}\alpha, & \nu=1\\ (\nu-1)\alpha+\alpha, & \nu>1\end{cases}$ "ν-πλάσιο του α"
● $\alpha^{\mu+\nu}=\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu$	● $\mu\alpha+\nu\alpha=(\mu+\nu)\alpha$
● $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}$	● $\mu(\nu\alpha)=(\mu\nu)a.$

όπου $\nu,\mu\in\mathbb{N}^*$

Αν η πράξη στο Ε είναι και ~~α~~αντιμεταθετική, τότε ισχύουν και

• $(a\cdot b)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot b^{\nu}$	• $\nu(\alpha+b) = \nu\alpha + \nu b$.
Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο	
το μοναδιαίο $\mathbf{1}$	το μηδενικό $\mathbf{0}$
ορίζω $\alpha^{0} = \mathbf{1}$	$\mathbf{0}\, a = \mathbf{0}$.
Αν υπαρχει "ένα" συμμετρικό	
το αντίστροφο α^{-1}	το αντίθετο $-a$
ορίζω $\alpha^{-\nu} = (\alpha^{-1})^{\nu} = (\alpha^{\nu})^{-1}$	$\nu(-a) = (-\nu)a = -(\nu\alpha)$.

↳ Οι πράξεις "δύναμη", "πολλαπλάσιο" δεν είναι εσωτερικές στο Ε άλλα είναι γενικότερα απεικονίσεις του συνόλου $\mathbb{N}^{*}\times E \to E$ και αν ισχύουν οι προεκτάσεις, του $\mathbb{Z}^{*}\times E \to E$.

ΟΜΑΔΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ενα σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη $*$ λέγεται ομάδα όταν η πράξη αυτη είναι προσεταιριστική, υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο και για κάθε στοιχείο του G έχει συμμετρικό στοιχείο.

↳ Ετσι, για να δείξω ότι η $(G,*)$ είναι ομαδα, δείχνω ότι

ημιομάδα {
- •1 G κλειστό ως προς $*$.
- •2 $(\alpha*b)*\gamma = \alpha*(b*\gamma)$, $\forall \alpha,b,\gamma$. (Προσεταιριστική)

}
- •3 ~~$\forall a\in G, \exists e$~~ $\exists e\in G$, $\forall \alpha\in G : \alpha*e = e*\alpha = \alpha$ (Ουδέτερο στοιχείο)
- •4 $\forall \alpha\in G, \exists \alpha'\in G : \alpha*\alpha' = \alpha'*\alpha = \alpha$. (Συμμετρικό στοιχείο)

ΟΡΙΣΜΟΣ : Η δομη $(G,*)$ λέγεται ημιομάδα όταν η πράξη $*$ είναι μόνο προσεταιριστική.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια ομάδα $(G,*)$ λέγεται αντιμεταθετική ή αβελιανή ομαδα αν η πράξη $*$ είναι και αντιμεταθετική.

↳ Για να δείξουμε ότι μία δομή ~~ομάδα~~ είναι αβελιανή ομάδα, καλό είναι να δείχνω πρώτα την αντιμεταθετική ιδιότητα.

- Προσθετική ομάδα: •Μια ομάδα $(G,+)$ εφοδιασμένη με πράξη προσθετική.
- Πολλαπλασιαστική ομάδα: Μια ομάδα $(G,\cdot)$ εφοδιασμένη με πράξη πολλαπλασιαστική.

1) Τα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, F_A$, Πνxμ, Ε είναι προσθετικές ομάδες, αβελιανές

2) Τα $\mathbb{Q}^{*}, \mathbb{R}^{*}$ είναι αβελιανές πολλαπλασιαστικές ομάδες.

• <u>Νόμος διαγραφής</u>

Αν $\alpha, b, \gamma \in G$: $(G,*)$ ομάδα, τότε

Θ. $\boxed{\alpha*\gamma = b*\gamma \vee \gamma*\alpha = \gamma*b \Rightarrow \alpha = b}$

<u>Απόδειξη</u>: Εστω $\alpha*\gamma = b*\gamma \Rightarrow (\alpha*\gamma)*\gamma' = (b*\gamma)*\gamma' \Rightarrow \alpha*(\gamma*\gamma') = b*(\gamma*\gamma') \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha*e = b*e \Rightarrow \alpha = b$.

Αν $\gamma*\alpha = \gamma*b \Rightarrow \gamma'*(\gamma*\alpha) = \gamma'*(\gamma*b) \Rightarrow (\gamma'*\gamma)*\alpha = (\gamma'*\gamma)*b \Rightarrow$
$\Rightarrow e*\alpha = e*b \Rightarrow \alpha = b$.

Αρα $\alpha*\gamma = b*\gamma \vee \gamma*\alpha = \gamma*b \Rightarrow \alpha = b$.

• <u>Οι εξισώσεις $x*b = \alpha$ και $b*x = \alpha$.</u>

Θ. Αν το σύνολο G εφοδιασμένο με την πράξη $*$ είναι ομάδα τότε οι εξισώσεις $x*b = \alpha$ και $b*x = \alpha$ ~~έχουν ΜΜΛ~~ με $\alpha, b \in G$ έχουν ΜΜΛ στο G τις $x = \alpha*b'$ και $x = b'*\alpha$.

Δηλ. ~~$\forall \alpha, b \in G, \exists$~~

$\boxed{(G,*) \text{ ομάδα} \Rightarrow \forall \alpha, b, \exists x \in G : x*b = \alpha, \text{ το } x = \alpha*b'}$

α

<u>Απόδειξη</u>: Αν $b*x = \alpha \Leftrightarrow b'*(b*x) = b'*\alpha \Leftrightarrow (b'*b)*x = b'*\alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e*x = b'*\alpha \Leftrightarrow x = b'*\alpha$, ΜΜΛ.

Ομοια, αν $x*b = \alpha \Leftrightarrow (x*b)*b' = \alpha*b' \Leftrightarrow x*(b*b') = \alpha*b' \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x*e = \alpha*b' \Leftrightarrow x = \alpha*b$.

↳ Αν $(G,*)$ αβελιανή ημιομάδα, οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες και έχουν ΜΜΛ την $x = \alpha*b' = b'*\alpha$.

• Αν $(G,+)$ ομαδα τότε $x+b = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + (-b) \overset{\text{ορ}}{=} \alpha - b$

• Αν $(G,\cdot)$ ομάδα τότε $x \cdot b = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha \cdot b^{-1} \underset{\text{ορ}}{=} \alpha : b$

▼ <u>Η έννοια της υποομάδας</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ενα υποσύνολο G_1 μιας ομάδας $(G,*)$ λέγεται υποομάδα της G όταν ~~το~~ ~~η~~ το G_1 είναι το ίδιο ομάδα ως προς την πράξη της G.

δηλ $\boxed{G_1 \text{ υποομαδα της } G \Leftrightarrow (G_1,*) \text{ ομάδα}}$

όπου $(G,*)$ ομάδα.

Έστω μια ομάδα $(G,*)$ με ουδέτερο στοιχείο e.

Θ. $\boxed{G_1 \text{ υποομάδα της } G \iff e \text{ ουδέτερό της } (G_1,*)}$

<u>Απόδειξη</u>: G_1 υποομάδα της $G \Rightarrow (G_1,*)$ ομάδα $\Rightarrow \exists e_1 \in G_1, \forall \alpha \in G_1 : \alpha * e_1 = \alpha$.

~~Αλλά $G_1 \subseteq G \Rightarrow e_1$~~ $\quad$ e ουδ. στην G ~~Αλλά~~ $\Rightarrow \alpha * e = \alpha$

$\Rightarrow \alpha * \cancel{e_1} = \alpha * \cancel{e} \xRightarrow[G \text{ ομαδα}]{} e_1 = e \Rightarrow e$ ουδέτερο της $(G_1,*)$.

SOS

• <u>ΚΡΙΤΗΡΙΟ</u>: Ενα υποσύνολο G_1 μιας ομάδας G είναι υποομαδα της G, αν και μόνο αν: 1) Το G_1 είναι κλειστό ως προς τη πράξη της G.

2) Το συμμετρικό κάθε στοιχείου του G_1 ανήκει στο G_1.

Δηλαδη συμβολικα:

~~Θ.~~

~~$G_1 \subseteq G$ υποομαδα~~

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l} (G,*) \text{ ομάδα} \\ G_1 \subseteq G \text{ υποομάδα της } G \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} G_1 \text{ κλειστό ως προς } "*" \\ \forall \alpha \in G_1,\ \alpha' \in G_1 \end{array}\right.}$

<u>Απόδειξη</u>: <u>Ευθυ</u>

Αν $(G_1,*)$ υποομάδα της ομάδας $(G,*) \Rightarrow (G_1,*)$ ομάδα $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} G_1 \text{ κλειστό ως προς } "*" \\ \forall \alpha \in G_1,\ \alpha' \in G_1. \end{array}\right.$

<u>Αντίστροφο</u>: Για να είναι $(G_1,*)$ ομαδας αρκει

1) G_1 κλειστό ως προς $"*"$ (ισχύει εξ' υποθέσεως).
2) $\forall \alpha \in G_1,\ \alpha' \in G_1$ (ισχύει εξ' υποθεσεως)
3) e ουδετερο της $"*" \Rightarrow e \in G_1$.
4) ~~α~~ $\alpha*(\beta*\gamma) = (\alpha*\beta)*\gamma,\ \forall \alpha,\beta,\gamma \in G_1$.

Είναι $\overset{(2)}{\Rightarrow} \forall \alpha \in G_1, \alpha' \in G_1 \xRightarrow[\text{κλειστο}]{(1)} \left.\begin{array}{l} \alpha * \alpha' \in G_1 \\ e \text{ ουδ. της } "*" \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{e \in G_1.}$ αρα δείχθηκε το (3).

$\left.\begin{array}{l} G \text{ ομαδα} \Rightarrow "*" \text{ προσεταιριστική στο } G \\ "*" \text{ κλειστή στο } G_1 \subseteq G \end{array}\right\} \Rightarrow "*"$ προσεταιριστική στο $G_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha*(\beta*\gamma) = (\alpha*\beta)*\gamma,\ \forall \alpha,\beta,\gamma \in G_1$ άρα δείχθηκε η (4)

$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow G_1$ ομαδα $\Rightarrow G_1$ υποομάδα της ομάδας G.

Γνωστές ομάδες

το $(\Pi\nu\times\mu, +)$ αβελιανή ομάδα
το $(\mathbb{R}, +)$ αβελιανή ομάδα
τα $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ είναι υποομάδες της $(\mathbb{R}, +)$ και είναι αβελιανές.
τα F_A, $\mathcal{E}$ είναι αβελιανές ομάδες.
το $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ αβελιανή ομάδα
το $\mathbb{Q}^*$ είναι υποομάδα της $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ και είναι αβελιανή
το $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ δεν είναι αβελιανή ομάδα

Για να δείξω ότι $(G, *)$ ομάδα

α' τρόπος: Δείχνω ότι είναι ομάδα

β' τρόπος: Δείχνω ότι είναι υποομάδα γνωστής ομάδας με το κριτήριο.

- $\boxed{\text{Αν } (G,*) \text{ ομάδα, "}\theta\, e \text{ ουδ. της } *\text{"} \Longrightarrow \{e\} \text{ ομάδα}}$

Βασικές προτάσεις (όχι θεωρία)

Κριτήριο ομάδας

Πρόταση:

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} \text{Αν } * \text{ εσωτερική στο } G & (1) \\ \text{"}*\text{" προσεταιριστική} & (2) \\ \exists e \in G : \forall \alpha \in G,\ e*\alpha = \alpha & (3) \\ \forall \alpha \in G, \exists \alpha' \in G : \alpha' * \alpha = e & (4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}(G,*) \text{ ομάδα} \\ \text{με ουδέτερο } e\end{array}}$$

Απόδειξη Αρκεί "ΠΟΣ"

- Κλειστό: Δίνεται εξ' υποθέσεως (1)

▶ Θα δείξω ότι

$\underline{\forall_{\alpha,b,}\gamma \in G,\ \gamma * \alpha = \gamma * b \Rightarrow \alpha * = b}$ (5) (Νόμος διαγραφής από αριστερά)

Είναι $\gamma*\alpha = \gamma*b \xrightarrow{(4)} \gamma'*(\gamma*\alpha) = \gamma'*(\gamma*b) \xrightarrow{(2)} (\gamma'*\gamma)*\alpha = (\gamma'*\gamma)*b \xrightarrow{(3)}$

$\Rightarrow e*\alpha = e*b \xrightarrow{(3)} \alpha = b$, $\forall \alpha, b, \gamma \in G$

• Προσεταιριστική : Ισχύει εξ' υποθέσεως (2).

• Ουδέτερο στοιχείο : Είναι λόγω (3) $\Rightarrow \exists\, e\in G : \forall \alpha\in G,\ e*\alpha=\alpha$.

Αρκεί $\alpha * e = \alpha$, $\forall \alpha\in G$.

$(4) \Rightarrow \forall \alpha\in G, \exists\, \alpha'\in G:\ \alpha' * \alpha = e \Rightarrow (\alpha' * \alpha) * e = e * e \xRightarrow{(3)} (\alpha' * \alpha) * e = e \xRightarrow{(2)}$

$\Rightarrow \alpha' * (\alpha * e) = e \xRightarrow{(4)} \alpha' * (\alpha * e) = \alpha' * \alpha \xRightarrow{(5)} \left.\begin{matrix}\alpha * e = \alpha,\ \forall \alpha\in G \\ e*\alpha=\alpha,\ \forall\alpha\in G\end{matrix}\right\} \Rightarrow e\in G$ ουδέτερο.

• Συμμετρικό στοιχείο : Είναι λόγω (4) $\Rightarrow \forall \alpha\in G, \exists\, \alpha'\in G :\ \alpha' * \alpha = e$.

Αρκεί $\alpha * \alpha' = e$, $\forall \alpha\in G$.

$(4) \Rightarrow \forall \alpha\in G, \exists\, \alpha'\in G:\ \alpha' * \alpha = e \Rightarrow (\alpha' * \alpha) * \alpha' = e * \alpha' \xRightarrow{e \text{ ουδέτερ}} (\alpha' * \alpha) * \alpha' = \alpha' * e \xRightarrow{(2)}$

$\Rightarrow \alpha' * (\alpha * \alpha') = \alpha' * e \xRightarrow{(5)} \alpha * \alpha' = e\ ,\ \forall \alpha\in G \Rightarrow \underline{\forall \alpha\in G, \exists\, \alpha'\in G:\ \alpha' * \alpha = \alpha * \alpha' = e}$

Άρα, η εσωτερική πράξη $*$ στο G είναι προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο, κάθε στοιχείο του G έχει συμμετρικό $\Rightarrow$ $\underline{(G,*)}$ ομάδα.

• 2 Κριτήριο αβελιανής ομάδας

Πρόταση :

Αν η $*$ εσωτερική στο G "$*$" έχει ουδέτερο στοιχείο $e\in G$ Κάθε $x\in G$ έχει μοναδικό συμμετρικό $\forall \alpha,\beta,\gamma\in G,\ \alpha*(\beta*\gamma)=(\beta*\alpha)*\gamma$	$\Rightarrow$	$(G,*)$ αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη : Αρκεί "ΠΑΟΣ"

• Κλειστό : Δίνεται εξ' υποθέσεως

• Αντιμεταθετική : Είναι $\forall \alpha,\beta,\gamma\in G,\ \alpha*(\beta*\gamma)=(\beta*\alpha)*\gamma \xRightarrow{\text{Για } \gamma=e}$

$\Rightarrow \forall \alpha,\beta\in G,\ \alpha*(\beta*e)=(\beta*\alpha)*e \Rightarrow \alpha*\beta=\beta*\alpha\ ,\ \forall \alpha,\beta\in G \Rightarrow$ "$*$" αντιμεταθετική.

• Προσεταιριστική: $\alpha*(\beta*\gamma)=(\beta*\alpha)*\gamma \underset{\text{αντιμ.}}{=} (\alpha*\beta)*\gamma\ ,\ \forall \alpha,\beta,\gamma\in G \Rightarrow$ "$*$" προσεταιριστική.

• Ουδέτερο : Είναι εξ' υποθέσεως το e

• Συμμετρικό : $\forall \alpha\in G, \exists\, \alpha'\in G:\ \alpha*\alpha'=\alpha'*\alpha=\alpha$, ισχύει εξ' υποθέσεως

Άρα, η εσωτερική πράξη "$*$" στο G είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική με ουδέτερο στοιχείο το e και κάθε στοιχείο $\alpha\in G$ έχει συμμετρικό $\alpha'\in G$ $\Rightarrow$ $(G,*)$ αβελιανή ομάδα

Βλέπε και Β → 23,24.

Σύνολα εφοδιασμένα με δύο πράξεις

▼ Επιμεριστική ιδιότητα

Εστω μια δομή $(E,*,o)$.

Ορισμός: "o" επιμεριστική ως προς "*" $\Longleftrightarrow \forall \alpha,\beta,\gamma \in E \begin{cases} \alpha o(\beta*\gamma)=(\alpha o\beta)*(\alpha o\gamma) & (1) \\ \wedge \\ (\beta*\gamma)o\alpha=(\beta o\alpha)*(\gamma o\alpha) & (2) \end{cases}$

- Αν ισχύει μόνο το (1) → Αριστερά επιμεριστική
- Αν ισχύει μόνο το (2) → Δεξιά επιμεριστική.
- "o" επιμεριστική αριστερά ως προς "*", "o" ~~προσεταιριστική~~ αντιμεταθετική $\Rightarrow$ "o" επιμεριστική ως προς "*".
- "o" επιμεριστική δεξιά ως προς "*", "o" ~~προσεταιρ~~ αντιμεταθετική $\Rightarrow$ "o" επιμεριστική ως προς "*".
- Η δεύτερη πράξη έχει προτεραιότητα ως προς την πρώτη

▼ Δακτύλιος

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ενα μη κενό σύνολο A εφοδιασμένο με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό λέγεται δακτύλιος όταν:

1) Είναι (αντιμεταθετική) προσθετική ομάδα και
2) Ο πολ/μος είναι προσεταιριστικός, έχει μοναδιαίο στοιχείο και είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.

Συμβολικά

$$\boxed{(A,+,\cdot) \text{ δακτύλιος} \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (A,+) \text{ ομάδα} \\ (A,\cdot) \text{ Π.Ο.Ε} \end{cases}}$$

- Στην ομάδα $(A,+)$ → ουδέτερο στοιχείο, το μηδενικό $\mathbf{0}$
  → συμμετρικό του α, το αντίθετο $-\alpha$
- Στην δομη $(A,\cdot)$ → ουδέτερο στοιχειο, το μοναδιαίο $\mathbf{1}$

Θ. $\boxed{(A,+,\cdot) \text{ δακτύλιος} \Longrightarrow (A,+) \text{ αβελιανή ομάδα}}$

Απόδειξη: $(A,+,\cdot)$ δακτύλιος $\Rightarrow (A,+)$ ομάδα $\wedge$ $(A,\cdot)$ Π.Ο.Ε

οπότε $\forall \alpha,\beta \in A$, $1\in A$ έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(1+1)(\alpha+\beta) &= 1(\alpha+\beta)+1(\alpha+\beta) = 1\cdot\alpha+1\cdot\beta+1\cdot\alpha+1\cdot\beta = \alpha+\beta+\alpha+\beta \\ (1+1)(\alpha+\beta) &= (1+1)\cdot\alpha+(1+1)\beta = 1\cdot\alpha+1\cdot\alpha+1\cdot\beta+1\cdot\beta = \alpha+\alpha+\beta+\beta\end{aligned}\right\} \overset{\text{Θ.Π}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \alpha+[(\beta+\alpha)+\beta] = \alpha+[(\alpha+\beta)+\beta] \underset{(A,+)\text{ ομάδα}}{\Longrightarrow} (\beta+\alpha)+\beta = (\alpha+\beta)+\beta \underset{(A,+)\text{ ομαδα}}{\Longrightarrow} \beta+\alpha=\alpha+\beta, \forall \alpha,\beta\in A \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "+" αντιμεταθετική $\left.\begin{matrix} \\ (A,+) \text{ ομάδα} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A,+)$ αβελιανή ομάδα.

Ορισμός : $\boxed{(A,+,\cdot) \text{ αντιμεταθετικός δακτύλιος} \Leftrightarrow \begin{cases} (A,+,\cdot) \text{ δακτύλιος} \\ \text{"}\cdot\text{" αντιμεταθετική.} \end{cases}}$

• Γνωστοί δακτύλιοι $\longrightarrow$ 1) $(\mathbb{R},+,\cdot)$ με μηδενικό στοιχείο το 0
$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ και μοναδιαίο το 1.
$(\mathbb{Z},+,\cdot)$

2) $(\Pi_\nu,+,\cdot)$ με μηδενικό στοιχείο το $\mathbf{0}$ και μοναδιαίο το I_ν.

3) $(F_A,+,\cdot)$ με μηδενικό στοιχείο την συνάρτηση $\mathbf{0}: \mathbf{0}(x)=0,\ \forall x\in A$
και μοναδιαίο την συνάρτηση $\mathbf{1}(x)=1,\ \forall x\in A$.

• Χαρακτηριστικός δακτύλιος

Κάθε δομή $(\{a\},+,\cdot)$ με $a+a=0$ και $a\cdot a=a$ είναι δακτύλιος με $\mathbf{0}=\mathbf{1}=a$
Ένας τέτοιος δακτύλιος λέγεται μηδενικός δακτύλιος $\longrightarrow \mathbf{0}=\mathbf{1}$.
Στα επόμενα όταν λέμε "δακτύλιος" θα εννοούμε "μη μηδενικός".

▼ Ιδιότητες δακτυλίου $\Rightarrow$ Έστω $(A,+,\cdot)$ δακτύλιος. Ισχύουν οι ιδιότητες της ομάδας $(A,+)$ και της δομής $(A,\cdot)$ Π.Ο.Ε.

1) $\boxed{\forall a\in A: a\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot a=\mathbf{0}}$ (ιδιότητα του απορροφητικού στοιχείου)

Απόδειξη

$a\cdot b+\mathbf{0}=a\cdot b=a\cdot(b+\mathbf{0})=a\cdot b+a\cdot\mathbf{0},\ \forall a,b\in A \Rightarrow a\cdot b+\mathbf{0}=a\cdot b+a\cdot\mathbf{0} \xrightarrow[\forall a,b\in A]{(A,+)\text{ ομάδα}} a\cdot\mathbf{0}=0,\ \forall a,b\in A.$

Όμοια

$b\cdot a+\mathbf{0}=b\cdot a=(b+\mathbf{0})\cdot a=b\cdot a+\mathbf{0}\cdot a,\ \forall a,b\in A \Rightarrow b\cdot a+\mathbf{0}=b\cdot a+\mathbf{0}\cdot a,\ \forall a,b\in A \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{0}\cdot a=\mathbf{0},\ \forall a\in A.$

2) $\boxed{\forall a,b\in A: (-a)\cdot b=a(-b)=-(a\cdot b)}$ (κανόνας προσήμων)

Απόδειξη

Θα δείξω ότι $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$.

$(-a)+a=\mathbf{0} \Rightarrow [(-a)+a]\cdot b=\mathbf{0}\cdot b \xRightarrow{1)} [(-a)+a]\cdot b=\mathbf{0} \Rightarrow (-a)\cdot b+a\cdot b=\mathbf{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow (-a)\cdot b,\ a\cdot b$ αντίθετοι $\Rightarrow (-a)\cdot b=-(a\cdot b),\ \forall a,b\in A$.

Όμοια, ότι: $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$

$(-b)+b=\mathbf{0} \Rightarrow a\cdot[(-b)+b]=a\cdot\mathbf{0} \Rightarrow a\cdot[(-b)+b]=\mathbf{0} \Rightarrow a\cdot(-b)+a\cdot b=\mathbf{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow a(-b),\ a\cdot b$ αντίθετοι $\Rightarrow a(-b)=-a\cdot b.,\ \forall a,b\in A$

Άρα $\forall a,b\in A: (-a)b=a(-b)=-(a\cdot b)$.

3) $\boxed{\forall \alpha, \beta \in A\ ,\ (-\alpha)(-\beta) = \alpha \cdot \beta}$ (κανόνας προσήμων)

Απόδειξη

$$A = (-\alpha)(-\beta) \underset{2)}{=} -[\alpha(-\beta)] \underset{2)}{=} -[-(\alpha\beta)] = \alpha\beta = B$$

• Παρατήρηση : Ένας δακτύλιος λέγεται μηδενικός όταν $\mathbf{0} = \mathbf{1}$. Θα δείξουμε ότι

Θ. $\boxed{(A,+,\cdot) \text{ μηδενικός δακτύλιος} \Longleftrightarrow A = \{\mathbf{0}\}}$

Απόδειξη

$(A,+,\cdot)$ μηδενικός δακτύλιος $\Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{1} \Rightarrow \forall \alpha \in A,\ \mathbf{0}\cdot\alpha = \mathbf{1}\cdot\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in A, \alpha = \mathbf{0}$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow A \text{ μονομελές} \\ \mathbf{0} \in A\end{array}\right\} \Rightarrow A = \{\mathbf{0}\}.$

• Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι δακτύλιοι με δύο τουλάχιστον στοιχεία είναι μή μηδενικοί δακτύλιοι.

• Εφαρμογή (όχι θεωρία) $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Το } (\mathbb{F}_A,+,\cdot) \text{ είναι δακτύλιος}}$

Απόδειξη : Αρκεί ~~Αξ~~ $(A,+)$ Π.(Α).Ο.Σ

• Κλειστό : Αν $f_1, f_2 \in F_A \Rightarrow \text{dom} f_1 = A \wedge \text{dom} f_2 = A \Rightarrow \text{dom}(f_1+f_2) = A \cap A = A \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1 + f_2 \in F_A.$

• Π: $[(f_1+f_2)+f_3](x) = (f_1+f_2)(x) + f_3(x) = [f_1(x)+f_2(x)] + f_3(x) = f_1(x) + [f_2(x)+f_3(x)] =$

$= f_1(x) + (f_2+f_3)(x) = [f_1+(f_2+f_3)](x)\ ,\forall x \in A \Rightarrow (f_1+f_2)+f_3 = f_1+(f_2+f_3) \Rightarrow$

$, \forall f_1, f_2, f_3 \in F_A \Rightarrow$ "+" προσεταιριστική.

• Ο: Ουδέτερο στοιχείο είναι η $\mathbf{0}: \mathbf{0}(x) = 0, \forall x \in A$ διότι

$$(\mathbf{0}+f)(x) = \mathbf{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = \begin{cases} f(x),\ \forall x \in A \Rightarrow \underline{\mathbf{0}+f = f\ ,\forall f \in F_A} \\ f(x)+0 = f(x) + \mathbf{0}(x) = (f+\mathbf{0})(x), \forall x \in A \Rightarrow \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \mathbf{0}+f = f+\mathbf{0}\ , \forall f \in F_A \\ \mathbf{0}+f = \mathbf{0}\ , \forall f \in F_A\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{0}$ ουδέτερο της +

• Σ : Συμμετρικό στοιχείο της $f \in F_A$ είναι η $(-f) \in F_A$ διότι

$$[f+(-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = \begin{cases} (-f)(x) + f(x) = [(-f)+f](x), \forall x \in A \Rightarrow f+(-f) = (-f)+(f), \forall f \in F_A \\ f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}(x), \forall x \in A \Rightarrow f+(-f) = \mathbf{0},\ \forall f \in F_A \end{cases}$$

$\Rightarrow f+(-f) = (-f)+f = \mathbf{0}\ , \forall f \in F_A \Rightarrow -f$ συμμετρικό της f.

Άρα $(F_A,+)$ Π.Ο.Σ $\Rightarrow$ $(F_A,+)$ ομάδα.

Θα δείξω ότι $(F_A,\cdot)$ Π.Ο.Ε.

• Κλειστό : Όμοια $f_1, f_2 \in F_A \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in F_A.$

• $\underline{\Pi.}$: $[(f_1 f_2) f_3](x) = (f_1 f_2)(x) \cdot f_3(x) = [f_1(x) \cdot f_2(x)] \cdot f_3(x) = f_1(x) \cdot [f_2(x) \cdot f_3(x)] =$
$= f_1(x) \cdot [(f_2 f_3)(x)] = [f_1(f_2 f_3)](x), \forall x \in A \Rightarrow f_1(f_2 f_3) = (f_1 f_2) f_3, \forall f_1, f_2, f_3 \in F_A \Rightarrow$
$\Rightarrow$ "$\cdot$" Π.

• $\underline{O}$: Είναι το $\mathbf{1}(x) = 1$ διότι όμοια $\mathbf{1} \cdot f = f \cdot \mathbf{1} = f, \forall f \in F_A$

• $\underline{E}$: Είναι $(f_1 + f_2) f_3 = f_1 f_3 + f_2 f_3, \forall f_1, f_2, f_3 \in F_A \Rightarrow$ "$\cdot$" επιμεριστική ως προς "+".
$f_3(f_1 + f_2) = f_3 f_1 + f_3 f_2$

Αρα η δομη $\left.\begin{matrix} (F_A, \cdot) \ \Pi.O.E \\ (F_A, +) \ \text{ομάδα} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (F_A, +, \cdot)$ δακτύλιος.

• Ενας δακτύλιος $(A, +, \cdot)$ λέγεται <u>ακέραια περιοχή</u> όταν

$$\boxed{(A, +, \cdot) \text{ ακέραια περιοχή} \Leftrightarrow \begin{cases} (A, +, \cdot) \text{ αντιμεταθετικός δακτύλιος} \\ \forall \alpha, b \in A, \ ab = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \lor b = 0 \end{cases}}$$

• Το $(F_A, +, \cdot)$ <u>δεν</u> είναι ακέραια περιοχη.
π.χ. για $f : f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A - \{5\} \\ 0, & x = 5 \in A \end{cases}, \ g(x) = \begin{cases} 0, & x \in A - \{5\} \\ 1, & x = 5 \in A \end{cases}$

είναι $f \neq \mathbf{0} \land g \neq \mathbf{0} \land f \cdot g = \mathbf{0}$.

▼ <u>ΣΩΜΑ</u>

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ενας αντιμεταθετικός δακτύλιος F λέγεται σώμα όταν καθε $\alpha \in F^*$ έχει αντίστροφο $(F^* = F - \{\mathbf{0}\})$

Δηλαδη
$$\boxed{(F, +, \cdot) \text{ σώμα} \Leftrightarrow \begin{cases} (F, +) \text{ αβελιανή ομάδα} \\ (F^*, \cdot) \text{ αβελιανή ομάδα} \\ \text{"}\cdot\text{" E "+"} \end{cases}}$$

αρα
$$\boxed{(F, +, \cdot) \text{ σώμα} \Leftrightarrow \begin{cases} (F, +, \cdot) \text{ δακτύλιος} \\ \forall \alpha \in F^*, \exists \alpha^{-1} \in F^* : \alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = \mathbf{1} \end{cases}}$$

• Μια βασική ιδιότητα του σώματος

Θ. $\boxed{\text{Αν } \begin{matrix} \alpha, \beta \in F \\ (F,+,\cdot) \text{ σώμα} \end{matrix} \Longrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0}$

Απόδειξη

→ Δηλ.

$\boxed{(F,+,\cdot) \text{ σώμα} \Rightarrow (F,+,\cdot) \text{ ακέραια περιοχή}}$

Θ. $\boxed{\forall \alpha, \beta \in F, (F,+,\cdot) \text{ σώμα}, \ \alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0}$

Απόδειξη

i) Εστω $\beta \neq 0 \Rightarrow \beta \in F^* \Rightarrow \beta^{-1} \in F^*$ οπότε

$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow (\alpha\beta)\beta^{-1} = 0 \cdot \beta^{-1} \Rightarrow (\alpha\beta)\beta^{-1} = 0 \Rightarrow \alpha(\beta\beta^{-1}) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0.$

ii) Αν $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0.$

▼ Επειδη $(F,+,\cdot)$ σώμα $\Rightarrow (F,+)$ αβελιανή ομάδα $\wedge$ $(F^*,\cdot)$ αβελιανή ομάδα

i) Οι εξισώσεις $\beta + x = \alpha$, $\beta \cdot x = \alpha$ έχουν μοναδική λύση $x = \alpha - \beta$, $x = \alpha \cdot \beta^{-1}$

ii) $\begin{cases} \alpha + x = \alpha + y \Rightarrow x = y \\ \alpha \cdot x = \alpha \cdot y, \ \alpha \neq 0 \Rightarrow x = y. \end{cases}$

iii) Ορίζεται οι πράξεις "−", ":" με διαιρέτη $\neq 0$.

▼ Βασικά σώματα

1) $\boxed{(\mathbb{Q},+,\cdot) \text{ σώμα}}$ 2) $\boxed{(\mathbb{R},+,\cdot) \text{ σώμα}}$

Θ. Αν $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ εφοδιασμενο με τις πράξεις $\overset{+}{\oplus}, \overset{\cdot}{\circledast}$ με

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

τότε $\mathbb{C}$ σώμα με $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)$, $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

Απόδειξη

• Κλειστό : Δίνεται

• $(\mathbb{C},+)$ αβελιανή ομάδα

Π. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) =$
$= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) =$
$= (z_1 + z_2) + z_3 \Rightarrow$ "+" Π.

Α. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) =$
$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1 \Rightarrow$ "+" Α.

Θ. Εστω $\mathbf{0} \in \mathbb{C}$: $z+\mathbf{0}=z, \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (x,y)+(e_1,e_2)=(x,y) \Leftrightarrow (x+e_1, y+e_2)=(x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+e_1=x \\ y+e_2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1=0 \\ e_2=0 \end{cases}$. Είναι και $\mathbf{0}+z=z+\mathbf{0}=z \Rightarrow \mathbf{0}=(0,0)^{\in \mathbb{C}}$ ουδετερο $\Rightarrow$ "+" Ο

Σ. Εστω z': $z+z'=\mathbf{0} \Leftrightarrow (x,y)+(x',y')=(0,0) \Leftrightarrow (x+x', y+y')=(0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+x'=0 \\ y+y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases} \Leftrightarrow z'=(-x,-y) \in \mathbb{C}$. Είναι και $z'+z=z+z'=\mathbf{0}$

Αρα "+" Σ.

Αρα "+" ΠΑΟΣ και εσωτ. στο $A \Rightarrow (A,+)$ αβελιανή ομάδα.

- $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ αβελιανή ομάδα

Π. $\forall z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1(z_2z_3)=(x_1,y_1)\cdot[(x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)]=(x_1,y_1)\cdot(x_2x_3-y_2y_3, x_2y_3+x_3y_2)=$

$=(x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(x_2y_3+x_3y_2), x_1(x_2y_3+x_3y_2)+y_1(x_2x_3-y_2y_3))=$

$=(x_1x_2x_3-x_1y_2y_3-y_1x_2y_3-y_1y_2x_3, x_1x_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3-y_1y_2y_3)$

και

$\forall z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}^*$, $(z_1z_2)z_3=[(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)](x_3,y_3)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)(x_3,y_3)=$

$=((x_1x_2-y_1y_2)x_3-(x_1y_2+x_2y_1)y_3, (x_1x_2-y_1y_2)y_3+(x_1y_2+x_2y_1)x_3)=$

$=(x_1x_2x_3-y_1y_2x_3-x_1y_2y_3-y_1x_2y_3, x_1x_2y_3-y_1y_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3)=$

$=(x_1x_2x_3-x_1y_2y_3-y_1x_2y_3-y_1y_2x_3, x_1x_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3-y_1y_2y_3)=z_1(z_2z_3) \Rightarrow$ "·" Π.

Α. $\forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}^*$, $z_1z_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)=$

$=(x_2x_1-y_2y_1, x_2y_1+x_1y_2)=(x_2,y_2)\cdot(x_1,y_1)=z_2\cdot z_1 \Rightarrow$ "·" Α.

Ο. Εστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $\mathbf{1} \in \mathbb{C}^*$: $z\cdot\mathbf{1}=z \Leftrightarrow (x,y)\cdot(e_1,e_2)=(x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (xe_1-ye_2, xe_2+ye_1)=(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} xe_1-ye_2=x \\ xe_2+ye_1=y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xe_1-ye_2=x \\ ye_1+xe_2=y \end{cases}$, $D=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2>0 \Rightarrow D\neq 0$ (διότι $z\in\mathbb{C}^* \Rightarrow z\neq\mathbf{0} \Rightarrow (x,y)\neq(0,0)$ $\Rightarrow x\neq 0, y\neq 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ το (Σ) έχει ΜΜΛ $(e_1,e_2)=\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}\right)$ όπου

$D_1=\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+y^2$ και $D_2=\begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (e_1,e_2)=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{0}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$

$\Rightarrow$ "·" Ο. το $\mathbf{1}=(1,0)$

Σ. Εστω $z \in \mathbb{C}^*$ και $z' \in \mathbb{C}^*$: $z \cdot z' = 1 \Leftrightarrow (x,y)\cdot(x',y') = (1,0) \Leftrightarrow (xx'-yy', xy'+x'y) = (1,0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot x' - y\cdot y' = 1 \\ xy' + x'y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot x' - y\cdot y' = 1 \\ y\cdot x' + x\cdot y' = 0 \end{cases}, \quad D = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2+y^2 > 0 \quad (x\neq 0, y\neq 0) \Rightarrow$$

$\Leftrightarrow D \neq 0 \Rightarrow$ Το (Σ) έχει ΜΜΛ. $(x',y') = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}\right)$ όπου

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix} = x - (-y)0 = x, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix} = -y \underset{z'=}{\Rightarrow} (x',y') = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{C}^*$$

Είναι και $z' \cdot z = z z' = 1 \Rightarrow$ "·" ΟΣ το $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Αρα $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ "ΠΑΟΣ" $\Rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ αβελιανή ομάδα.

- "·" Ε. "+"

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1(z_2+z_3) = (x_1,y_1)\cdot[(x_2,y_2)+(x_3,y_3)] = (x_1,y_1)\cdot(x_2+x_3, y_2+y_3) =$
$= (x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3),\ x_1(y_2+y_3) + y_1(x_2+x_3)) =$
$= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3),\ (x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1)) =$
$= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) =$
$= (x_1,y_1)(x_2,y_2) + (x_1,y_1)\cdot(x_3,y_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

Είναι και $(z_2+z_3)z_1 = z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 = z_2z_1 + z_3z_1$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Αρα "·" Ε "+".

οπότε $\left.\begin{array}{l} (\mathbb{C},+) \text{ αβελιανή ομάδα} \\ (\mathbb{C}^*,\cdot) \text{ αβελιανή ομάδα} \\ \text{"·" Ε "+"} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbb{C},+,\cdot)$ σώμα.

Εφαρμογες - όχι θεωρία

Εστω μια δομή $(A,*)$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a*x=b \wedge y*a=b \text{ έχουν λύση}, \forall a,b \in A \\ \text{"*" προσεταιριστική} \end{array}\right\} \Leftrightarrow (A,*) \text{ ομάδα}}$$

Απόδειξη

▸ Θα δείξω ότι έχει ουδέτερο άπο αριστερά και συμμετρικό άπο αριστερά.

Η $y*a=b$ έχει λύση $\Rightarrow$ η $y*a=a$ έχει λύση έστω e. $\Rightarrow e*a=a$. (1)

Θα δείξω ότι $\forall b \in A$, $e*b=b$.

Εστω x_0 η λύση της $a*x=b \Rightarrow a*x_0=b \Rightarrow e*(a*x_0)=e*b \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (e*a)*x_0 = e*b \overset{(1)}{\Rightarrow} a*x_0 = e*b. \\ \text{Είναι και } a*x_0=b \end{array}\right\} \Rightarrow e*b=b, \forall b \in A \Rightarrow e$ ουδ. άπο αριστερά.

Είναι και $\forall a \in A', \exists a' \in A : a'*a=e$ όπου το a' είναι η λύση της

$y*a=b$ όπου $b=e$.

Αρα, υπάρχει ουδ. από αριστερα
$\forall a \in A$, υπάρχει συμμετρικό άπο αριστερα
"$*$" προσεταιριστική

κριτήρια (εκτός ύλης). $\Longrightarrow (A,*)$ ομάδα.

$(G,*)$ ομάδα, $G'=\{x\in G : x*a=a*x, \forall a\in G\}$ $\Longrightarrow (G',*)$ ομάδα

(εφαρμογή υποομάδων)

$\to G'$ κέντρο ομάδας.

Απόδειξη:

• Κλείστο: Εστω $x,y\in G' \Rightarrow \begin{cases} x*a=a*x, \forall a\in G \\ y*a=a*y, \forall a\in G. \end{cases}$ Αρκει $(x*y)*a=a*(x*y), \forall a\in G$.

$(x*y)*a \overset{G\,ομ.}{=} x*(y*a) \overset{υπ}{=} x*(a*y) \underset{G\,ομ.}{=} (x*a)*y \underset{υπ}{=} (a*x)*y \underset{G\,ομ.}{=} a*(x*y), \forall a\in G \Rightarrow x*y\in G'$

Αρα G' κλειστό ώς προς "$*$".

• Συμμετρικό Θα δείξω ότι $\forall x\in G'$, $x'\in G'$.

Είναι $x\in G' \Rightarrow \forall a\in G,\ x*a=a*x \Rightarrow x'*(x*a)=x'*(a*x) \Rightarrow (x'*x)*a=(x'*a)*x$
$\Rightarrow e*a=(x'*a)*x \Rightarrow a=(x'*a)*x \Rightarrow a*x'=[(x'*a)*x]*x' \Rightarrow$
$\Rightarrow a*x'=(x'*a)*(x*x') \Rightarrow a*x'=(x'*a)*e \Rightarrow a*x'=x'*a, \forall a\in G \Rightarrow x'\in G$

Αρα $\forall x,y\in G' \Rightarrow x*y\in G'$
$\forall x\in G' \Rightarrow x'\in G'$
$G'\subset G \wedge (G,*)$ ομάδα
$\Rightarrow G'$ υποομάδα της ομάδας $(G,*) \Rightarrow (G',*)$ ομάδα.

$(G,*)$ ομάδα, $G_1\neq\emptyset, G_2\neq\emptyset$ υποομάδες της $(G,*)$ $\Longrightarrow G_1\cap G_2$ υποομάδα της $(G,*)$.

Απόδειξη

• $G_1\cap G_2\neq\emptyset$, διότι αν e το ουδετερο της $(G,*)$

G_1 υποομάδα της $(G,*) \Rightarrow e\in G_1$
G_2 υποομάδα της $(G,*) \Rightarrow e\in G_2$
$\Rightarrow e\in (G_1\cap G_2) \Rightarrow G_1\cap G_2\neq\emptyset$. (1)

• Κλειστό: G_1, G_2 κλειστά ως προς "$*$" ώς υποομάδες της ομάδας $(G,*)$

Εστω $x,y\in G_1\cap G_2 \Rightarrow \begin{cases} x\in G_1 \wedge y\in G_1 \Rightarrow x*y\in G_1 \\ x\in G_2 \wedge y\in G_2 \Rightarrow x*y\in G_2 \end{cases} \Rightarrow x*y\in G_1\cap G_2, \forall x,y\in G_1\cap G_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow G_1\cap G_2$ κλειστό ως προς "$*$". (2)

• Συμμετρικό $\forall x\in G_1$, $x'\in G_1$ και $\forall x\in G_2$, $x'\in G_2$ διότι G_1,G_2 υποομάδες της $(G,*)$.
$\forall x\in$

$$\forall x \in G_1 \cap G_2 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x \in G_1 \Rightarrow x' \in G_1 \\ x \in G_2 \Rightarrow x' \in G_2 \end{matrix} \right) \Rightarrow x' \in G_1 \cap G_2 \quad (3)$$

$(1),(2),(3) \underset{\text{κρ.}}{\Rightarrow} G_1 \cap G_2$ υποομάδα της ομάδας $(G,*)$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ Χ$\underline{\text{ο}}$ΡΟΙ

▼ Εξωτερική πράξη

Αν A και E δύο μη κενά σύνολα, τότε κάθε απεικόνιση $A \times E \to E$ λέγεται εξωτερική πράξη στο E με συντελεστές (ή τελεστές) άπο το σύνολο A.

- Μία εσωτερική πράξη στο E είναι και εξωτερική στο E με συντελεστές άπο το E.
- Έστω "$\cdot$" μια εξωτερική πράξη στο E με συντελεστές άπο το A.

Ένα σύνολο $E_2 : \emptyset \neq E_2 \subseteq E$ λέγεται κλειστό ως προς την πράξη "$\cdot$" όταν: $\forall (\lambda, x) \in A \times E_2$, $\lambda \cdot x \in E_2$.

▼ Η έννοια του διανυσματικού χώρου

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ένα σύνολο V στο οποίο έχει οριστεί μια εσωτερική πράξη "+" και μια εξωτερική "$\cdot$" με συντελεστές πραγματικούς (άπο το σώμα $\mathbb{R}$), λέγεται <u>πραγματικός διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος</u> όταν

1) $\underline{\Omega}$ς προς την εσωτερική πράξη είναι (αβελιανή)* ομάδα
2) $\underline{\Omega}$ς προς την εξωτερική πράξη ισχύουν τα εξής

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, u \in V$, $\lambda(v+u) = \lambda v + \lambda u$

ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V$, $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$

iii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in V$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

iv) $\forall v \in V$, $1 \cdot v = v$

Το άθροισμα $\lambda+\mu$ και γινόμενο $\lambda\mu$ αναφέρονται στις γνωστές πράξεις στο $\mathbb{R}$.

- Ο ορισμός γενικεύεται σε διανυσματικούς χώρους με συντελεστές άπο ένα <u>σώμα</u> $(F,+,\cdot)$. Τότε μιλάμε για <u>δ.χ. V στο F.</u>

* Δεν είναι απαραίτητο διότι

Θ. $\boxed{(V,+,\cdot) \text{ δ.χ.} \Rightarrow (V,+) \text{ αβελιανή ομάδα}}$

Απόδειξη

$(1+1)(u+v) = 1(u+v)+1(u+v) = 1\cdot u+1\cdot v+1\cdot u+1\cdot v = u+v+u+v$
$(1+1)(u+v) = (1+1)u+(1+1)v = 1\cdot u+1\cdot u+1\cdot v+1\cdot v = u+u+v+v$
$\Rightarrow \cancel{u}+v+u+\cancel{v} = \cancel{u}+u+v+\cancel{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow v+u = u+v, \forall u,v \in V \Rightarrow$ "+" αντιμεταθετική
$(V,+,\cdot)$ δ.χ. $\Rightarrow (V,+)$ ομάδα
$\Rightarrow (V,+)$ αβελιανή ομάδα.

• Γνωστοί διανυσματικοί χώροι.

1) Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων $(\mathcal{E},+,\cdot)$ με πράξεις

~~"+": $\forall (\lambda,\vec{a}) \in \mathbb{R}\times\mathcal{E} \longrightarrow \lambda\vec{a} \in \mathcal{E}$.~~

~~2) Το~~ "+": $\forall \vec{a},\vec{b} \in \mathcal{E} \longrightarrow (\vec{a}+\vec{b}) \in \mathcal{E}$.

"·" : $\forall (\lambda,\vec{a}) \in \mathbb{R}\times\mathcal{E} \longrightarrow \lambda\vec{a} \in \mathcal{E}$.

2) Το σύνολο των πινάκων $(\Pi_{\mu\times\nu},+,\cdot)$ με πράξεις:

"+": $\forall A,B \in \Pi_{\mu\times\nu} \longrightarrow (A+B) \in \Pi_{\mu\times\nu}$

"·" : $\forall (\lambda,A) \in \mathbb{R}\times\Pi_{\mu\times\nu} \longrightarrow \lambda\cdot A \in \Pi_{\mu\times\nu}$

3) Το σύνολο των συναρτήσεων με Π.Ο A, $(F_A,+,\cdot)$ με πράξεις

"+": $\forall f_1,f_2 \in F_A \longrightarrow (f_1+f_2) \in F_A$

"·": $\forall (\lambda,f) \in \mathbb{R}\times F_A \longrightarrow \lambda\cdot f \in F_A$.

4) Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ με πράξεις

$\forall v=(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2, \forall u=(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, $v+u = (x_1+y_1, x_2+y_2)$
$\lambda v = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

είναι δ.χ. (Απόδειξη απλή)

5) Το σύνολο $\mathbb{R}^\nu$ με πράξεις, $\forall v=(x_1,x_2,\dots,x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$, $(y_1,y_2,\dots,y_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$

"+": $v+u = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_\nu+y_\nu)$

"·": $\lambda\cdot v = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_\nu)$. , είναι δ.χ. (Απόδειξη απλή.

με $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0)$ και $-v = (-x_1,-x_2,\dots,-x_\nu)$.

Εφαρμογή - όχι θεωρία

Αν $(V_1,+,\cdot)$ δ.χ., $(V_2,+,\cdot)$ δ.χ, το σύνολο $V = V_1\times V_2$ στο οποίο ορίζουμε τις πράξεις "+" και "·", $\forall v=(v_1,v_2) \in V$, $\forall u=(u_1,u_2) \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

"+": $v+u = (v_1+u_1, v_2+u_2)$

"·": $\lambda\cdot v = (\lambda v_1, \lambda v_2)$

είναι δ.χ. (βλ. Β.4)

• Το $\mathbb{R}$ είναι δ.χ. στο $\mathbb{R}$

Γενικά, F σώμα $\Rightarrow F$ δ.χ. στο F

▼ Ιδιότητες διανυσματικών χώρων.

1) $(V,+)$ αβελιανή ομάδα άρα $\forall v,u,w \in V$
   i) $(v+u)+w = v+(u+w)$
   ii) $v+u = u+v$
   iii) $v+\mathbf{0} = v$
   iv) $v+(-v) = \mathbf{0}$

2) Αξιώματα εξωτερικής πράξης, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$
   i) $\lambda(v+u) = \lambda v + \lambda u$
   ii) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
   iii) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
   iv) $1\cdot v = v$.

3) $\boxed{\lambda\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}\ ,\ \forall \lambda\in\mathbb{R}}$

Απόδειξη

Εστω $v\in V$. $\lambda\cdot v + \lambda\cdot\mathbf{0} = \lambda(v+\mathbf{0}) = \lambda\cdot v = \lambda\cdot v + \mathbf{0} \Rightarrow \lambda\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$

4) $\boxed{0\cdot v = \mathbf{0}\ ,\ \forall v\in V}$

Απόδειξη

Εστω $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\cdot v + 0\cdot v = (\lambda+0)\cdot v = \lambda v = \lambda\cdot v + \mathbf{0} \Rightarrow 0\cdot v = \mathbf{0}$

5) $\boxed{\lambda\cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = \mathbf{0}\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall v\in V}$

Απόδειξη

Αν $\lambda = 0$, η συνεπαγωγή είναι αληθής.

Εστω $\left.\begin{matrix}\lambda\neq 0 \Rightarrow \exists\, \lambda^{-1}\in\mathbb{R} \\ \lambda\cdot v = \mathbf{0}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda\cdot v) = \lambda^{-1}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow (\lambda^{-1}\lambda)v = \mathbf{0} \Rightarrow 1\cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow v = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 0 \vee v = \mathbf{0}$.

6) $\boxed{(-\lambda)\cdot v = \lambda\cdot(-v) = -(\lambda\cdot v)\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall v\in V}$

Απόδειξη

Θα δείξω ότι $(-\lambda)v = -(\lambda\cdot v)$

Είναι $(-\lambda)\cdot v + (\lambda\cdot v) = [(-\lambda)+\lambda]\cdot v = 0\cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow (-\lambda)\cdot v,\ \lambda\cdot v$ συμμετρικά $\Rightarrow$

$\Rightarrow (-\lambda)\cdot v = -(\lambda\cdot v)$.

Ομοια, $\lambda(-v) + \lambda v = \lambda[(-v)+v] = \lambda\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda(-v), \lambda\cdot v$ συμμετρικα $\Rightarrow \lambda(-v) = -\lambda\cdot v$.

οπότε $(-\lambda)\cdot v = \lambda\cdot(-v) = -(\lambda\cdot v)$.

Πορίσματα: 1) $\forall v\in V$, $(-1)v = -v$

2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*, \forall v,u\in V$, $\lambda\cdot v = \lambda\cdot u \Rightarrow v = u$ (ν. διαγραφής συντελεστού)

3) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \forall v\in V^*$, $\lambda\cdot v = \mu\cdot v \Rightarrow \lambda = \mu$. (ν. διαγραφής διανύσματος)

- $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$.
- $(\lambda-\mu)u = \lambda u - \mu u$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}, \forall u,v\in V$.

ΥΠΟΧΩΡΟΣ ΕΝΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ενα υποσύνολο V_1 ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται διανυσματικός υπόχωρος ή απλά υπόχωρος του V, όταν το ίδιο το V_1 είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις του V (που περιορίζονται φυσικά στα στοιχεία του V_1).

Δηλαδή αν ~~Re~~ $(V,+,\cdot)$ διανυσματικός χώρος τότε: αν $V_1 \subseteq V$.

$$\boxed{V_1 \text{ υπόχωρος του } (V,+,\cdot) \Longleftrightarrow (V_1,+,\cdot) \text{ διανυσματικός χώρος.}}$$

- Είναι $(V_1,+,\cdot)$ δ.χ $\Rightarrow V_1 \neq \emptyset$.

▼ <u>ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΟΧΩΡΩΝ</u>

Θ_1 Το μη κενό υποσύνολο ενος δ.χ. V είναι διανυσματικός υπόχωρος αν και μόνο αν το V_1 είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V.

δηλαδη

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν } \emptyset \neq V_1 \subseteq V \text{ και } (V,+,\cdot) \text{ διανυσματικός χώρος τότε} \\ V_1 \text{ υπόχωρος του } (V,+,\cdot) \Longleftrightarrow \text{"+", "·" εσωτερικές στο } V_1\end{array}}$$

<u>Απόδειξη</u>

<u>Ευθυ</u>: V_1 υποχωρος του $(V,+,\cdot) \Rightarrow (V_1,+,\cdot)$ δ.χ. $\Rightarrow$ "+", "·" εσωτερικές στο V_1

<u>Αντίστροφο</u>: Εστω V_1 κλειστό ως προς "+", "·".

$$\cancel{\begin{array}{l}\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \\ \forall v,u \in V_1\end{array} \Rightarrow \begin{cases}\lambda(v+u) \in V_1 \\ (\lambda+\mu)v \in V_1 \\ \lambda(\mu v) \in V_1 \\ 1\cdot v \in V_1\end{cases} \Rightarrow}$$

$$\begin{array}{l}\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}. \\ \forall v,u \in V_1 \Rightarrow v,u \in V\end{array} \Bigg\} \xrightarrow[\text{δ.χ}]{V} \begin{cases}(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v \in V_1 & (1) \\ \lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v \in V_1 & (2) \\ \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \in V_1 & (3) \\ 1\cdot v = v \in V_1. & (4)\end{cases}$$

(διότι "+", "·" εσωτερικές στο V_1).
αρα ισχύουν τα αξιώματα της εξωτερικής πράξης

Θα δείξω ότι $(V,+)$ αβελιανή ομάδα.

$$\left.\begin{array}{l}\forall v\in V_1,\ -v = (-1)\cdot v \in V_1 \Rightarrow \forall v \in V_1,\ -v \in V_1 \\ \text{"+" εσωτερική στο } V_1 \\ V_1 \subseteq V,\ (V,+) \text{ ομάδα}\end{array}\right\} \Rightarrow V_1 \text{ υποομάδα της } (V,+) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (V_1,+) \text{ ομάδα} \\ \forall v,u \in V_1 \Rightarrow v,u \in V \underset{V \text{ ομαδα}}{\Rightarrow} v+u = u+v\end{array}\right\} \Rightarrow \left.(V_1,+) \text{ αβελιανή ομάδα} \atop (1),(2),(3),(4)\right\} \Rightarrow (V_1,+,\cdot) \text{ διανυσματικός χώρος.}$$

$\boxed{V_1 \text{ υπόχωρος του } \delta.\chi.(V,+,\cdot) \Longrightarrow \mathbf{0} \in V_1}$

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $\mathbf{0} = 0 \cdot v \in V_1 \;,\; \forall v \in V_1 \Longrightarrow \mathbf{0} \in V_1$

"$\cdot$" εσωτερική στο V_1 λόγω Θ_1.

Αντιθετοαντίστροφα ισχύει το παρακάτω κριτήριο για να δείχνω ότι ένα σύνολο <u>δεν</u> είναι υπόχωρος

- $\boxed{\mathbf{0} \notin V_1 \Longrightarrow V_1 \text{ όχι υπόχωρος του } \delta.\chi.\ (V,+,\cdot)}$

- Τα σύνολα $\{\mathbf{0}\}$, V είναι οι "στάνταρ" υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $(V,+,\cdot)$

Θ_2. $\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν } \emptyset \neq V_1 \subseteq V \text{ και } (V,+,\cdot)\ \delta.\chi. \text{ τότε} \\ V_1\ \delta.\text{υπόχωρος του } (V,+,\cdot) \Longleftrightarrow \forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v_1,v_2 \in V_1 : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1 \end{array}}$

<u>Απόδειξη</u>

<u>Ευθύ</u>: $V_1\ \delta.\text{υποχωρος του } (V,+,\cdot) \xrightarrow{\Theta_1} \text{"+", "}\cdot\text{" εσωτερικές στο } V_1 \Longrightarrow \left.\begin{cases} \lambda_1 v_1 \in V_1 \\ \lambda_2 v_2 \in V_1 \end{cases}\right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1 \;,\; \forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall v_1,v_2 \in V_1$

<u>Αντίστροφο</u>

Αν $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1$
$\forall v_1,v_2 \in V_1$

$\left.\begin{array}{l} \text{τότε για } \lambda_1=\lambda_2=1 \xrightarrow{\text{υπ}} v_1+v_2 \in V_1 \;,\; \forall v_1,v_2 \in V_1 \Longrightarrow \text{"+" εσωτ. στο } V_1 \\ \text{για } \lambda_2 = 0 \xrightarrow{\text{υπ}} \lambda_1 v_1 \in V_1 \;,\; \forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall v_1 \in V_1 \Longrightarrow \text{"}\cdot\text{" εσωτ. στο } V_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\Theta_1}$

$\Longrightarrow V_1 \text{ υπόχωρος του } \delta.\chi.\ (V,+,\cdot)$.

Θ_3. $\boxed{\text{Αν } V_1,V_2\ \delta.\text{υπόχωροι του } \delta.\chi.\ (V,+,\cdot) \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \text{ υποχωρος του } (V,+,\cdot)}$

<u>Απόδειξη</u>

$V_1,V_2\ \delta.\text{υποχ. του } (V,+,\cdot) \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{0} \in V_1 \wedge \mathbf{0} \in V_2 \Longrightarrow \mathbf{0} \in V_1 \cap V_2 \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \\ V_1 \subseteq V \wedge V_2 \subseteq V \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \subseteq V_1. \end{cases}$

Είναι $\underline{\underline{\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}}}$
$\underline{\underline{\forall v_1,v_2 \in V_1 \cap V_2}} \Longrightarrow \left.\begin{cases} v_1,v_2 \in V_1 \xrightarrow{\Theta_2} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1 \\ v_1,v_2 \in V_2 \xrightarrow{\Theta_2} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_2 \end{cases}\right\} \Longrightarrow \underline{\underline{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1 \cap V_2}}$

οπότε από το Θ.2 $V_1 \cap V_2\ \delta.\text{υπόχωρος του } \delta.\chi.\ (V,+,\cdot)$

Θ4. Αν $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ και $(V,+,\cdot)$ δ.χ. τότε το σύνολο
$V_k = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του $(V,+,\cdot)$.
δηλ.

$$\boxed{\left.\begin{matrix} v_1, v_2, \dots, v_k \in V \\ (V,+,\cdot)\ \delta.\chi \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_k = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \text{ υπόχωρος του } (V,+,\cdot)}$$

Απόδειξη

Αρκει να δείξω ότι "+","·" εσωτ. στο V_k. ($\mathbf{0} \in V_k \Rightarrow V_k \neq \emptyset$, $V_k \subseteq V$)

Εστω $v, u \in V_k \Rightarrow \begin{cases} v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}. \\ u = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{v+u = (\lambda_1+\mu_1)v_1 + (\lambda_2+\mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_k+\mu_k)v} \\ \lambda v = \lambda\lambda \end{cases}$

$\Rightarrow v+u = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k) + (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k) = (\lambda_1 v_1 + \mu_1 v_1) + (\lambda_2 v_2 + \mu_2 v_2) + \dots +$
$+ (\lambda_k v_k + \mu_k v_k) = (\lambda_1+\mu_1) v_1 + (\lambda_2+\mu_2) v_2 + \dots + (\lambda_k+\mu_k) v_k \in V_k$ διότι $(\lambda_1+\mu_1) \in \mathbb{R}$, $(\lambda_2+\mu_2) \in \mathbb{R}, \dots, (\lambda_k+\mu_k) \in \mathbb{R}$

Αρα "+" εσωτερική στο V_k. (1)

Εστω $\left.\begin{matrix} v, u \in V_k \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \Rightarrow \lambda v = \lambda(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k) =$

$= \lambda(\lambda_1 v_1) + \lambda(\lambda_2 v_2) + \dots + \lambda(\lambda_k v_k) = (\lambda\lambda_1) v_1 + (\lambda\lambda_2) v_2 + \dots + (\lambda\lambda_k) v_k \in V_k$
διότι $\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \dots, \lambda\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Αρα ~~"+" εσ~~ $\left.\begin{matrix} V_k \text{ κλειστό ως προς "·"} \\ V_k \text{ κλειστό ως προς "+"} \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\Theta_1} V_k$ δ.υπόχωρος του $(V,+,\cdot)$

//

Παράδειγμα: Δείξτε ότι το σύνολο $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = x_2\}$ είναι γνήσιος δ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
→ $V \neq \{\mathbf{0}\}$ και $V \neq \mathbb{R}^3$.

Λύση: $\left.\begin{matrix} \text{Είναι } \mathbf{0} = (0,0,0) \in V \text{ διότι } 0+0=0 \Rightarrow V \neq \emptyset \\ \text{Είναι και } (0,0,5) \notin V \text{ διότι } 0+5 \neq 0 \Rightarrow V \neq \mathbb{R}^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^3$.

άτροπος: Με το Θ1 "κλειστότητα".

$\forall v, u \in V \Rightarrow \left.\begin{cases} v = (x_1, y_1, z_1) : x_1 + z_1 = y_1 \\ u = (x_2, y_2, z_2) : x_2 + z_2 = y_2 \end{cases}\right\} \Rightarrow v+u = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in V$

διότι $(x_1+x_2) + (z_1+z_2) = (x_1+z_1) + (x_2+z_2) = y_1 + y_2$
αρα V κλειστό ως προς "+".

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v=(x_1,x_2,x_3)\in V \Rightarrow x_2=x_1+x_3 \Rightarrow \lambda x_2=\lambda(x_1+x_3) \Rightarrow \lambda x_2=\lambda x_1+\lambda x_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda v=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)\in V$, οπότε V κλειστό ως προς "$\cdot$".

$\left.\begin{array}{l} V \text{ κλειστό ως προς "·"} \\ V \text{ κλειστό ως προς "+"} \\ \emptyset \neq V \subset \mathbb{R}^3,\ \mathbb{R}^3 \text{ δ.χ.} \end{array}\right\} \Rightarrow V$ δ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

β τρόπος: Με το Θ_4 γράφω κάθε $v\in V$ ως γραμμικό συνδυασμό ~~δύο~~ μερικών σταθερών διανυσμάτων $v_1,v_2\in \mathbb{R}^3$, κτλ. αναλύωντας το v σε συνιστώσες.

Θέλει ιδιαίτερη προσοχή να κάνω τέτοια ανάλυση ώστε να βγαίνει από κάθε όρο κοινός παράγοντας.

(*) προσέχω να βγαίνει κ.π.

$\left.\begin{array}{l}\forall v\in V \Rightarrow v=(x_1,x_2,x_3) \\ \text{όπου } x_2=x_1+x_3\end{array}\right\} \Rightarrow v=(x_1,x_1+x_3,x_3) \overset{*}{=} (x_1,x_1,0)+(0,x_3,x_3)=$

$=x_1(1,1,0)+x_3(0,1,1)=x_1v_1+x_3v_2$ όπου $v_1=(1,1,0)\in$ ~~V διότι~~ $\mathbb{R}^3$

$: x_1,x_3\in\mathbb{R}$ $\quad v_2=(0,1,1)\in\mathbb{R}^3$

άρα ο V παράγεται από τα $v_1,v_2\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow \left(V=\{x_1v_1+x_2v_2 : x_1,x_2\in\mathbb{R}\}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow V$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

γ τρόπος. Με το Θ_2 (εφαρμογή) γράφω για κάθε $v,u\in V$ το $\lambda_1 v+\lambda_2 u$, $\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$ και δείχνω ότι $\lambda_1 v+\lambda_2 u\in V$.

$\forall v,u\in V \Rightarrow \left.\begin{cases} v=(x_1,x_2,x_3) : x_2=x_1+x_3 \\ u=(y_1,y_2,y_3) : y_2=y_1+y_3\end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=\lambda_1(x_1,x_2,x_3)+\lambda_2(y_1,y_2,y_3)=$

$=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)+(\lambda y_1,\lambda y_2,\lambda y_3)=(\lambda x_1+\lambda y_1,\ \lambda x_2+\lambda y_2,\ \lambda x_3+\lambda y_3)\in V$ διότι

$(\lambda x_1+\lambda y_1)+(\lambda x_3+\lambda y_3)=\lambda(x_1+x_3)+\lambda(y_1+y_3)=\lambda x_2+\lambda y_2$

άρα V δ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

παράδειγμα: Αν $v=(1,-1,2)\in\mathbb{R}^3$ και $u=(6,-2,0)\in\mathbb{R}^3$ δείξτε ότι το διάνυσμα $w=(-3,1,0)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα u,v.

Ο υπόχωρος V που παράγουν τα u και v είναι $V=\{\lambda u+\mu v : \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.

$w\in V \Leftrightarrow \exists\, \lambda,\mu\in\mathbb{R} : w=\lambda u+\mu v \Leftrightarrow (-3,1,0)=\lambda(1,-1,2)+\mu(6,-2,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3,1,0)=(\lambda+6\mu,\ -\lambda-2\mu,\ 2\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+6\mu=-3\\ -\lambda-2\mu=1\\ 2\lambda=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ \mu=-1/2\end{cases}$

οπότε $w = -\frac{1}{2}u = 0\cdot v + \frac{-1}{2}u \Rightarrow w \in V$.

▼ Γραμμική εξάρτηση

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_k$ $(k \geq 2)$ του διανυσματικού χώρου V λέγονται <u>γραμμικώς εξαρτημένα</u>, όταν ένα τουλάχιστον από αυτά ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα υπόλοιπα.

Διανύσματα που δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα.

• <u>Κριτήρια γραμμικής εξάρτησης-ανεξαρτησίας</u>

Θ_1. $\boxed{v_1, v_2, \dots, v_k \text{ γρ. εξαρτ.} \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq \overset{(0,0,\dots,0)}{\mathbf{0}} \text{ στο } \mathbb{R}^k : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}}$

<u>Απόδειξη</u>: Ευθύ: Αν $v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. εξαρτ. έστω $v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} \Rightarrow$ με $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underset{\neq 0}{\underbrace{(-1)}} v_k = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0,0,\dots,0)$ (π.χ. η $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, -1)$) $: \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$.

<u>Αντίστροφο</u>

Αν $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq (0,0,\dots,0) : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$, έστω $\lambda_k \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_k v_k = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_{k-1} v_{k-1} \Rightarrow v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_k \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. εξαρτημένα

Θ_2 $\boxed{v_1, v_2, \dots, v_k \text{ γρ. ανεξάρτητα} \Leftrightarrow \left(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0} \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = (0,0,\dots,0)\right)}$

Είναι το αντίθετο αντίστροφο του Θ_1.

• <u>Παρατηρήσεις</u>

1) $\lambda \cdot \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^* \overset{\Theta_1}{\Rightarrow} \mathbf{0}$ γρ. εξαρτημένο.

2) Αν $v \neq \mathbf{0}$ τότε $\lambda \cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ άρα v γρ. ανεξάρτητο.

● **Βασικές ιδιότητες γραμμικής εξάρτησης**

1) $\boxed{v_1, v_2, \dots, v_p \in V \text{ δ.χ. γρ. εξαρτ.} \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_k \in V \text{ γρ. εξαρτ.}}$

Απόδειξη

Εαν $v_1, v_2, \dots, v_p$ γρ. εξαρτ. $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδενικοί: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p + 0 \cdot v_{p+1} + \dots + 0 \cdot v_k = \mathbf{0} \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_k$ γρ. εξαρτ.

2) Αν k διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και οποιαδήποτε από αυτά είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.

Είναι το αντιθετοαντίστροφο της 1.

3) $v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. ανεξαρτ. , $v_1, v_2, \dots, v_k, u$ γρ. εξαρτ. $\Rightarrow$ $u \in$ υποχ. V_k που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$.

Αποδειξη

$v_1, v_2, \dots, v_k, u$ γρ. εξαρτ $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδεν: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} u = \mathbf{0}$ (1)

Θα δείξω ότι $\lambda_{k+1} \neq 0$. Εστω $\lambda_k = 0$,

(1) $\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \cancel{0 u}^{\,\mathbf{0}} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ όχι όλα μηδέν $\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. εξαρτ $\leftarrow$ Ατοπο $\rightarrow$ άρα $\lambda_{k+1} \neq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow u = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} v_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}} v_2 - \dots - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} v_k \Rightarrow u \in$ υποχ. V_k που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$.

● **Συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^v$.**

Θ1. $\boxed{v_1, v_2, \dots, v_v \in \mathbb{R}^v \text{ γρ. ανεξ} \Leftrightarrow |v_1\, v_2 \cdots v_v| \neq 0}$ (απόδειξη όχι θεωρία)

Απόδειξη: Εστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v \in \mathbb{R}: \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_v v_v = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1v}) + \lambda_2 (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2v}) + \dots + \lambda_v (x_{v1}, x_{v2}, \dots, x_{vv}) = (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11}\lambda_1 + x_{21}\lambda_2 + \dots + x_{v1}\lambda_v = 0 \\ x_{12}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{v2}\lambda_v = 0 \\ \dots \\ x_{1v}\lambda_1 + x_{2v}\lambda_2 + \dots + x_{vv}\lambda_v = 0 \end{cases} \quad (\Sigma).$$

$$|v_1 v_2 v_3 \cdots v_v| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{v1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{v2} \\ x_{13} & x_{23} & \cdots & x_{v3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1v} & x_{2v} & \cdots & x_{vv} \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

Το ομογενές (Σ) έχει ΜΜΛ την $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_1, v_2, \dots, v_v$ γρ. ανεξ.

Γενικά, αποδεικνύεται το

θ_2. $\left.\begin{array}{l} v_1, v_2, \ldots, v_p \text{ γρ.ανεξ.} \\ p \leq v \end{array}\right) \Longleftrightarrow \exists\ p\times p$ υποπίνακας A του $\Pi = [v_1 v_2 \cdots v_p]$: $D(A) \neq 0$.

Αντίθετο αντίστροφα έχουμε

θ_3 $v_1, v_2, \ldots, v_v \in \mathbb{R}^v$ γρ. εξαρτ. $\Longleftrightarrow |v_1 v_2 \cdots v_v| = 0$

θ_4 $\left.\begin{array}{l} v_1, v_2, \ldots, v_p \text{ γρ. εξαρτ.} \\ p \leq v \end{array}\right) \Longleftrightarrow \forall\ p\times p$ υποπίνακα A του $\Pi = [v_1 v_2 \cdots v_p]$, $D(A) = 0$

▼ Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Το σύνολο $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\mu\}$ λέγεται βάση του διανυσματικού χώρου V όταν τα $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$

- είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V και
- παράγουν το χώρο V

Συμβολικά:

$$\left.\begin{array}{l} B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\mu\} \subset V \text{ βάση} \\ \text{του δ.χ. } V \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_1, v_2, \ldots, v_\mu \text{ γρ. ανεξ.} \\ V = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\mu v_\mu : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu \in \mathbb{R}\} \end{array}\right.$$

~~$\theta.\ \forall v\in$~~

θ. $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\mu\}$ βάση $\Longrightarrow \forall v \in V, \exists$ μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu \in \mathbb{R}$: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\mu v_\mu$

Απόδειξη

$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\mu\}$ βάση του $V \Longrightarrow$ τα $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ παράγουν τον $V \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \forall v \in V, \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu \in \mathbb{R} : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\mu v_\mu$.

Θα δείξω ότι τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ είναι μοναδικά.

Έστω $\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_\mu \in \mathbb{R} : v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_\mu v_\mu \\ \text{Είναι και } v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\mu v_\mu \end{array}\right) \Longrightarrow x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_\mu v_\mu = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\mu v$

$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow (x_1 - \lambda_1) v_1 + (x_2 - \lambda_2) v_2 + \cdots + (x_\mu - \lambda_\mu) v_\mu = \mathbf{0} \\ B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\mu\} \text{ βάση} \Longrightarrow v_1, v_2, \ldots, v_\mu \text{ γρ. ανεξ} \end{array}\right) \Longrightarrow x_1 - \lambda_1 = x_2 - \lambda_2 = \cdots = x_\mu - \lambda_\mu = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1 = \lambda_1 \wedge x_2 = \lambda_2 \wedge \cdots \wedge x_\mu = \lambda_\mu \Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ μοναδικά.

Η μ-άδα των συντελεστών αυτών συμβολίζεται συνήθως ως $(x_1, x_2, \dots, x_\mu)$ και λέγεται μ-άδα των συντεταγμένων του διανύσματος $v \in V$ ως προς την βάση B του V.

▼ **Κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$**

Θ. $\boxed{\text{Τα διανύσματα } e_1=(1,0,\dots,0), e_2=(0,1,\dots,0), \dots, e_\nu=(0,0,\dots,1) \text{ του χώρου } \mathbb{R}^\nu \text{ είναι μια βάση του } \mathbb{R}^\nu}$

Απόδειξη

Είναι $|e_1 e_2 \cdots e_\nu| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow e_1, e_2, \dots, e_\nu$ γρ. ανεξ. (1)

Είναι και $\forall v = (x_1, x_2, \dots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$, $v = (x_1, x_2, \dots, x_\nu) =$

$= (x_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + (0, 0, x_3, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, x_\nu) =$

$= x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + x_3(0, 0, 1, \dots, 0) + \dots + x_\nu(0, 0, 0, \dots, 1) =$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_\nu e_\nu$ $: x_1, x_2, \dots, x_\nu \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ Τα $e_1, e_2, \dots, e_\nu$ παράγουν τον χώρο $\mathbb{R}^\nu$

$\xrightarrow{(1)} e_1, e_2, \dots, e_\nu$ γρ. ανεξ. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow B = \{e_1, e_2, \dots, e_\nu\}$ βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

Η βάση αυτή λέγεται κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

▼ **Διάσταση διανυσματικού χώρου**

~~Θ. Ένας δ.χ.~~

Θ$_1$. $\boxed{B \text{ βάση του δ.χ. } V \Longrightarrow \exists \infty \text{ βάσεις } B_\lambda \text{ του } V}$

Απόδειξη

Έστω $B = \{v_1, v_2, \dots, v_\kappa\}$ μία βάση του $V \Longrightarrow v_1, v_2, \dots, v_\kappa$ γρ. ανεξάρτητα (1).

▶ Παίρνω $B_\lambda = \{\lambda v_1, v_2, \dots, v_\kappa\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Έστω $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\kappa \in \mathbb{R} : \mu_1(\lambda v_1) + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_\kappa v_\kappa = \mathbf{0} \Longrightarrow (\lambda\mu_1)v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_\kappa v_\kappa = \mathbf{0} \Longrightarrow$

$\xrightarrow{(1)} \lambda\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\kappa = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\Longrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\kappa = 0$

άρα $\lambda v_1, v_2, \dots, v_\kappa$

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Θ1. $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } B=\{e_1,e_2,\dots,e_k\} \text{ βάση του } V\\ p>k\end{array}\right\} \Rightarrow \forall v_1,v_2,\dots,v_p\in V: v_1,v_2,\dots,v_p \text{ γρ. εξαρτ.}}$

Απόδειξη.

$\left.\begin{array}{l}B \text{ βάση του } V \Rightarrow \text{τα } e_1,e_2,\dots,e_k \text{ παράγουν τον } V\\ v_1,v_2,\dots,v_p\in V\end{array}\right\} \Rightarrow$ Τα $v_1,v_2,\dots,v_p$ γράφονται ως:

$\left\{\begin{array}{l} v_1 = x_{11}e_1+x_{12}e_2+\dots+x_{1k}e_k\\ v_2 = x_{21}e_1+x_{22}e_2+\dots+x_{2k}e_k\\ v_p = x_{p1}e_1+x_{p2}e_2+\dots+x_{pk}e_k\end{array}\right.$ (Σ_1). Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R}: \lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_pv_p=\mathbf{0} \overset{(\Sigma_1)}{\Longleftrightarrow}$

όχι διπλό απαραίτητα

$\overset{(\Sigma_1)}{\Longleftrightarrow} \lambda_1(x_{11}e_1+x_{12}e_2+\dots+x_{1k}e_k)+\lambda_2(x_{21}e_1+x_{22}e_2+\dots+x_{2k}e_k)+\dots+\lambda_p(x_{p1}e_1+x_{p2}e_2+\dots+x_{pk}e_k)=\mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow(\lambda_1x_{11}+\lambda_2x_{21}+\dots+\lambda_px_{p1})e_1+(\lambda_1x_{12}+\lambda_2x_{22}+\dots+\lambda_px_{p2})e_2+\dots+(\lambda_1x_{1k}+\lambda_2x_{2k}+\dots+\lambda_px_{pk})e_k=\mathbf{0}\\ B \text{ βάση του } V\Rightarrow e_1,e_2,\dots,e_k \text{ γρ. ανεξ.}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_{11}\lambda_1+x_{21}\lambda_2+\dots+x_{p1}\lambda_p=0\\ x_{12}\lambda_1+x_{22}\lambda_2+\dots+x_{p2}\lambda_p=0\\ x_{1k}\lambda_1+x_{2k}\lambda_2+\dots+x_{pk}\lambda_p=0\end{array}\right.$ (Σ_2)

$\left.\begin{array}{l}\text{Είναι } p>k\Rightarrow \text{Το } (\Sigma_2) \text{ είναι αδύνατο ή αόριστο.}\\ (\Sigma_2) \text{ ομογενές}\Rightarrow(\Sigma_2) \text{ όχι αδύνατο}\end{array}\right\}\Rightarrow (\Sigma_2)$ αόριστο $\rightarrow$ Το (Σ_2) έχει και μη μηδενικές λύσεις $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p \in\mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν: $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_pv_p=\mathbf{0}\Rightarrow v_1,v_2,\dots,v_p$ γρ. εξαρτ.

Θ2 $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } B=\{e_1,e_2,\dots,e_k\} \text{ βάση του } V\\ B'=\{e_1',e_2',\dots,e_p'\} \text{ βάση του } V\end{array}\right\}\Rightarrow k=p}$

Απόδειξη

~~Έστω $B=\{e_1,e_2,$~~

$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } k>p\\ B'=\{e_1',e_2',\dots,e_p'\} \text{ βάση του } V\end{array}\right\}\Rightarrow e_1,e_2,\dots,e_k$ γρ. εξαρτ. $\leftarrow$ Άτοπο διότι $B=\{e_1,e_2,\dots,e_k\}$ βάση του V.

$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } k<p.\\ B=\{e_1,e_2,\dots,e_k\} \text{ βάση του } V\end{array}\right\}\Rightarrow e_1',e_2',\dots,e_p'$ γρ. εξαρτ. $\leftarrow$ Άτοπο διότι $B'=\{e_1',e_2',\dots,e_p'\}$ βάση του V

Άρα $k=p$.

$\hookrightarrow$ Ο κοινός πληθάριθμος όλων των βάσεων ενός δ.χ. λέγεται <u>διάσταση $\dim V$</u> του χώρου V

- $\boxed{\dim \mathbb{R}^\nu=\nu}$
- $\boxed{\dim \Pi_{\nu\times\mu}=\nu\cdot\mu}$

Διάσταση υπόχωρου;

- $\boxed{\rho > \dim V \Rightarrow \forall v_1, v_2, \dots, v_\rho \in V : v_1, v_2, \dots, v_\rho \text{ γρ. εξαρτ.}}$
- $\boxed{\exists v_1, v_2, \dots, v_\rho \in V : v_1, v_2, \dots, v_\rho \text{ γρ. ανεξ.} \Rightarrow \rho \leq \dim V}$

Θ3. $\boxed{\left.\begin{array}{l} \dim V = \kappa \\ v_1, v_2, \dots, v_\kappa \in V \text{ γρ. ανεξ.} \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{v_1, v_2, \dots, v_\kappa\} \text{ βάση του δ.χ. } V}$

<u>Απόδειξη (εντός ύλης)</u>

Εστω $u \in V$.

$\left.\begin{array}{l} \dim V = \kappa \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_\kappa, u \text{ γρ. εξαρτ.} \\ v_1, v_2, \dots, v_\kappa \text{ γρ. ανεξαρτ.} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Το u ανήκει στον υπόχωρο V_κ που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$, $\forall u \in V \Rightarrow V \subseteq V_\kappa$

Ο V_κ παράγεται από τα $v_1, v_2, \dots, v_\kappa \in V \Rightarrow V_\kappa$ υπόχωρος του $V \Rightarrow V_\kappa \subseteq V$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_\kappa = V \Rightarrow$ Τα $\left.\begin{array}{l} v_1, v_2, \dots, v_\kappa \text{ παράγουν τον } V \\ v_1, v_2, \dots, v_\kappa \in V \text{ γρ. ανεξαρτ.} \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{v_1, v_2, \dots, v_\kappa\}$ βάση του V

Θ4 $\boxed{\left.\begin{array}{l} \dim V = \kappa \\ v_1, v_2, \dots, v_\kappa \in V^* \text{ παράγουν τον } V \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{v_1, v_2, \dots, v_\kappa\} \text{ βάση του δ.χ. } V}$

<u>Απόδειξη</u> <u>(έκτος ύλης)</u>

Αρκει $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$ γρ. ανεξ. Εστω $v_1, v_2, \dots, v_\kappa$ γρ. εξαρτ.

- Παίρνω το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(B)$ του $B = \{v_1, v_2, \dots, v_\kappa\}$.

$\left.\begin{array}{l} v_1 \in V^* \Rightarrow v_1 \text{ γρ. ανεξ.} \\ \{v_1\} \in \mathcal{P}(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{P}(B)$: τα στοιχεία του B_1 να είναι γρ. ανεξ.

- Παιρνω το $A \subset \mathcal{P}(B)$ με $A = \{B_1 \in \mathcal{P}(B)$: τα στοιχεία του B_1 να είναι γρ. ανεξ.$\}$.

Δείχθηκε ότι $A \neq \emptyset$.

- Εστω "ένα" $B' \in A$ με τον μεγαλύτερο πληθάριθμο έστω ρ $\rho < \kappa$ (Μπορεί να υπάρχουν και άλλα σύνολα στο A με πληθάριθμο ρ).

<u>Δίχως βλάβη της γενικότητας έστω $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_\rho\}$ (1)</u>

~~(1) $\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_\rho$ γρ. ανεξ.~~
~~$\forall u \in \{v_{\rho+1}, \dots, v_\kappa\}$, $v_1, v_2, \dots, v_\rho, u$ γρ. εξαρτ.~~
~~(διότι ρ ο μέγιστος πληθάριθμος ...)~~ ~~$\Rightarrow \forall u \in \{v_{\rho+1}, \dots, v_\kappa\}$: Το u ανήκει στον υπόχωρο $V_\rho \subseteq V$ που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_\rho$~~

βλ. επ. Θ ~~$\Rightarrow$ Ο υποχώρος V_ρ που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_\rho$ έχει $\dim V_\rho = \rho$.~~

$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_\rho \text{ γρ. ανεξ.} \\ \forall u \in \{v_{\rho+1}, \dots, v_\kappa\} : v_1, v_2, \dots, v_\rho, u \text{ γρ. εξαρτ.} \\ \text{(διότι } \rho \text{ ο μέγιστος πληθάριθμος)} \\ v_1, v_2, \dots, v_\kappa \text{ παράγουν τον } V \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{βλ. επόμενο Θ.}]{*} \dim V = \rho < \kappa \leftarrow$ Άτοπο

Άρα $\left.\begin{array}{l} v_1, v_2, \dots, v_\kappa \text{ γρ. ανεξ.} \\ v_1, v_2, \dots, v_\kappa \text{ παράγουν τον } V \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{v_1, v_2, \dots, v_\kappa\}$ βάση του V.

• Για να δείξω ότι B είναι βάση, πρέπει να δείξω τον ορισμό και ότι $B \subseteq V$
Αν ξέρω όμως την διάσταση, τότε αρκεί να δείξω ένα άπο τα στοιχεία του ορισμού σύμφωνα με τα Θ3 – Θ4.

▼ Διάσταση υπόχωρου που παράγεται άπο K διανύσματα

Θ. Εστω V_K υποχωρος του V που παράγεται άπο τα $v_1, v_2, \dots, v_K \in V$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} v_1, v_2, \dots, v_p \text{ γρ. ανεξ. } (p<k) \\ \forall u \in \{v_{p+1}, \dots, v_K\}: v_1, v_2, \dots, v_p, u \text{ γρ. εξαρτ.} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \text{ βάση του } V_K \\ \dim V_K = p \end{array}\right.}$$

Απόδειξη (εκτός ύλης)

▸ Εστω V_p ο υπόχωρος ~~των~~ που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_p$
Αρκει $V_p \subseteq V_K$ και $V_K \subseteq V_p$.

$\forall x \in V_p, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}: x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p + 0 v_{p+1} + \dots + 0 v_K$
$\Rightarrow x \in V_K$ άρα $V_p \subseteq V_K$ (1).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Εξ' υποθέσεως } \forall u \in \{v_{p+1}, \dots, v_K\}: v_1, v_2, \dots, v_p, u \text{ γρ. εξαρτ.} \\ v_1, v_2, \dots, v_p \text{ γρ. ανεξ.} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall u \in \{v_{p+1}, \dots, v_K\}, u \in V_p \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_K \in V_p. \\ V_p \text{ υποχωρος} \Rightarrow V_p \text{ δ.χ.} \Rightarrow V_p \text{ κλειστο ως προς "+", "·"} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K \in \mathbb{R}: \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_K v_K \in V_p \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_K \subseteq V_p \\ \stackrel{(1)}{\Rightarrow} V_p \subseteq V_K \end{array}\right\} \Rightarrow V_p = V_K. \quad (2).$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1, v_2, \dots, v_p \text{ γρ. ανεξ.} \\ v_1, v_2, \dots, v_p \text{ παράγουν τον } V_p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \text{ βάση του } V_p \\ V_p = V_K \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \text{ βάση του } V_K}$ $\Rightarrow$ $\underline{\dim V_K = p}$

• Ο υπόχωρος $\{0\}$ ενος δ.χ. V είναι ο μοναδικός δ.χ. που "δεν έχει βάση", διότι το στοιχείο 0 παράγει το σύνολο $\{0\}$, άλλα είναι διάνυσμα γραμμικώς εξαρτημένο.
Η διάσταση το $\{0\}$ είναι $\boxed{\dim\{0\} = \cancel{0}1}$

Αντίθετα.

Θ. $\boxed{\text{Αν } \dim V \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{Ο δ.χ. } V \text{ έχει } \infty \text{ βάσεις}}$

Απόδειξη

$\dim V \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists\, \kappa \in \mathbb{N}^* : \dim V = \kappa \Rightarrow \exists\, B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\kappa\} \subset V$ βάση του $V \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_\kappa$ γρ. ανεξ. (1).

▶ Παίρνω $B\lambda = \{\lambda v_1, v_2, \ldots, v_\kappa\}$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Έστω $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\kappa \in \mathbb{R}$: $\left.\begin{array}{l} \mu_1(\lambda v_1) + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_\kappa v_\kappa = 0 \Rightarrow (\lambda\mu_1) v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_\kappa v_\kappa = 0 \\ \xrightarrow{(1)} v_1, v_2, \ldots, v_\kappa \text{ γρ. ανεξ.} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lambda\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_\kappa = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_\kappa = 0$ οπότε

$\left.\begin{array}{l} \lambda v_1, v_2, \ldots, v_\kappa \text{ γραμ. ανεξ.} \\ \dim V = \kappa \end{array}\right\} \Rightarrow B\lambda$ βάση του V, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$.

Άρα το V έχει άπειρες βάσεις (έστω τις $B\lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}^*$).

▼ Άλλες θεωρητικές ασκήσεις

~~Π_1) Αν B βάση $V_1 \Rightarrow B \subset V$~~

Π_1) Αν $\boxed{\left.\begin{array}{l} B \text{ βάση } V_1 \text{ δ.χ.} \\ B \text{ βάση } V_2 \text{ δ.χ.} \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2}$ (Θεωρία – στις ασκήσεις όχι απόδειξη).

Απόδειξη

Έστω $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\kappa\}$.

B βάση $V_1 \Rightarrow$ Τα $v_1, v_2, \ldots, v_\kappa$ παράγουν τον $V_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall v \in V_1, \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa \in \mathbb{R}: v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa \in V_2$

$\left(\left.\begin{array}{l} \text{διότι } B \text{ βάση } V_2 \Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_\kappa \in V_2 \\ V_2 \text{ δ.χ} \Rightarrow V_2 \text{ κλειστό ως προς "+", "·"} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_\kappa v_\kappa \in V_2 \right)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow V_1 \subseteq V_2. \\ \text{Όμοια } V_2 \subseteq V_1 \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2.$

Π_2) $\boxed{\begin{array}{l} \text{Έστω } V_1, V_2 \text{ δ. υπόχωροι του δ.χ. } V. \\ \left.\begin{array}{l} \dim V_1 = \dim V_2 \\ V_1 \subseteq V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2 \end{array}}$

Απόδειξη

Αν $\left.\begin{array}{l} \kappa = \dim V_1 \Rightarrow \exists\, B = \{v_1, v_2, \ldots, v_\kappa\} \subseteq V_1 \text{ βάση του } V_1 \\ V_1 \subseteq V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B \subseteq V_2$

Θα δείξω ότι B βάση και του V_2

B βάση του $V_1 \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. ανεξ.
$\dim V_2 = \dim V_1 = k$ $\Big\} \Rightarrow B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ βάση του V_2
B βάση του V_1 $\Big\} \Rightarrow V_1 = V_2$.

Π3) $\boxed{\text{Εαν } v_1, v_2, \dots, v_k \text{ γρ. ανεξάρτητα και παράγουν τον δ.χ. } V \text{ τότε } v \in V \Leftrightarrow v, v_1, v_2, \dots, v_k \text{ γρ. εξαρτημένο.}}$

<u>Απόδειξη</u>

<u>Ευθύ</u>: $v \in V$
$v_1, v_2, \dots, v_k$ παράγουν το V $\Big\} \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}: v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \cdot v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \mathbf{0} \Rightarrow v, v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. εξαρτ.

<u>Αντίστροφο.</u> $v, v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. εξαρτ.
$v_1, v_2, \dots, v_k$ γρ. ανεξ. $\Big\} \Rightarrow$ Το v ανήκει στον χώρο που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_k \Rightarrow$

$\Rightarrow v \in V$

- Οι ακολουθίες της μορφής $\alpha x_{\nu+2} + \beta x_{\nu+1} + \gamma x_\nu = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι υπόχωρος του ~~F~~ $F_{\mathbb{N}}$ και μία βάση ~~αφ~~ αυτό είναι οι ακολουθίες ρ_1^ν, ρ_2^ν όπου ρ_1, ρ_2 αι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

- Αν $v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$ τότε ο υπόχωρος V_{k+1} που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ συμπίπτει με τον υπόχωρο V_k που παράγουν τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ (αφού $v_{k+1} \in V_k$).

- Πρίν δείξω ότι V_1 υποχωρος $V = $ δ.χ. πρέπει να δείξω ότι
  $V_1 \subseteq V$ και ότι $\mathbf{0} \in V_1 \Rightarrow V_1 \neq \emptyset$.
  Αν $\mathbf{0} \notin V_1 \Rightarrow V_1$ όχι υπόχωρος V.

- Για να δείξω ότι B βάση V, απαραίτητη προυπόθεση είναι η $B \subseteq V$.
- Το $\{\mathbf{0}\}$ είναι δ.χ. δίχως βάση (διότι $\mathbf{0}$ γρ. εξαρτ.) άλλα έχει $\dim\{\mathbf{0}\} = 1$

• **Βασικές προτάσεις** •

① Έστω V_1, V_2 υπόχωροι του δ.χ. V.
$$\left.\begin{array}{l}\dim V_1 = \dim V_2\\ V_1 \subseteq V_2\end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2$$

Απόδειξη

Θέτω $\left.\begin{array}{l}\kappa = \dim V_1 \Rightarrow \exists\, B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V_1 \text{ βάση του } V_1\\ V_1 \subseteq V_2\end{array}\right\} \Rightarrow B \subseteq V_2$ (1).

Θα δείξω ότι B βάση του V_2

$\left.\begin{array}{l}B \text{ βάση } V_1 \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k \text{ γρ. ανεξ.}\\ \dim V_2 = \dim V_1 = k\end{array}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l}B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \text{ βάση } V_2\\ B \text{ βάση } V_1\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = V_2$

• **Παραδείγματα** •

① Έστω τα διανύσματα $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-1,4,5)$, $v_3 = (-5,2,1)$, $v_4 = (9,12,19) \in \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι ο υπόχωρος που παράγουν τα v_1, v_2, $V_{1,2}$ ταυτίζεται με αυτόν που παράγουν τα v_3, v_4, τον $V_{3,4}$.

Αρκεί $V_{1,2} \subseteq V_{3,4} \wedge V_{3,4} \subseteq V_{1,2}$ (υπάρχει και άλλος τρόπος)

• $V_{1,2} \subseteq V_{3,4}$

$v \in V_{1,2} \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(-1,4,5) = (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, 3\lambda_1 + 5\lambda_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |v_3\, v_4\, v| = \begin{vmatrix} -5 & 9 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2 & 12 & 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 1 & 19 & 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (-2)\ (+5) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 104 & 16\lambda_1 + 24\lambda_2 \\ 0 & -26 & -4\lambda_1 - 6\lambda_2 \\ 1 & 19 & 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{vmatrix} \to 4 =$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 0 & 26 & 4\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ 0 & -26 & -4\lambda_1 - 6\lambda_2 \\ 1 & 19 & 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: v_3, v_4, v \text{ γρ. εξαρτ.}$$

Εξετάζω την εξάρτηση των v_3, v_4.

$A = [v_3\, v_4] = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 2 & 12 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$. Ο 2×2 υποπίνακας $\Pi = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$ το A έχει $D(\Pi) = -60 - 18 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_3, v_4 \text{ γρ. ανεξάρτητα} \\ v_3, v_4, v \text{ γρ. εξαρτημένα}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Το v ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $v_3, v_4 \Rightarrow v \in V_{3,4}$, $\forall\, v \in V_{1,2} \Rightarrow V_{1,2} \subseteq V_{3,4}$.

• $V_{3,4} \subseteq V_{1,2}$

$\forall v \in V_{3,4} \Rightarrow \exists \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}: v = \lambda_1 v_3 + \lambda_2 v_4 = \lambda_1(-5,2,1) + \lambda_2(9,12,19) =$

$= (-5\lambda_1+9\lambda_2,\ 2\lambda_1+12\lambda_2,\ \lambda_1+19\lambda_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |v_1 v_2 v| = \begin{vmatrix}1&-1&-5\lambda_1+9\lambda_2\\2&4&2\lambda_1+12\lambda_2\\3&5&\lambda_1+19\lambda_2\end{vmatrix} \begin{matrix}(-2)\ (-3)\end{matrix} = \begin{vmatrix}1&-1&-5\lambda_1+9\lambda_2\\0&6&12\lambda_1-6\lambda_2\\0&8&16\lambda_1-8\lambda_2\end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot 8 \begin{vmatrix}1&-1&-5\lambda_1+9\lambda_2\\0&1&2\lambda_1-\lambda_2\\0&1&2\lambda_1-\lambda_2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow v_1,v_2,v \text{ γρ.εξαρτημένα.}$$

εξετάζω την εξάρτηση των v_1,v_2

$A=[v_1v_2] = \begin{bmatrix}1&-1\\2&4\\3&5\end{bmatrix}$. Ο 2x2 υποπίνακας $\Pi = \begin{bmatrix}1&-1\\3&5\end{bmatrix}$ του A έχει $D(\Pi)=5+3=8\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ v_1,v_2 γρ.ανεξάρτητα, v,v_1,v_2 γρ.εξαρτημένα $\Rightarrow v\in V_{1,2},\ \forall v \in V_{3,4} \Rightarrow V_{3,4}\subseteq V_{1,2}$, είναι και $V_{1,2}\subseteq V_{3,4}$ $\Rightarrow V_{1,2}=V_{3,4}$.

(2) Δείξτε ότι το σύνολο V των λύσεων του συστήματος

$\begin{cases}3x+y-4z+5w=0\\4x-y+z-10w=0\end{cases}$ όπου $x,y,z,w\in\mathbb{R}$ είναι δ.χ. Να βρεθεί η $\dim V$.

$$V\subseteq \mathbb{R}^4$$

Αρκεί V υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$. (Σ) ομογενές $\Rightarrow \mathbf{0}=(0,0,0,0)$ λύση $\Rightarrow \mathbf{0}\in V \Rightarrow V\neq\emptyset$

•1 Βρίσκω την μορφή του V

$$\begin{cases}3x+y-4z+5w=0\\4x-y+z-10w=0\end{cases} \Leftrightarrow M=\left[\begin{array}{cccc|c}3&1&-4&5&0\\4&-1&1&-10&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}3&1&-4&5&0\\7&0&-3&-5&0\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}10&1&-7&0&0\\7&0&-3&-5&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}10&1&-7&0&0\\-\frac{7}{5}&0&\frac{3}{5}&1&0\end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases}10x+y-7z=0\\-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}z+w=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-10x+7z\\w=\frac{7}{5}x-\frac{3}{5}z\end{cases} : x,z\in\mathbb{R}$ Άρα το σύνολο λύσεων V είναι $V=\{(x,-10x+7z,z,\frac{7}{5}x-\frac{3}{5}z) : x,z\in\mathbb{R}\}$.

•2 V υπόχωρος

$\forall v\in V \Rightarrow v=(x,-10x+7z,\frac{7}{5}x-\frac{3}{5}z)=(x,-10x,\frac{7}{5}x)+(0,7z,-\frac{3}{5}z)=$

$=x(1,-10,\frac{7}{5})+z(0,7,-\frac{3}{5})=xv_1+zv_2 : x,z\in\mathbb{R} \Rightarrow$ όλα τα στοιχεία του V είναι όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των $v_1,v_2\in\mathbb{R}$

•$_2$ V υπόχωρος $\mathbb{R}^4$.

$\forall v \in V \Rightarrow v = (x, -10x+7z, z, \frac{7}{5}x - \frac{3}{5}z) = (x, -10x, 0, \frac{7}{5}x) + (0, 7z, z, -\frac{3}{5}z) =$
$= \underbrace{x(1,-10,0,\frac{7}{5}) + z(0,7,1,-\frac{3}{5})}_{=x v_1 + z v_2} : x, z \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των $\underset{\in \mathbb{R}^4}{v_1, v_2}$ είναι στοιχεία του V και μόνο αυτοί $\Rightarrow$ V υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$
(Τα v_1, v_2 παράγουν τον V).

•$_3$ <u>Βάση-διάσταση</u>

Εξετάζω την εξάρτηση των v_1, v_2.

$$A = [v_1 \; v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 7 \\ 0 & 1 \\ \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Ο 2x2 υποπίνακας $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$ του A έχει $D(B) = 7 \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2$ γρ. ανεξ.
Τα v_1, v_2 παράγουν τον V

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ βάση $V \Rightarrow \dim V = 2$.

③ Εστω V ο χώρος που παράγουν τα
$v_1 = (1,2,0,3)$, $v_2 = (2,0,3,1)$, $v_3 = (-1,2,-3,2)$, $v_4 = (3,-2,6,-1) \in \mathbb{R}^4$.
i) Να βρεθεί το $\dim V$
ii) Η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $v = (x,y,z,w) \in V$.

i)
$$|v_1 v_2 v_3 v_4| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ γρ. εξαρτημένα $\Rightarrow$ λιγότερα από 4 διανύσματα παράγουν του V.
Εστω τα v_1, v_2, v_3.

$$A = [v_1 \; v_2 \; v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο 3x3 υποπίνακας $A_{1,2,3}$ του A έχει $D(A_{1,2,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Ο 3x3 υποπίνακας $A_{1,2,4}$ του A έχει |

$$D(A_{1,2,4}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Ο 3x3 υποπίνακας $A_{2,3,4}$ του A έχει

$$D(A_{2,3,4}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Άρα όλοι οι 3x3 υποπίνακές του $A=[v_1 v_2 v_3]$ έχουν ορίζουσα μηδέν $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ γρ. εξαρτημένα $\Rightarrow$ ο V παράγεται και από λιγότερα από ~~τρία~~ 3 διανύσματα.

Έστω τα v_1, v_2 ~~εξετάζω~~ τα $\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}$

$$A = [v_1 v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \\ 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο 2x2 υποπίνακας $A_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ του A έχει

$D(A_{1,2}) = 1\cdot 0 - 2\cdot 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow$ v_1, v_2 γρ. ανεξάρτητα

~~v_1, v_2, v_3 γρ. εξαρτημένα~~

► Πρέπει να εξετάσω και την εξάρτηση των v_1, v_2, v_4.

$$A = [v_1 v_2 v_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ο 3x3 υποπίνακας $A_{1,2,3}$ του A έχει

$$D(A_{1,2,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Ο 3x3 υποπίνακας $A_{1,2,4}$ του A έχει

$$D(A_{1,2,4}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ο 3x3 υποπίνακας $A_{2,3,4}$ του A έχει

$$D(A_{2,3,4}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Αρα όλοι οι 3x3 υποπίνακες του A έχουν ορίζουσα μηδεν $\Longrightarrow v_1, v_2, v_4$ γρ. εξαρτημένα.

Εποτ,

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τα } v_1,v_2,v_3,v_4 \text{ παράγουν τον } V\\ v_1,v_2 \text{ γρ. ανεξάρτητα}\\ v_1,v_2,v_3 \text{ γρ. εξάρτημένα}\\ v_1,v_2,v_4 \text{ γρ. εξαρτημένα}\end{array}\right\} \Longrightarrow \{v_1,v_2\} \text{ βάση } V \Longrightarrow \dim V = 2.$$

ii) $v=(x,y,z,w)\in V \Longleftrightarrow \exists\, \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R} : v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x,y,z,w)=\lambda_1(1,2,0,3)+\lambda_2(2,0,3,1) \Longleftrightarrow (x,y,z,w)=(\lambda_1+2\lambda_2,\, 2\lambda_1,\, 3\lambda_2,\, 3\lambda_1+\lambda_2)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=x\\ 2\lambda_1=y\\ 3\lambda_2=z\\ 3\lambda_1+\lambda_2=w\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=x.\\ \lambda_1=\frac{y}{2}\\ \lambda_2=\frac{z}{3}\\ 3\lambda_1+\lambda_2=w\end{cases} \quad (\Sigma).$$

Το (Σ) είναι συμβιβαστό $\Longleftrightarrow$ Για $\lambda_1=\frac{y}{2}$, $\lambda_2=\frac{z}{3}$ ισχύουν $\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=x\\ 3\lambda_1+\lambda_2=w\end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \text{Πρέπει } \begin{cases}\frac{y}{2}+2\cdot\frac{z}{3}=x\\ 3\cdot\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=w\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}3y+4z=x\\ 9y+2z=w\end{cases} \Longrightarrow \dots$$

οπότε $v=(x,y,z,w)\in V \Longleftrightarrow \begin{cases}3y+4z=x\\ 9y+2z=w.\end{cases}$

④ Δείξτε ότι τα διανύσματα

$v_1=(1,2,-1,-2)$, $v_2=(2,3,0,-1)$, $v_3=(1,3,-1,0)$, $v_4=(1,2,1,4)$ αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^4$. Βρείτε τις συντεταγμένες του $x=(7,14,-1,2)$ ως προς την βάση $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

i)

$$|v_1 v_2 v_3 v_4| = \begin{vmatrix}1&2&1&1\\2&3&3&2\\-1&0&-1&1\\-2&-1&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&2&2&1\\4&3&5&2\\0&0&0&1\\2&-1&4&4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}2&2&2\\4&3&5\\2&-1&4\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}2&0&0\\4&-1&1\\2&-3&2\end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\-3&2\end{vmatrix} = -2(-2+3) = -2 \neq 0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}v_1,v_2,v_3,v_4\in\mathbb{R}^4 \text{ γρ. ανεξάρτητα}\\ \dim \mathbb{R}^4 = 4\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ βάση $\mathbb{R}^4$.

ii) Εστω $x(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ως προς $\{v_1,v_2,v_3,v_4\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 \Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow (7,14,-1,2) = x_1(1,2,-1,-2) + x_2(2,3,0,-1) + x_3(1,3,-1,0) + x_4(1,2,1,4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1+2x_2+x_3+x_4,\ 2x_1+3x_2+3x_3+2x_4,\ -x_1+0x_2-x_3+x_4,\ -2x_1-x_2+0x_3+4x_4) = (7,14,-1,2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=7 \\ 2x_1+3x_2+3x_3+2x_4=14 \\ -x_1+0x_2-x_3+x_4=-1 \\ -2x_1-x_2+0x_3+4x_4=2 \end{cases},\quad D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = |v_1 v_2 v_3 v_4| = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Το 4×4 σύστημα έχει ΜΗΛ την ~~λύση~~ $(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{D_1}{D},\frac{D_2}{D},\frac{D_3}{D},\frac{D_4}{D}\right)$ όπου.

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 1 \\ 14 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 & 1 \\ 16 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 16 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \\ -10 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -10 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 14 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 & 1 \\ 4 & 16 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = +4\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +4(-1-0) = -4.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 14 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 16 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +4(-1+0) = -4.$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&2&1&7\\2&3&3&14\\-1&0&-1&-1\\-2&-1&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&2&1&9\\-4&3&3&20\\-1&0&-1&-1\\0&-1&0&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-3&1&9\\-4&3&20\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&1&9\\-4&3&20\\1&1&1\end{vmatrix}=$$

(-2) (+2) (-1)

$$=\begin{vmatrix}-3&4&12\\-4&7&24\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&12\\7&24\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}4&2\\7&4\end{vmatrix}=6(16-14)=6\cdot 2=12.$$

αρα $(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{0}{-2},\frac{-4}{-2},\frac{-4}{-2},\frac{12}{-2}\right)=(0,2,2,-6)\Rightarrow$ ~~$x(x_1,x_2,x_3,$~~

$\Rightarrow x(0,2,2,-6)$ ως προς $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

!!! ① Εστω τα διανύσματα $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(-1,4,5)$, $v_3=(-5,2,1)$, $v_4=(9,12,19)$

Δείξτε ότι ο χώρος $V_{1,2}$ που παράγουν τα ~~$V_{1,2}$~~ v_1,v_2 ταυτίζεται με τον χώρο που παράγουν τα v_3,v_4 $(V_{3,4})$.

~~[illegible]~~ • Βρίσκω την βάση το $V_{1,2}$

$A=[v_1\, v_2]=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\\3&5\end{bmatrix}$ ο 2x2 υποπίνακας $A_{1,2}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&4\end{bmatrix}$ του A έχει

$D(A_{1,2})=1\cdot4-(-1)\cdot2=6\neq0\Rightarrow v_1,v_2$ γρ. ανεξάρτητα

Τα v_1,v_2 παράγουν τον $V_{1,2}$ $\Big\}\Rightarrow\{v_1,v_2\}$ βάση $V_{1,2}$

• Βρίσκω την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε $v\in V_{1,2}$

$v=(x,y,z)\in V\Leftrightarrow v_1,v_2,v$ γρ. εξαρτ. $\Leftrightarrow |v_1 v_2 v|=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&-1&x\\2&4&y\\3&5&z\end{vmatrix}=0$ (-2) (-3)

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&-1&x\\0&6&-2x+y\\0&8&-3x+z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}6&-2x+y\\8&-3x+z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\cancel{6}^{3}(-3x+z)-\cancel{8}^{4}(-2x+y)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-9x+3z+8x-4y=0\Leftrightarrow x+4y-3z=0$$

Αρα $V_{1,2}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+4y-3z=0\}$.

• Ομοια για τον $V_{3,4}$.

$A=[v_3\, v_4]=\begin{bmatrix}-5&9\\2&12\\1&19\end{bmatrix}$ ο 2x2 υποπίνακας $A_{2,3}=\begin{bmatrix}2&12\\1&19\end{bmatrix}$ του A έχει

$D(A_{2,3})=2\cdot19-12=38-12=26\neq0\Rightarrow$

$\Rightarrow v_3, v_4$ γρ. ανεξ.
Τα v_3, v_4 παράγουν τον $V_{3,4}$ $\Bigg\} \Rightarrow \{v_3, v_4\}$ βάση του $V_{3,4}$. οπότε

$v \in V_{3,4} \Leftrightarrow v, v_3, v_4$ γρ. εξαρτ. $\Leftrightarrow |v\, v_3\, v_4| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -5 & 9 \\ y & 2 & 12 \\ z & 1 & 19 \end{vmatrix} = 0 \quad (-2)\ (+5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5z+x & 0 & 104 \\ -2z+y & 0 & -26 \\ z & 1 & 19 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow - \begin{vmatrix} 5z+x & 104 \\ -2z+y & -26 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\cancel{26} \cdot \begin{vmatrix} 5z+x & 4 \\ -2z+y & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5z - x + 8z - 4y = 0 \Leftrightarrow -x - 4y + 3z = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 3z = 0$$

Άρα $V_{3,4} = \{(x,y,z) : x+4y-3z=0\}$
$V_{1,2} = \{(x,y,z) : x+4y-3z=0\}$ $\Bigg\} \Rightarrow V_{1,2} = V_{3,4}$.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

▼ Ανάγκη επέκτασης του συνόλου $\mathbb{R}$.

Η εξίσωση

$a+x=b$ στο $\mathbb{N}$, αδύνατη όταν $a>b \longrightarrow$ επεκταθήκαμε στο $\mathbb{Z}$

$a\cdot x=b$ $(a\neq 0)$ στο $\mathbb{Z}$, αδύνατη $a \not| b \longrightarrow \mathbb{Q}$.

$x^2=a$ στο $\mathbb{Q}$, αδύνατη όταν a όχι τέλειο τετράγωνο $\longrightarrow \mathbb{R}$.

Όμως, στο $\mathbb{R}$ η $x^2=a$, αδύνατη όταν $a<0 \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{C}}}$ στο οποίο η $x^2=a$ να έχει λύση, $\forall a\in \mathbb{C}$.

▼ Κατασκευή του συνόλου $\mathbb{C}$.

<u>Το πρόβλημα</u>: Να οριστεί ένα σώμα $(K,\oplus,\odot)$ τέτοιο ώστε

i) $\mathbb{R}\subset K$

ii) $\exists\ i\in K : i^2=-1$

iii) $\forall a,b\in\mathbb{R} : a\oplus b=a+b \wedge a\odot b=a.b$.

Στο παραπάνω σύνολο K, θα δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2=a$ (και γενικά κάθε εξίσωση πολυωνυμική) έχει λύση.

- Λόγω του iii) οι πράξεις στο K θα σημειώνονται στο εξής ως "+" και "•".

Θ.	Το σύνολο K κατασκευάζεται και είναι ισόμορφο με το σώμα $\mathbb{R}^2$ στο οποίο έχουν οριστεί οι πράξεις $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

<u>Ανάλυση</u>: Έστω ότι βρέθηκε το K. Τότε αν $\mathbf{0}$ το ουδέτερο στοιχείο του K, $\mathbf{0}+0=0=0+0 \xrightarrow[\text{σώμα}]{K} \underline{\mathbf{0}=0}$.

Αν $\mathbf{1}$ μοναδιαίο στοιχείο του $K \Rightarrow \mathbf{1}\cdot 1=1=1\cdot 1 \xrightarrow[\text{σώμα}]{K} \underline{\mathbf{1}=1}$

$\forall b\in\mathbb{R} \xrightarrow{iii} b\in K,\ i\in K \longrightarrow bi\in K \longrightarrow \boxed{I=\{bi : b\in\mathbb{R}\}} \longleftarrow$ σύνολο φανταστικών αριθμών.

- $0=0i \Rightarrow \underline{0\in I}$ • $\underline{1\notin I}$ (Απόδειξη...

(Έστω $1\in I \Rightarrow \exists\, b\in\mathbb{R}: 1 = bi \Rightarrow -(-1) = bi \overset{ii}{\Rightarrow} -i^2 = bi \Rightarrow i^2+bi=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow i(i+b)=0 \underset{\text{σώμα}}{\overset{K}{\Rightarrow}} i=0 \vee i+b=0$

$0^2\neq -1 \Rightarrow i\neq 0$

$\Rightarrow i+b=0 \Rightarrow b=-i\notin\mathbb{R} \leftarrow$ Άτοπο $\rightarrow 1\notin I$)

$\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall bi\in I$ $\Rightarrow a, bi\in K \Rightarrow (a+bi)\in K$.

Θέτω $\boxed{\mathbb{C}=\{a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}}$ $\longrightarrow$ Μιγαδικοί

- $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ (διότι $\forall a\in\mathbb{R},\ a=a+0=a+0i\in\mathbb{C}$)

και

- $I\subset\mathbb{C}$ (διότι $\forall bi\in I,\ bi=0+bi\in\mathbb{C}$)

Θα δείξω ότι το $\mathbb{C}$ είναι το ζητούμενο σώμα.

<u>Απόδειξη</u>

- ~~Ισότητα στο $\mathbb{C}$: Είναι $a_1+b_1 i = a_2+b_2 i$~~
- <u>Κλειστό</u>: Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C} \Rightarrow \begin{cases} z_1=a_1+b_1 i \\ z_2=a_2+b_2 i\end{cases} : a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1+z_2=(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

$\mathbb{R}$ κλειστό "+" $\Rightarrow (a_1+a_2), (b_1+b_2)\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1+z_2\in\mathbb{C},\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ κλειστό "+".

Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C} \Rightarrow \begin{cases} z_1=a_1+b_1 i \\ z_2=a_2+b_2 i\end{cases} : a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 z_2=(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=a_1a_2+a_1b_2 i+a_2b_1 i+b_1b_2 i^2=$

$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

$\mathbb{R}$ κλειστό "+", "$\cdot$" $\Rightarrow a_1a_2-b_1b_2\in\mathbb{R}$, $a_1b_2+a_2b_1\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1z_2\in\mathbb{C},\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$ κλειστό "$\cdot$".

- <u>$(\mathbb{C},+)$ ομάδα.</u>

$\forall a+bi\in\mathbb{C} \Rightarrow -(a+bi)=-[1(a+bi)]=(-1)(a+bi)=(-1)a+(-1)bi=$

$=1\cdot(-a)+1(-b)i=(-a)+(-b)i\in\mathbb{C}$ (διότι $-a,-b\in\mathbb{R}$)

$\mathbb{C}$ κλειστό "+", $\mathbb{C}\subseteq K$

$\Rightarrow (\mathbb{C},+)$ υποομάδα της ομάδας $(K,+) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathbb{C},+)$ ομάδα.

- <u>$(\mathbb{C}^*,\cdot)$ ομάδα</u>

$\forall a+bi\in\mathbb{C}^* \Rightarrow \dfrac{1}{(a+bi)}=\dfrac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{a-bi}{a^2-b^2i^2}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{-b}{a^2+b^2}i\in\mathbb{C}$

$\mathbb{C}^*$ κλειστό "$\cdot$", $\mathbb{C}^*\subseteq K^*$

$\Rightarrow (\mathbb{C}^*,\cdot)$ υποομάδα της ομάδας $(K^*,\cdot) \Rightarrow (\mathbb{C}^*,\cdot)$ ομάδα

- <u>"$\cdot$" E "+"</u>

$$\left.\begin{array}{l}(K,+,\cdot) \text{ σώμα} \Rightarrow \text{"}\cdot\text{" E "}+\text{" στο } K \\ \mathbb{C} \text{ κλειστό "}+\text{", "}\cdot\text{"}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}\cdot\text{" E "}+\text{" στο } \mathbb{C}.$$

Αρα
$$\left.\begin{array}{l}(\mathbb{C},+) \text{ ομάδα} \\ (\mathbb{C}^*,\cdot) \text{ ομάδα} \\ \text{"}\cdot\text{" E "}+\text{" στο } \mathbb{C}\end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbb{C},+,\cdot) \text{ σώμα.} \quad \text{QED.}$$

Για το $\mathbb{C}$ είναι

i) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

ii) $i = 0 + 1i \in \mathbb{C}$ και $i^2 = -1 \Rightarrow \exists\, i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$.

~~iii) $\forall x,y\in$~~ Αρα το $\mathbb{C}$ είναι το ζητούμενο σύνολο.

Κατασκευή του $\mathbb{C}$.

Εστω $\varphi_0 : \forall (a+bi) \in \mathbb{C} \longrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Θα δείξω ότι φ_0 απεικόνιση "1-1" και "επι".

• φ_0 απεικόνιση : Αρκεί $a_1+b_1 i = a_2+b_2 i \Rightarrow (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$.

Αν $a_1+b_1 i = a_2+b_2 i \Rightarrow (a_1-a_2) = -(b_1-b_2)i \Rightarrow (a_1-a_2)^2 = [-(b_1-b_2)i]^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_1-a_2)^2 = (b_1-b_2)i^2 \Rightarrow (a_1-a_2)^2 = -(b_1-b_2)^2 \Rightarrow (a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1-a_2 = 0 \wedge b_1-b_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \Rightarrow (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$, $\forall a_1+b_1 i, a_2+b_2 i \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \varphi_0$ απεικόνιση.

• φ_0 "1-1" : Αρκεί $(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \Rightarrow a_1+b_1 i = a_2+b_2 i$.

Αν $(a_1,b_1) = (a_2,b_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 i = b_2 i \Rightarrow a_1+b_1 i = a_2+b_2 i$,
$\forall a_1+b_1 i, a_2+b_2 i \in \mathbb{C} \Rightarrow \varphi_0$ "1-1"

• φ_0 "επι" : Προφανές.

Αρα $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$. Θα δείξω ότι είναι και ισόμορφα.

Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζω τις $\oplus$, $\odot$ έτσι ώστε

$$(a_1,b_1) \oplus (a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2).$$
$$(a_1,b_1) \odot (a_2,b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Εχει δειχθεί ότι $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ σώμα

με ουδέτερο το $(0,0) = \varphi_0(0+0i)$

μοναδιαίο το $(1,0) = \varphi_0(1+0i)$.

στο οποίο ο (a_1,b_1) έχει

αντίθετο το $(-a_1,-b_1) = \varphi_0[-(a_1+b_1 i)]$

αντίστροφο το $\left(\dfrac{a_1}{a_1^2+b_1^2}, \dfrac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\right) = \varphi_0\left(\dfrac{1}{a_1+b_1 i}\right)$

Εστω $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

$\varphi_0 : \forall (a,0) \in \mathbb{R}_0 \longrightarrow a \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_0$ απεικόνιση "1-1" και "επι"

Για $(a_1,0),(a_2,0)\in\mathbb{R}_0 \Rightarrow (a_1,0)\oplus(a_2,0)=(a_1+a_2,0)\in\mathbb{R}_0 \xrightarrow{\varphi_0} a_1+a_2\in\mathbb{R}$

Για $(a_1,0),(a_2,0)\in\mathbb{R}_0 \Rightarrow (a_1,0)\odot(a_2,0)=(a_1a_2-0\cdot 0,\ a_1\cdot 0+0\cdot a_2)=(a_1a_2,0)\in\mathbb{R}_0 \xrightarrow{\varphi_0} a_1a_2\in\mathbb{R}$.

Άρα $\mathbb{R},\mathbb{R}_0$ ισόμορφα. (ισχύει το iii) $\Rightarrow \mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ και $\forall a,b\in\mathbb{R},\ a\oplus b=a+b,\ a\odot b=a\cdot b$.

Για $\boxed{i=(0,1)}\Rightarrow i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-(1,0)\xrightarrow{\varphi_0}-1$.

Άρα το $(\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ ή $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ πληρεί τις συνθήκες i, ii, iii άρα είναι το σώμα $\mathbb{C}$. QED.

▼ Η μορφή $a+bi$

O

Θ. $\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ \exists \text{ μοναδικοί } a,b\in\mathbb{R}:\ z=a+bi}$

Απόδειξη.

$$\left.\begin{array}{l}\forall z\in\mathbb{C}\\ \mathbb{C}=\mathbb{R}^2\end{array}\right\}\Rightarrow z=(a,b):\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=\underbrace{(a,0)+(b,0)(0,1)}_{a+bi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=a+bi$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } z=a'+b'i\\ \text{είναι και } z=a+bi\end{array}\right\}\Rightarrow a+bi=a'+b'i\Leftrightarrow (a,b)=(a',b')\Leftrightarrow a=a'\wedge b=b'$$

Άρα $\exists$ μοναδικά $a,b\in\mathbb{R}:\ z=a+bi$.

▼ Δομή του $\mathbb{C}$ (ανακεφαλαίωση)
- $\mathbb{C}$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$ σώμα
- $\mathbb{C}$ διανυσματικός χώρος

•

$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\Rightarrow z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\in\mathbb{C}$

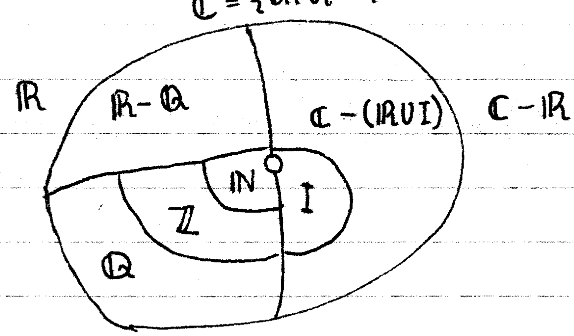
$\forall z=a+bi\Rightarrow\begin{cases}Re(z)=a\\ Im(z)=b\end{cases}$

$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\Rightarrow z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\in\mathbb{C}$

$\forall z\in\mathbb{C}\Rightarrow -z=(-a)+(-b)i\in\mathbb{C}$

$\forall z\in\mathbb{C}^*\Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$

$\mathbb{C}=\{a+bi:\ a,b\in\mathbb{R}\}$



~~Φανταστικοί αριθμ.~~

▼ Δομή στο $I=\{bi : b\in\mathbb{R}\}$. σύνολο των φανταστικών αριθμών.

Θ_1 $\boxed{(I,+) \text{ υποομάδα της ομάδας } (\mathbb{C},+)}$

Απόδειξη

Είναι $I\neq\emptyset$ διότι $0=0i\in I$. και $I\subset\mathbb{C}$.

$\forall bi, b'i\in I \Rightarrow bi+b'i=(b+b')i=b''i : b''=b+b'\in\mathbb{R} \Rightarrow bi+b'i\in I \Rightarrow$

$\Rightarrow I$ κλειστό "+" ~~I υποομ~~

$\forall bi\in I \Rightarrow -bi \underset{\mathbb{C}\text{ σώμα}}{=} (-b)i=b'i\in I$ (διότι $b'=-b\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow (I,+)$ υποομάδα της ομάδας $(\mathbb{C},+)$

Θ_2 $\boxed{(I^*\cup\mathbb{R}^*,\cdot) \text{ υποομάδα της ομάδας } (\mathbb{C}^*,+)}$

Αποδειξη

Είναι $I^*\cup\mathbb{R}^*\neq\emptyset$ διότι $i\in I^*\Rightarrow i\in I^*\cup\mathbb{R}^*$. και $I^*\cup\mathbb{R}^*\subset\mathbb{C}$.

$I^*\cup\mathbb{R}^*=\{a, bi : a,b\in\mathbb{R}^*\}$.

• Κλειστό : Έστω $z_1,z_2\in I^*\cup\mathbb{R}^* \Rightarrow \begin{cases} z_1,z_2\in I^* \\ z_1,z_2\in\mathbb{R}^* \\ z_1\in I^*\wedge z_2\in\mathbb{R}^* \end{cases}$

i) Αν $z_1,z_2\in\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^*$ κλειστό "$\cdot$" $\Rightarrow z_1z_2\in\mathbb{R}^*$.

ii) Αν $z_1,z_2\in I^* \Rightarrow \begin{cases} z_1=b_1i \\ z_2=b_2i \end{cases} : b_1,b_2\in\mathbb{R}^* \Rightarrow z_1\cdot z_2=(b_1i)(b_2i)=b_1b_2i^2=-b_1b_2\in\mathbb{R}^*$ (διότι $b_1,b_2\neq0$)

$\Rightarrow z_1z_2\in\mathbb{R}^*\cup I^*$.

iii) Αν $z_1\in\mathbb{R}^*\wedge z_2\in I^* \Rightarrow \begin{cases} z_1=a_1 \\ z_2=b_2i \end{cases} : a_1,b_2\in\mathbb{R}^* \Rightarrow z_1z_2=a_1(b_2i)=(a_1b_2)i\in I^*$ (διότι $a_1,b_2\neq0$)

$\Rightarrow z_1z_2\in I^*\cup\mathbb{R}^*$

Άρα γενικά $z_1,z_2\in I^*\cup\mathbb{R}^* \Rightarrow z_1z_2\in I^*\cup\mathbb{R}^*$, $\forall z_1,z_2\in I^*\cup\mathbb{R}^* \Rightarrow I^*\cup\mathbb{R}^*$ κλειστό "$\cdot$".

• Αντίστροφος : Έστω $z\in I^*\cup\mathbb{R}^* \Rightarrow z\in I^*\vee z\in\mathbb{R}^*$.

i) Αν $z\in I^* \Rightarrow z=bi : b\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{bi}=\frac{1\cdot i}{bi^2}=-\frac{1}{b}i\in I^*$ (διότι $-\frac{1}{b}\in\mathbb{R}^*$)

ii) Αν $z\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{1}{z}\in\mathbb{R}^*$

Άρα $\forall z\in I^*\cup\mathbb{R}^* : \frac{1}{z}\in I^*\cup\mathbb{R}^*$, είναι και $I^*\cup\mathbb{R}^*$ κλειστό "$\cdot$" $\Rightarrow (I^*\cup\mathbb{R}^*,\cdot)$ υποομάδα της ομάδας $(\mathbb{C}^*,\cdot)$

▼ Κανονική μορφή μιγάδος $\longleftrightarrow$ $\boxed{z = a+bi}$ $\begin{cases} a = Re(z) \\ b = Im(z). \end{cases}$

Παραδείγματα

1) $(-3+2i)^2+(5-i)(2+2i) = 9-12i-4+10+10i-2i+2 = 17-4i = 17+(-4)i$

2) $\dfrac{2+i}{1-i} = \dfrac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2+2i+i-1}{1+1} = \dfrac{3i+1}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i.$

3) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^2+(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \dfrac{3+\cancel{2\sqrt{3}i}-1+3-\cancel{2\sqrt{3}i}-1}{3+1} = \dfrac{4}{3+1} = 1 =$

$= 1+0i.$

4) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2} = \dfrac{(1+4i-4)-(1-3i+3i^2-i^3)}{(3^3+3\cdot3^2\cdot 2i+3\cdot3\cdot(2i)^2+(2i)^3-(4+4i-1)} =$

$= \dfrac{\cancel{1}+4i-4-\cancel{1}+3i+3-i}{27+54i-36-8i-4-4i+1} = \dfrac{6i-1}{42i-12} =$

$= \dfrac{(6i-1)(42i+12)}{144+1764} = \dfrac{-252+72i-42i-12}{1908} =$

$= \dfrac{30i-264}{1908} = \dfrac{30i}{1908} \cdot \dfrac{-264}{1908}+\dfrac{30}{1908}i.$

▼ Δυνάμεις του i

$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1$

$i^3 = i^2\cdot i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^v = i^{4n+v} : v\in\{0,1,2,3\}$ $\begin{cases} i^v = i^{4n} = 1 \\ i^v = i^{4n+1} = i \\ i^v = i^{4n+2} = -1 \\ i^v = i^{4n+3} = -i \end{cases}$

π.χ. $i^{173} = i^{4\cdot 43+1} =$

$= (i^4)^{43}\cdot i = 1\cdot i = i.$

5) $A = 2i^{87}+3(1-i^{-122})+(-i)^{-51}$.

Είναι $i^{87} = i^{4\cdot 21+3} = i^3 = -i$

$i^{-122} = \dfrac{1}{i^{122}} = \dfrac{1}{i^{4\cdot30+2}} = \dfrac{1}{i^2} = -1.$

$(-i)^{-51} = \dfrac{1}{(-i)^{51}} = \dfrac{1}{(-i)^{4\cdot12+3}} = \dfrac{1}{(-i)^3} = \dfrac{1}{+i} = \dfrac{i}{i^2} = -i.$

οπότε $A = 2(-i)+3(1-(-1))+(-i) = -2i+3+3-i = 6-3i = 6+(-3)i$.

6) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i \\ 2+3i & 1+i \end{vmatrix} = (1+i)^2-(1-2i)(2+3i) = 1+2i-1-(2+3i-4i+6) = \cancel{1}+2i-\cancel{1}-2-3i+4i-6 =$

$= -8+3i$

7) $S_1 = 1 + i + i^2 + \dots + i^\nu$;

$1, i, i^2, \dots, i^\nu$ γεωμετρική πρόοδος με $\begin{matrix} a_1 = 1 \\ \lambda = i \end{matrix} \Rightarrow S_1 = \Sigma_\nu = \dfrac{a_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1} = \dfrac{1 \cdot (i^\nu - 1)}{i - 1} =$

$= \dfrac{i^\nu - 1}{i - 1}$: $\nu = 4n + \upsilon$, $\upsilon \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Αν $\nu = 4n \Rightarrow i^\nu = 1 \Rightarrow S_1 = \dfrac{1 - 1}{i - 1} = 0$

Αν $\nu = 4n + 1 \Rightarrow i^\nu = i \Rightarrow S_1 = \dfrac{i - 1}{i - 1} = 1$.

Αν $\nu = 4n + 2 \Rightarrow i^\nu = -1 \Rightarrow S_1 = \dfrac{-1 - 1}{i - 1} = \dfrac{-2}{i - 1} = \dfrac{-2(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \dfrac{-2(i+1)}{-1 - 1} = i + 1$.

Αν $\nu = 4n + 3 \Rightarrow i^\nu = -i \Rightarrow S_1 = \dfrac{-i - 1}{i - 1} = \dfrac{1 + i}{1 - i} = \dfrac{1 + 2i - 1}{1 + 1} = \dfrac{2i}{2} = i$.

οποτε $S_1 = \begin{cases} 0 & , \nu = 4n \\ 1 & , \nu = 4n + 1 \\ 1 + i & , \nu = 4n + 2 \\ i & , \nu = 4n + 3 \end{cases}$: $n \in \mathbb{N}^*$.

8) Δείξτε ότι $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$ ρίζες του $f(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$.

Αρκει $f(z_1) = f(z_2) = 0$.

$f(z_1) = f(1 + 2i) = (1 + 2i)^3 - 4(1 + 2i)^2 + 9(1 + 2i) - 10 =$

$= 1 + 6i - 12 - 8i - 4 - 16i + 16 + 9 + 18i - 10 = 0 + 0i = 0 \rightarrow z_1 = 1 + 2i$ ρίζα του $f(x)$.

Ομοια $f(z_2) = f(1 - 2i) = \dots = 0$.

<u>β' τροπος</u>: $\left.\begin{matrix} z_1 \text{ ρίζα } f(x) \in \mathbb{R}[x]. \\ z_2, z_1 \text{ συζυγείς} \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_2$ ρίζα $f(x)$.

• → Αν ζητηθεί να προσδιοριστούν δύο αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει μία σχέση τότε φέρνω την σχέση στην μορφή $a + bi = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \begin{cases} a = \gamma \\ b = \delta \end{cases}$ ή $a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$

<u>παράδειγμα</u>

1) $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i \Leftrightarrow x - 2ix + y + 2iy = 1 + i \Leftrightarrow (x + y) + (-2x + 2y)i = 1 + i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

$4y = 3$

→ Οι α' βαθμιες εξισώσεις και τα γραμμικά συστήματα με συντελεστές από το $\mathbb{C}$, λύνονται όπως και τα αντίστοιχα ~~...~~ με συντελεστές από το $\mathbb{R}$.

<u>παραδειγματα</u>

1) $(2+i)z+4+2i=3i-3-z \Leftrightarrow (3+i)z=-7+i \Leftrightarrow z=\frac{-7+i}{3+i}=\frac{(-7+i)(3-i)}{9+1}=$
$=\frac{-21+7i+3i+1}{10}=\frac{-20+10i}{10}=-2+i.$

2) $\begin{cases}(1+i)z+(1-i)w=3+i\\(2+i)z-(-3+i)w=4+2i\end{cases}$. $D=\begin{vmatrix}1+i & 1-i\\2+i & 3-i\end{vmatrix}=(1+i)(3-i)-(1-i)(2+i)=$
$=3-i+3i+1-2-i+2i-1=1+3i\neq 0 \rightarrow$ Το 2×2 σύστημα έχει μια μόνο λύση την $(z,w)=\left(\frac{D_z}{D},\frac{D_w}{D}\right)$ όπου

$$D_z=\begin{vmatrix}3+i & 1-i\\4+2i & 3-i\end{vmatrix}=(3+i)(3-i)-(1-i)(4+2i)=9+1-4-2i+4i-2=4+2i$$

$$D_w=\begin{vmatrix}1+i & 3+i\\2+i & 4+2i\end{vmatrix}=(1+i)(4+2i)-(3+i)(2+i)=4+2i+4i-2-6-3i-2i+1=-3+i$$

Αρα $z=\frac{4+2i}{1+3i}=\frac{(4+2i)(1-3i)}{1+9}=\frac{4-12i+2i+6}{10}=\frac{10-10i}{10}=1-i$

και $w=\frac{-3+i}{1+3i}=\frac{(-3+i)(1-3i)}{1+9}=\frac{-3+9i+i+3}{10}=\frac{10i}{10}=i.$

▼ <u>Επίλυση στο $\mathbb{C}$ της β' βαθμιας εξίσωσης</u> $\boxed{ax^2+bx+\gamma=0}$: $a,b,\gamma\in\mathbb{R}\ \wedge\ a\neq 0$.

$\Delta=b^2-4a\gamma$.

1) Αν $\Delta>0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ (δύο ρίζες πραγματικές και άνισες).

2) Αν $\Delta=0 \Rightarrow z_{1,2}=-\frac{b}{2a}$ (1 ρίζα διπλή, $z_1=z_2\in\mathbb{R}$).

3) Αν $\Delta<0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (2 ρίζες μη πραγματικές, συζυγεις)

<u>Αρα</u>: οι β' βαθμιες εξισώσεις με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ λύνονται στο $\mathbb{C}$ ακόμη και όταν $\Delta<0$

<u>παράδειγμα</u>

$2z^2-3z+4=0$
$\Delta=9-32=-23=(i\sqrt{23})^2$

$\Rightarrow z_{1,2}=\frac{3\pm i\sqrt{23}}{4}=\begin{cases}\frac{3+i\sqrt{23}}{4}\\\frac{3-i\sqrt{23}}{4}\end{cases}$

7) $S_1 = 1 + i + i^2 + \dots + i^\nu$;

$1, i, i^2, \dots, i^\nu$ γεωμετρική πρόοδος με $\begin{matrix} a_1 = 1 \\ \lambda = i \end{matrix} \Rightarrow S_1 = \Sigma_\nu = \dfrac{a_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1} = \dfrac{1 \cdot (i^\nu - 1)}{i - 1} =$

$= \dfrac{i^\nu - 1}{i - 1}$ $: \nu = 4n + \upsilon$, $\upsilon \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Αν $\nu = 4n \Rightarrow i^\nu = 1 \Rightarrow S_1 = \dfrac{1-1}{i-1} = 0$

Αν $\nu = 4n+1 \Rightarrow i^\nu = i \Rightarrow S_1 = \dfrac{i-1}{i-1} = 1$.

Αν $\nu = 4n+2 \Rightarrow i^\nu = -1 \Rightarrow S_1 = \dfrac{-1-1}{i-1} = \dfrac{-2}{i-1} = \dfrac{-2(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \dfrac{-2(i+1)}{-1-1} = i+1$.

Αν $\nu = 4n+3 \Rightarrow i^\nu = -i \Rightarrow S_1 = \dfrac{-i-1}{i-1} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1+2i-1}{1+1} = \dfrac{2i}{2} = i$.

οπότε
$$S_1 = \begin{cases} 0 & , \nu = 4n \\ 1 & , \nu = 4n+1 \\ 1+i & , \nu = 4n+2 \\ i & , \nu = 4n+3 \end{cases} \quad : n \in \mathbb{N}^*.$$

8) Δείξτε ότι $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1-2i$ ρίζες του $f(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 10$.

Αρκεί $f(z_1) = f(z_2) = 0$.

$f(z_1) = f(1+2i) = (1+2i)^3 - 4(1+2i)^2 + 9(1+2i) - 10 =$

$= 1 + 6i - 12 - 8i - 4 - 16i + 16 + 9 + 18i - 10 = 0 + 0i = 0 \rightarrow z_1 = 1+2i$ ρίζα του $f(x)$.

Ομοια $f(z_2) = f(1-2i) = \dots = 0$.

<u>β' τρόπος</u>: z_1 ρίζα $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.
z_2, z_1 συζυγείς $\Big\} \Rightarrow z_2$ ρίζα $f(x)$.

• → Αν ζητηθεί να προσδιοριστούν δύο αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει μία σχέση τότε φέρνω την σχέση στην μορφή $a + bi = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \begin{cases} a = \gamma \\ b = \delta \end{cases}$ ή $a + bi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$

<u>παράδειγμα</u>

1) $(1-2i)x + (1+2i)y = 1+i \Leftrightarrow x - 2ix + y + 2iy = 1+i \Leftrightarrow (x+y) + (-2x+2y)i = 1+i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ -2x+2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y = 2 \\ -2x+2y = 1 \end{cases}$ ⟹ $4y = 3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

→ Οι α' βαθμιες εξισώσεις και τα γραμμικά συστήματα με συντελεστές από το $\mathbb{C}$, λύνονται όπως και τα αντίστοιχα ~~από~~ με συντελεστές από το $\mathbb{R}$.

<u>παραδειγματα</u>

1) $(2+i)z+4+2i=3i-3-z \Leftrightarrow (3+i)z=-7+i \Leftrightarrow z=\frac{-7+i}{3+i}=\frac{(-7+i)(3-i)}{9+1}=$
$=\frac{-21+7i+3i+1}{10}=\frac{-20+10i}{10}=-2+i.$

2) $\begin{cases}(1+i)z+(1-i)w=3+i\\ (2+i)z-(-3+i)w=4+2i\end{cases}$. $D=\begin{vmatrix}1+i & 1-i\\ 2+i & 3-i\end{vmatrix}=(1+i)(3-i)-(1-i)(2+i)=$
$=3-i+3i+1-2-i+2i-1=1+3i\neq 0 \rightarrow$ Το 2x2 σύστημα έχει μια μόνο λύση την $(z,w)=\left(\frac{D_z}{D},\frac{D_w}{D}\right)$ όπου

$D_z=\begin{vmatrix}3+i & 1-i\\ 4+2i & 3-i\end{vmatrix}=(3+i)(3-i)-(1-i)(4+2i)=9+1-4-2i+4i-2=4+2i$

$D_w=\begin{vmatrix}1+i & 3+i\\ 2+i & 4+2i\end{vmatrix}=(1+i)(4+2i)-(3+i)(2+i)=4+2i+4i-2-6-3i-2i+1=-3+i$

Αρα $z=\frac{4+2i}{1+3i}=\frac{(4+2i)(1-3i)}{1+9}=\frac{4-12i+2i+6}{10}=\frac{10-10i}{10}=1-i$

και $w=\frac{-3+i}{1+3i}=\frac{(-3+i)(1-3i)}{1+9}=\frac{-3+9i+i+3}{10}=\frac{10i}{10}=i.$

▼ <u>Επίλυση στο $\mathbb{C}$ της β' βαθμιας εξίσωσης</u> $\boxed{ax^2+bx+\gamma=0}$: $a,b,\gamma\in\mathbb{R} \wedge a\neq 0$.

$\Delta=b^2-4a\gamma$.

1) Αν $\Delta>0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ (δύο ρίζες πραγματικές και άνισες).

2) Αν $\Delta=0 \Rightarrow z_{1,2}=-\frac{b}{2a}$ (1 ρίζα διπλή, $z_1=z_2\in\mathbb{R}$).

3) Αν $\Delta<0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (2 ρίζες μη πραγματικές, συζυγείς)

<u>Αρα</u>: οι β' βαθμιες εξισώσεις με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ λύνονται στο $\mathbb{C}$ ακόμη και όταν $\Delta<0$

<u>παράδειγμα</u>

$\left.\begin{array}{l}2z^2-3z+4=0\\ \Delta=9-32=-23=(i\sqrt{23})^2\end{array}\right\} \Rightarrow z_{1,2}=\frac{3\pm i\sqrt{23}}{4}=\begin{cases}\frac{3+i\sqrt{23}}{4}\\ \frac{3-i\sqrt{23}}{4}\end{cases}$

→ Οι πολυωνυμικές εξισώσεις ανωτέρου του β' βαθμού, λύνονται όπως οι αντίστοιχες στο $\mathbb{R}$ (εφόσον έχουν συντελεστές από το $\mathbb{R}$).

<u>παράδειγμα</u>

1) $z^3-8z^2+25z-26=0$.

$\Delta_{26}=\{\pm1,\pm2,\pm13\}$ πιθανές ρίζες στο $\mathbb{Q}$. Θέτω $P(z)=z^3-8z^2+25z-26$.

$P(2)=8-32+50-26=58-58=0 \Rightarrow 2$ ρίζα $P(z) \rightarrow (z-2)/P(z) \Rightarrow P(z)=(z-2)\Pi(z)$.

1	-8	25	-26	2
	2	-12	26	
1	-6	13	0	

$\Rightarrow \Pi(z)=z^2-6z+13$.

Άρα $z^3-8z^2+25z-26=0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2-6z+13)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=2 \vee z^2-6z+13=0$, $\Delta=36-52=-16$ $\Rightarrow z_{1/2}=\dfrac{6\pm4i}{2}=3\pm2i=\begin{cases}3+2i\\3-2i\end{cases}$

Άρα $L=\{2,3+2i,3-2i\}$.

▼ <u>Συζυγής μιγαδικοί</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ονομάζεται <u>συζυγής</u> ενος μιγαδικού $z=a+bi$ και συμβολίζεται $\bar{z}$ ο μιγαδικός $\bar{z}=a-bi$. Δηλαδή

$$\boxed{\overline{a+bi}=a-bi}$$

→ <u>Ιδιότητες</u>: Έστω $z=a+bi\in\mathbb{C}$

1) Το πραγματικό μέρος του z $\boxed{a=Re(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}}$

2) Το φανταστικό μέρος του z $\boxed{b=Im(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}}$

3) $z+\bar{z}=2a\in\mathbb{R}$, $z-\bar{z}=2bi\in I$, $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2\in\mathbb{R}$.

4) $(\bar{\bar{z}})=z$.

• 5) $\boxed{z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}}$ $\boxed{z\in I\Leftrightarrow z+\bar{z}=0}$

▼ <u>Συζυγής και πράξεις.</u>

1) $\boxed{\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2\ ,\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}}$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτω $z_1=a_1+b_1 i$: $a_1,b_1\in\mathbb{R}$, $z_2=a_2+b_2 i$: $a_2,b_2\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow \overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)}=$

$=\overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i=$

$= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

↳ Γενικα: $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_\nu} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_\nu$, $\forall z_1, z_2, \dots, z_\nu \in \mathbb{C}$

2) $\boxed{\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \ , \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}}$

Αποδειξη

Θέτω $z_1 = a_1 + b_1 i : a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$z_2 = a_2 + b_2 i : a_2, b_2 \in \mathbb{R}$.

$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i} =$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$ (1)

$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{(a_1 + b_1 i)}\,\overline{(a_2 + b_2 i)} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + [a_1(-b_2) + a_2(-b_1)] i$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$ (2)

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

↳ Γενικα. $\overline{z_1 z_2 \cdots z_\nu} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_3 \cdots \bar{z}_\nu$

3) $\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \ , \forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}^*}$

Απόδειξη : Εστω $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}^*$.

▸ Θέτω $z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z z_2 = z_1 \Rightarrow \overline{z z_2} = \overline{z_1} \Rightarrow \bar{z} \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1$
$z_2 \neq 0 \Rightarrow \bar{z}_2 \neq 0$
$\Bigg\} \Rightarrow \bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$.

4) $\boxed{\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu \ , \forall z \in \mathbb{C}}$ 5) $\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \ , \forall z \in \mathbb{C}^*}$

• Μέθοδοι - παραδείγματα

① Για να δείξω ότι $z \in \mathbb{R}$, δείχνω ότι $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = 0$ ή $z = \bar{z}$

παράδειγμα

i) Αν $z\bar{z} = 1$, δείξτε ότι $\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}$.

Λύση: Θέτω $z = x + yi : x, y \in \mathbb{R}$.

$z\bar{z} = 1 \Rightarrow (x + yi)(x - yi) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

$\bar{w} = \overline{z + \frac{1}{z}} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} = (x - yi) + \frac{1}{x - yi} = \frac{(x - yi)^2 + 1}{x - yi} = \frac{x^2 - 2xyi + y^2 + 1}{x - yi} =$

$= \frac{x^2 - 2xyi - y^2 + 1}{x - yi} = \frac{x^2 - 2xyi - y^2 + x^2 + y^2}{x - yi} = \frac{2x^2 - 2xyi}{x - yi} = \frac{2x(x - yi)}{x - yi} = 2x$. (1)

και $w = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z} = \frac{(x+yi)^2+1}{x+yi} = \frac{x^2+2xyi-y^2+1}{x+yi} = \frac{x^2+2xyi-y^2+x^2+y^2}{x+yi} =$

$= \frac{2x^2+2xyi}{x+yi} = \frac{2x(x+yi)}{x+yi} = 2x \quad (2).$

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \overline{z+\frac{1}{z}} = z+\frac{1}{z} \Rightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}.$

(2) Για να δείξω ότι $\underline{z \in I}$, δείχνω ότι $\begin{cases} Re(z) = a = 0 \\ z+\bar{z} = 0. \end{cases}$

<u>παράδειγμα</u>

Αν $z^2 = (\bar{z})^2$ δείξτε ότι $z \in \mathbb{R} \vee z \in I$.

<u>Λύση</u>: $z^2 = (\bar{z})^2 \Rightarrow z^2 - (\bar{z})^2 = 0 \Rightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0 \Rightarrow z - \bar{z} = 0 \vee z+\bar{z} = 0$

$\Rightarrow z = \bar{z} \vee z+\bar{z} = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \vee z \in I. \ (\Rightarrow z \in \mathbb{R} \cup I).$

(3) Αν για τον $z = a+bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{R}$ δίνεται ότι

1) $z > 0 \Leftrightarrow a+bi > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge b = 0$

2) $z < 0 \Leftrightarrow a+bi < 0 \Leftrightarrow a < 0 \wedge b = 0$

$\Rightarrow$ Δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ο $z \in \mathbb{R}$.

<u>παράδειγμα</u>

1) Αν $z^2 \geq 0$ δείξτε ότι $z \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>: Θέτω $z = a+bi : a, b \in \mathbb{R}$

$z^2 \geq 0 \Rightarrow (a+bi)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 \geq 0 \Rightarrow (a^2-b^2) + 2abi \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2 \geq 0 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b^2 \geq 0 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a^2 \geq 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a^2 \geq 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq 0, \text{ισχύει} \\ b = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}.$

▼ <u>Συζυγής και πολυωνυμικές εξισώσεις.</u>

Θ. Έστω $P(z) = a_\nu z^\nu + a_{\nu-1} z^{\nu-1} + \dots + a_1 z + a_0 . : \underline{\underline{a_i \in \mathbb{R}}}, \ a_\nu \neq 0$

z ρίζα του $P(z) \Rightarrow \bar{z}$ ρίζα $P(z)$.

<u>Απόδειξη</u>

z ρίζα $P(z) \Rightarrow P(z) = 0 \Rightarrow a_\nu z^\nu + a_{\nu-1} z^{\nu-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{a_\nu z^\nu + a_{\nu-1} z^{\nu-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \bar{0} \Rightarrow \overline{a_\nu z^\nu} + \overline{a_{\nu-1} z^{\nu-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{a_\nu}\, \overline{z^\nu} + \overline{a_{\nu-1}}\, \overline{z^{\nu-1}} + \dots + \overline{a_1}\, \bar{z} + \overline{a_0} = 0 \underset{a_i \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} a_\nu (\bar{z})^\nu + a_{\nu-1} (\bar{z})^{\nu-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$

$\Rightarrow P(\bar{z}) = 0 \Rightarrow \bar{z}$ ρίζα του $P(z)$.

▼ Τετραγωνικές ρίζες μιγαδικού $z=a+bi$

Ορισμός : $\boxed{r \text{ τετραγωνική ρίζα του } z \Longleftrightarrow r^2 = z.}$

Θ_1 $\boxed{\text{Ένας μιγαδικός } z \text{ έχει δύο το πολύ τετραγωνικές ρίζες.}}$

Απόδειξη

Έστω r_0 τετραγωνική ρίζα του $z \Rightarrow r_0^2 = z$.

Αν r μία τετρ. ρίζα του $z \Leftrightarrow r^2 = z \Leftrightarrow r^2 = r_0^2 \Leftrightarrow r^2 - r_0^2 = 0 \Leftrightarrow (r-r_0)(r+r_0) = 0$
$\Leftrightarrow r - r_0 = 0 \vee r + r_0 = 0 \Leftrightarrow r = r_0 \vee r = -r_0$. Άρα οι μοναδικές ρίζες του z είναι οι $r_0, -r_0$.

Θ_2. $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \exists r_1, r_2 \in \mathbb{C} : r_1 = -r_2 \wedge r_1, r_2 \text{ τετρ. ρίζες του } z.}$

Απόδειξη

Θέτω $z = a+bi : a, b \in \mathbb{R}$.

1) Αν $b=0 \Rightarrow z = a \in \mathbb{R}$ οπότε αν
- $a>0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{a}, \; r_2 = -\sqrt{a}$
- $a=0 \Leftrightarrow z=0 \Rightarrow$ Μία τετρ. ρίζα $r=0$.
- $a<0 \Rightarrow r_1 = +i\sqrt{-a}, \; r_2 = -i\sqrt{-a}$

2) Αν $b \neq 0$, έστω $x+yi$ μία τετρ. ρίζα του $z = a+bi$. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^2 = a+bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a+bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy = b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ y = \dfrac{b}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{b^2}{4x^2} = a \\ \rightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \\ \rightarrow \end{cases}$$ Θέτω $w = x^2$ οπότε.

$$\left.\begin{array}{l} 4w^2 - 4aw - b^2 = 0. \\ \Delta = 16a^2 + 16b^2 = 16(a^2+b^2) > 0 \\ \quad (\text{διότι } b \neq 0) \end{array}\right\} \Rightarrow w_{1,2} = \frac{4a \pm 4\sqrt{a^2+b^2}}{8} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} > 0 \leftarrow \text{δεκτή} \\ \dfrac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2} < 0 \leftarrow \text{απορρ.} \end{cases}$$

Άρα $x^2 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ οπότε $y = \dfrac{b}{2x} = \begin{cases} \cdots = y_1 \\ \cdots = y_2 \end{cases}$

Άρα ο $z = a+bi$ έχει δύο αντίθετες τετραγωνικές ρίζες τις.

$$r_1 = x_1 + \frac{b}{2x_1} i \quad , \quad r_2 = -x_1 - \frac{b}{2x_1} i \quad \text{όπου}$$

$$x_1 = +\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

→ Οι τετραγωνικές ρίζες ορισμένων μιγαδικών βρίσκονται και αν τους γράψουμε σαν ανάπτυγμα τετραγώνου όταν $\boxed{\frac{b^2}{4}-1=\pm a}$

ως εξής: $a\pm bi=\left(\frac{b}{2}\right)^2+i^2\pm 2\frac{b}{2}i=\left(\frac{b}{2}\pm i\right)^2$, και άρα οι τετρ. ρίζες είναι οι $r_1=\frac{b}{2}\pm i$ και $r_2=-\frac{b}{2}\mp i$.

Η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$ με $a,b,c\in\mathbb{C}$ και $a\neq 0$.

ΕΠΙΛΥΣΗ: Αν d είναι μια τετραγωνική ρίζα της διακρίνουσας $\Delta=b^2-4ac$, τότε $d^2=\Delta$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$\boxed{z_{1,2}=\frac{-b\pm d}{2a}}$$

- Είναι $S=z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ και $P=z_1z_2=\frac{c}{a}$

Παραδείγματα

1) $z^2-(5-3i)z+10-5i=0$.

$\Delta=(5-3i)^2-4(10-5i)=25-30i-9-40+20i=-24-10i$

Έστω $d=x+yi$ μία τετρ. ρίζα του Δ.

$(x+yi)^2=-24-10i\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-24-10i\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=-24\\2xy=-10\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\frac{25}{x^2}=-24\\y=\frac{-5}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+24x^2-25=0\\ \end{cases}$. Θέτω $\omega=x^2$

άρα $\omega^2+24\omega-25=0$

$\Delta=576+100=676=26^2$ → $\omega_{1,2}=\frac{-24\pm26}{2}=-12\pm13=\begin{cases}1\leftarrow\text{δεκτή}\\-25\leftarrow\text{απορρίπτεται}\end{cases}$

οπότε $\begin{cases}x^2=1\\y=\frac{-5}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-5\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d_1=1-5i\\d_2=-1+5i.\end{cases}$

και

$$z_1=\frac{5-3i+(1-5i)}{2}=\frac{6-8i}{2}=3-4i.$$

$$z_2=\frac{5-3i-(1-5i)}{2}=\frac{4-8i}{2}=2-4i$$

→ Σε εξισώσεις που εμφανίζονται περισσότεροι από ένα άγνωστο, θέτω $z=x+yi$: $x,y\in\mathbb{R}$ και από την εξίσωση βρίσκω τα x,y.

2) $z^2+9=\bar{z}-z-2\bar{z}^2 \Leftrightarrow$ (Θέτω $z=x+yi : x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow \bar{z}=x-yi.$)

$\Leftrightarrow (x+yi)^2+9=(x-yi)-(x+yi)-2(x-yi)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2xyi-y^2+9=\cancel{x}-yi-\cancel{x}-yi-2x^2+2y^2+4xyi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2+9)+2xyi=(-2x^2+2y^2)+(-2y+4xy)i \Leftrightarrow$

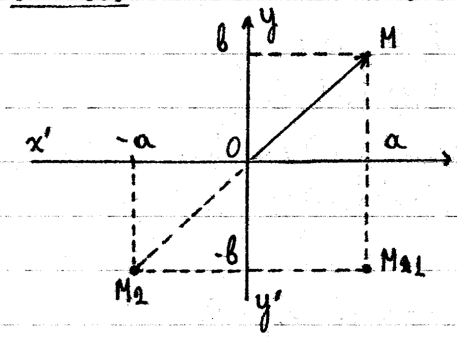
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+9=-2x^2+2y^2 \\ 2xy=-2y+4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-3y^2+9=0 \\ 2xy-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+3=0 \\ y(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-y^2+3=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=1+2i \vee z=1-2i.$

▼ Μιγαδικό επίπεδο

Κάθε μιγαδικός $z=\alpha+\beta i=(\alpha,\beta) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ απεικονίζεται σ'ένα σημείο Μ του επιπέδου Oxy και αντίστροφα. Δηλαδή: έχουμε μία απεικόνιση "1-1" και "επί" του $\mathbb{C}$ στο σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy που λέγεται <u>μιγαδικό επίπεδο</u>, κατά την οποία $\forall z=\alpha+\beta i\in\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} M(\alpha,\beta)\in P$



- Αν $z=0 \Leftrightarrow M(z)\equiv O$, όπου O η αρχή των αξόνων.
- Αν $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow M(z)\in x'x \leftarrow$ Άξονας των πραγματικών.
- Αν $z\in I \Leftrightarrow M(z)\in y'y \leftarrow$ Άξονας των φανταστικών.
- Οι $z,\bar{z}$ απεικονίζονται σε σημεία συμμετρικά ως προς τον $x'x$ (M,M_1).
- Οι $z,-z$ απεικονίζονται σε σημεία συμμετρικά ως προς τον $y'y$. (M,M_2).

▼ Μέτρο μιγαδικού

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού $z=\alpha+\beta i$ ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός

$$\boxed{|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$\hookrightarrow |\vec{OM}|=|z|$, όπου $M(z)$.

• Ιδιότητες

1) $\boxed{z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = |Re(z)|}$, $\boxed{z\in I \Leftrightarrow |z| = |Im(z)|}$. • $z=0 \Leftrightarrow |z|=0$.

2) $\boxed{|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}| \ ,\forall z\in\mathbb{C}}$, $\boxed{|z|^2 = z\bar{z} \ ,\forall z\in\mathbb{C}}$!!

3) $\boxed{z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 = z^2}$

Απόδειξη

Ευθύ : $z\in\mathbb{R} \Rightarrow z=\bar{z} \Rightarrow z\cdot z = \bar{z}z \Rightarrow |z|^2 = z^2$.

Αντίστροφο : $|z|^2 = z^2 \Rightarrow z\bar{z} = z^2 \Rightarrow z\bar{z} - z^2 = 0 \Rightarrow z(\bar{z}-z)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow z=0 \vee \bar{z}-z=0 \Rightarrow z=0 \vee z=\bar{z} \Rightarrow z=0 \vee z\in\mathbb{R} \Rightarrow z\in\mathbb{R}$

4) $\boxed{z\in I \Leftrightarrow |z|^2 = -z^2}$

• Αν $|z|=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$, $z = \frac{1}{\bar{z}}$

Για να δείξω ότι $z\in\mathbb{R}$, αρκεί να δείξω ότι:
$z=\bar{z}$ ή $Im(z)=b=0$ ή $|z|^2 = z^2$
Για να δείξω ότι $z\in I$, αρκεί να δείξω ότι:
$z+\bar{z}=0$ ή $Re(z)=a=0$ ή $|z|^2 = -z^2$.

Παραδείγματα : Να λυθούν:

1) $|z-i| - |z-1| = i(|z|-1) \Leftrightarrow$. Θέτω $z = x+yi$: $x,y\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow |x+yi-i| - |x+yi-1| = i(|x+yi|-1) \Leftrightarrow |x+(y-1)i| - |(x-1)+yi| = i(|x+yi|-1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = i(\sqrt{x^2+y^2}-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+(y-1)^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2 = (x-1)^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1} = \cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2+x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \vee z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Γεωμετρικοί τόποι

1) Να βρεθεί ο γ.τ. του $M(z)$ αν $2|z+1|=|z+4|$

<u>Λύση</u>: $2|z+1|=|z+4| \Leftrightarrow 4|z+1|^2=|z+4|^2 \Leftrightarrow 4(z+1)(\bar{z}+1)=(z+4)(\bar{z}+4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4(z\bar{z}+z+\bar{z}+1)=z\bar{z}+4z+4\bar{z}+16 \Leftrightarrow 4z\bar{z}+4z+4\bar{z}+4=z\bar{z}+4z+4\bar{z}+16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=4.$

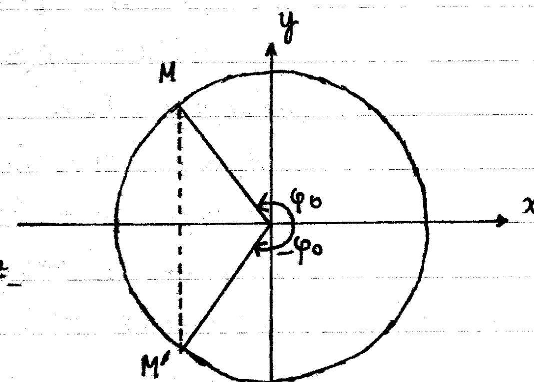
Άρα ο γ.τ. των $M(z)$ είναι κύκλος με $K(0,0)$, $\rho=2$.

2) Όμοια του $M(z)$ όταν $|z+2|=|z-3+i|$

<u>Λύση</u>: $|z+2|=|z-3+i| \Leftrightarrow |(x+2)+yi|=|(x-3)+(y+1)i| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |(x+2)+yi|^2=|(x-3)+(y+1)i|^2 \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=(x-3)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}+2y+1 \Leftrightarrow 10x-2y-6=0 \Leftrightarrow 5x-y-3=0$

Άρα ο γ.τ. των $M(z)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): 5x-y-3=0$.

Ορίσματα μιγαδικού



Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$ και $|z|=\rho$.
Αν $M(z)$, τότε η αλγεβρική τιμή της γωνίας $(O\hat{x}, OM)$ λέγεται <u>πρωτεύον όρισμα του z</u>

$$\boxed{\varphi_0 = \operatorname{Arg} z}$$

Για το $\operatorname{Arg} z$ ισχύει: $\boxed{-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi}$, δηλαδή παίρνει τιμές από το σύνολο $A=(-\pi,\pi]$

Η θέση του $M(z)$ καθορίζεται μονοσήμαντα από το ζεύγος (ρ,φ_0) το οποίο αποτελεί τις <u>πολικές συντεταγμένες</u> του z.

• <u>Παρατηρήσεις</u>

1) $z_1=z_2\neq 0 \Longleftrightarrow |z_1|=|z_2| \wedge \operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2$
2) $z\in(0,+\infty) \Longleftrightarrow \operatorname{Arg} z=0$, $z\in(-\infty,0) \Longleftrightarrow \operatorname{Arg} z=+\pi$ (όχι $-\pi$).
3) Αν $z=bi\in I$ με $\begin{cases} b>0 \Longleftrightarrow \operatorname{Arg} z=\frac{\pi}{2} \\ b<0 \Longleftrightarrow \operatorname{Arg} z=\frac{-\pi}{2} \end{cases}$

4) $\forall z\notin\mathbb{R}_-$: $\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg} z$. $\forall z\in\mathbb{R}_-^*$: $\operatorname{Arg}\bar{z}=\operatorname{Arg} z=\pi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ονομάζουμε όρισμα ενός μιγαδικού z, κάθε πραγματικό

$$\boxed{\varphi = \mathrm{Arg}z + 2k\pi} \quad : k \in \mathbb{Z}.$$

- Αν $z=0$, δεν έχει νόημα ο όρος όρισμα
- Αν φ όρισμα του $z \Rightarrow \begin{cases} -\varphi \text{ όρισμα του } \bar{z} \\ \pi+\varphi \text{ όρισμα του } -z. \end{cases}$

▼ Ισότητα μιγαδικών

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ▶ $\boxed{z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \exists\, k \in \mathbb{Z} : \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.}$: φ_1 όρισμα z_1, φ_2 όρισμα z_2.

Απόδειξη

Ευθύ

$z_1 = z_2 \neq 0 \Leftrightarrow M(z_1) \equiv M(z_2) \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}z_2.$

~~Ευθύ~~ Έστω φ_1 όρισμα $z_1 \Rightarrow \exists\, k_1 \in \mathbb{Z} : \varphi_1 = \mathrm{Arg}z_1 + 2k_1\pi.$

Έστω φ_2 όρισμα $z_2 \Rightarrow \exists\, k_2 \in \mathbb{Z} : \varphi_2 = \mathrm{Arg}z_2 + 2k_2\pi$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = (\mathrm{Arg}z_1 + 2k_1\pi) - (\mathrm{Arg}z_2 + 2k_2\pi) = (\mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2) + 2(k_1-k_2)\pi =$

$= 2(k_1-k_2)\pi \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ (π.χ. ο $k = k_1 - k_2$) : $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$

Αντίστροφο : Έστω $|z_1| = |z_2| \wedge \exists\, k \in \mathbb{Z} : \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi.$

Αρκεί $\mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}z_2$. ~~Έστω~~

φ_1 όρισμα $z_1 \Rightarrow \exists\, k_1 \in \mathbb{Z} : \varphi_1 = \mathrm{Arg}z_1 + 2k_1\pi.$

φ_2 όρισμα $z_2 \Rightarrow \exists\, k_2 \in \mathbb{Z} : \varphi_2 = \mathrm{Arg}z_2 + 2k_2\pi$

$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi \Leftrightarrow (\mathrm{Arg}z_1 + 2k_1\pi) - (\mathrm{Arg}z_2 + 2k_2\pi) = 2k\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2 = 2(k - k_1 + k_2)\pi \Leftrightarrow \mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}z_2 + 2\lambda\pi.$

όπου $\lambda = k - k_1 + k_2$.

Έστω $\lambda \neq 0$. $-\pi < \mathrm{Arg}z_2 \leq \pi \Rightarrow -\pi + 2\lambda\pi < \mathrm{Arg}z_2 + 2\lambda\pi \leq \pi + 2\lambda\pi \Rightarrow$

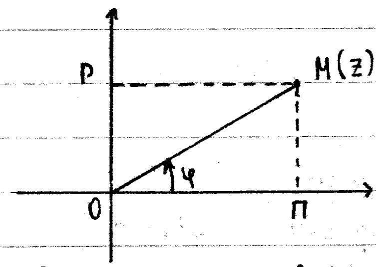
$\Rightarrow (2\lambda-1)\pi < \mathrm{Arg}z_1 \leq (2\lambda+1)\pi \Rightarrow \mathrm{Arg}z_1 \in ((2\lambda-1)\pi, (2\lambda+1)\pi] \neq (-\pi, \pi] \leftarrow$ Άτοπο.

Άρα $\lambda = 0 \Rightarrow \mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}z_2$
είναι και $|z_1| = |z_2|$ $\Big\} \Rightarrow M(z_1) \equiv M(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2.$

▼ Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

Θ. $\boxed{\lambda = |z| \wedge \varphi \text{ όρισμα } z \Leftrightarrow z = \lambda(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi).}$: $\lambda > 0$

Απόδειξη



<u>Ευθυ</u> : Εστω $|z|=\lambda \wedge \varphi$ όρισμα z.

▸ Παίρνω $M(z)$ και $\Pi = \text{προβ}_{x'x} M \Rightarrow \overline{O\Pi} = |\overrightarrow{OM}|\,\text{συν}\varphi \Rightarrow Re(z)=|z|\,\text{συν}\varphi$

$P = \text{προβ}_{y'y} M \Rightarrow \overline{OP} = |\overrightarrow{OM}|\,\text{ημ}\varphi \Rightarrow Im(z)=|z|\,\text{ημ}\varphi$

$\Rightarrow z = Re(z)+i\cdot Im(z) = |z|\,\text{συν}\varphi + i\,|z|\,\text{ημ}\varphi = |z|(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi) = \lambda(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$.

<u>Αντίστροφο</u> : Εστω $\lambda>0 \wedge z=\lambda(\text{συν}\vartheta + i\,\text{ημ}\vartheta)$

Αρκεί $|z|=\lambda$ και ϑ όρισμα z.

•1 $|z|^2 = |\lambda\,\text{συν}\vartheta + i\,\lambda\,\text{ημ}\vartheta|^2 = \lambda^2\text{συν}^2\vartheta + \lambda^2\text{ημ}^2\vartheta = \lambda^2(\text{συν}^2\vartheta + \text{ημ}^2\vartheta) = \lambda^2 \Rightarrow |z| = \lambda$

•2 Εστω φ ένα όρισμα του z. $\Rightarrow z=\lambda(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$

ευθύ

Είναι και $z=\lambda(\text{συν}\vartheta + i\,\text{ημ}\vartheta)$

$\Rightarrow \text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi = \text{συν}\vartheta + i\,\text{ημ}\vartheta \Rightarrow \begin{cases} \text{συν}\varphi = \text{συν}\vartheta \\ \text{ημ}\varphi = \text{ημ}\vartheta \end{cases} \Rightarrow \exists\, k\in\mathbb{Z} : \vartheta = \varphi + 2k\pi$, φ όρισμα z $\Rightarrow \vartheta$ όρισμα z.

1) Αν $z=\lambda(\text{συν}\vartheta + i\,\text{ημ}\vartheta)$ με $\lambda<0 \Rightarrow z = -\lambda[\text{συν}(\pi+\vartheta) + i\,\text{ημ}(\pi+\vartheta)]$

2) Αν $|z|=1 \Leftrightarrow \exists\, \vartheta\in\mathbb{R} : z = \text{συν}\vartheta + i\,\text{ημ}\vartheta$

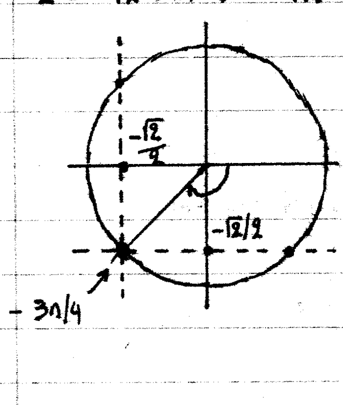
• Για να γράψω τον $z=\alpha+\beta i$ σε τριγωνομετρική μορφή, δουλεύω ως εξής:

1) Βρίσκω το μέτρο του $\rho = |z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

2) Προσδιορίζω ένα όρισμα από το σύστημα $\begin{cases} \text{συν}\varphi = \dfrac{\alpha}{\rho} \\ \text{ημ}\varphi = \dfrac{\beta}{\rho} \end{cases}$ και βάζοντας τις λύσεις στο διάστημα $(-\pi,\pi]$, βρίσκω το $\varphi_0 = Arg\, z$.

<u>παραδειγμα</u> : Να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ο $z=-\sqrt{2}(1+i)$

$z = -\sqrt{2}(1+i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot i \Rightarrow |z| = \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{συν}\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ημ}\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\pi < \varphi \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$



Αρα $z = 2\left(\text{συν}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{ημ}\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right)\right)$

β' τρόπος

- 1 Φέρνω τον z στην μορφή $\alpha+\beta i$.
- 2 Βρίσκω το z και το βγάζω κοινό παράγοντα
- 3 Αν $z=\rho(-\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\eta\mu\vartheta)=\rho(\sigma\upsilon\nu(\pi-\vartheta)+i\eta\mu(\pi-\vartheta))$

  Αν $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\vartheta-i\eta\mu\vartheta)=\rho(\sigma\upsilon\nu(-\vartheta)+i\eta\mu(-\vartheta))$

  Αν $z=\rho(-\sigma\upsilon\nu\vartheta-i\eta\mu\vartheta)=\rho(\sigma\upsilon\nu(\pi+\vartheta)+i\eta\mu(\pi+\vartheta))$

- $$\boxed{\begin{array}{ll} 1=\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0 & i=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\eta\mu\frac{\pi}{2} \\ -1=\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi & -i=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{array}}$$

Παραδείγματα

1) $z=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)=$

$=2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}+i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}|z|=2\\ \varphi=\frac{2\pi}{3} \text{ ένα όρισμα } z.\end{cases}$

2) $z=1-\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha=2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}+i\cdot 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\left(\eta\mu\frac{\alpha}{2}+i\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

!!! • i) Αν $\eta\mu\frac{\alpha}{2}>0\Leftrightarrow 2\kappa\pi<\frac{\alpha}{2}<(2\kappa+1)\pi\Leftrightarrow 4\kappa\pi<\alpha<(4\kappa+2)\pi$

τότε η $z=2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$ είναι η τριγ. μορφή του z

$\Rightarrow\begin{cases}|z|=2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\\ \varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} \text{ ένα όρισμα του } z.\end{cases}$

ii) Αν $\eta\mu\frac{\alpha}{2}<0\Leftrightarrow(2\kappa-1)\pi<\frac{\alpha}{2}<2\kappa\pi\Leftrightarrow(4\kappa-2)\pi<\alpha<4\kappa\pi.$

τότε $z=2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$

$=-2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$

$= -2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \Rightarrow \begin{cases} |z| = -2\eta\mu\frac{\alpha}{2} \\ \varphi = \frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} \end{cases}$ ένα όρισμα του z.

iii) Αν $\eta\mu\frac{\alpha}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=\kappa\pi \Leftrightarrow \alpha = 2\kappa\pi$

τότε $z=0 \Rightarrow \nexists$ τριγ. μορφή.

3) Δύο μιγαδικοί έχουν μέτρα: $|z_1|=3\mu-2$, $|z_2|=2\mu+7$ και ορίσματα $\varphi_1=\frac{(7\lambda+1)\pi}{4}$, $\varphi_2=\frac{(3\lambda+4)\pi}{2}$. Να βρεθούν τα $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $z_1=z_2$.

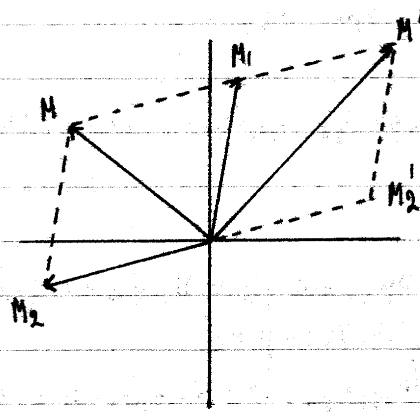
Λύση

$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1|=|z_2| \\ \varphi_1-\varphi_2=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu-2=2\mu+7 \\ \frac{(7\lambda+1)\pi}{4}-\frac{(3\lambda+4)\pi}{2}=2\kappa\pi \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu-2\mu=7+2 \\ 7\lambda+1-2(3\lambda+4)=8\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=9 \\ 7\lambda+1-6\lambda-8=8\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=9 \\ \lambda=8\kappa+7 \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$

▼ Μέτρο και ορίσματα μιγαδικού στις πράξεις.

1) Άθροισμα των μιγαδικών $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$



Έστω $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M(z_1+z_2)$, $M'(z_1-z_2)$, $M_2'(-z_2)$.

$z_1+z_2=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i$

$z_1-z_2=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)i$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |z_1+z_2|=\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2} \\ |z_1-z_2|=\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2}=d(M_1,M_2) \end{array}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} \vec{OM_1}+\vec{OM_2}=\vec{OM} \\ \vec{OM_1}-\vec{OM_2}=\vec{OM_1}+\vec{OM_2'}=\vec{OM'} \end{array}}$

Θ. $\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ \big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|}$

Απόδειξη:

Έστω $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M(z_1+z_2) \Rightarrow \vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} \Rightarrow |\vec{OM}| = |z_1+z_2|$. $\vec{M_1M} = \vec{OM_2}$.

Στο OM_1M: $\big||\vec{OM_1}| - |\vec{M_1M}|\big| \leqslant |\vec{OM}| \leqslant |\vec{OM_1}| + |\vec{OM_2}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \big||\vec{OM_1}| - |\vec{OM_2}|\big| \leqslant |\vec{OM}| \leqslant |\vec{OM_1}| + |\vec{OM_2}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$

Αν θέσω όπου z_2 το $-z_2$ έχω και

$\big||z_1|-|z_2|\big| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$. QED.

$\hookrightarrow$ $\boxed{\forall z_1, z_2, \dots, z_\nu \in \mathbb{C}: \ |z_1+z_2+\dots+z_\nu| \leqslant |z_1|+|z_2|+\dots+|z_\nu|}$

2) Πολλαπλασιασμός των

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l} z_1, z_2, \dots, z_\nu \in \mathbb{C}^* \\ \varphi_i \text{ όρισμα } z_i, \ \forall i \in \{1,2,\dots,\nu\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_\nu| \\ \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_\nu \text{ όρισμα } z_1 z_2 \cdots z_\nu. \end{array}\right.}$

Απόδειξη

Για $\nu = 2$, έστω z_1, z_2 με $\left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = \text{όρισμα } z_1 \\ \varphi_2 \text{ όρισμα } z_2 \end{array}\right.$.

► Αν $\rho_1 = |z_1|$, $\rho_2 = |z_2|$ τότε

$\left.\begin{array}{l} z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1) \\ z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2) \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\eta\mu\varphi_1)(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\eta\mu\varphi_2) =$

$= \rho_1\rho_2\big[(\sigma\upsilon\nu\varphi_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi_2 - \eta\mu\varphi_1\,\eta\mu\varphi_2) + i(\eta\mu\varphi_1\,\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + \eta\mu\varphi_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi_1)\big] =$

$\left.\begin{array}{l} = \rho_1\rho_2\big[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2)\big] \\ \rho_1>0 \wedge \rho_2>0 \Rightarrow \rho_1\rho_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |z_1 z_2| = \rho_1\rho_2 \\ \varphi_1+\varphi_2 \text{ ένα όρισμα του } z_1 z_2. \end{array}\right.$

Επαγωγικά, $\forall \nu \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ισχύει το θεώρημα. QED.

$\hookrightarrow$ $\boxed{\left.\begin{array}{l} z \in \mathbb{C}^* \\ \varphi \text{ όρισμα του } z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |z^\nu| = |z|^\nu \\ \nu\varphi \text{ όρισμα του } z^\nu \end{array}\right., \forall \nu \in \mathbb{N}^*}$

3) Διαίρεση

Θ. $\boxed{\left.\begin{matrix} z\in\mathbb{C}^* \\ \varphi \text{ όρισμα } z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \\ -\varphi \text{ όρισμα } 1/z \end{cases}}$

Απόδειξη

▸ Εστω ϑ όρισμα του $\frac{1}{z}$ είναι και φ όρισμα του z $\Big\} \Rightarrow \vartheta+\varphi$ όρισμα του $z\cdot\frac{1}{z}=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\, k\in\mathbb{Z}: \vartheta+\varphi = \mathrm{Arg}\,1 + 2k\pi = 0+2k\pi = 2k\pi \Rightarrow \left.\begin{matrix}\vartheta = -\varphi+2k\pi \\ \vartheta \text{ όρισμα } \frac{1}{z}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vartheta - 2k\pi = (-\varphi+2k\pi)-2k\pi = \underline{-\varphi \text{ όρισμα } \tfrac{1}{z}}.$$

$$z\cdot\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \left|z\cdot\frac{1}{z}\right| = |1| = 1 \Rightarrow |z|\cdot\left|\frac{1}{z}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{. QED.}$$

$\boxed{\left.\begin{matrix} z_1, z_2 \in\mathbb{C}^* \\ \varphi_1 \text{ όρισμα } z_1 \wedge \varphi_2 \text{ όρισμα } z_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \varphi_1-\varphi_2 \text{ όρισμα του } \frac{z_1}{z_2}. \end{cases}}$

4) Δύναμη με εκθέτη ακέραιο

Θ. $\boxed{\left.\begin{matrix} z\in\mathbb{C}^* \\ \varphi \text{ όρισμα του } z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \forall k\in\mathbb{Z}: \begin{cases} |z^k| = |z|^k \\ k\varphi \text{ όρισμα } z^k \end{cases}}$

Απόδειξη

Αν $k\in\mathbb{N}$, το θεώρημα έχει δειχθεί.

Εστω $k=-\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, οπότε

$$|z^k| = |z^{-\nu}| = \left|\frac{1}{z^\nu}\right| = \frac{1}{|z^\nu|} = \frac{1}{|z|^\nu} = |z|^{-\nu} = |z|^k$$

και φ όρισμα $z \Rightarrow \nu\varphi$ όρισμα $z^\nu \Rightarrow -\nu\varphi$ όρισμα $\frac{1}{z^\nu} = z^{-\nu} = z^k \Rightarrow$

$\Rightarrow k\varphi$ όρισμα z^k.

Αρα το θ. ισχύει $\forall k\in\mathbb{Z}$.

ΑΡΑ: (για τις ασκήσεις)

$$z_1=\rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1+i\eta\mu\varphi_1),\quad z_2=\rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2+i\eta\mu\varphi_2) \Rightarrow \begin{cases} z_1z_2=\rho_1\rho_2[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1+\varphi_2)+i\eta\mu(\varphi_1+\varphi_2)] \\ z_1^\nu=\rho_1^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi_1)+i\eta\mu(\nu\varphi_1)] \\ \dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{\rho_1}[\sigma\upsilon\nu(-\varphi_1)+i\eta\mu(-\varphi_1)] \\ \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\varphi_1-\varphi_2)+i\eta\mu(\varphi_1-\varphi_2)]. \end{cases}$$

Παραδείγματα.

1) Να γίνουν οι πράξεις: $A=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{13}}{(\sqrt{3}-i)^3}$

Λύση

Θέτω $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2} \underset{|z|=\sqrt{2}}{=} \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}+i\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow z_1^{13}=(\sqrt{2})^{13}\left[\sigma\upsilon\nu\dfrac{13\pi}{3}+i\eta\mu\dfrac{13\pi}{3}\right]=2^6\cdot\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)+i\eta\mu\left(4\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=$

$=2^6\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}+i\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\right]$

Θέτω $z_2=\sqrt{3}-i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}-i\eta\mu\dfrac{\pi}{6}\right)=2\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow z_2^3=2^3\left[\sigma\upsilon\nu\left(-3\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)+i\eta\mu\left(-3\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=8\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

Άρα $A=\dfrac{z_1^{13}}{z_2^3}=\dfrac{64\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right]}{8\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}=$

$=\dfrac{64\sqrt{2}}{8}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=8\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{6}+i\eta\mu\dfrac{5\pi}{6}\right]=$

$=8\sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\eta\mu\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=8\sqrt{2}\left[-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}+i\eta\mu\dfrac{\pi}{6}\right]=$

$=8\sqrt{2}\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right]=-4\sqrt{6}+i\,4\sqrt{2}$

2) Αν $z=1+i$ να βρεθεί ένα όρισμα των $z, z^2, z^3, \ldots, z^8$

Ύστερα να βρεθεί ένα όρισμα του z^{1220}

Λύση

$z = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(συν\frac{π}{4} + i\,ημ\frac{π}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ένα όρισμα του z είναι το $π/4 = \mathrm{Arg}z$

» » » z^2 » » $2\cdot(π/4) = π/2$

» » » z^3 » » $3(π/4) = 3π/4$.

» » » z^4 » » $4(π/4) = π$

» » » z^5 » » $5(π/4) = 5π/4$

» » » z^6 » » $6(π/4) = 3π/2$

» » » z^7 » » $7(π/4) = 7π/4$

» » » z^8 » » $2π \Rightarrow$ ένα άλλο όρισμα του z^8 είναι το 0.

Άρα $z^{1220} = z^{8\cdot 152+4} = (z^8)^{152}\cdot z^4$ έχει ένα όρισμα το $0\cdot 152 + π = π$.

3) Αν $\left.\begin{matrix} συνα+συνβ+συνγ=0 \\ ημα+ημβ+ημγ=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ημ2α+ημ2β+ημ2γ=0 \\ συν2α+συν2β+συν2γ=0. \end{cases}$

Λύση

Έστω $\left.\begin{matrix} z_1 = συνα + iημα \\ z_2 = συνβ + iημβ \\ z_3 = συνγ + iημγ \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_1+z_2+z_3 = (συνα+συνβ+συνγ) + i(ημα+ημβ+ημγ) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z_1+z_2+z_3)^2 = 0 \Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (συνα+iημα)^2 + (συνβ+iημβ)^2 + (συνγ+iημγ)^2 = -2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow συν2α + iημ2α + συν2β + iημ2β + συν2γ + iημ2γ = -2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (συν2α+συν2β+συν2γ) + i(ημ2α+ημ2β+ημ2γ) = -2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$. (1)

- $\left.\begin{matrix} |z_1| = συν^2α+ημ^2α = 1 \\ |z_2| = συν^2β+ημ^2β = 1 \\ |z_3| = συν^2γ+ημ^2γ = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = 1 \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{\bar{z}_1} \\ z_2 = \frac{1}{\bar{z}_2} \\ z_3 = \frac{1}{\bar{z}_3} \end{cases}$

Άρα $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 = \frac{1}{\bar{z}_1\bar{z}_2} + \frac{1}{\bar{z}_2\bar{z}_3} + \frac{1}{\bar{z}_3\cdot\bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3}{\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3} = \frac{\overline{(z_1+z_2+z_3)}}{\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3} = 0 \Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} (συν2α+συν2β+συν2γ) + i(ημ2α+ημ2β+ημ2γ) = 0 \Rightarrow \begin{cases} συν2α+συν2β+συν2γ = 0 \\ ημ2α+ημ2β+ημ2γ = 0. \end{cases}$

▼ Νιοστές ρίζες μιγαδικού α.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζεται ν-οστή ρίζα ενος μιγαδικού αριθμού α κάθε μιγαδικός z τέτοιος ώστε $z^\nu=\alpha$.

δηλ. $\boxed{z \ \nu\text{-οστή ρίζα } \alpha \Leftrightarrow z^\nu=\alpha.}$

① Νιοστές ρίζες της μονάδας

Θ. Νιοστές ρίζες της μονάδας είναι οι ν αριθμοί

$$\boxed{\zeta_\upsilon = \text{συν}\frac{2\upsilon\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\upsilon\pi}{\nu}} \quad \text{όπου } \upsilon=0,1,2,\dots,\nu-1.$$

Απόδειξη

Έστω $\zeta=|\zeta|(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)$ μια νιοστή ρίζα του $1 \Leftrightarrow \zeta^\nu=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |\zeta|^\nu(\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)) = \text{συν}0+i\text{ημ}0 \Leftrightarrow \begin{cases}|\zeta|^\nu=1\\ \nu\theta=2\kappa\pi+0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\zeta|=1\\ \theta=\frac{2\kappa\pi}{\nu}\end{cases} :\kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \zeta = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu} : \kappa\in\mathbb{Z}. \quad (1)$$

Αρα όλες οι νιοστες ρίζες του 1 είναι της μορφής (1).

π.χ. για $\kappa=0 \Rightarrow \zeta_0 = \text{συν}0+i\text{ημ}0=1.$

για $\kappa=1 \Rightarrow \zeta_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}.$

$\forall\kappa\in\mathbb{Z}: \zeta_\kappa = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^\kappa = \zeta_1^\kappa \Rightarrow \forall\kappa\in\mathbb{Z}: \zeta_\kappa=\zeta_1^\kappa.$

▶ Θα δείξω ότι $\forall\kappa\in\mathbb{Z}$ η ρίζα ζ_κ ταυτίζεται με μια άπο τις $\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_{\nu-1}$.

Αν $0\le\kappa\le\nu-1$ τότε ισχύει προφανώς. Έστω $\kappa\ge\nu$.

Κάνω την διαίρεση $\begin{array}{c|c} \kappa & \nu \\ \hline \upsilon & \rho \end{array} \Rightarrow \kappa=\rho\nu+\upsilon. : \upsilon\in\{0,1,2,\dots,\nu-1\}.$

Είναι $\zeta_\kappa=\zeta_1^\kappa=\zeta_1^{\rho\nu+\upsilon}=\zeta_1^{\rho\nu}\cdot\zeta_1^\upsilon=(\zeta_1^\nu)^\rho\zeta_1^\upsilon=1^\rho\zeta_1^\upsilon=\zeta_1^\upsilon=\underline{\zeta_\upsilon}$

Αρα $\forall\kappa\in\mathbb{Z}, \exists\upsilon\in\{0,1,2,\dots,\nu-1\}: \zeta_\kappa=\zeta_\upsilon.$

▶ Θα δείξω ότι $\forall\lambda,\mu\in\{0,1,2,\dots,\nu-1\}: \lambda\ne\mu \Rightarrow \zeta_\lambda\ne\zeta_\mu.$

ότι δηλαδη οι $\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_{\nu-1}$ είναι μεταξύ τους άνισες.

Έστω $\zeta_\lambda=\zeta_\mu : 0\le\lambda<\mu<\nu \Leftrightarrow \zeta_1^\lambda=\zeta_1^\mu \Leftrightarrow \zeta_1^{\mu-\lambda}=1 \Leftrightarrow \zeta_{\mu-\lambda}=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\frac{2(\mu-\lambda)\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2(\mu-\lambda)\pi}{\nu}=\text{συν}0+i\text{ημ}0 \Leftrightarrow \frac{2(\mu-\lambda)\pi}{\nu}=2\kappa\pi+0 \Leftrightarrow \frac{\mu-\lambda}{\nu}=\kappa \leftarrow \text{Άτοπο}$$

διότι ~~$\mu<\nu\Rightarrow\mu-\lambda<\nu$~~

$$0\le\lambda<\mu<\nu \Rightarrow 0<\mu-\lambda<\nu \Rightarrow \frac{\mu-\lambda}{\nu}\notin\mathbb{Z} \Rightarrow \kappa\notin\mathbb{Z}.$$

ΑΡΑ: Το πλήθος των ν-οστων ριζων του 1 είναι ν και αυτές είναι οι

$$\zeta_\upsilon=\text{συν}\frac{2\upsilon\pi}{\nu}+i\text{ημ}\frac{2\upsilon\pi}{\nu}$$

• Ιδιότητες των ν-οστων ριζών της μονάδας.

1) $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{Z}: \mathfrak{z}_\lambda \cdot \mathfrak{z}_{\nu-\lambda} = 1.}$

Απόδειξη

Είναι $\forall \lambda \in \mathbb{Z}: \mathfrak{z}_\lambda \cdot \mathfrak{z}_{\nu-\lambda} = \mathfrak{z}_1^\lambda \cdot \mathfrak{z}_1^{\nu-\lambda} = \mathfrak{z}_1^{\lambda+\nu-\lambda} = \mathfrak{z}_1^\nu = 1$

Πόρισμα: $\boxed{\mathfrak{z}_0 \cdot \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{z}_{\nu-1} = 1}$

2) $\boxed{\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \cdots + \mathfrak{z}_{\nu-1} = 0}$

Απόδειξη

Είναι $A = \mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \cdots + \mathfrak{z}_{\nu-1} = 1 + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_1^2 + \cdots + \mathfrak{z}_1^{\nu-1} = \dfrac{\mathfrak{z}_1^\nu - 1}{\mathfrak{z}_1 - 1} = \dfrac{1-1}{\mathfrak{z}_1 - 1} = \dfrac{0}{\mathfrak{z}_1 - 1} = 0 = B.$

3) Το $E = \{\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_\nu\}$ είναι πολλαπλασιαστική υποομάδα της ομάδας $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

Δηλαδή.

$\boxed{E = \{\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\nu\} \text{ υποομάδα της ομάδας } (\mathbb{C}^*, \cdot)}$

Απόδειξη : $E \neq \emptyset \land E \subset \mathbb{C}^*$

• Κλειστό : Έστω $\mathfrak{z}_\lambda, \mathfrak{z}_\mu \in E \Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{z}_\lambda^\nu = 1 \\ \mathfrak{z}_\mu^\nu = 1. \end{cases} \Rightarrow (\mathfrak{z}_\lambda \mathfrak{z}_\mu)^\nu = \mathfrak{z}_\lambda^\nu \cdot \mathfrak{z}_\mu^\nu = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \mathfrak{z}_\lambda \mathfrak{z}_\mu \in E, \forall \mathfrak{z}_\lambda, \mathfrak{z}_\mu \in E$

$\Rightarrow$ E κλειστό ως προς "$\cdot$".

• Συμμετρικό : Έστω $\mathfrak{z}_\lambda \in E \Rightarrow \mathfrak{z}_\lambda^\nu = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\mathfrak{z}_\lambda}\right)^\nu = \dfrac{1}{\mathfrak{z}_\lambda^\nu} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\mathfrak{z}_\lambda} \in E, \forall \mathfrak{z}_\lambda \in E$

Άρα: E υποομάδα της ομάδας $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

• Κυβικές ρίζες του 1.

Είναι οι εξής τρεις αριθμοί: $\mathfrak{z}_0 = \text{συν}0 + i\text{ημ}0 = 1.$

$\mathfrak{z}_1 = \text{συν}\dfrac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

$\mathfrak{z}_2 = \text{συν}\dfrac{4\pi}{3} + i\text{ημ}\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ } συζυγείς.

$\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + 1 = 0, \ \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 = 1, \ \mathfrak{z}_1^3 = 1 = \mathfrak{z}_2^3$

Αν $\mathfrak{z}$ μία μιγαδική κυβική ρίζα του 1, δηλ $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 \lor \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_2$ τότε

$1 + \mathfrak{z} + \mathfrak{z}^2 = 0$

$\mathfrak{z}^3 = 0.$

② Νιοστές ρίζες μιγαδικού $\alpha \neq 0$

Θ. Νιοστές ρίζες του $\alpha = |\alpha|(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)$ είναι οι ν αριθμοί

$$\boxed{z_\kappa = \sqrt[\nu]{|\alpha|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}\right)}, \quad \kappa \in \{0,1,2,\dots,\nu-1\}.$$

Απόδειξη

Έστω $\alpha = |\alpha|(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi) \neq 0$. Έστω $z = |z|(\sigma\upsilon\nu\vartheta + i\eta\mu\vartheta)$.

z ν-οστή ρίζα $\alpha \Leftrightarrow z^\nu = \alpha \Leftrightarrow |z|^\nu(\sigma\upsilon\nu(\nu\vartheta) + i\eta\mu(\nu\vartheta)) = |\alpha|(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^\nu = |\alpha| > 0 \\ \nu\vartheta = \varphi + 2\kappa\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[\nu]{|\alpha|} \\ \vartheta = \dfrac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu} \end{cases} \Leftrightarrow z_\kappa = \sqrt[\nu]{|\alpha|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}\right), \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Άλλα $z_\kappa = \sqrt[\nu]{|\alpha|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\varphi+2\kappa\pi}{\nu}\right) = \sqrt[\nu]{|\alpha|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\varphi}{\nu}\right)\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right) =$

$= z_0 \delta_\kappa$ άρα

$\forall \kappa \in \mathbb{Z}, \exists \upsilon \in \{0,1,2,\dots,\nu-1\} : \overset{z_\kappa = z_\upsilon}{\cancel{\delta_\kappa = \delta_\upsilon}}$. και

$\forall \lambda, \mu \in \{0,1,2,\dots,\nu-1\} : \lambda \neq \mu \Rightarrow z_\lambda \neq z_\mu$.

οπότε οι ν πρώτες ν-οστές ρίζες είναι όλες οι ν-οστές ρίζες του α και ο α έχει ν ν-οστές ρίζες.

▼ Εξισώσεις ανωτέρου του β' βαθμού

→ **Διώνυμες εξισώσεις:** $\boxed{z^\nu = \alpha}$ όπου $\alpha = a + bi$: $a, b \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα

1) $z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow z^2 = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow z^2 = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow z_\kappa = \sqrt{1}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2\kappa\pi}{2} + i\eta\mu\dfrac{\frac{2\pi}{3}+2\kappa\pi}{2}\right) : \kappa \in \{0,1\}$.

άρα $z_0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_1 = \sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{6} + i\eta\mu\frac{8\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - i\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$