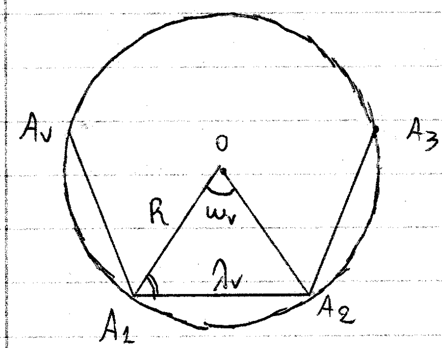
• <u>Υπολογισμός του π</u>



Στο $O\overset{\triangle}{\hat{A}_1A_2}$, θ. ημιτόνων $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_\nu}{\eta\mu\,\omega_\nu} = \frac{R}{\eta\mu\, O\hat{A}_1A_2}$$

Είναι $\eta\mu\, O\hat{A}_1A_2 = \eta\mu\left(\frac{180-\omega_\nu}{2}\right) = \eta\mu\left(90-\frac{\omega_\nu}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\omega_\nu}{2}$

οπότε,

$$\lambda_\nu = R\cdot\frac{\eta\mu\,\omega_\nu}{\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_\nu}{2}} = \frac{2\eta\mu\frac{\omega_\nu}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_\nu}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_\nu}{2}}\cdot R = 2R\,\eta\mu\frac{\omega_\nu}{2} = 2R\,\eta\mu\frac{180}{\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \lim s_\nu = \lim \nu\lambda_\nu = 2R\cdot\lim\left(\nu\cdot\eta\mu\frac{180}{\nu}\right) \Rightarrow \pi = \frac{L}{2R} = \lim\left(\nu\cdot\eta\mu\frac{180}{\nu}\right)$$

Είναι $\lim\left(\nu\cdot\eta\mu\frac{180}{\nu}\right) = \lim\left(2^\nu\cdot\eta\mu\frac{180}{2^\nu}\right)$ οποτε αρκει να υπολογισω το $\eta\mu\frac{180}{2^\nu}$ ή το $\sigma\upsilon\nu\frac{180}{2^\nu}$

Παίρνω ένδειξη για το $\sigma\upsilon\nu(180/2^\nu)$.

Για $\nu=2$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2^2}\right) = \sigma\upsilon\nu 45 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Για $\nu=3$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2^3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{45}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 45}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Υποθέτω ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2^\nu}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu-1\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$

Θα δείξω ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2^{\nu+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2^{\nu+1}}\right) = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2^\nu}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{2+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2^\nu}\right)}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu-1\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}} =$$

$= \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$ οπότε επαγωγικα η υπόθεση ισχύει.

Εχω λοιπόν $\eta\mu\left(\frac{180}{2^\nu}\right) = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{180}{2^\nu}\right)} = \sqrt{1-\frac{1}{4}\left(\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}_{\nu-1\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}\right)} =$

$$= \sqrt{\frac{4-\overbrace{(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}})}^{\nu-2\ \varphi o\rho!}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu-1\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}}$$

Οπότε

$$\pi = \lim\left(2^{\nu}\cdot \eta\mu\left(\frac{180}{2^{\nu}}\right)\right) = \lim\left(2^{\nu}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu-1 \text{ φορες}}\right) = \lim\left(2^{\nu-1}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu-1 \text{ φορές}}\right) =$$

$$= \lim\left(2^{\nu}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots}}}_{\nu \text{ φορες}}\right)$$

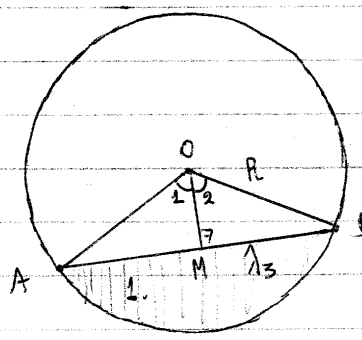
και $\boxed{\pi = \lim\left[2^{\nu}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu \text{ φορες}}\right]}$

δηλαδη το π είναι το οριο της ακολουθίας $a_\nu = 2^{\nu}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}_{\nu \text{ φορές.}}$

(17) Να βρεθεί το εμβαδο καθενός απο τα δύο μέρη στα οποία διαιρείται ένας κύκλος απο την πλευρα

α) ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σ' αυτόν

β) τετραγώνου εγγεγραμμένου σε αυτόν.



α) $E_1 = E_{A\hat{O}B} - (OAB)$.

► Φέρνω $OM \perp AB$ $\Rightarrow$ OM διχ $\Rightarrow$

$OA = OB = R \Rightarrow OAB$ ισοσκελες

$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{120}{2} = 60$

$O\hat{M}B$ ορθ., $O_2 = 60$ $\Rightarrow OM = \frac{OB}{2} =$

$$(OAB) = \frac{AB\cdot OM}{2} = \frac{\lambda_3 a_3}{2} = \frac{(R\sqrt{3})\cdot\frac{R}{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

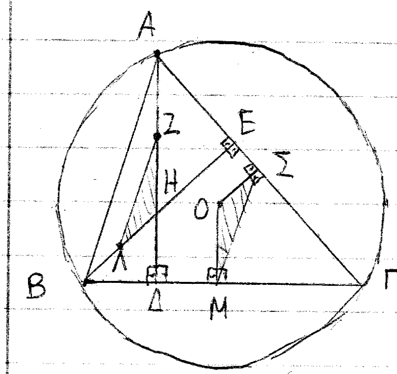
$$E_{A\hat{O}B} = \frac{120}{360}\pi R^2 = \frac{\pi R^2}{3}$$ οποτε

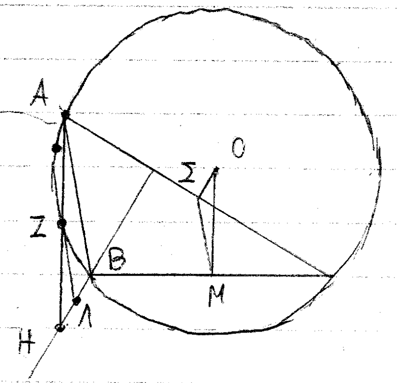
$$E_1 = E_{A\hat{O}B} - (O\hat{A}B) = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$$

$$E_2 = E_K - E_1 = \pi R^2 - \frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{12} = \frac{12\pi R^2 - (4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12} = \frac{(8\pi + 3\sqrt{3})R^2}{12}$$

• Το περίκεντρο Ο ενός τριγώνου $\hat{AB\Gamma}$ απέχει από κάθε πλευρά του το μισό της αποστάσεως του ορθόκεντρου Η. από την απέναντι κορυφή.

$\boxed{AH = 2OM}$





<u>Απόδειξη</u> : $OM \underset{\mu\varepsilon\sigma o}{\perp} B\Gamma$, $O\Sigma \underset{\mu\varepsilon\sigma o}{\perp} A\Gamma$.

▶ Ζ, Λ μέσα των ΗΑ, ΗΒ

▶ Φέρνω ΖΛ, ΣΜ.

Θα δείξω ότι $OM = HZ$ και $O\Sigma = H\Lambda$.

$\left.\begin{array}{l} Z \text{ μέσο } AH \\ \Lambda \text{ μέσο } BH \end{array}\right) \xRightarrow{\hat{HAB}} Z\Lambda =// \frac{AB}{2}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} O\Sigma \underset{\mu\varepsilon\sigma o}{\perp} A\Gamma \Rightarrow \Sigma \text{ μέσο } A\Gamma \\ OM \underset{\mu\varepsilon\sigma o}{\perp} B\Gamma \Rightarrow M \text{ μέσο } B\Gamma \end{array}\right) \xRightarrow{\hat{AB\Gamma}} \Sigma M =// \frac{AB}{2}$ (2)

(1) ∧ (2) ⟹ <u>$Z\Lambda =// \Sigma M$</u> (3)

$\left.\begin{array}{l} OM \perp B\Gamma \\ A\Delta \perp B\Gamma \end{array}\right) \Rightarrow OM // A\Delta \Rightarrow \underline{OM // ZH}$ (4) και $\left.\begin{array}{l} O\Sigma \perp A\Gamma \\ BE \perp A\Gamma \end{array}\right) \Rightarrow O\Sigma // BE \Rightarrow \underline{O\Sigma // \Lambda H}$ (5).

(3) ∧ (4) ∧ (5) ⟹ $O\hat{\Sigma}M = H\hat{\Lambda}Z$ (διότι έχουν πλευρές

$\Downarrow$

$O\hat{M}\Sigma = H\hat{Z}\Lambda$ παράλληλες).

(3) ⟹ $\underbrace{Z\Lambda = \Sigma M}$

$\Downarrow$

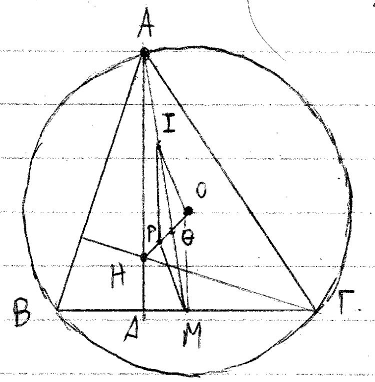
$\hat{OM\Sigma} = \hat{OHZ\Lambda} \Rightarrow$ $OM = HZ = \frac{AH}{2} \Rightarrow \boxed{AH = 2OM.}$

$O\Sigma = H\Lambda = \frac{BH}{2}$

• Η ευθεία του Euler

Αν O περίκεντρο
Θ βαρύκεντρο
H ορθόκεντρο του ΑΒΓ
$\Rightarrow$ 1) O, Θ, H συνευθειακά
2) $\boxed{H\Theta = \frac{2}{3} HO}$

↳ Η ευθεία στην οποία ανήκουν τα O, Θ, H λέγεται ευθεία του Euler



Απόδειξη: Έστω O περίκεντρο, H ορθόκεντρο, M μέσο ΒΓ.

- $\Theta = AM \cap OH$
- $I =$ μέσο ΘA
- $P =$ μέσο ΘH.

Στο $\overset{\triangle}{A\Theta H}$, I μέσο ΘΑ, P μέσο ΘΗ $\Rightarrow IP =\!\!/\!/ \frac{AH}{2}$ (1)

OM ⊥ ΒΓ (διότι O περίκεντρο), ΑΔ ⊥ ΒΓ (ως ύψος) $\Rightarrow$ ΑΔ // OM $\Rightarrow$ AH // OM, • AH = 2OM $\Rightarrow OM =\!\!/\!/ \frac{AH}{2}$ (2)

(1) ∧ (2) $\Rightarrow OM =\!\!/\!/ IP \Rightarrow$ OMPI # $\Rightarrow \Theta M = \Theta I \underset{\text{I μέσο ΘΑ}}{=} IA \Rightarrow A\Theta = \frac{2}{3} AM \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Θ βαρύκεντρο $\Rightarrow$ O, Θ, H συνευθειακά

ii) OMPI # $\Rightarrow O\Theta = \Theta P \underset{\text{P μέσο ΘΗ}}{=} PH \Rightarrow H\Theta = \frac{2}{3} HO$.

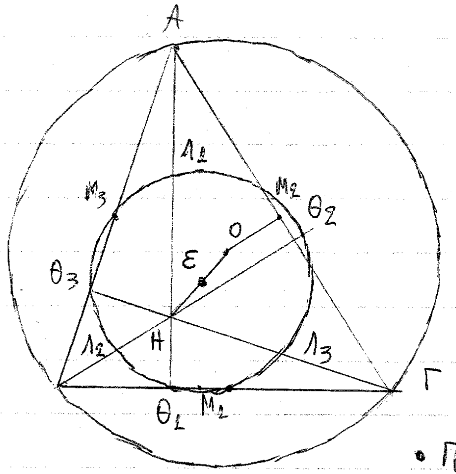
Προχειρον.   Ε

Ο κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του ~~Απολλωνίου~~ Euler.

•1 Σε κάθε τρίγωνο, 1) Τα μέσα των τριών πλευρών του
2) Τα ίχνη των τριών υψών του
3) Τα μέσα των αποστάσεων του ορθόκεντρου απο τις κορυφές του.

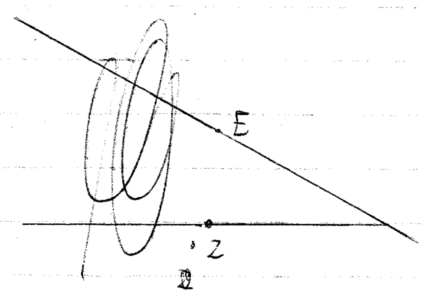
βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.

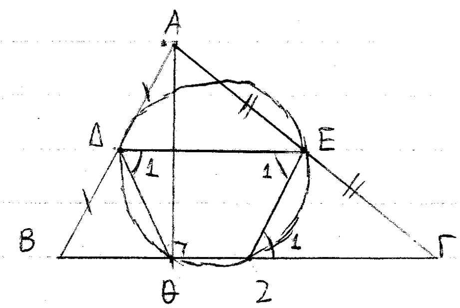
•2 Ο κύκλος αυτός, ε 1) Έχει κέντρο το μέσο του ΗΟ
2) Ακτίνα $R/2$.



• Πρώτα θα δείξω ότι

__Λημμα 1__: Ο κύκλος που διέρχεται απο τα μέσα των τριών πλευρών ενος τριγώνου $ΑΒΓ$, διέρχεται και άπο τα ίχνη των υψων του:





__Απόδειξη__ Αρκεί $ΔΕΖΘ$ εγγράψιμο. $\Rightarrow$ Αρκεί $\hat{Δ}_1 = \hat{Ζ}_1$.

$Δ$ μέσο $ΑΒ$, $Ε$ μέσο $ΑΓ$ (στο $ΑΒΓ$) $\Rightarrow ΔΕ \parallel ΒΓ \Rightarrow \underline{Ε_1 = Ζ_1}$ (ως εντος εναλλάξ) ~~μεταξύ~~

$ΑΘ$ ύψος $\Rightarrow ΑΘΒ$ ορθογώνιο, $ΘΔ$ διάμεσος $\Rightarrow ΘΔ = \frac{ΑΒ}{2}$

$Ζ$ μέσο $ΒΓ$, $Ε$ μεσο $ΑΓ$ $\Rightarrow ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2}$

$\Rightarrow ΕΖ = ΘΔ$, $ΔΕ \parallel ΒΓ$ $\Rightarrow ΔΕΖΘ$ ισοσκελές τραπέζιο

$\Downarrow$

$\underline{Δ_1 = Ε_1}$.

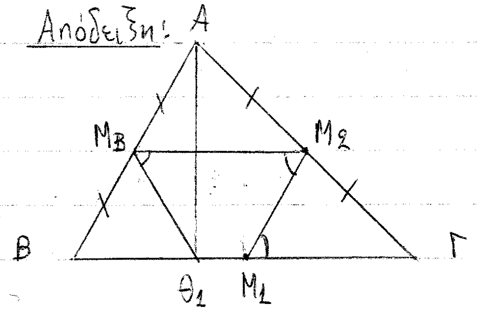
1) $\left.\begin{array}{l} H \text{ ορθόκεντρο} \\ O \text{ περίκεντρο} \\ M \text{ μέσο } B\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow AH = 2OM.$

2) $\left.\begin{array}{l} H \text{ ορθόκεντρο} \\ O \text{ περίκεντρο} \\ \Theta \text{ βαρύκεντρο} \end{array}\right\} \Rightarrow$ O, Θ, H συνευθειακά → ευθεία του Euler.
$\quad\quad\quad \rightarrow H\Theta = \frac{2}{3} HO$

Κύκλος του Euler → Είναι ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα μέσα M_1, M_2, M_3 των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma A$ του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.
Συμβολίζεται $(\varepsilon, r_\varepsilon)$

<u>Θεώρημα 1:</u> Αν $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ τα ίχνη των υψών $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$ τότε $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in (\varepsilon, r_\varepsilon)$

<u>Απόδειξη:</u>



Αρκεί $\Theta M_1 M_2 M_3$ εγγράψιμο.

$\left.\begin{array}{l} M_2 \text{ μέσο } A\Gamma \\ M_3 \text{ μέσο } AB \end{array}\right\}_{AB\Gamma} \Rightarrow M_2 M_3 \parallel B\Gamma \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ως εντός εναλλάξ)

$\left.\begin{array}{l} M_1 \cancel{M_2} \text{ μέσο } B\Gamma \\ M_2 \text{ μέσο } A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 M_2 = \frac{AB}{2}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} M_3 \text{ μέσο } AB \Rightarrow \text{Στο } \overset{\triangle}{A\Theta_1 B},\ \Theta_1 M_3 \text{ διάμεσος.} \\ \quad\quad A\Theta_1 \text{ ύψος} \Rightarrow \hat{\Theta}_1 = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \Theta_1 M_3 = \frac{AB}{2} \overset{(1)}{=} M_1 M_2$

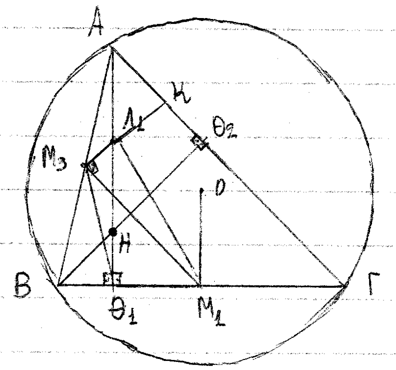
$M_2 M_3 \parallel B\Gamma \Rightarrow M_3 M_3 \parallel \Theta_1 M_1$ $\Bigg\} \Rightarrow \Theta_1 M_1 M_2 M_3$ ισοσκελές $\Rightarrow$ τραπέζιο

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{M}_2 = \hat{M}_3 \\ M_1 = M_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_3 \Rightarrow \Theta_1 M_1 M_2 M_3$ εγγράψιμο $\Rightarrow \Theta_1, M_1, M_2, M_3$ ομοκυκλικά $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Theta_1 \in (\varepsilon, r_\varepsilon)$. Όμοια, $\Theta_2, \Theta_3 \in (\varepsilon, r_\varepsilon)$.

<u>Θεώρημα 2.</u> Αν $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ τα μέσα των $AH, BH, \Gamma H$,
τότε $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \in (\varepsilon, r_\varepsilon)$

Αποδειξη



Αφου $M_3, \Theta_1, M_1 \in (\mathcal{E}, r_\varepsilon)$,
αρκει $M_3\Lambda_1M_1\Theta_1$ εγγράψιμο $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ αρκει $\Lambda_1\hat{M}_3M_1 = 90^\circ = \Lambda_1\hat{\Theta}_1M_1$

▶ Παίρνω $K = M_3\Lambda_1 \cap A\Gamma$ και φέρνω M_3K.
θα δείξω ότι $M_3K \perp A\Gamma$.

$H = A\Theta_1 \cap B\Theta_2 \Rightarrow H$ ορθόκεντρο $\Rightarrow A\Lambda_1 = \Lambda_1 H \Rightarrow \Lambda_1$ μέσο AH (εκ κατασκευής), M_3 μέσο AB $\xRightarrow{\hat{AHB}} \Lambda_1M_3 \parallel BH \Rightarrow$

$\Rightarrow M_3K \parallel B\Theta_2$, $B\Theta_2$ ύψος $\Rightarrow B\Theta_2 \perp A\Gamma$ $\Rightarrow \underline{M_3K \perp A\Gamma}$

όμως, M_1 μεσο $B\Gamma$, M_3 μεσο AB $\Rightarrow M_1M_3 \parallel A\Gamma$, $M_3K \perp A\Gamma$ $\Rightarrow M_3K \perp M_1M_3 \Rightarrow \Lambda_1\hat{M}_3M_1 = 90$

$A\Theta_1$ ύψος $\Rightarrow \Lambda_1\hat{\Theta}_1M_1 = 90$, $\Lambda_1\hat{M}_3M_1 = 90$ $\Rightarrow \Lambda_1\hat{\Theta}_1M_1 = \Lambda_1\hat{M}_3M_1 \Rightarrow \Lambda_1M_1\Theta_1M_3$ εγγράψιμο

$\Rightarrow \Lambda_1, M_1, \Theta_1, M_3$ ομοκυκλικά, $M_1, \Theta_1, M_3 \in (\mathcal{E}, r_\varepsilon)$ $\Rightarrow \Lambda_1 \in (\mathcal{E}, r_\varepsilon)$. Ομοια, $\Lambda_2, \Lambda_3 \in (\mathcal{E}, r_\varepsilon)$

Θεώρημα 3 Ο κύκλος $(\mathcal{E}, r_\varepsilon)$ έχει
1) $\mathcal{E}$ μέσο HO
2) $r_\varepsilon = R/2$ (• $R \to$ ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου).

Απόδειξη: Δείξαμε ότι $\Lambda_1M_3M_1 = 90 \Rightarrow \underline{\Lambda_1M_1 \text{ διάμετρος}}$.

$AH = 2OM$, Λ_1 μέσο AH $\Rightarrow$ $A\Lambda_1 = OM_1$, $\Lambda_1H = OM_1$; $A\Theta_1 \parallel OM_1$ (ως $\perp B\Gamma$) $\Rightarrow$ $A\Lambda_1 =\parallel OM_1 \Rightarrow OM_1H\Lambda_1$ #, $\Lambda_1H =\parallel OM_1 \Rightarrow OM_1\Lambda_1A$ #

▶ $\mathcal{E} = \Lambda_1M_1 \cap HO$. Θα δείξω ότι $\mathcal{E}$ το κέντρο του κύκλου Euler

i) $OM_1H\Lambda_1$ # $\Rightarrow \Lambda_1\mathcal{E} = \mathcal{E}M_1$, Λ_1M_1 διάμετρος $\Rightarrow \mathcal{E}$ κέντρο (ως μέσο της διαμέτρου).

$\Downarrow$

$H\mathcal{E} = \mathcal{E}O \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} \text{ μεσο } HO}$

$$\left.\begin{array}{l} ii)\ OM_1\Lambda_1A\,\# \Rightarrow \Lambda_1M_1 = AO. \\ O \text{ περίκεντρο} \Rightarrow AO = R \\ \Lambda_1M_1 \text{ διάμετρος} \Rightarrow \Lambda_1M_1 = 2r_E \end{array}\right\} \Rightarrow 2r_E = R \Rightarrow \boxed{r_E = \frac{R}{2}}$$