ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Γεωμετρικός τόπος είναι κάθε σημειοσύνολο G του οποίου τα σημεία και μόνον αυτά έχουν μία χαρακτηριστική ιδιότητα I.

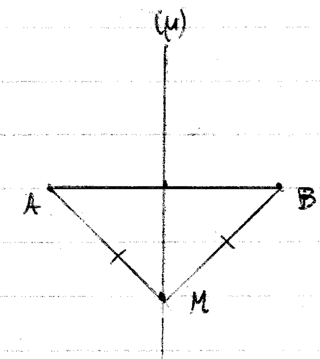
Δηλαδή $\boxed{G = \{M : I(M)\}}$

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

A) Ευθειογενείς

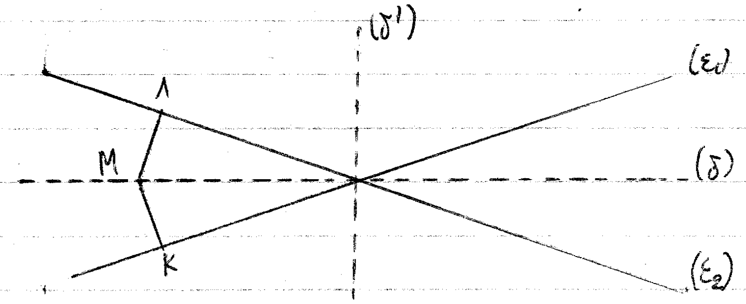
i) Μεσοκάθετος

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} M: MA=MB \\ AB=c^{te} \end{array}\right\} \Leftrightarrow M\in(\mu) \underset{\mu\varepsilon\sigma o}{\perp} AB}$$



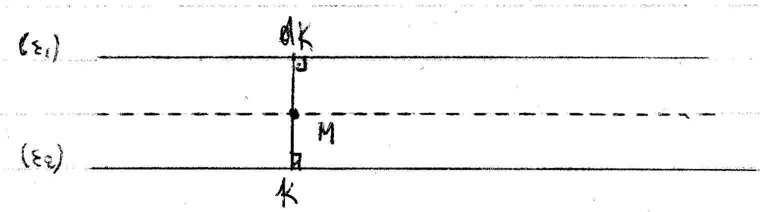
ii) Διχοτόμοι δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} M: MK=M\Lambda \\ MK\perp\varepsilon_1 \\ M\Lambda\perp\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\cap\varepsilon_2=A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} M\in(\delta)\cup(\delta') \\ \text{όπου } (\delta),(\delta') \text{ οι} \\ \text{διχοτ. της } (\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) \end{array}}$$

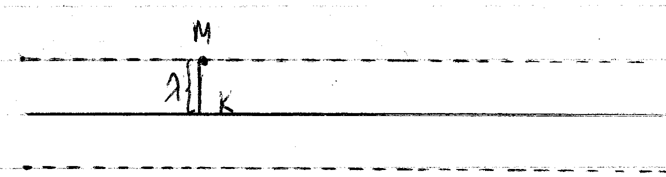


iii) Μεσοπαράλληλος

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} M: MK=M\Lambda \\ MK\perp\varepsilon_1 \\ M\Lambda\perp\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow M\in \mu\varepsilon\sigma o\pi /\!/ (\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$$



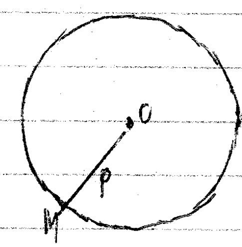
iv) $\boxed{\left.\begin{array}{l} M: MK=\lambda=c^{te} \\ K\in(\varepsilon)=c^{te} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M\in(\varepsilon'),(\varepsilon'') /\!/ (\varepsilon) \\ \text{σε απόσταση } \lambda \end{array}}$



B) Κυκλογενείς

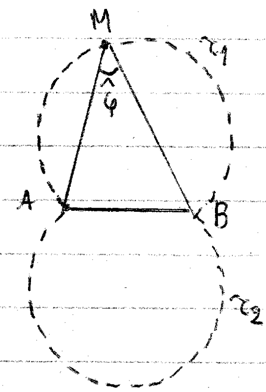
1) Κύκλος

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} M: MO=\rho=c^{te} \\ O=c^{te} \end{array}\right\} \Leftrightarrow M\in(O,\rho)}$$



2) Τόξο

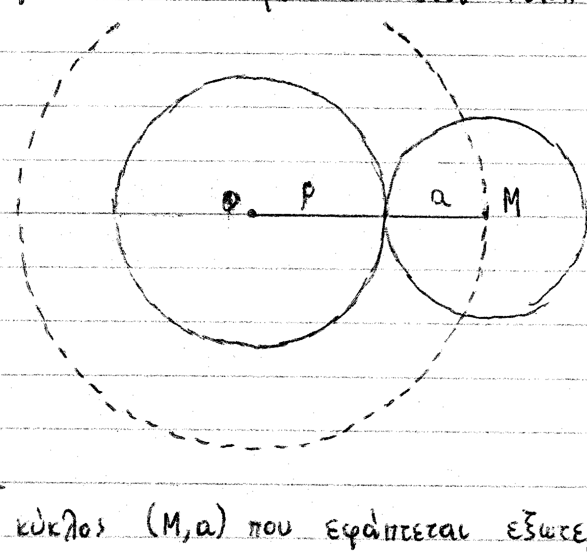
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} M: A\hat{M}B=\hat{\varphi}=c^{te} \\ AB=c^{te} \end{array}\right\} \Leftrightarrow M\in(\tau_1),(\tau_2) \text{ που βλέπουν την } AB \text{ υπό γωνία } \varphi}$$



→ Παρατήρηση: Αν $\varphi=90$ τότε $M\in$(κύκλο με διάμετρο AB)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$\boxed{B\text{-}1}$ Δίνεται ένας κύκλος $k(O,\rho)$. Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων που έχουν ακτίνα ίση με ένα γνωστό τμήμα a και εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο.



ευθύ

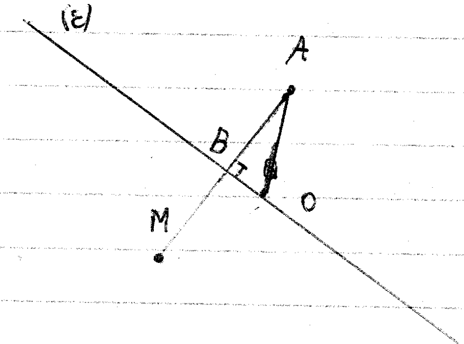
Εστω κύκλος (M,a) που εφάπτεται εξωτερικά του (O,ρ).

Τότε, (M,a) εφ.εξ.$(O,\rho) \Leftrightarrow OM=\rho+a \Rightarrow \left.\begin{array}{l} M: OM=\rho+a \\ O=c^{te} \end{array}\right\} \Rightarrow G=(O,\rho+a)$

Αντίστροφο

Εστω $M\in(O,\rho+a) \Rightarrow OM=\rho+a \Rightarrow (M,a)$ εφ. εξ. (O,ρ) QED.

B.2 Δίνονται δύο σταθερά σημεία A και O. Να βρεθεί ο γ.τ. του συμμετρικού του A ως προς τις ευθείες που διέρχονται από το O.



Ευθυ

▶ $(\varepsilon): O \in (\varepsilon)$

$M = S_{(\varepsilon)}A \Rightarrow AB = BM \wedge OB \perp AM \Rightarrow OB =$ ύψος, διάμεσος στο $O\overset{\triangle}{A}M \Rightarrow O\overset{\triangle}{M}A$ ισοσκελές

$B = AM \cap (\varepsilon)$

$\Rightarrow OA = OM$

Γεωμετρικές κατασκευές

Είναι δυνατόν να κατασκευαστούν.

1) $\hat{AB\Gamma}$ με $AB=\lambda$, $A\Gamma=\mu$, $\hat{A}=\hat{\varphi}$

$\hat{\varphi}<2^L \Leftrightarrow$ μία μόνο λύση

$\hat{\varphi}\geq 2^L \Leftrightarrow$ αδύνατη.

2) $\hat{AB\Gamma}$ με $B\Gamma=\lambda$, $\hat{B}=\hat{\omega}$, $\hat{\Gamma}=\hat{\vartheta}$.

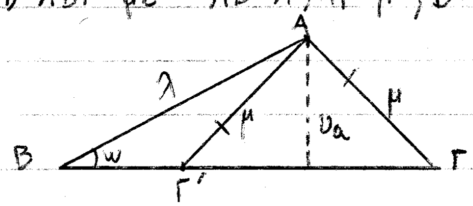
$\hat{\omega}+\hat{\vartheta}<2^L \Leftrightarrow$ μία μόνο λύση

$\hat{\omega}+\hat{\vartheta}\geq 2^L \Leftrightarrow$ καμμία λύση.

3) $\hat{AB\Gamma}$ με $AB=\lambda$, $B\Gamma=\mu$, $\Gamma A=\rho$.

$|\mu-\rho|<\lambda<\mu+\rho \Leftrightarrow$ μία μόνο λύση

4) $\hat{AB\Gamma}$ με $AB=\lambda$, $A\Gamma=\mu$, $\hat{B}=\hat{\omega}$



$\upsilon_a<\mu \Leftrightarrow$ δύο λύσεις $\hat{AB\Gamma}$, $\hat{AB\Gamma'}$

$\upsilon_a=\mu \Leftrightarrow$ μία λυση. $(\Gamma\equiv\Gamma')$

~~υα~~

5) $\hat{AB\Gamma}$ με $\hat{A}=90$ και γνωστα:

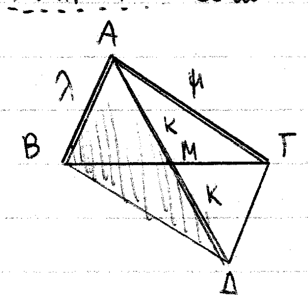
~~i) AB, AΓ~~ ii) δύο στοιχεία από τα οποία το ένα τουλάχιστον είναι πλευρα

Παράδειγμα-υπόδειγμα

$\boxed{1R2.B}$

Δ	$AB=\lambda$, $A\Gamma=\mu$, $AM=K$, διάμεσος
Z	$\hat{AB\Gamma}$.

Ανάλυση Έστω ότι $\hat{AB\Gamma}$: $AB=\lambda$, $A\Gamma=\mu$, $AM=K$



Παίρνω $M\Delta=K \Rightarrow AB\Gamma\Delta\#$ (διαγώνιοι διχοτομούνται) $\Rightarrow B\Delta=A\Gamma=\mu \Rightarrow$ το $\hat{AB\Delta}$ κατασκευάζεται γιατί δίνονται τρείς πλευρές

οπότε το Γ ορίζεται από την

$\Gamma=BM\cap(M,BM)$.

<u>Σύνθεση</u> Κάνω το $\overset{\triangle}{AB\Delta}$. $(AB=\lambda,\ B\Delta=\mu,\ A\Delta=2k)$

Φέρνω ~~στο~~ το ~~Βκ~~ $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ με $AB=\lambda,\ B\Delta=\mu,\ A\Delta=2k$

και παίρνω στο $M=$ μέσο $A\Delta$, $\Gamma = BM\cap($~~..~~ $M, BM)$

το $\hat{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο.

<u>Απόδειξη</u> Το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχει

$AB=\lambda$ εκ' κατασκευής

$$AM \underset{M\ \text{μέσο}}{=} \frac{A\Delta}{2} = \frac{2k}{2} = k,\quad M \text{ μέσο } A\Delta \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AM=M\Delta \\ M\Gamma=MB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB\Gamma\Delta\ \# \Rightarrow A\Gamma = B\Delta = \mu.$$

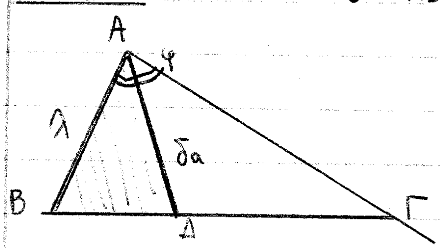
Αρα το ~~ΑΜ~~ $\hat{AB\Gamma}$ κατασκευάστηκε.

<u>Διερεύνηση</u> Αν $|\lambda-\mu|<2k<\lambda+\mu \Leftrightarrow \overset{\triangle}{AB\Delta}$ κατασκευάζεται $\Leftrightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ κατασκευάζεται.
Αν όχι, $\nexists\ \overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

$\boxed{11.B}$ α) Να κατασκευαστεί $\hat{AB\Gamma}$ του οποίου δίνονται τα στοιχεία:
$\hat{A}=\hat{\varphi}$, $AB=\lambda$, $A\Delta=\delta_a$ (διχοτόμος)

<u>Ανάλυση</u>: Έστω ότι $\hat{AB\Gamma}$: $\hat{A}=\hat{\varphi}$, $AB=\lambda$, $A\Delta=\delta_a$



$$B\hat{A}\Delta \underset{A\Delta\ \text{διχ.}}{=} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{\varphi}}{2},\ AB=\lambda,\ A\Delta=\delta_a \Rightarrow B\hat{A}\Delta \text{ κατασκευάζεται}$$

διότι δίνονται δύο πλευρές και και περιεχόμενη γωνία. Τότε ~~Γ=ΒΔΑ~~ φαίρνω $Ax: x\hat{A}B=\varphi$

και $\Gamma = B\Delta\cap Ax$

<u>Σύνθεση</u> Κάνω το $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ $(AB=\lambda,\ A\Delta=\delta_a,\ B\hat{A}\Delta=\frac{\hat{\varphi}}{2})$ και φέρνω $Ax: x\hat{A}B=\varphi$. Παίρνω $\Gamma=B\Delta\cap Ax$. Το $\hat{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο, διότι

<u>Απόδειξη</u> Έχει $\left.\begin{array}{l} \hat{A}= x\hat{A}B=\hat{\varphi} \text{ εκ' κατασκευής} \\ AB=\lambda,\ A\Delta=\delta_a \quad \text{»} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Το $\hat{AB\Gamma}$ κατασκευάστηκε.

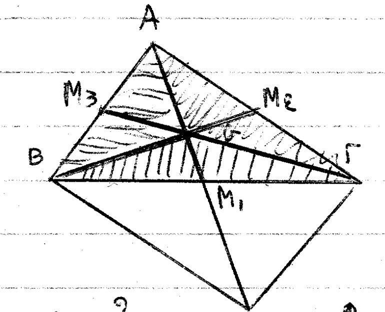
<u>Διερεύνηση</u> ~~$\frac{\hat{\varphi}}{2}<2^L$~~ $\frac{\hat{\varphi}}{2}<2^L \Leftrightarrow \hat{\varphi}<4^L \Leftrightarrow$ το $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ κατασκευάζεται.

Τότε, $\hat{\varphi}+\hat{B}<2^L \Leftrightarrow \hat{AB\Gamma}$ κατασκευάζεται.

$\boxed{12.B}$ $\quad \begin{array}{c|l} \Delta & \mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma \\ \hline Z & A\hat{B}\Gamma \end{array}$

<u>Ανάλυση</u>: Εστω τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ με διαμεσους $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$.

$G = \mu_\alpha \cap \mu_\beta \cap \mu_\gamma$.



Στο $B\hat{G}\Gamma$, $BG = \frac{2}{3}\mu_\beta$, $G\Gamma = \frac{2}{3}\mu_\gamma$, $GM_1 = \frac{1}{3}\mu_\alpha$, διαμεσος του $B\hat{G}\Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow B\hat{G}\Gamma$ κατασκευάζεται σύμφωνα με την 12.Β $\Rightarrow B\Gamma$ γνωστή.

Ομοια, $A\hat{G}B$, $A\hat{G}\Gamma$ κατασκευάζονται

<u>Συνθεση</u>. Απλη.

<u>Απόδειξη</u> Απλη

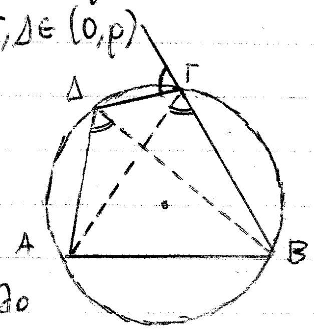
<u>Διευρεύνηση</u> Πρέπει

$$|BG - \Gamma G| < GM_1 < BG + \Gamma G \Leftrightarrow \frac{2}{3}|\mu_\beta - \mu_\gamma| < \frac{1}{3}\mu_\alpha < \frac{2}{3}(\mu_\beta + \mu_\gamma)$$

και όμοια με κυκλική εναλλαγη, για να έχω ΜΜΛ.

ΥΛΗ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

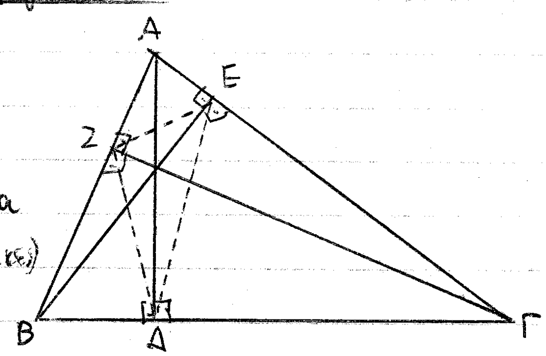


Ορισμός : ΑΒΓΔ εγγεγράψιμο $\Leftrightarrow \exists\ (O,\rho)$: $A, B, \Gamma, \Delta \in (O,\rho)$
ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στο $(O,\rho) \Leftrightarrow A, B, \Gamma, \Delta \in (O,\rho)$

Ιδιότητες Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο, τότε:
1) $\hat{A}+\hat{\Gamma} = \hat{B}+\hat{\Delta} = 180$ 2) $A = \Gamma_{\varepsilon\xi}$, ...
3) $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B$, ...

Κριτήρια Το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν ισχύει μία από τις προτάσεις
1) $\hat{A}+\hat{\Gamma} = 180$ 2) $A = \Gamma_{\varepsilon\xi}$ 3) $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B$

Χαρακτηριστικά εγγράψιμα στο τρίγωνο



Αν $\upsilon_\alpha = A\Delta$, $\upsilon_\beta = BE$, $\upsilon_\gamma = \Gamma Z$, τότε τα τετράπλευρα
1) ΑΖΗΕ, ΒΔΗΖ, ΓΔΗΕ είναι εγγράψιμα
(έχουν απέναντι γωνίες παραπληρωματικές)
Όμοια, τα τετράπλευρα
2) ΑΒΔΕ, ΒΓΕΖ, ΓΑΖΔ
→ Ορθικό τρίγωνο : λέγεται το $\Delta\hat{E}Z$, που έχει κορυφές τα ίχνη των υψών του $A\hat{B}\Gamma$.

- Κάθε τραπέζιο εγγεγραμμένο είναι ισοσκελές.
- κάθε παραλληλόγραμμο εγγεγραμμένο είναι ορθογώνιο.
- κάθε ρόμβος εγγεγραμμένος είναι τετράγωνο.

~~Περιγε~~ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Ορισμός : ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο σε κύκλο $(I,\rho) \Leftrightarrow$ όλες οι πλευρές του είναι εφαπτόμενες του κύκλου.
(Ο κύκλος λέγεται εγγεγραμμένος στο τετράπλευρο).

Ιδιότητες: Αν ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο, τότε:

1) $\delta_A \cap \delta_B \cap \delta_\Gamma \cap \delta_\Delta = I \wedge I$ κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου.
2) $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

Κριτήρια: Το ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο σε κύκλο, εαν

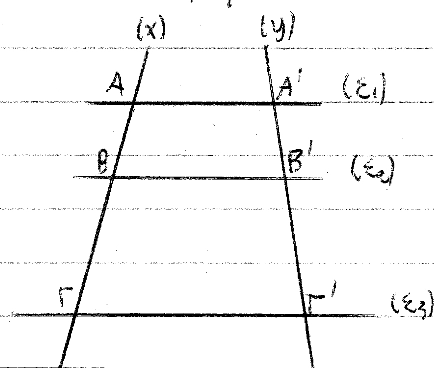
1) $\exists \bullet A: \delta_A \cap \delta_B \cap \delta_\Gamma \cap \delta_\Delta = A$.
2) $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

• κάθε περιγεγραμμένο # είναι ρόμβος.

ΛΟΓΟΙ-ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

▼ Θεώρημα του Θαλή

Αν τρεις // ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα



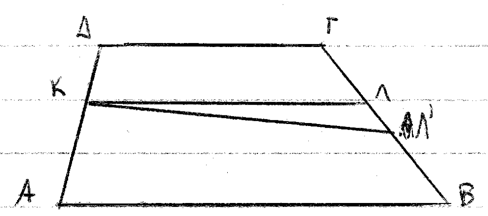
Δηλαδή: $\boxed{\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Longrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma' A'}}$

• Άρα είναι και $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$, ----

• Γενίκευση: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \dots \parallel \varepsilon_\nu \Rightarrow \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in T_\nu: \boxed{\frac{A_\alpha A_\beta}{A_\gamma A_\delta} = \frac{A'_\alpha A'_\beta}{A'_\gamma A'_\delta}}$

όπου $T_\nu = \{x : x \in \mathbb{N}^* \wedge x \leq \nu\}$.

▼ Τέμνουσα τραπεζίου - τριγώνου



1) $\boxed{K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta \Longleftrightarrow \frac{KA}{K\Delta} = \frac{\Lambda B}{\Lambda \Gamma}}$

εαν ΑΒΓΔ τραπέζιο.

Ευθυ Ειναι το θεωρημα του Θαλη, άρα ισχύει.

Αντίστροφο Εστω $\frac{KA}{K\Delta}=\frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma}$

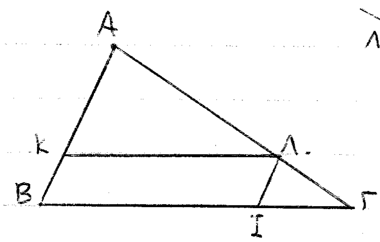
▸ Φέρνω $K\Lambda' \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$, αρκεί $\Lambda' \equiv \Lambda$.

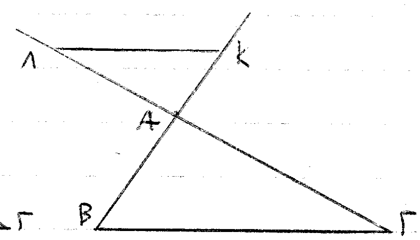
$$\left.\begin{aligned} K\Lambda' \parallel AB \parallel \Gamma\Delta &\overset{\text{ευθυ}}{\Rightarrow} \frac{KA}{K\Delta}=\frac{\Lambda' B}{\Lambda'\Gamma} \\ \text{Υπόθεση} &\longrightarrow \frac{KA}{K\Delta}=\frac{AB}{\Lambda\Gamma}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma}=\frac{\Lambda' B}{\Lambda'\Gamma} \Rightarrow \frac{\Lambda B}{\Lambda\Gamma+\Lambda B}=\frac{\Lambda' B}{\Lambda'\Gamma+\Lambda' B} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\Lambda B}{B\Gamma}=\frac{\Lambda' B}{B\Gamma} \Rightarrow \Lambda B=\Lambda' B \\ &\text{Ομοια, } \Lambda\Gamma=\Lambda'\Gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Lambda \equiv \Lambda' \Rightarrow K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta.$$

2) Σε τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ είναι $\boxed{K\Lambda \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \frac{KA}{KB}=\frac{\Lambda A}{\Lambda\Gamma}}$

ευθυ - Αντίστροφο : Ομοια





3) Σε τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$: $\boxed{K\Lambda \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{K\Lambda}{B\Gamma}=\frac{AK}{KB}=\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}}$

▸ Φέρνω $\Lambda I \parallel BA \Rightarrow \Lambda I \parallel KB$

Τότε $\left.\begin{aligned} K\Lambda \parallel B\Gamma &\Rightarrow K\Lambda \parallel BI \\ \Lambda I &\parallel KB \end{aligned}\right\} \Rightarrow KBI\Lambda \text{ //=} \Rightarrow K\Lambda = BI$. (1).

Στο $A\hat{B}\Gamma$: $\Lambda I \parallel AB \Rightarrow \frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}=\frac{BI}{I\Gamma} \Rightarrow \frac{A\Lambda}{A\Gamma}=\frac{BI}{B\Gamma} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{A\Lambda}{A\Gamma}=\frac{K\Lambda}{B\Gamma}$

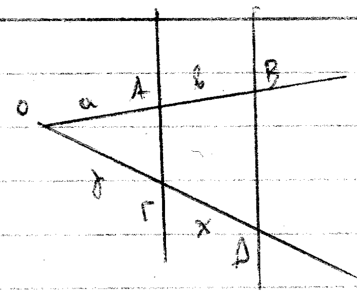
άρα $\frac{K\Lambda}{B\Gamma}=\frac{AK}{KB}=\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma}$.

•₁ Θεώρημα Μενέλαου. •₂ Θεώρημα Ceva.

▼ Γεωμετρικές κατασκευές

① Τεταρτη ανάλογος των a, b, γ •⟶ $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{\gamma}{x}}$

~~Σε γων~~ | Σύνθεση: Σε γωνία $x\hat{O}y$, έστω $A \in Ox$ με $OA=a$ και $B \in Ox$ με $AB=b$. και $O\Gamma \in Oy$ με $O\Gamma=\gamma$. Απο το B φερνω $B\Delta \parallel A\Gamma$. $x=\Gamma\Delta$.



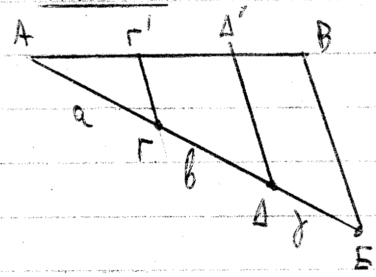
Απόδειξη Στο $O\hat{B}\Delta$, $A\Gamma \parallel B\Delta \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \Gamma\Delta = x \Rightarrow x$ κατασκευάσιμη.

③ Χωρισμός του AB σε μέρη ανάλογα των α, β, γ.

~~Κατα~~ Σύνθεση Φέρνω Ax και πάνω σε αυτή $A\Gamma = \alpha$, $\Gamma\Delta = \beta$, $\Delta E = \gamma$. Φέρνω την BE και άπο τα Γ, Δ τις $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta' \parallel BE$ όπο $\Gamma', \Delta' \in AB$.
Τότε, $A\Gamma', \Gamma'\Delta', \Delta'B$ ανάλογα των α, β, γ.

Απόδειξη



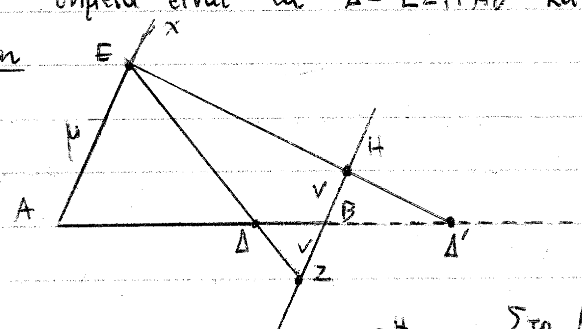
Είναι $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta' \parallel BE \Rightarrow \frac{A\Gamma'}{\alpha} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\beta} = \frac{\Delta'B}{\gamma} \Rightarrow$

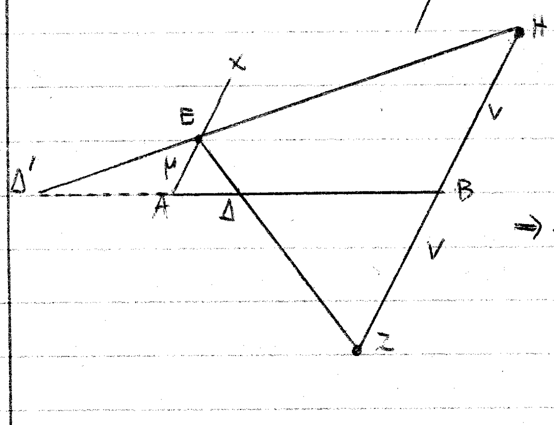
$\Rightarrow A\Gamma', \Gamma'\Delta', \Delta'B$ ανάλογα με α, β, γ.

④ Χωρισμός του AB εσωτερικά-εξωτερικά σε λόγο μ/ν.

Σύνθεση Φέρνω Ax και παίρνω $AE = \mu$ $(E \in Ax)$. Από το B, έστω $(\varepsilon) \parallel Ax$ και εκατέρωθεν του B, $BZ = BH = \nu$. Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\Delta = EZ \cap AB$ και $\Delta' = EH \cap AB$.

Απόδειξη





Στο $A\hat{E}\Delta$, $EA \parallel HZ \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{EA}{BZ} = \frac{\mu}{\nu}$

Στο $\Delta'HB$, $AE \parallel BH \Rightarrow \frac{\Delta'A}{\Delta'B} = \frac{EA}{BH} = \frac{\mu}{\nu}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta'A}{\Delta'B} = \frac{\mu}{\nu} \Rightarrow (\Delta, \Delta')$ χωρ. σε λόγο μ/ν το AB.

Διερεύνηση Αν i) $\mu > \nu \Rightarrow \frac{\Delta'A}{\Delta'B} = \frac{\mu}{\nu} > 1 \Rightarrow \Delta'A > \Delta'B \Rightarrow \Delta' \in$ προέκταση του AB προς το B.

ii) $\mu < \nu \Rightarrow \dots \Rightarrow \Delta'A < \Delta'B \Rightarrow \Delta' \in$ προέκταση του AB προς το A

iii) $\mu = \nu \Rightarrow$ ~~...~~ $\left.\begin{matrix} AE = BH \\ AE \parallel BH \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABHE\# \Rightarrow EH \parallel AB \Rightarrow \Delta' = EH \cap AB = \emptyset \Rightarrow \nexists \Delta'$.

Το Δ πάντα υπάρχει και είναι εντός των A, B διότι εαν.

~~1) $\Delta \in$ προεκ. BA τότε $\hat{\Delta EH} + \hat{EHB} = x + \hat{AEH} + \hat{EHB} = x + 180 > 180 \Rightarrow$ δεν~~

▼ Συζυγή αρμονικά δύο σημείων.

● Ορισμός (M,N) συζυγή αρμονικά $(A,B) \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \wedge$ A, M, B, N συνευθειακά.

1) $\boxed{(M,N) \text{ σ.αρ. } (A,B) \Longrightarrow (A,B) \text{ σ.αρ } (M,N)}$

$$\left.\begin{matrix} (M,N) \text{ σ.αρ. } (A,B) \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN} = \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN} \\ (M,N) \text{ σ.αρ } (A,B) \Rightarrow \quad A,M,B,N \text{ συνευθειακα} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A,B) \text{ σ.αρ. } (M,N).$$

▼ Θεώρημα της διχοτόμου

1) $\boxed{A\Delta \text{ εσωτ.διχ στο } A\hat{B}\Gamma \Longleftrightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}}$

Ευθύ Εστω $A\Delta$ εσωτ.διχ.

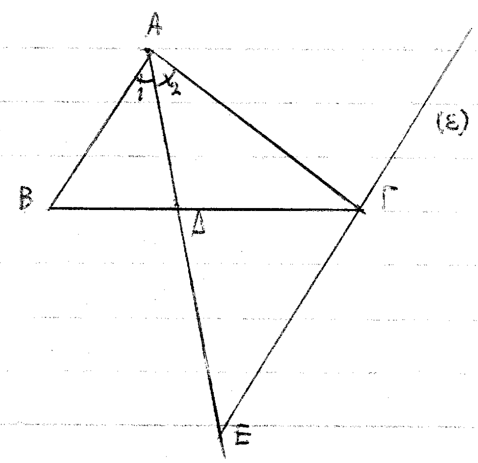
▸ Φέρνω $(\varepsilon) \parallel AB$ με $\Gamma \in (\varepsilon)$.

Στο $A\hat{\Delta}B$, $AB \parallel \Gamma E \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma E}$ (1).

$\hat{E} = \hat{A}_1$ (ως εντος εναλλάξ $\parallel$ων) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{E} = \hat{A}_2 \Rightarrow A\Gamma E$ ισοσκελες $\Rightarrow \Gamma E = A\Gamma$. (2)

(1),(2) $\Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.



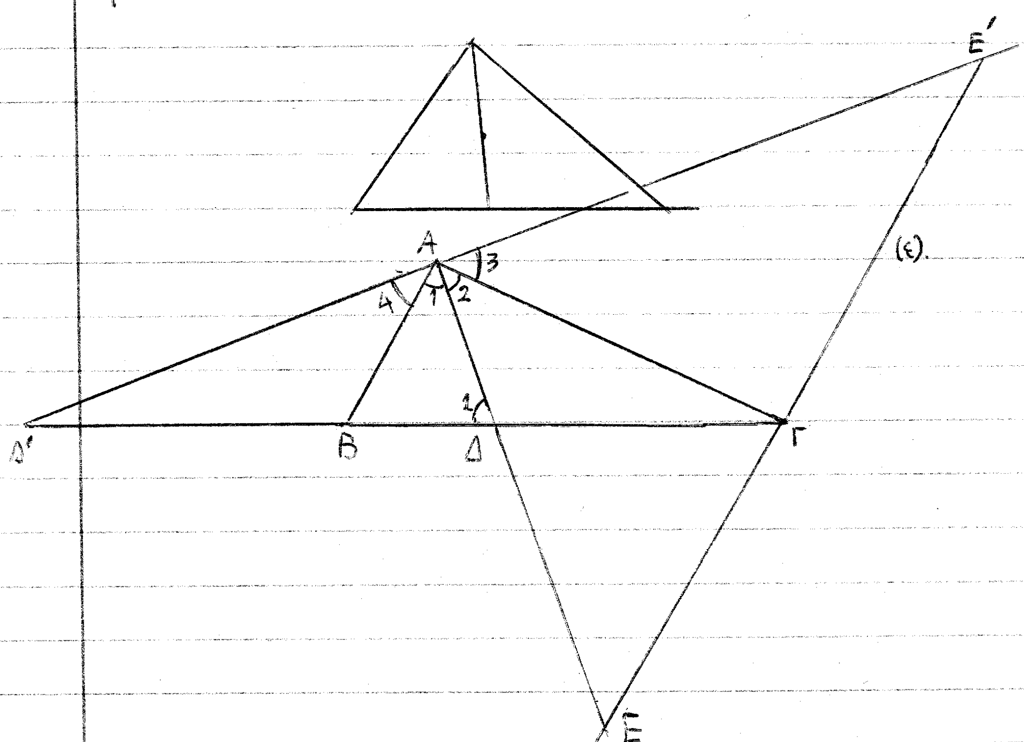
Αντίστροφο. Εστω $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

$$\left.\begin{matrix} \text{Στο } A\hat{\Delta}B,\ AB \parallel \Gamma E \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma E} \\ \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{\Gamma E} = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow \Gamma E = A\Gamma \Rightarrow A\hat{\Gamma}E \text{ ισοσκελές} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \hat{E} = \hat{A}_2 \\ \Gamma E \parallel BA \Rightarrow \hat{E} = \hat{A}_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow A\Delta \text{ εσωτ.διχ}$$

2) ΔΑ $\boxed{A\Delta' \text{ εξωτ. διχ} \iff \frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}}$

Εστω $AB < A\Gamma$. Θα δείξω ότι <u>$\Delta' \in$ Πρ. ΓB</u>

Αρκει ~~$\Delta'\hat{A}\Delta + \hat{\Delta}_1 < 180$~~ $\hat{B}_{εξ} + \Delta'\hat{A}B < 180$.



$$\left(\begin{aligned} &\hat{B}_{εξ} + \Delta'\hat{A}B = \hat{B}_{εξ} + \frac{A_{εξ}}{2} = \hat{A} + \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{2\hat{A}+2\hat{\Gamma}+\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} = \\ &= \frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2} \end{aligned} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90 \\ &AB < A\Gamma \Rightarrow \hat{\Gamma} < \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \frac{\hat{B}}{2} \end{aligned} \right\} \overset{+}{\Longrightarrow} \frac{\hat{A}}{2} + \cancel{\frac{\hat{B}}{2}} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < 90 + \cancel{\frac{B}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} < 90 \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} < 90 \Rightarrow \hat{\Delta}_1 < 90.$$

Αρα $\Delta'\hat{A}\Delta + \hat{\Delta}_1 < 180$ (διότι $\Delta' A \Delta = 90$ ...) $\Rightarrow \Delta' \in$ Πρ ΓB.

<u>Ευθυ</u> Εστω $A\Delta'$ εξωτ. διχοτόμος.

▶ Φερνω $\hat{E}' = A\Delta' \cap (\varepsilon)$

Στο $\Delta'\hat{\Gamma}E'$, $AB \parallel \Gamma E' \Rightarrow \frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \frac{AB}{\Gamma E'}$ (1)

$$\left. \begin{aligned} &A\Delta \text{ εσωτ. διχ.} \\ &A\Delta' \text{ εξωτ. διχ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A\Delta \perp A\Delta' \Rightarrow \hat{A}_{2,3} = 90 \overset{E\hat{A}\Delta}{\Longrightarrow} \hat{E}' = \cancel{E} \, 90 - E \overset{A\hat{\Gamma}E}{=} 90 - \hat{A}_2 = \hat{A}_3 \Rightarrow A\hat{\Gamma}E' \text{ ισοσκελες}$$

$\Rightarrow \Gamma E' = \Gamma A$ (2)

$(1) \wedge (\varepsilon) \Rightarrow \dfrac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$.

Αντίστροφο Έστω $\dfrac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$.

Στο $\Delta'\hat{\Gamma}E'$, $AB \parallel \Gamma E' \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \dfrac{AB}{\Gamma E'} \\ \dfrac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AB}{\Gamma E} = \dfrac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma = \Gamma E \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{E}' = \hat{A}_3 \\ (\varepsilon) \parallel AB \Rightarrow \hat{E}' = \hat{A}_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_4$.

~~Αλλα $A\Delta \perp A\Delta' \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_4 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 90 \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_4 = \hat{A}_2 + \hat{A}_4 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow A\Delta$ διχοτόμος~~

Αρα $\hat{A}_4 = \hat{A}_3 = 90 - \hat{A}_2 = 90 - \hat{A}_1 = \Delta'\hat{A}B \Rightarrow A\Delta'$ εξωτ. διχ.

-

$B\Delta = \dfrac{a \cdot \gamma}{\beta + \gamma}$	$\Gamma\Delta = \dfrac{a \cdot \beta}{\beta + \gamma}$

$A\Delta$ εσωτ. διχ $\Rightarrow \dfrac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma + \Delta B} = \dfrac{\gamma}{\beta + \gamma} \Rightarrow \dfrac{\Delta B}{a} = \dfrac{\gamma}{\beta + \gamma} \Rightarrow \Delta B = \dfrac{a \cdot \gamma}{\beta + \gamma}$.

$\Gamma\Delta = B\Gamma - \Delta B = a - \dfrac{a \cdot \gamma}{\beta + \gamma} = \dfrac{a(\beta + \gamma) - a\gamma}{\beta + \gamma} = \dfrac{a(\beta + \gamma - \gamma)}{\beta + \gamma} = \dfrac{a \cdot \beta}{\beta + \gamma}$.

-

$\Delta' B = \dfrac{a \cdot \gamma}{\lvert \beta - \gamma \rvert}$	$\Delta' \Gamma = \dfrac{a \cdot \beta}{\lvert \beta - \gamma \rvert}$

$A\Delta'$ εξωτ. διχ $\Rightarrow \dfrac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \dfrac{\Delta' B}{\lvert \Delta'\Gamma - \Delta' B \rvert} = \dfrac{\gamma}{\lvert \beta - \gamma \rvert} \Rightarrow \dfrac{\Delta' B}{a} = \dfrac{\gamma}{\lvert \beta - \gamma \rvert} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta' B = \dfrac{a \cdot \gamma}{\lvert \beta - \gamma \rvert}$

$\Delta' \Gamma = \Delta' B + B\Gamma = \dfrac{a \cdot \gamma}{\lvert \beta - \gamma \rvert} + a = \dfrac{a \cdot \gamma + a \lvert \beta - \gamma \rvert}{\lvert \beta - \gamma \rvert} = \dfrac{a(\gamma + \lvert \beta - \gamma \rvert)}{\lvert \beta - \gamma \rvert}$.

Αν $\beta > \gamma \Rightarrow \beta - \gamma > 0 \Rightarrow \gamma + \lvert \beta - \gamma \rvert = \gamma + \beta - \gamma = \beta \Rightarrow \Delta' \Gamma = \dfrac{a \cdot \gamma}{\beta - \gamma} \overset{\beta - \gamma > 0}{=} \dfrac{a \cdot \gamma}{\lvert \beta - \gamma \rvert}$

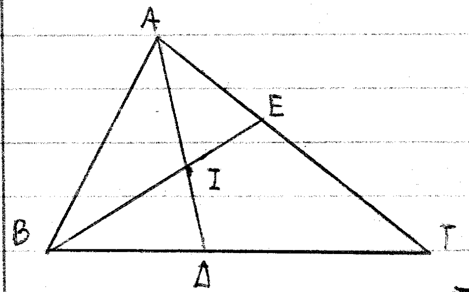
Αν $\beta < \gamma \Rightarrow$ ~~$\beta - \gamma < 0 \Rightarrow \gamma + \lvert \beta - \gamma \rvert = \gamma - \beta + \gamma =$~~

$\Delta' \Gamma =$ ______

$\hookrightarrow$ Δ κατι $= \dfrac{(\text{πλευρα στην οποία ανήκει})(\text{πλευρά όπου ακουμπάει})}{\text{αθρ. ή διαφ. πλευρών που δεν ανήκει.}}$

• Υπολογισμός της θέσης του έγκεντρου Ι:

$\frac{AI}{I\Delta}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$	$\frac{BI}{IE}=\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$	$\frac{\Gamma I}{IZ}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$



Στο $A\hat{B}\Delta$, ΒΙ εσωτ. διχ $\Rightarrow \frac{AI}{I\Delta}=\frac{\gamma}{B\Delta}$

Στο $A\hat{B}\Gamma$, ΑΔ εσωτ. διχ. $\Rightarrow B\Delta=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta+\gamma}$

$$\Rightarrow \frac{AI}{I\Delta}=\frac{\gamma}{\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta+\gamma}}=\frac{(\beta+\gamma)\gamma}{\alpha\cdot\gamma}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$$ και όμοια $\frac{BI}{IE}$, $\frac{\Gamma I}{IZ}$.

↳ είναι $AI>I\Delta$, $BI>IE$, $\Gamma I>IZ$ από την τριγ. ανισότητα

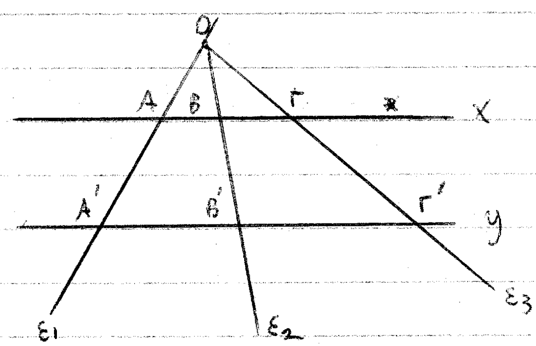
Κεντρική δέσμη

Το σύνολο των ευθειών του επιπέδου που διέρχονται από ένα σημείο Ο, λέγεται κεντρική δέσμη Ο ή σύντομα Ο-δέσμη.

δηλαδή: $\boxed{\mathcal{A} \text{ είναι } O\text{-δέσμη} \Leftrightarrow \mathcal{A}=\{\varepsilon : O\in(\varepsilon)\}}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΣΜΗΣ: $\boxed{\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3 \ O\text{-δέσμη}\\ x\parallel y\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}}$

όπου $\left.\begin{array}{ll} A=\varepsilon_1\cap x, & A'=\varepsilon_1\cap y\\ B=\varepsilon_2\cap x, & B'=\varepsilon_2\cap y\\ \Gamma=\varepsilon_3\cap x, & \Gamma'=\varepsilon_3\cap y\end{array}\right\}$



Απόδειξη: Στο $O\hat{A'}B'$: $AB\parallel A'B' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'}$

Στο $OB'\Gamma'$: $B\Gamma\parallel B'\Gamma' \Rightarrow \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{OB}{OB'}$

$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$. QED.

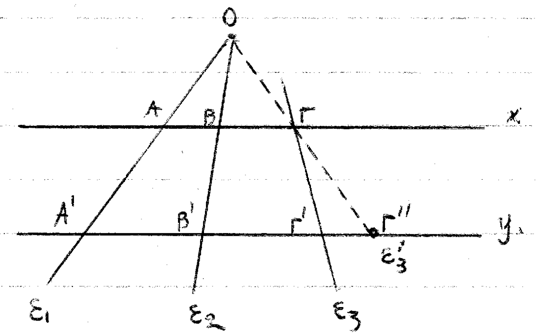
• <u>Συντρέχουσες ευθείες</u> → $\boxed{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu \text{ συντρέχουν} \iff \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 \cap \cdots \cap \varepsilon_\nu = \{O\}}$

1) $\boxed{\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \implies \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{ συντρέχουν}}$

όπου $A = \varepsilon_1 \cap x$, $B = \varepsilon_2 \cap x$, $\Gamma = \varepsilon_3 \cap x$

$A' = \varepsilon_1 \cap y$, $B' = \varepsilon_2 \cap y$, $\Gamma' = \varepsilon_3 \cap y$ με $x \parallel y$

Απόδειξη.



Έστω $x \parallel y$, οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ και τα σημεία $A, B, \Gamma, A', B', \Gamma'$.

Έστω $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$. ▸ Παίρνω $O = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ και $\Gamma'' = O\Gamma \cap y$. $(O, \Gamma'' \in \varepsilon_3')$.

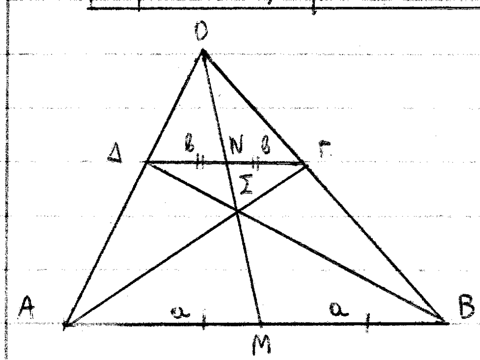
$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3' \ O\text{-δέσμη} \\ x \parallel y \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma''} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma''} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \implies B'\Gamma' = B'\Gamma'' \\ \implies A'\Gamma' = A'\Gamma'' \end{array} \Bigg\} \implies \Gamma' \equiv \Gamma''$$

διότι αλλιώς, το $\Gamma'\Gamma''$ θα είχε A', B' μέσα → Άτοπο.

$\Downarrow$

$\varepsilon_3' \equiv \varepsilon_3 \implies \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ συντρέχουν.

2) $\boxed{\left.\begin{array}{l} AB\Gamma\Delta \text{ τραπέζιο } (AB \parallel \Gamma\Delta) \\ M \text{ μέσο } AB,\ N \text{ μέσο } \Gamma\Delta \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} A\Delta, MN, B\Gamma \text{ συντρέχουσες} \\ A\Gamma, MN, B\Delta \text{ συντρέχουσες} \end{array}\right.}$



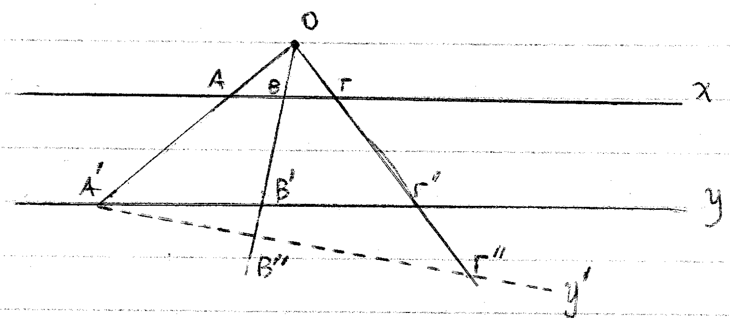
Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta N}{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{N\Gamma}{MB} \\ \Delta\Gamma \parallel AB \end{array}\right\} \implies A\Delta, MN, B\Gamma \text{ συντρέχουν.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta N}{MB} = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{N\Gamma}{AM} \\ \Delta\Gamma \parallel AB \end{array}\right\} \implies A\Gamma, MN, B\Delta \text{ συντρέχουν.}$$

3) $\boxed{\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \\ AA', BB', \Gamma\Gamma' \ O\text{-δέσμη} \end{array}\right\} \Rightarrow x /\!/ y}$

Απόδειξη:



Έστω $x \cap y \neq \emptyset$.

▶ Φέρνω από το A', $y' /\!/ x$ που τέμνει τις $BB', \Gamma\Gamma'$ στα B'', Γ''.

$\left.\begin{array}{l} AA', BB'', \Gamma\Gamma'' \ O\text{-δέσμη} \\ y' /\!/ x \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B''} = \dfrac{B\Gamma}{B''\Gamma''} \Rightarrow \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{A'B''}{B''\Gamma''}$ (1)

Υπόθεση $\rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Rightarrow \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{A'B'}{B'\Gamma'}$ (2)

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \dfrac{A'B'}{B'\Gamma'} = \dfrac{A'B''}{B''\Gamma''} \Rightarrow$ Στο $\overset{\triangle}{A'\Gamma'\Gamma''}$, $\left.\begin{array}{l} B'B'' /\!/ \Gamma'\Gamma'' \Rightarrow BB' \cap \Gamma\Gamma' = \emptyset \\ AA', BB', \Gamma\Gamma' \ O\text{-δέσμη} \end{array}\right\} \rightarrow$ Άτοπο.

Άρα $x \cap y = \emptyset \Rightarrow x /\!/ y$.

ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

▼ Ομοιοθεσία

Έστω K σημείου του επιπέδου $\mathbb{E}$ και $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

Ορίζουμε ως ομοιοθεσία $O\mu\vartheta(K,\lambda): \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ έναν μετασχηματισμό ως εξής:

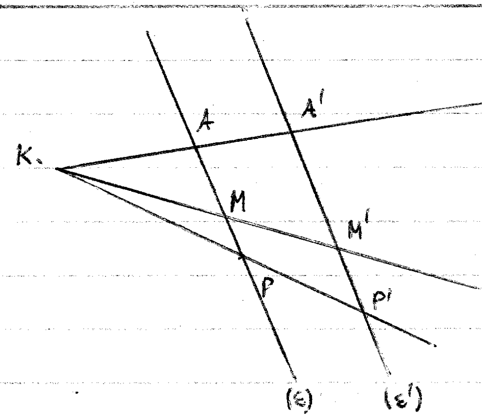
$$\boxed{A' = O\mu\vartheta(K,\lambda)A \Leftrightarrow A' \in \text{Ημ}\,KA \wedge KA' = \lambda KA}$$

• Είναι $A' = O\mu\vartheta(K,\lambda)A \Leftrightarrow A = O\mu\vartheta(K,\frac{1}{\lambda})A'$

1) Ομοιόθετο ευθείας $\rightarrow$ $\boxed{\varepsilon' = O\mu\vartheta(K,\lambda)(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon' \text{ ευθεία} \wedge \varepsilon' /\!/ \varepsilon}$

▶ Έστω $A \in (\varepsilon)$ και $A' = O\mu\vartheta(K,\lambda)A$. Από το A' φέρνω $\varepsilon' /\!/ \varepsilon$.

Αρκεί να δείξω ότι $\varepsilon' = O\mu\vartheta(k,\lambda)\varepsilon$.



Ευθύ: Αν $M\in(\varepsilon)$ και ~~MS=Ομ~~ $M'=KM\cap(\varepsilon')$

τότε στο $KA'M'$, $AM\parallel A'M' \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \frac{KM'}{KM}=\frac{KA'}{KA}\\ &A'=O\mu\vartheta(K,\lambda)A \Rightarrow \frac{KA'}{KA}=\lambda\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}&\frac{KM'}{KM}=\lambda\\ &M'\in\eta\mu KM\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M'=O\mu\vartheta(K,\lambda)M\in(\varepsilon') \text{ άρα}$$

$$\forall M\in(\varepsilon)\ \exists M'\in(\varepsilon'): M'=O\mu\vartheta(K,\lambda)M.$$

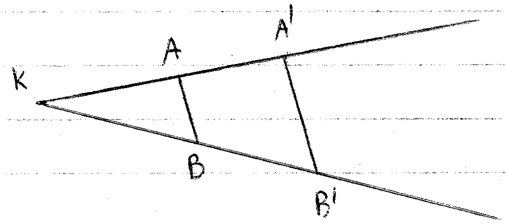
Αντίστροφο: Θα δείξω ότι κάθε $P'\in(\varepsilon')$ προκύπτει από ένα $P\in(\varepsilon)$.

Αν $P'\in(\varepsilon')$ και $P=KP'\cap(\varepsilon)$ τότε στο $KA'P'$, $AP\parallel A'P' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{KP'}{KP}=\frac{KA'}{KA}=\lambda \Rightarrow \left.\begin{aligned}&KP'=\lambda KP\\ &P'\in\eta\mu KP\end{aligned}\right\}\Rightarrow \underline{P'=O\mu\vartheta(K,\lambda)P}$$

άλλα $P\in(\varepsilon)$ άρα $\forall P'\in(\varepsilon')\ \exists P\in(\varepsilon): P'=O\mu\vartheta(K,\lambda)P$. QED.

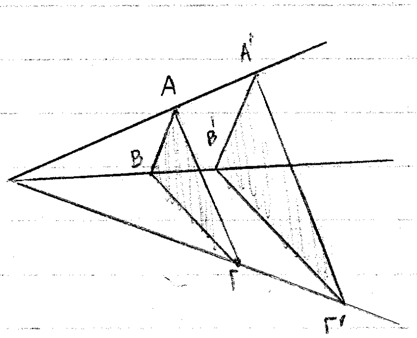
2) Ομοιόθετο ευθύγραμμου τμήματος $\mapsto$ $\boxed{A'B'=O\mu\vartheta(K,\lambda)AB \Rightarrow A'B' \text{ τμήμα } \wedge A'B'\parallel AB \wedge A'B'=\lambda AB}$



Όμοια, με ευθύ και αντίστροφο, αποδεικνύεται ότι $O\mu\vartheta(K,\lambda)AB$ ευθ. τμήμα και $A'B'\parallel AB$.
Επίσης, στο $KA'B'$, $AB\parallel A'B' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{KA'}{KA}=\lambda \Rightarrow \underline{A'B'=\lambda AB}$$

3) Ομοιόθετο γωνίας $\mapsto$ $\boxed{B'\hat{A}'\Gamma'=O\mu\vartheta(K,\lambda)B\hat{A}\Gamma \Rightarrow B'\hat{A}'\Gamma' \text{ γωνία } \wedge B'\hat{A}'\Gamma'=B\hat{A}\Gamma}$



Αποδεικνύεται όμοια ότι $O\mu\vartheta(K,\lambda)B\hat{A}\Gamma$ γωνία.

$$\left.\begin{aligned}&A'=O\mu\vartheta(K,\lambda)A\\ &B'=O\mu\vartheta(K,\lambda)B\\ &\Gamma'=O\mu\vartheta(K,\lambda)\Gamma\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{cases}A'B'=O\mu\vartheta(K,\lambda)AB\\ B'\Gamma'=O\mu\vartheta(K,\lambda)B\Gamma\\ \Gamma'A'=O\mu\vartheta(K,\lambda)\Gamma A\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}A'B'\parallel AB\\ B'\Gamma'\parallel B\Gamma\\ \Gamma'A'\parallel \Gamma A\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'\end{cases} \Rightarrow B'\hat{A}'\Gamma'=B\hat{A}\Gamma.$$ (διότι έχουν πλευρές $\parallel$

και $\hat{A}+\hat{A}'\neq 180$ και όμοια οι $\hat{B},\hat{\Gamma},\hat{B}',\hat{\Gamma}'$ διότι εαν $\hat{A}+\hat{A}'=180$ τότε
$(\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma})+(\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{\Gamma}')>360 \leftarrow$ Άτοπο).

$\hookrightarrow$ Πόρισμα: Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.

Ομοιότητα πολυγώνων

Έστω πολύγωνα $\Pi_1 = A_1 A_2 \cdots A_\nu$ και $\Pi_2 = B_1 B_2 \cdots B_\nu$.

1. Ισότητα πολυγώνων

$$\boxed{\Pi_1 = \Pi_2 \Leftrightarrow \forall i < \nu : \hat{A}_i = \hat{B}_i \wedge A_i A_{i+1} = B_i B_{i+1}}$$

2. Ομοιότητα πολυγώνων

$$\boxed{\Pi_1 \approx \Pi_2 \Leftrightarrow \exists\, O\mu\vartheta(k,\lambda) : \Pi_1 = O\mu\vartheta(k,\lambda)\Pi_2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ $\mapsto$ $\boxed{\Pi_1 \approx \Pi_2 \Leftrightarrow \forall i < n : \frac{A_i A_{i+1}}{B_i B_{i+1}} = \lambda \wedge \hat{A}_i = \hat{B}_i}$

~~Απόδειξη:~~ Ευθύ: $\Pi_1 \approx \Pi_2 \Rightarrow \exists\, O\mu\vartheta(k,\lambda) : \Pi_1 = O\mu\vartheta(k,\lambda)\Pi_2$

▸ Έστω $\Pi_3 = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \cdots \Gamma_\nu = O\mu\vartheta(k,\lambda)\Pi_2$.

τότε $\forall i < \nu$,

$$\Pi_3 = O\mu\vartheta(k,\lambda)\Pi_2 \Rightarrow \begin{cases} \hat{\Gamma}_i = O\mu\vartheta(k,\lambda)\hat{B}_i \Rightarrow \hat{\Gamma}_i = \hat{B}_i & (1) \\ \Gamma_i \Gamma_{i+1} = O\mu\vartheta(k,\lambda) B_i B_{i+1} \Rightarrow \Gamma_i \Gamma_{i+1} = \lambda \cdot B_i B_{i+1} & (2) \end{cases}$$

Αλλά $\Pi_1 = O\mu\vartheta(k,\lambda)\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow \hat{A}_i = \hat{\Gamma}_i \wedge A_i A_{i+1} = \Gamma_i \Gamma_{i+1} \xRightarrow[(2)]{(1)}$

$\Rightarrow \hat{A}_i = \hat{B}_i \wedge A_i A_{i+1} = \lambda \cdot B_i B_{i+1}$.

Αντίστροφο: Έστω ότι $\forall i < \nu : \frac{A_i A_{i+1}}{B_i B_{i+1}} = \lambda_0 \wedge \hat{A}_i = \hat{B}_i$

▸ Θέτω $\lambda = \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2}$ και έστω $\Pi_3 = O\mu\vartheta(k,\lambda)\Pi_1 . \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \forall i < \nu : \frac{\Gamma_i \Gamma_{i+1}}{A_i A_{i+1}} = \lambda \wedge \hat{\Gamma}_i = \hat{A}_i \\ \text{Υπόθεση} \to \frac{B_i B_{i+1}}{A_i A_{i+1}} = \lambda \wedge \hat{B}_i = \hat{A}_i \end{array}\right\} \Rightarrow B_i B_{i+1} = \Gamma_i \Gamma_{i+1} \wedge \hat{B}_i = \hat{\Gamma}_i \Rightarrow \Pi_2 = \Pi_3 = O\mu\vartheta(k,\lambda)\Pi_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Pi_2 \approx \Pi_1$ QED.

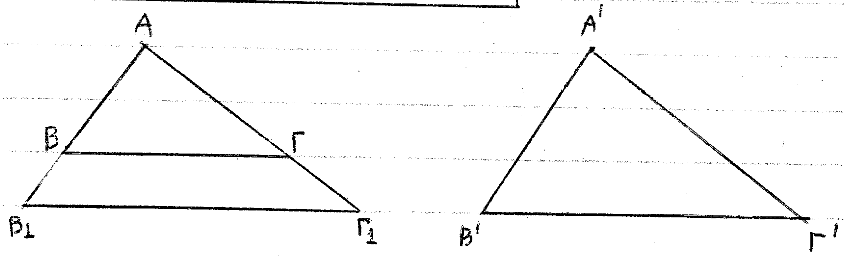
▼ Όμοια τρίγωνα

Από το προηγούμενο θεώρημα, $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{\gamma'}{\gamma} = \lambda \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}. \end{cases}$

όπου λ, ο <u>λόγος ομοιότητας</u>

• ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ.

1) $\boxed{\hat{A} = \hat{A}' \wedge \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}}$



Αν $\lambda = \dfrac{A'B'}{AB}$ τότε ▸ $\overset{\triangle}{AB_1\Gamma_1} = O\mu\theta(A,\lambda)\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

$B_1 = O\mu\theta(A,\lambda)B \Rightarrow \dfrac{AB_1}{AB} = \lambda = \dfrac{A'B'}{AB} \Rightarrow AB_1 = A'B'.$ (1).

$$\left.\begin{array}{l} B_1\Gamma_1 = O\mu\theta(A,\lambda)B\Gamma \Rightarrow B_1\Gamma_1 /\!/ B\Gamma \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B} \\ \text{Υποθ} \to \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}' \ (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{και } (1) \Rightarrow AB_1 = A'B' \\ (2) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}' \\ \text{Υποθ} \to \hat{A} = \hat{A}' \end{array}\right\} \Rightarrow A'B'\Gamma' = AB_1\Gamma_1 \overset{\text{ορισμός}}{=} O\mu\theta(k,\lambda)\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Rightarrow \underline{A'B'\Gamma' \approx \overset{\triangle}{AB\Gamma}}.$$

2) $\boxed{\hat{A} = \hat{A}' \wedge \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'\Gamma'}{A\Gamma} \Rightarrow A\hat{B}\Gamma \approx A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'}$

Αν $\lambda = \dfrac{A'B'}{AB}$ τότε ▸ $\overset{\triangle}{AB_1\Gamma_1} = O\mu\theta(A,\lambda)\overset{\triangle}{AB\Gamma}.$

$\cancel{AB_1 = O\mu\theta(A,\lambda)AB}$ $B_1 = O\mu\theta(A,\lambda)B \Rightarrow \dfrac{AB_1}{AB} = \lambda = \dfrac{A'B'}{AB} \Rightarrow AB_1 = A'B'$ (1)

$\Gamma_1 = O\mu\theta(A,\lambda)\Gamma \Rightarrow \dfrac{A\Gamma_1}{A\Gamma} = \lambda = \dfrac{A'B'}{AB} \overset{\text{Υποθ.}}{=} \dfrac{A'\Gamma'}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma_1 = A'\Gamma'$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{και } (1) \Rightarrow AB_1 = A'B' \\ (2) \Rightarrow A\Gamma_1 = A'\Gamma' \\ \text{Υποθ} \to \hat{A} = \hat{A}' \end{array}\right\} \Rightarrow A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma' = \overset{\triangle}{AB_1\Gamma_1} = O\mu\theta(A,\lambda)\overset{\triangle}{AB\Gamma} \Rightarrow A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma' \approx \overset{\triangle}{AB\Gamma}$$

3) $\boxed{\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \dfrac{\Gamma'A'}{\Gamma A} \Longrightarrow A\hat{B}\Gamma \approx A'\hat{B}'\Gamma'}$

Αν $\lambda = \dfrac{A'B'}{AB}$ τότε ▸ $A\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda) A\overset{\Delta}{B}\Gamma$

$$\left.\begin{aligned}
&B_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda)B \Rightarrow \frac{AB_1}{AB} = \lambda = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow AB_1 = A'B' \\
&\Gamma_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda)\Gamma \Rightarrow \frac{A\Gamma_1}{A\Gamma} = \lambda = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma_1 = A'\Gamma' \\
&B_1\Gamma_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda)B\Gamma \Rightarrow B_1\Gamma_1 = \lambda\, B\Gamma = \frac{A'B'}{AB} \cdot B\Gamma = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} \cdot B\Gamma = B'\Gamma'
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A'\hat{B}'\Gamma' = A\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda) A\hat{B}\Gamma \Rightarrow A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma' \approx AB\Gamma.$

▼ Όμοια ορθογώνια τρίγωνα.

Εαν $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$, τότε:

1) $\boxed{\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow A\hat{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'}$ διότι έχουν και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

2) $\boxed{\dfrac{\beta'}{\beta} = \dfrac{\gamma'}{\gamma} \Rightarrow A\hat{B}\Gamma \approx A'B'\Gamma'}$ διότι $(\hat{\beta,\gamma}) = \hat{A} = 90 = \hat{A}' = (\hat{\beta',\gamma'})$, δηλαδή έχουν και την περιεχόμενη γωνία ίση.

3) $\boxed{\dfrac{\beta'}{\beta} = \dfrac{\alpha'}{\alpha} \Rightarrow A\hat{B}\Gamma \approx A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma'}$

Θέτω $\lambda = \dfrac{\beta'}{\beta} = \dfrac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$ και ▸ $A\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda) A\hat{B}\Gamma$

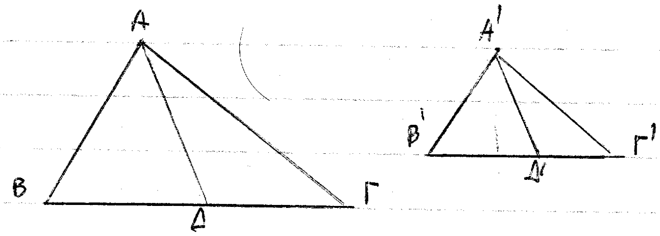
$\Gamma_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda)\Gamma \Rightarrow \dfrac{A\Gamma_1}{A\Gamma} = \lambda = \dfrac{A'\Gamma'}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma_1 = A'\Gamma'$ (1)

$B_1\Gamma_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda)B\Gamma \Rightarrow B_1\Gamma_1 = \lambda \cdot B\Gamma = \dfrac{A'\Gamma'}{A\Gamma} B\Gamma \overset{\text{Υποθ}}{=} \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma} B\Gamma = B'\Gamma'$ (2)

$$\left.\begin{aligned}
&(1) \Rightarrow A\Gamma_1 = A'\Gamma' \\
&(2) \Rightarrow B_1\Gamma_1 = B'\Gamma' \\
&A\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1,\ A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma' \text{ ορθογ.}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow A'\hat{B}'\Gamma' = A\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = \text{Ομϑ}(A,\lambda)\, A\hat{B}\Gamma \Rightarrow A'\overset{\Delta}{B'}\Gamma' \approx A\hat{B}\Gamma$$

Εφαρμογές

1) $\boxed{A\hat{B}\Gamma \approx A'B'\Gamma' \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\upsilon_a'}{\upsilon_a} = \frac{\delta_a'}{\delta_a} = \frac{\mu_a'}{\mu_a}}$



Αν $A\Delta = \upsilon_a, \delta_a, \mu_a$ τότε $A\hat{B}\Delta \approx A'B'\Delta'$ διότι

1). $A\Delta = \upsilon_a \Rightarrow \hat{\Delta} = \hat{\Delta}' = 90$
$A\hat{B}\Gamma \approx A'\hat{B}'\Gamma' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$ $\Bigg\} \overset{A}{\Rightarrow} A\hat{B}\Delta \approx A'\hat{B}'\Delta'$

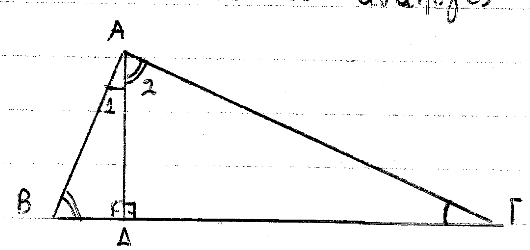
2) $A\Delta = \delta_a \Rightarrow B\hat{A}\Delta = \frac{\hat{A}}{2} \overset{\text{υπ}}{=} \frac{\hat{A}'}{2} = B'\hat{A}'\Delta'$
$\hat{B} = \hat{B}'$ $\Bigg\} \Rightarrow A\hat{B}\Delta \approx A'\hat{B}'\Delta'$

3) $A\Delta = \mu_a \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\frac{B'\Gamma'}{2}}{\frac{B\Gamma}{2}} = \frac{B'\Delta'}{B\Delta}$
$\hat{B} = \hat{B}'$ $\Bigg\} \Rightarrow A\hat{B}\Delta \approx A'B'\Delta'$.

άρα σε κάθε περίπτωση, $A\hat{B}\Delta \approx A'\hat{B}'\Delta' \Rightarrow \lambda = \frac{a'}{a} = \frac{A'\Delta'}{A\Delta}$ ΟΕΔ.

2) $\boxed{\begin{matrix} A\hat{B}\Gamma \text{ ορθογωνιο } (\hat{A}=90) \\ A\Delta \text{ ύψος} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow A\hat{\Delta}B \approx \Gamma\hat{\Delta}A \approx \Gamma\hat{A}B}$

↳ Προσοχή: τα γράμματα στη σειρά ώστε να φαίνονται οι ίσες γωνίες και οι ανάλογες πλευρές.

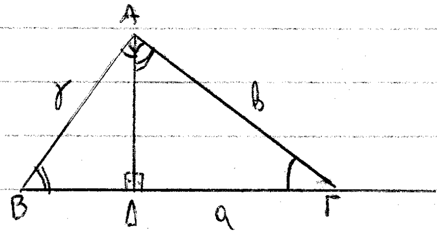


$\hat{A}_1 = 90 - \hat{B} = \hat{\Gamma}$
$\hat{B} = 90 - \hat{\Gamma} = \hat{A}_2$ $\Bigg\} \Rightarrow A\hat{\Delta}B \approx \Gamma\hat{\Delta}B$

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$
$\hat{B}$ κοινή $\Bigg\} \Rightarrow A\hat{\Delta}B \approx \Gamma\hat{A}B$

άρα $A\hat{\Delta}B \approx \Gamma\hat{\Delta}A \approx \Gamma\hat{A}B$.

3) $\boxed{\hat{A}=90 \Rightarrow \beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha}$

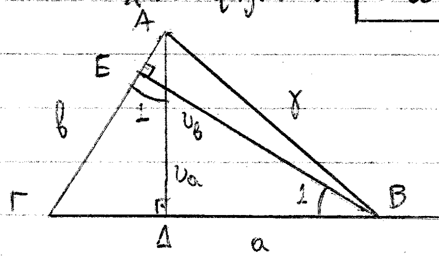


Αρκεί $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\upsilon_\alpha}{\gamma}$

$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=90\\ A\Delta \text{ ύψος}\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{B}\Gamma \approx \Delta\hat{B}A \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A\Gamma}{\Delta A} = \frac{B\Gamma}{BA} \Rightarrow \frac{\beta}{\upsilon_\alpha} = \frac{\alpha}{\gamma} \Rightarrow \beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha.$

4) Σε τυχαίο τρίγωνο: $\boxed{\alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta = \gamma\upsilon_\gamma}$



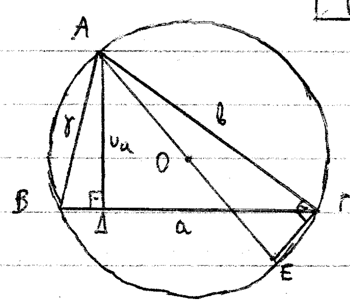
$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = 90 - \hat{\Gamma} = \hat{B}_1\\ \hat{\Gamma} \text{ κοινή}\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{\Delta}\Gamma \approx BE\Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A\Delta}{BE} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta.$

Όμοια $\alpha\upsilon_\alpha = \gamma\upsilon_\gamma$ άρα $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta = \gamma\upsilon_\gamma.$

5) • Ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου σε τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$, R.

$\boxed{\beta\gamma = 2\upsilon_\alpha R.}$



Αρκεί $\frac{\upsilon_\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{2R}$

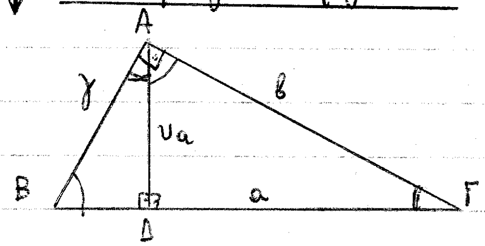
▸ AE διάμετρος.

$\left.\begin{array}{l} A\hat{\Gamma}E = \text{εγ.}\ \frac{\overset{\frown}{AE}}{2} = 90 \Rightarrow A\hat{E}\Gamma \text{ ορθογ.}\\ A\Delta \text{ ύψος} \Rightarrow \hat{\Delta} = 90 \Rightarrow A\hat{B}\Delta \text{ ορθογ.}\\ A\hat{B}\Delta = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = A\hat{E}\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A\hat{B}\Delta \approx A\hat{E}\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{\upsilon_\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{2R} \Rightarrow \beta\gamma = 2\upsilon_\alpha R.$ QED.

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A}=90^\circ$)



1) $\boxed{υ_α^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ}$

$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}Γ \text{ ορθογώνιο} \\ AΔ \text{ ύψος} \end{array}\right\} \Rightarrow Δ\hat{B}A \approx Δ\hat{A}Γ \Rightarrow \frac{ΔΒ}{ΔΑ} = \frac{ΔΑ}{ΔΓ} \Rightarrow \frac{ΔΒ}{υ_α} = \frac{υ_α}{ΔΓ} \Rightarrow υ_α^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ.$

2) $\boxed{\begin{array}{l} β^2 = α \cdot ΔΓ \\ γ^2 = α \cdot ΔΒ \end{array}}$ (θεώρημα Ευκλείδη)

$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}Γ \text{ ορθογώνιο} \\ AΔ \text{ ύψος} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{B}Γ \approx Δ\hat{A}Γ \Rightarrow \frac{AΓ}{ΔΓ} = \frac{BΓ}{AΓ} \Rightarrow \frac{β}{ΔΓ} = \frac{α}{β} \Rightarrow β^2 = α \cdot ΔΓ.$

Όμοια $γ^2 = α \cdot ΔΒ$.

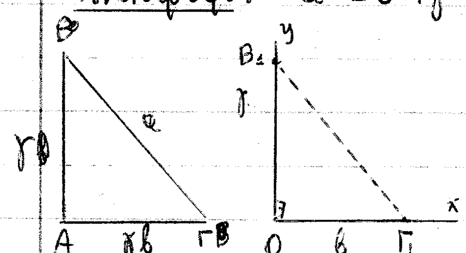
3) $\boxed{\frac{β^2}{γ^2} = \frac{ΔΓ}{ΔΒ}}$

$A\hat{B}Γ \text{ ορθ.} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} β^2 = α \cdot ΔΓ \\ γ^2 = α \cdot ΔΒ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{β^2}{γ^2} = \frac{α \cdot ΔΓ}{α \cdot ΔΒ} = \frac{ΔΓ}{ΔΒ}$

4) Θεώρημα του Πυθαγόρα: $\boxed{α^2 = β^2 + γ^2}$

$β^2 + γ^2 = α \cdot ΔΓ + α \cdot ΔΒ = α(ΔΓ + ΔΒ) = α \cdot ΒΓ = α^2.$

• <u>Αντίστροφο</u>: $α^2 = β^2 + γ^2 \Rightarrow \hat{A} = 90$



▸ Φέρνω $x\hat{O}y = 90$ και παίρνω $OΓ_1 = β \in Ox$, $OB_1 = γ \in Oy$.

$\left.\begin{array}{l} B_1Γ_1^2 \underset{\hat{O}=90^\circ}{=} β^2 + γ^2 = α^2 = BΓ^2 \Rightarrow B_1Γ_1 = BΓ \\ β = OΓ_1 = AΓ \\ γ = AB_1 = AB \end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{B_1}Γ_1 = A\hat{B}Γ \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{A} = \hat{O} = 90.$

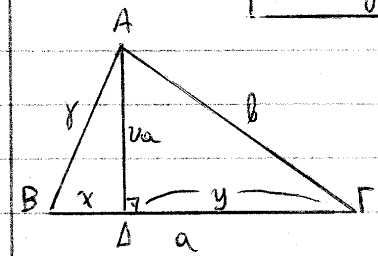
5) $\boxed{\frac{1}{\upsilon_\alpha^2}=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}$

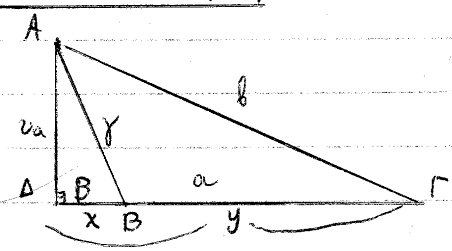
$$B=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{\alpha\cdot\Gamma\Delta}+\frac{1}{\alpha\cdot B\Delta}=\frac{B\Delta+\Gamma\Delta}{\alpha\cdot B\Delta\cdot\Gamma\Delta}=\frac{\alpha}{\alpha\cdot\upsilon_\alpha^2}=\frac{1}{\upsilon_\alpha^2}=A.$$

▼ Ύψη τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$

$\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$
$\upsilon_\beta=\frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$
$\upsilon_\gamma=\frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

όπου $2\tau=\alpha+\beta+\gamma$.





Εστω $\hat{\Gamma}<90$. ▸Φέρνω το ύψος $A\Delta=\upsilon_\alpha$ και θέτω $x=B\Delta$, $y=\Gamma\Delta$.

~~$x+y=\alpha$~~ $\Rightarrow x=|\alpha-y| \Rightarrow x^2=|\alpha-y|^2=\alpha^2+y^2-2\alpha y$ (1).

$A\hat{B}\Delta$ ορθογώνιο $\Rightarrow x^2=\gamma^2-\upsilon_\alpha^2$

$A\hat{\Delta}\Gamma$ ορθογώνιο $\Rightarrow y^2=\beta^2-\upsilon_\alpha^2$ (2)

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \gamma^2-\cancel{\upsilon_\alpha^2}=\alpha^2+\beta^2-\cancel{\upsilon_\alpha^2}-2\alpha y \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\alpha y=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 \Rightarrow y=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha} \quad (3)$$

$$(2)\Rightarrow y^2=\beta^2-\upsilon_\alpha^2 \Rightarrow \upsilon_\alpha^2=\beta^2-y^2=\beta^2-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}\right)^2=\frac{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}=$$

$$=\frac{(2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)(2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2}=\frac{[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2][\gamma^2-(\alpha-\beta)^2]}{4\alpha^2}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\gamma+\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+\beta)}{4\alpha^2}$$

Είναι $\alpha+\beta+\gamma=2\tau \Rightarrow$
- $\alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$
- $\gamma+\alpha-\beta=2(\tau-\beta)$
- $\gamma+\beta-\alpha=2(\tau-\alpha)$.

άρα,

$$\upsilon_a^2 = \frac{2\tau\cdot 2(\tau-a)\cdot 2(\tau-\beta)\cdot 2(\tau-\gamma)}{4a^2} = \frac{4}{a^2}\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_a = \frac{2}{a}\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Όμοια αποδεικνύονται και τα $\upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$.

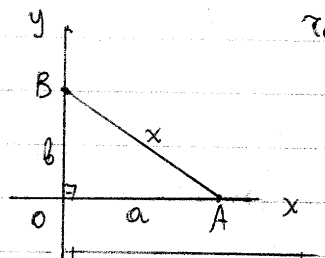
$\rightarrow$ $a\upsilon_a = \beta\upsilon_\beta = \gamma\upsilon_\gamma = 2\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Γεωμετρικές κατασκευές

Αν a,β γνωστά τότε θα κατασκευάσουμε τα

① $\boxed{x=\sqrt{a^2+\beta^2}}$

Σύνθεση: Παίρνω σε γωνία $x\hat{O}y=90$, $A\in Ox$, $B\in Oy$: $OA=a \wedge OB=\beta$.



Τότε, $AB=x$.

$\cancel{AB^2=OB^2+OA^2=a^2+\beta^2 \Rightarrow AB=\sqrt{}}$

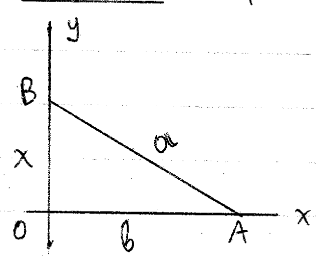
Απόδειξη: $O\hat{A}B$ ορθ $\Rightarrow AB^2=OA^2+OB^2=a^2+\beta^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB=\sqrt{a^2+\beta^2}=x$.

② $\boxed{x=\sqrt{a^2-\beta^2}}$, $a>\beta$

Σύνθεση: Παίρνω γωνία $x\hat{O}y=90$ και ~~$A: OA=a.$ και $B: B=Oy\cap\kappa(A,\beta)$~~

~~$A: OA=\beta$, ο~~ $A\in Ox: OA=\beta$ και $B=Oy\cap\kappa(A,a)$.

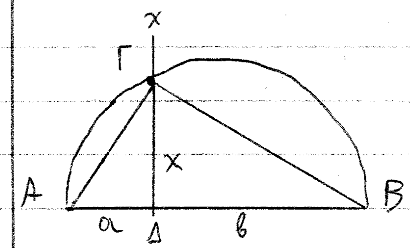


Τότε $x=OB$.

Απόδειξη: OAB ορθ $\Rightarrow AB^2=OA^2+OB^2 \Rightarrow a^2=\beta^2+OB^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow OB^2=a^2-\beta^2 \Rightarrow OB=\sqrt{a^2-\beta^2}=x$.

③ $\boxed{x=\sqrt{\alpha\beta}}$



<u>Σύνθεση</u>. κάνω τα τμήματα α,β διαδοχικά και συνευθειακά και φέρνω ημικύκλιο με διάμετρο $AB=\alpha+\beta$. ($A\Delta=\alpha$, $B\Delta=\beta$). Φέρνω $\Delta x \perp AB$ και παίρνω $\Gamma=\Delta x \cap$ ημ.κ(AB). $\Gamma\Delta = x$.

<u>Απόδειξη</u>

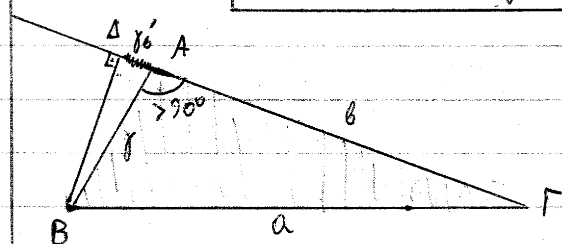
$$\left.\begin{array}{l} A\hat{\Gamma}B = \text{εγγ } \widehat{AB} = 90 \Rightarrow A\Gamma B \text{ ορθογώνιο} \\ \Gamma\Delta \perp AB \Rightarrow \Gamma\Delta \text{ ύψος} \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta B = \alpha\beta \Rightarrow \Gamma\Delta = \sqrt{\alpha\beta} = x$$

→ <u>Σε ΤΥΧΑΙΟ τρίγωνο</u>

▼ <u>Γενίκευση του πυθαγόρειου θεωρήματος</u>

1) <u>Θεώρημα αμβλείας γωνίας</u>

$$\boxed{\hat{A} > 90 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma'_\beta} \quad \text{ή} \quad \hat{A} > 90 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma\beta'_\gamma$$



όπου γ'_β η προβολή της γ στην β, δηλαδή

$\gamma'_\beta = A\Delta$ με ~~Δ∈β~~ ~~ΒΔ⊥ΑΓ~~
$B\Delta \perp \beta$ και $\Delta \in \beta$.

Αποδειξη: $B\Delta \perp A\Gamma \Rightarrow B\Gamma\Delta$ ορθογώνιο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 =$

$A\hat{B}\Delta$ ορθογ.

$$= (\gamma^2 - A\Delta^2) + (A\Delta + \beta)^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + A\Delta^2 + 2A\Delta\cdot\beta + \beta^2 =$$
$$= \beta^2 + \gamma^2 + 2A\Delta\cdot\beta = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma'_\beta.$$

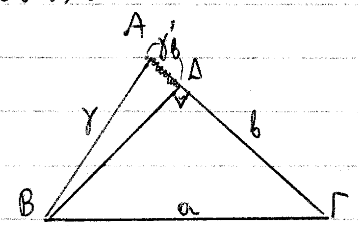
Όμοια $\hat{B} > 90 \Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 + 2\gamma\cdot\alpha'_\gamma = \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\cdot\gamma'_\alpha$

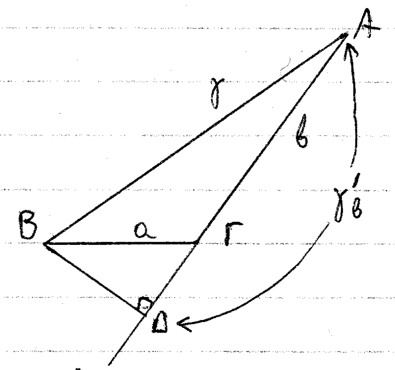
και. $\hat{\Gamma} > 90 \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta'_\alpha = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\alpha'_\beta$.

2) Θεώρημα οξείας γωνίας

$$\boxed{\hat{A}<90 \Rightarrow a^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma'_\beta=\beta^2+\gamma^2-2\gamma\beta'_\gamma}$$

Απόδειξη





$$\left.\begin{array}{l}\Delta\in \text{εντος } A\Gamma \Rightarrow \Gamma\Delta = A\Gamma - A\Delta = \beta-\gamma'_\beta \\ \Delta\in \text{εκτος } A\Gamma \Rightarrow \Gamma\Delta = A\Delta - A\Gamma = \gamma'_\beta-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\Gamma\Delta=|\beta-\gamma'_\beta|}$$

$B\Gamma\Delta$ ορθογώνιο $\Rightarrow a^2=B\Gamma^2=B\Delta^2+\Delta\Gamma^2=(\gamma^2-A\Delta^2)+|\beta-\gamma'_\beta|^2=$

$$=\gamma^2-A\Delta^2+(\beta-\gamma'_\beta)^2=\gamma^2-{\gamma'_\beta}^2+\beta^2-2\beta\gamma'_\beta+{\gamma'_\beta}^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma'_\beta$$

↳ Κριτήριο για το είδος των γωνιών τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$

Αν $a>\beta,\gamma$ και

$a^2>\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow A>90$ (οπότε $B<90$ και $\Gamma<90$)

$a^2=\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow A=90$ (" " " ")

$a^2<\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow A<90$ (και $B<90, \Gamma<90$ διότι $a>\beta>\gamma \Leftrightarrow \hat{A}>\hat{B}>\hat{\Gamma}$)

Θεωρήματα διαμέσων

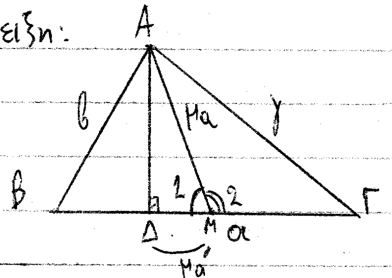
① $\boxed{\beta^2+\gamma^2=2\mu_a^2+\frac{a^2}{2}}$ μ_a = διάμεσος ΑΜ.

Όμοια $a^2+\beta^2=2\mu_\gamma^2+\frac{\gamma^2}{2}$ και $a^2+\gamma^2=2\mu_\beta^2+\frac{\beta^2}{2}$

② $\boxed{|\beta^2-\gamma^2|=2a\cdot\mu_a'}$ μ_a' = προβολή της μ_a στην Α.

Όμοια $|a^2-\beta^2|=2\gamma\cdot\mu_\gamma'$ και $|a^2-\gamma^2|=2\beta\cdot\mu_\beta'$

Απόδειξη:



Εστω ~~β>γ~~ $\beta<\gamma$

Στα $A\hat{M}B$, $A\hat{M}\Gamma$, ΑΜ κοινή, ΑΜ διαμ. $\Rightarrow$ ΒΜ = ΜΓ, ~~β>γ~~ $\beta<\gamma$ $\Big\}^{*} \Rightarrow$ ~~$M_2>M_1$~~ $M_1<M_2$, $M_1+M_2=180$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} M_2>90 \Rightarrow \beta^2=\mu_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\frac{a}{2}M\Delta \quad (1) \\ M_1<90 \Rightarrow \gamma^2=\mu_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\frac{a}{2}M\Delta \quad (2). \end{cases}$

$(1)+(2)\Rightarrow \beta^2+\gamma^2=2\mu_a^2+2\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\frac{a}{2}M\Delta-2\frac{a}{2}M\Delta=2\mu_a^2+\frac{a^2}{2}$ QED.

$(1)-(2)\Rightarrow \beta^2-\gamma^2=\mu_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\frac{a}{2}M\Delta=\mu_a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\frac{a}{2}M\Delta=$

$=2a\cdot M\Delta=2a\cdot\mu_a'$. QED.

Όμοια εαν $\beta<\gamma$.

- Τύποι των διαμέσων.

Είναι $\beta^2+\gamma^2=2\mu_a^2+\frac{a^2}{2} \Rightarrow 2\mu_a^2=\beta^2+\gamma^2-\frac{a^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_a^2=\frac{\beta^2+\gamma^2-\frac{a^2}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\mu_a^2=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-a^2}{4}}$

Όμοια $\boxed{\mu_\beta^2=\frac{2a^2+2\gamma^2-\beta^2}{4}}$

$\boxed{\mu_\gamma^2=\frac{2a^2+2\beta^2-\gamma^2}{4}}$

→ Οι πλευρές τριγώνου συναρτήσει των διαμέσων.

$a^2=\frac{4}{9}(2\mu_\beta^2+2\mu_\gamma^2-\mu_a^2)$	$\beta^2=\frac{4}{9}(2\mu_\gamma^2+2\mu_a^2-\mu_\beta^2)$	$\gamma^2=\frac{4}{9}(2\mu_a^2+2\mu_\beta^2-\mu_\gamma^2)$

Απόδειξη: Είναι $2\beta^2+2\gamma^2-a^2=4\mu_a^2$ (1)

$2\gamma^2+2a^2-\beta^2=4\mu_\beta^2$ (2)

$2a^2+2\beta^2-\gamma^2=4\mu_\gamma^2$ (3).

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow 3a^2+3\beta^2+3\gamma^2=4\mu_a^2+4\mu_\beta^2+4\mu_\gamma^2 \Rightarrow a^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{4}{3}(\mu_a^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a^2+2\beta^2+2\gamma^2=\frac{8}{3}\mu_a^2+\frac{8}{3}\mu_\beta^2+\frac{8}{3}\mu_\gamma^2$ (4)

$(4)-(1) \Rightarrow 3a^2=\frac{8}{3}\mu_\beta^2+\frac{8}{3}\mu_\gamma^2-\frac{4}{3}\mu_a^2 \Rightarrow a^2=\frac{4}{9}(2\mu_\beta^2+2\mu_\gamma^2-\mu_a^2)$.

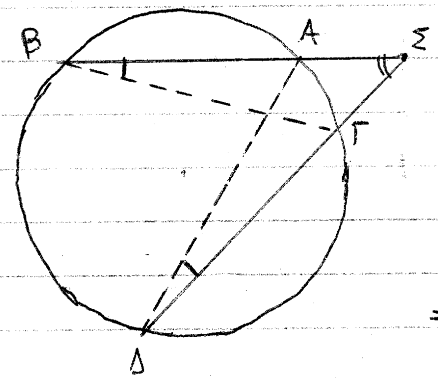
Όμοια, $(4)-(2) \Rightarrow \beta^2=\frac{4}{9}(2\mu_\gamma^2+2\mu_a^2-\mu_\beta^2)$ και $(4)-(3) \Rightarrow \gamma^2=\frac{4}{9}(2\mu_a^2+2\mu_\beta^2-\mu_\gamma^2)$.

Μετρικές σχέσεις στον κύκλο

Τέμνουσες κύκλου άπο σημείο.

1) Αν $AB, \Gamma\Delta$ χορδές ενος κύκλου και $\Sigma = AB \cap \Gamma\Delta$, τότε

$$\boxed{\Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta.}$$



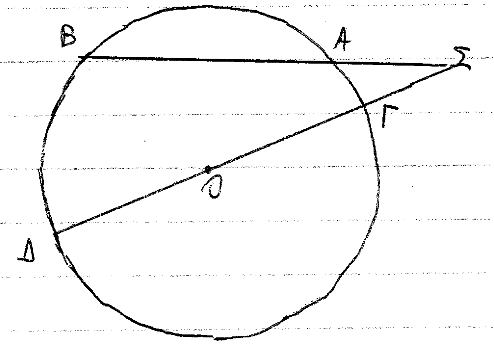
Στα $B\hat{\Gamma}\Sigma$, $\Delta\hat{A}\Sigma$.

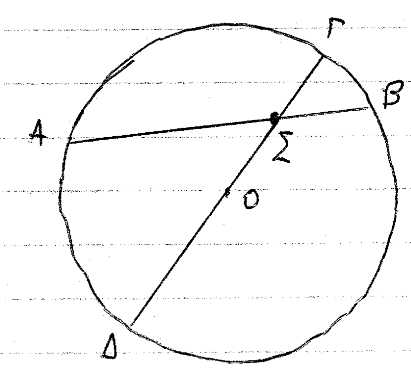
$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \hat{\Delta} \\ \hat{\Sigma} \text{ κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{\Gamma}\Sigma \approx \Delta A \Sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma B} = \frac{A\Sigma}{\Sigma\Delta} \Rightarrow \Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta.$$

2) Αν AB χορδή ενος κύκλου και $\Sigma \in AB$ ~~ένα τυχαίο σημείο~~, τότε:

$$\boxed{\Sigma A \cdot \Sigma B = |\Sigma O^2 - \rho^2|}$$





▸ Φέρνω την ΣO και παίρνω $\{\Gamma, \Delta\} = \Sigma O \cap K(O, \rho)$, ώστε $\Sigma\Gamma \leqslant \Sigma\Delta$

i) Αν $\Sigma O > \rho$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Sigma\Gamma = \Sigma O - \rho \\ \Sigma\Delta = \Sigma O + \rho \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta = (\Sigma O - \rho)(\Sigma O + \rho) \\ \Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

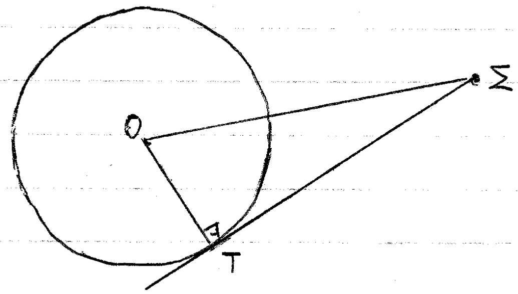
$$\Rightarrow \Sigma A \cdot \Sigma B = (\Sigma O - \rho)(\Sigma O + \rho) = \Sigma O^2 - \rho^2.$$

ii) Αν $\Sigma O < \rho$ τότε $\left.\begin{array}{l}\Sigma\Gamma = \rho - \Sigma O \\ \Sigma\Delta = \rho + \Sigma O\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\Sigma\Gamma\cdot\Sigma\Delta = (\rho-\Sigma O)(\rho+\Sigma O) \\ \Sigma A\cdot\Sigma B = \Sigma\Gamma\cdot\Sigma\Delta\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\Sigma A}$

$\Rightarrow \Sigma A\cdot\Sigma B = (\rho-\Sigma O)(\rho+\Sigma O) = \rho^2 - \Sigma O^2.$

Γενικά, $\Sigma A\cdot\Sigma B = |\Sigma O^2 - \rho^2|$

3) ΣΤ εφαπτόμενη στο Τ $\Rightarrow$ $\boxed{\Sigma T^2 = \Sigma O^2 - \rho^2}$

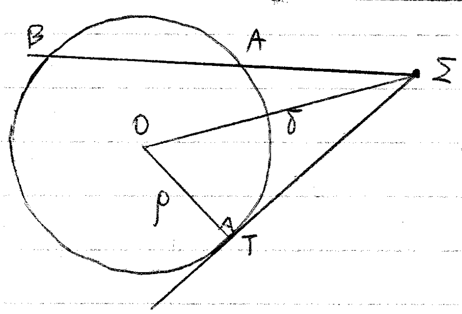


ΣΤ εφαπτόμενη $\Rightarrow \Sigma T \perp OT \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma O T$ ορθογώνιο $\Rightarrow \Sigma T^2 + OT^2 = \Sigma O^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma T^2 = \Sigma O^2 - \rho^2.$

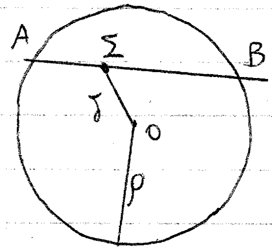
Δύναμη σημείου Σ ως προς κύκλο (Ο,ρ)

(~~Είναι η ποσότητα~~ $\boxed{\mathcal{D}_{(O,\rho)}(\Sigma) = \delta^2 - \rho^2}$ ~~όπου~~ $\delta = \Sigma O$.)

•1 Αν $\Sigma \notin$ κ.δισκ(O,ρ) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathcal{D}_O(\Sigma) = \Sigma A\cdot\Sigma B = \delta^2 - \rho^2 = \Sigma T^2.}$



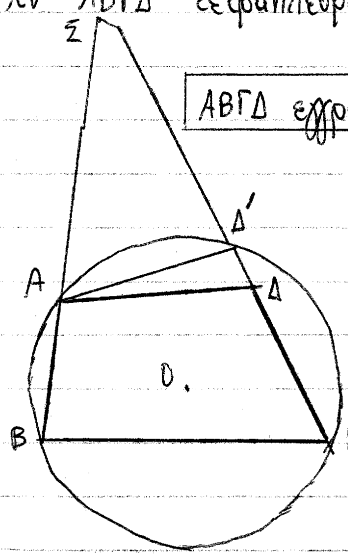
•2 Αν $\left.\begin{array}{l}\Sigma \in \text{κ.δισκ}(O,\rho) \\ \Sigma \notin \text{κ.}(O,\rho)\end{array}\right\} \Leftrightarrow$ $\boxed{\mathcal{D}_O(\Sigma) = \Sigma A\cdot\Sigma B = \rho^2 - \delta^2}$



•3 Αν $\Sigma \in$ κ.(O,ρ) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathcal{D}_O(\Sigma) = 0}$

4° κριτήριο εγγράψιμου τετράπλευρου.

Αν ΑΒΓΔ τετράπλευρο και $\Sigma = AB \cap \Gamma\Delta$ τότε



$$\boxed{AB\Gamma\Delta \text{ εγγράψιμο} \Leftrightarrow \Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta}$$

Ευθυ: Είναι προφανές.

Αντίστροφο Έστω $\Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta$.

- Φέρνω τον κύκλο που διέρχεται από τα $A\hat{B}\Gamma$, $K(O,\rho)$. Έστω $\Delta' = \Gamma\Delta \cap (O,\rho)$.

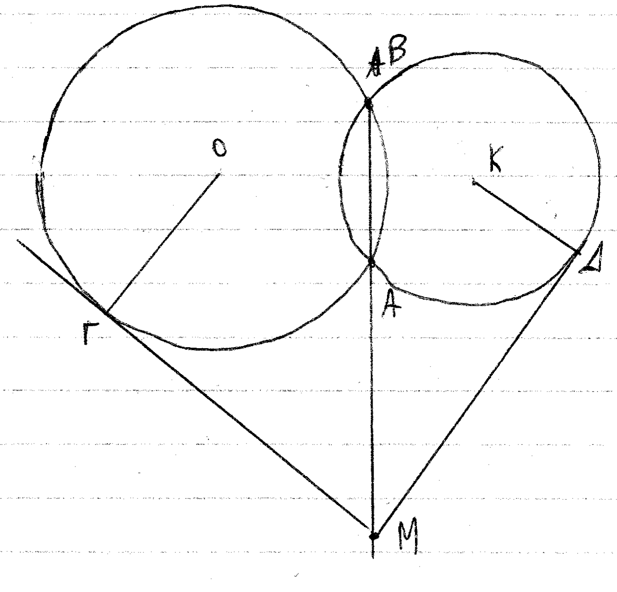
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB\Gamma\Delta' \text{ εγγεγραμμένο} \\ \mathcal{D}_O(\Sigma) \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta' \\ \text{Υποθ} \quad \Sigma A \cdot \Sigma B = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta' = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta \Rightarrow \Sigma\Delta' = \Sigma\Delta \Rightarrow \Delta \equiv \Delta' \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB\Gamma\Delta$ εγγράψιμο.

Εφαπτόμενες σε τεμνόμενους κύκλους.

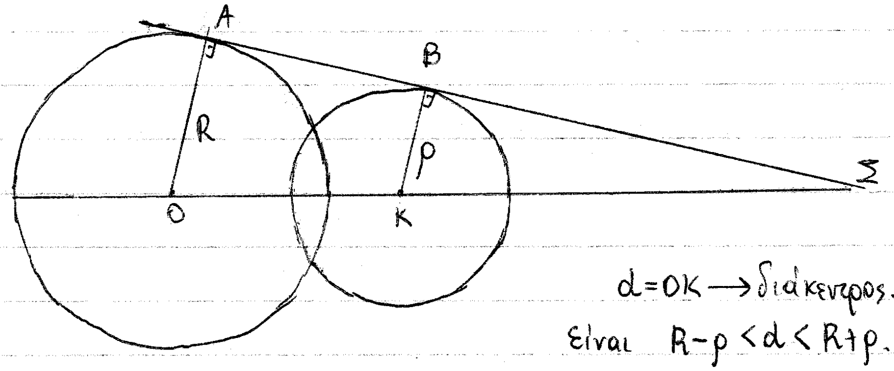
Έστω κύκλοι (O,ρ), (K,R) και $\{A,B\} = (O) \cap (K)$.

$$\forall M \in AB, \left.\begin{array}{l} M\Gamma \text{ εφαπ. } (O) \\ M\Delta \text{ εφαπ. } (K) \end{array}\right\} \Rightarrow M\Gamma = M\Delta.$$



$$\mathcal{D}_O(M) \Rightarrow M\Gamma^2 = MA \cdot MB$$
$$\mathcal{D}_K(M) \Rightarrow M\Delta^2 = MA \cdot MB$$
$$\Rightarrow M\Gamma^2 = M\Delta^2 \Rightarrow M\Gamma = M\Delta.$$

▼ Κοινή εφαπτόμενη τεμνόμενων κύκλων (→ Εκτός ύλης).



$d = OK \longrightarrow$ διάκεντρος.
Είναι $R - \rho < d < R + \rho$.

1) Θέση του σημείου Σ:

$\Sigma K = \dfrac{\rho \cdot d}{R - \rho}$	$\Sigma O = \dfrac{R \cdot d}{R - \rho}$

$\Sigma B, \Sigma A$ εφαπτόμενες $\Rightarrow KB \perp B\Sigma \wedge OA \perp A\Sigma \Rightarrow BK \parallel OA \Rightarrow \dfrac{\Sigma K}{\Sigma O} = \dfrac{\rho}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma K \cdot R = \rho\, \Sigma O \Rightarrow \Sigma K \cdot R = \rho(\Sigma K + OK) \Rightarrow R \cdot \Sigma K = \rho \cdot \Sigma K + d \cdot \rho \Rightarrow (R - \rho)\Sigma K = d \cdot \rho$$

$$\Rightarrow \Sigma K = \frac{d \cdot \rho}{R - \rho}.$$

$$\Sigma O = \Sigma K + OK = \Sigma K + d = \frac{d \cdot \rho}{R - \rho} + d = \frac{d \cdot \rho + d(R - \rho)}{R - \rho} = \frac{R \cdot d}{R - \rho}.$$

2) Μήκος εφαπτομένων.

$\Sigma B = \dfrac{\rho}{R - \rho}\sqrt{d^2 - (R - \rho)^2}$
$\Sigma A = \dfrac{R}{R - \rho}\sqrt{d^2 - (R - \rho)^2}$

$$\mathcal{D}_K(\Sigma) \Rightarrow \Sigma B^2 = \Sigma K^2 - \rho^2 = \frac{\rho^2 d^2}{(R - \rho)^2} - \rho^2 = \frac{\rho^2 d^2 - \rho^2 (R - \rho)^2}{(R - \rho)^2} = \frac{\rho^2}{(R - \rho)^2}\left[d^2 - (R - \rho)^2\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Sigma B = \dfrac{\rho}{R - \rho}\sqrt{d^2 - (R - \rho)^2}$. Όμοια από την $\mathcal{D}_O(\Sigma)$, $\Sigma A = \ldots$

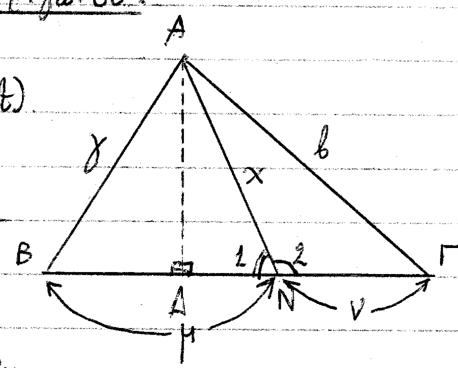
3) Εφαπτόμενο τμήμα $\boxed{AB=\sqrt{d^2-(R-\rho)^2}}$

$$AB=\Sigma A-\Sigma B=\frac{R}{R-\rho}\sqrt{d^2-(R-\rho)^2}-\frac{\rho}{R-\rho}\sqrt{d^2-(R-\rho)^2}=\frac{R-\rho}{R-\rho}\sqrt{d^2-(R-\rho)^2}=$$
$$=\sqrt{d^2-(R-\rho)^2}$$

→ Όταν οι κύκλοι εφάπτονται $\Rightarrow$ $\boxed{AB=2\sqrt{R\rho}}$.

(Ο), (Κ) εφάπτονται $\Rightarrow d=R+\rho \Rightarrow AB=\sqrt{(R+\rho)^2-(R-\rho)^2}=\sqrt{R^2+2R\rho+\rho^2-R^2+2R\rho-\rho^2}=$
$=\sqrt{4R\rho}=2\sqrt{R\rho}$.

Θεώρημα Stewart – διχοτόμοι τριγώνου.



1) $\boxed{\mu\beta^2+\nu\gamma^2=\alpha x^2+\alpha\mu\nu}$ (Stewart).

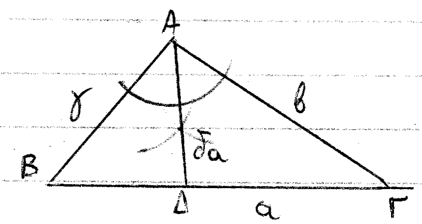
όπου $x=AN$, $\mu=BN$, $\nu=\Gamma N$.
με $N\in B\Gamma$.

Απόδειξη.

Έστω $\left.\begin{matrix} N_1\le 90 \\ N_1+N_2=180\end{matrix}\right\} \Rightarrow N_2\ge 90$ κι έχω

$$\left.\begin{matrix} N_1\le 90\Rightarrow \Sigma\tau o\ A\hat{N}B,\ \gamma^2=x^2+\mu^2-2\mu\cdot N\Delta \Rightarrow \nu\gamma^2=\nu x^2+\nu\mu^2-2\mu\nu\cdot N\Delta \\ N_2\ge 90\Rightarrow \Sigma\tau o\ A\hat{N}\Gamma,\ \beta^2=x^2+\nu^2+2\nu\cdot N\Delta \Rightarrow \mu\beta^2=\mu x^2+\mu\nu^2+2\mu\nu\cdot N\Delta\end{matrix}\right\}\xrightarrow{+}$$

$\Rightarrow \mu\beta^2+\nu\gamma^2=(\mu+\nu)x^2+(\mu+\nu)\mu\nu=\alpha x^2+\alpha\mu\nu$. QED.



2) $\boxed{\delta_\alpha^2=\beta\gamma\left[1-\frac{\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2}\right]}$

Απόδειξη:

$$\left.\begin{matrix} \text{Θεωρ. Stewart} \longrightarrow B\Delta\cdot\beta^2+\Gamma\Delta\cdot\gamma^2=\alpha\delta_\alpha^2+\alpha\cdot B\Delta\cdot\Gamma\Delta. \\ \text{Θεωρ. διχ} \longrightarrow B\Delta=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta+\gamma},\ \Gamma\Delta=\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta+\gamma}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\alpha}\gamma}{\beta+\gamma}\beta^2+\frac{\cancel{\alpha}\beta}{\beta+\gamma}\gamma^2=\cancel{\alpha}\delta_\alpha^2+\cancel{\alpha}\cdot B\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_a^2 = \frac{\beta^2\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\beta\gamma^2}{\beta+\gamma} - \frac{a^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} = \beta\gamma\left[\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} - \frac{a^2}{(\beta+\gamma)^2}\right] =$$

$$= \beta\gamma\left[1 - \frac{a^2}{(\beta+\gamma)^2}\right]$$

ΕΜΒΑΔΑ

▼ Αρχικές έννοιες – ορισμοί

Εστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των πολυγωνων. Δεχόμαστε την υπαρξη μοναδικής απεικόνησης $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+^*$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

1) Αν $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$ ~~και~~ τότε $\boxed{\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow f(\Pi_1) = f(\Pi_2)}$

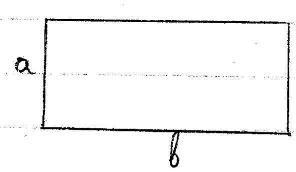
~~2) Αν $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{P}$ τότε $\Pi_1 \cap \Pi_2$ = άν τα Π_1 κ~~

2) Αν ενα πολύγωνο Π χωρίζεται σε πολύγωνα Π_1 και Π_2 τα όποια έχουν μεταξύ τους μία πλευρα ~~κ~~κοινή, τότε
$$f(\Pi) = f(\Pi_1) + f(\Pi_2).$$

3) Αν $\left.\begin{array}{l} AB\Gamma\Delta \text{ τετράγωνο} \\ AB = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(AB\Gamma\Delta) = 1.$

• Εμβαδο (Π) πολυγώνου $\Pi \in \mathcal{P}$ ονομάζουμε την ποσότητα $f(\Pi)$.

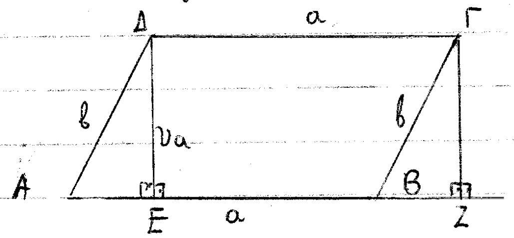
→ Εμβαδό ορθογωνίο παραλληλόγραμμου. → $\boxed{E = a \cdot \beta}$

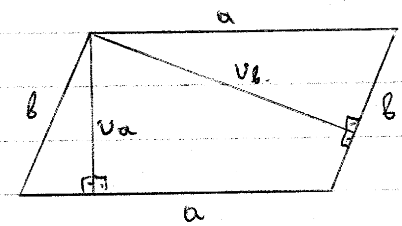


▼ Βασικά εμβαδα

1) Ορθογώνιο → $E = a \cdot \beta$

2) Παραλληλογράμμου : $\boxed{E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta}$





▸ Φέρνω $\Delta E \perp AB$ και $\Gamma Z \perp AB$.

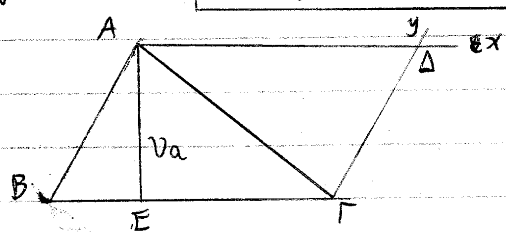
Είναι $E = (AB\Gamma\Delta) = (A\Delta E) + (\Delta E B \Gamma) =$

(διότι $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Gamma}Z$)

$= (B\Gamma Z) + (\Delta E B \Gamma) = (\Delta E Z \Gamma)$.

Αλλά $\left.\begin{array}{l} \Delta\Gamma // EZ \\ \Delta E // \Gamma Z \ (\text{ως} \perp AB) \\ \hat{E} = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E Z \Gamma \# \Rightarrow (\Delta E Z \Gamma) = \Delta E \cdot EZ = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$.

3) Τριγώνου $\boxed{E = \frac{\alpha \upsilon_\alpha}{2} = \frac{\beta \upsilon_\beta}{2} = \frac{\gamma \cdot \upsilon_\gamma}{2}}$



▸ Φέρνω $Ax // B\Gamma$, $\Gamma y // AB$ και παίρνω $\Delta = Ax \cap \Gamma y$.

$\left.\begin{array}{l} A\Delta // B\Gamma \\ AB // \Gamma\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow AB\Gamma\Delta \# \Rightarrow A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta \Rightarrow (A\overset{\triangle}{B}\Gamma) = (A\Gamma\Delta) \Rightarrow (AB\Gamma) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} = \frac{AE \cdot B\Gamma}{2} =$

$= \frac{\alpha \cdot \upsilon_\alpha}{2}$.

▼ Εμβαδό τριγώνου

1) $\boxed{E = \frac{\alpha \upsilon_\alpha}{2} = \frac{\beta \upsilon_\beta}{2} = \frac{\gamma \cdot \upsilon_\gamma}{2}}$

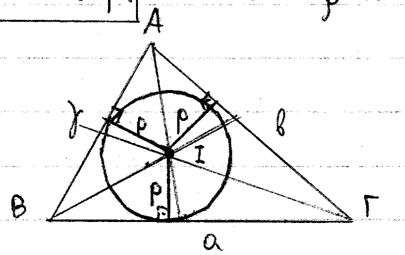
2) $\boxed{E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$ όπου $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$.

Είναι $\upsilon_\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \Rightarrow E = \frac{\alpha \cdot \upsilon_\alpha}{2} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

3) $\boxed{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}$ όπου R ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

είναι $\beta\gamma = 2R\,\upsilon_\alpha \Rightarrow \upsilon_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R} \Rightarrow E = \frac{\alpha\,\upsilon_\alpha}{2} = \frac{\alpha\cdot\frac{\beta\gamma}{2R}}{2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$.

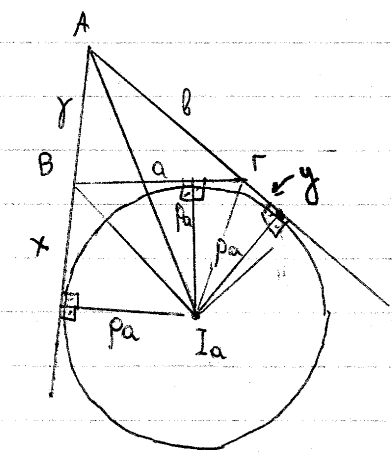
4) $\boxed{E = \tau\cdot\rho}$ όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.



$E = (AB\Gamma) = (AIB) + (BI\Gamma) + (\Gamma IA) = \frac{\gamma\cdot\rho}{2} + \frac{\alpha\cdot\rho}{2} + \frac{\beta\cdot\rho}{2} = \frac{1}{2}\rho(\alpha+\beta+\gamma) =$

$= \frac{1}{2}\rho\cdot 2\tau = \tau\cdot\rho$.

5) $\boxed{E = \rho_\alpha(\tau-\alpha) = \rho_\beta(\tau-\beta) = \rho_\gamma(\tau-\gamma)}$



$x + y = \alpha$
$x - y = \beta - \gamma$

$E = (AB\Gamma) = (ABI_\alpha\Gamma) - (BI_\alpha\Gamma) = (AI_\alpha B) + (AI_\alpha\Gamma) - (BI_\alpha\Gamma) =$

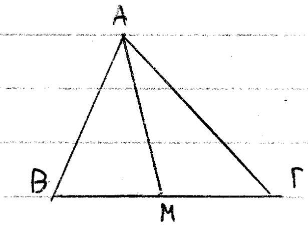
$= \frac{1}{2}\gamma\cdot\rho_\alpha + \frac{1}{2}\beta\cdot\rho_\alpha - \frac{1}{2}\alpha\rho_\alpha = \frac{1}{2}\rho_\alpha(\beta+\gamma-\alpha) = \frac{1}{2}\rho_\alpha(2\tau-2\alpha) = \rho_\alpha(\tau-\alpha)$.

↳ Σε ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A}=90$), $\boxed{E = \frac{\beta\gamma}{2} = \frac{\alpha\,\upsilon_\alpha}{2}}$

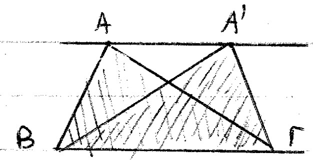
↳ Σε ισόπλευρο τρίγωνο ($\alpha=\beta=\gamma$) $\boxed{E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}}$ (διότι $\upsilon_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$)

~~Εμβαδό τετραπλεύρου~~

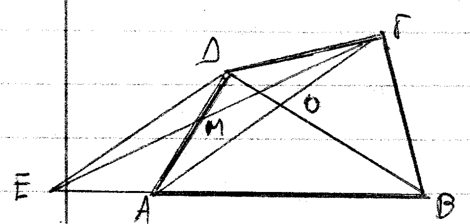
$\boxed{AM \text{ διάμεσος στο } AB\Gamma \Rightarrow (\overset{\triangle}{AMB})=(\overset{\triangle}{AM\Gamma})}$



$\boxed{AA' /\!/ B\Gamma \Rightarrow (AB\Gamma)=(A'B\Gamma)}$



Εμβαδό τετραπλεύρου



1) $\boxed{E=(AB\Gamma)+(A\Delta\Gamma)}$ 2) $\boxed{E=(AOB)+(BO\Gamma)+(\Gamma O\Delta)+(\Delta OA)}$

ή το μετασχηματίζω σε τρίγωνο!

3) $\boxed{\Delta E /\!/ A\Gamma \Rightarrow E=(B\Gamma E)}$

▸ Έστω $M=A\Delta \cap \Gamma E$.

Τότε $E=(AB\Gamma\Delta)=(AM\Gamma B)+(M\Delta\Gamma)$

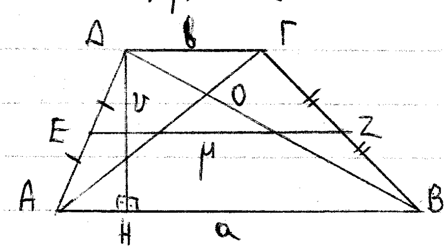
(διότι ΕΔΓΑ τραπέζιο). ⟷ (~~διότι Στο ΓΔΕ ΑΜ διάμεσος~~ (

$=(AM\Gamma B)+(EAM)=(B\Gamma E)$

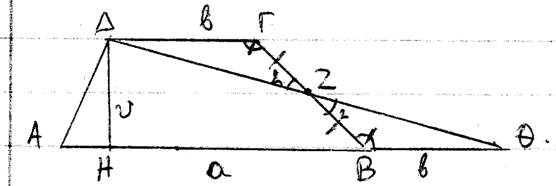
● ΑΒΓΔ τραπέζιο. $(AB=a /\!/ \Gamma\Delta=\beta)$. $\upsilon=\Delta H$, $\mu=EZ$.

$\boxed{E=\frac{a+\beta}{2}\upsilon}$ ή $\boxed{E=\mu\cdot\upsilon}$

$\left(\mu=\frac{a+\beta}{2}\right)$



Απόδειξη.



▸ Παίρνω Ζ μέσο ΒΓ και ΔΖ και παίρνω $\Theta = \Delta Z \cap AB$.

$$\left.\begin{aligned} Z\hat{B}\Theta &= \Delta\hat{\Gamma}Z \\ \hat{Z}_1 &= \hat{Z}_2 \\ ZB &= Z\Gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow B\hat{\Theta}Z = \Gamma\hat{\Delta}Z \Rightarrow (B\Theta Z) = (\Gamma\Delta Z). \quad (1).$$

$$\Downarrow B\Theta = \Gamma\Delta = \beta.$$

Είναι $E = (AB\Gamma\Delta) = (A\Delta ZB) + (\Delta\Gamma Z) =$

$$= (A\Delta ZB) + (B\Theta Z) = (A\Delta\Theta) = \frac{A\Theta \cdot \Delta H}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \upsilon.$$

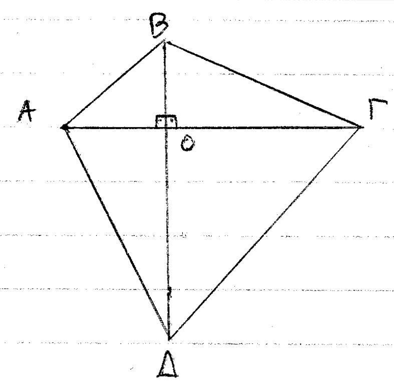
$\boxed{AB\Gamma\Delta \text{ τραπέζιο } (AB \parallel \Gamma\Delta) \Rightarrow (AO\Delta) = (BO\Gamma)}$

Απόδειξη: $(AO\Delta) = (A\Delta B) - (AOB) =$

$(\Gamma\Delta \parallel AB)$

$= (A\Gamma B) - (AOB) = (BO\Gamma)$

• $\boxed{A\Gamma \perp B\Delta \Rightarrow E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}}$ όπου $\delta_1 = A\Gamma$, $\delta_2 = B\Delta$, $E = (AB\Gamma\Delta)$.



$E = (AB\Gamma\Delta) = \cancel{(AOB}\ \cancel{(AB\Gamma)+}$

$= (AOB) + (BO\Gamma) + (\Gamma O\Delta) + (\Delta OA) =$

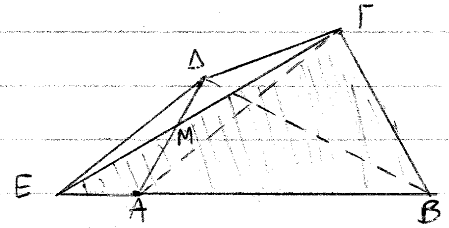
$= \frac{1}{2}(AO \cdot OB + OB \cdot O\Gamma + O\Gamma \cdot O\Delta + O\Delta \cdot OA) =$

$= \frac{1}{2}[AO(OB + O\Delta) + O\Gamma(OB + O\Delta)] =$

$= \frac{1}{2}(AO + O\Gamma)(OB + O\Delta) = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2.$

(π.χ το ρομβοειδές, $E = \frac{\delta_1 \delta_2}{2}$).

Μετασχηματισμός τετραπλεύρου σε τρίγωνο.



$\boxed{\Delta E \parallel \Gamma A \Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = (EB\Gamma)}$

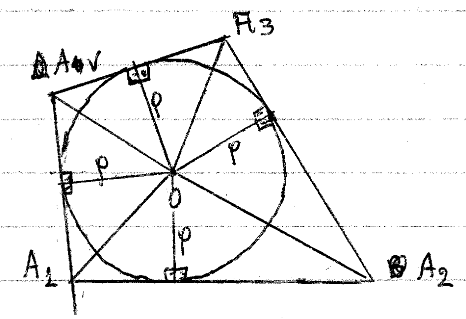
▶ Έστω $M = E\Gamma \cap A\Delta$.

$(AB\Gamma\Delta) = (AM\Gamma B) + (M\Gamma\Delta)$

$\to$ ($E\Delta \parallel \Gamma A \Rightarrow E\Delta\Gamma A$ τραπέζιο $\Rightarrow (M\Gamma\Delta) = (EMA)$).

$= (AM\Gamma B) + (EMA) = (EB\Gamma)$.

Τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο.



$\boxed{E = \frac{1}{2} S\rho}$

$S \to$ περίμετρος

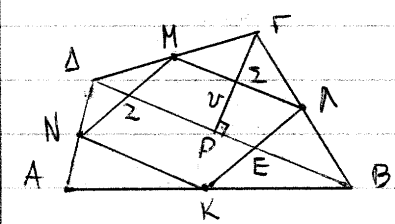
$\rho \to$ ακτίνα εγγ. κύκλου.

$E = (A_1A_2 \cdots A_\nu) = (A_1OA_2) + (A_2OA_3) + \cdots + (A_{\nu-1}OA_\nu) + (A_\nu OA_1) =$

$= \frac{A_1A_2 \cdot \rho}{2} + \frac{A_2A_3 \cdot \rho}{2} + \cdots + \frac{A_{\nu-1}A_\nu \cdot \rho}{2} + \frac{A_\nu A_1 \cdot \rho}{2} =$

$= \frac{\rho}{2}\left(A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{\nu-1}A_\nu + A_\nu A_1\right) = \frac{1}{2} S\rho$

● $\boxed{K, \Lambda, M, N \text{ μέσα } AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A \Rightarrow K\Lambda MN \,\#\, \wedge\ (AB\Gamma\Delta) = 2(K\Lambda MN).}$



▶ Φέρνω την $B\Delta$ και θέτω $Z = B\Delta \cap MN$

$E = B\Delta \cap K\Lambda$.

Θα δείξω ότι ~~$(AB\Delta) = 2(NZEK)$~~ $(B\Gamma\Delta) = 2(ZE\Lambda M)$.

▶ Φέρνω $\Gamma P \perp B\Delta$ και $\Sigma = M\Lambda \cap \Gamma P$.

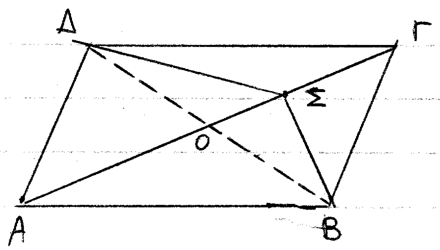
$(B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} B\Delta \cdot \Gamma P =$

$\to$ (διότι M μέσο $\Gamma\Delta$, Λ μέσο $B\Gamma$)

$= \frac{1}{2} 2M\Lambda \cdot \Gamma P = \underbrace{M\Lambda \cdot (2\Sigma P)}_{\text{θ. Θαλή}} = 2(M\Lambda \cdot \Sigma P) = 2(ZE\Lambda M)$.

Όμοια, $(AB\Delta)=2(NZEK)$ και $(AB\Gamma\Delta)=(AB\Delta)+(B\Gamma\Delta)=2(NZEK)+2(Z E \Lambda M)=$
$=2(K\Lambda MN)$.

9.B Αν $\Sigma \in A\Gamma$ ενος $\#AB\Gamma\Delta$, δείξτε ότι $(\Sigma B\Gamma)=(\Sigma\Gamma\Delta)$.



▶ Φέρνω την $B\Delta$ και $O=A\Gamma \cap B\Delta$.

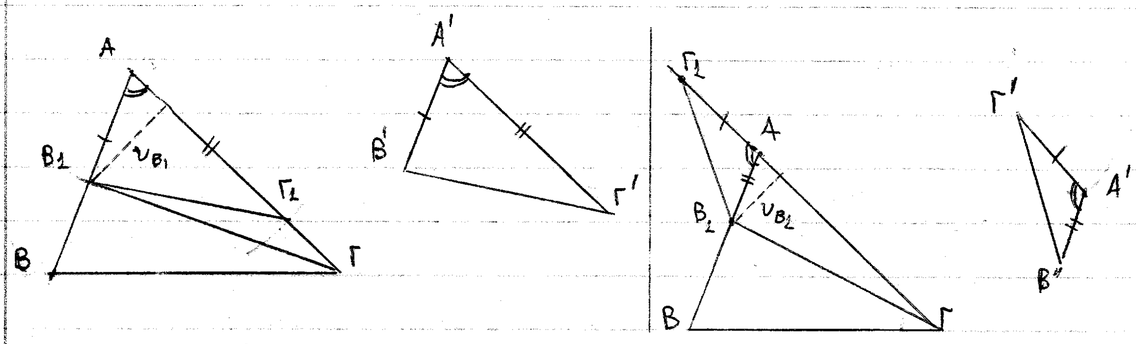
Στο
$AB\Gamma\Delta\# \Rightarrow \Delta O = OB \Rightarrow$
- Στο $B\Gamma\Delta$, ΓΟ διάμεσος $\Rightarrow (\Gamma\Delta O)=(\Gamma B O)$
- Στο $\Sigma B\Delta$, ΣΟ διάμεσος $\Rightarrow (\Sigma\Delta O)=(\Sigma B O)$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (\Gamma\Delta O)-(\Sigma\Delta O)=(\Gamma B O)-(\Sigma B O) \Rightarrow (\Sigma\Gamma\Delta)=(\Sigma B\Gamma)$.

▼ Θεώρημα εμβαδών

$$\boxed{A=A' \vee \hat{A}+A'=180 \Rightarrow \frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)}=\frac{A'B'\cdot A'\Gamma'}{AB\cdot A\Gamma}}$$



▶ Φέρνω στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $AB_1=A'B'$ στην ημιευθεία AB και
  i) Αν $\hat{A}=\hat{A}'$, $A\Gamma_1=A'\Gamma'$ στην ημιευθεία $A\Gamma$
  ii) Αν $A+A'=180$, $A\Gamma_1=A'\Gamma'$ στην αντικείμενη της ημ. $A\Gamma$.
οπότε $\overset{\triangle}{AB_1\Gamma_1}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ (2πλευρές - περ. γωνία).

Στα $AB_1\Gamma_1$, $AB_1\Gamma$ υ_{B_1} κοινό $\Rightarrow \dfrac{(AB_1\Gamma_1)}{(AB_1\Gamma)}=\dfrac{A\Gamma_1}{A\Gamma}$

Στα $AB_1\Gamma$, $AB\Gamma$ υ_Γ κοινό $\Rightarrow \dfrac{(AB_1\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\dfrac{AB_1}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{(AB_1\Gamma_1)}{(AB\Gamma)}=\dfrac{AB_1\cdot A\Gamma_1}{AB\cdot A\Gamma} \Rightarrow$

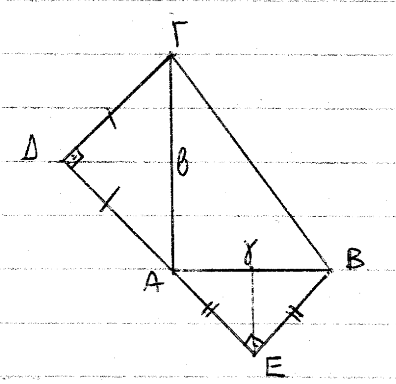
$$\Rightarrow \frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{A'B' \cdot A'\Gamma'}{AB \cdot A\Gamma}$$

Στηρίζεται στα $\frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{a' \upsilon_a'}{2}}{\frac{a \upsilon_a}{2}} \Rightarrow$ $\xrightarrow{a=a'} \frac{E'}{E} = \frac{\upsilon_a'}{\upsilon_a}$, $\xrightarrow{\upsilon_a = \upsilon_a'} \frac{E'}{E} = \frac{a'}{a}$

<u>Πόρισμα</u> $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma' \Rightarrow A = A' \Rightarrow \frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = \frac{\beta' \cdot \gamma'}{\beta \cdot \gamma} = \frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{\gamma'}{\gamma} = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2$

όπου λ ο λόγος ομοιότητας

(3) Με υποτείνουσες τις κάθετες πλευρές $AB, A\Gamma$ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του $AB\Gamma$, ισοσκελή ορθ. τρίγωνα.
α) Να καθοριστεί το είδος του σχήματος που προκύπτει
β) Να βρεθεί το εμβαδό του αν $AB=\gamma$ και $A\Gamma=\beta$.



α) $A\Gamma\Delta$ ορθογώνιο $\Rightarrow \Delta = 90 \Rightarrow \Gamma\Delta \perp \Delta E$
ABE ορθογώνιο $\Rightarrow E = 90 \Rightarrow BE \perp \Delta E$
$\Rightarrow \Gamma\Delta \parallel BE \Rightarrow B\Gamma\Delta E$ τραπέζιο, με βασεις $\Gamma\Delta, BE$ και ύψος ΔE.

β) $E = \frac{1}{2}(BE + \Gamma\Delta)\cdot \Delta E = \frac{1}{2}(BE + \Gamma\Delta)(A\Delta + AE) \underset{ABE \text{ ισοσκ}}{\overset{A\Gamma\Delta}{=}} \frac{1}{2}(BE + \Gamma\Delta)(BE + \Gamma\Delta) =$

$= \frac{1}{2}(BE + \Gamma\Delta)^2$.

Στο $A\Gamma\Delta$, ορθ Λ ισοσκ $\Rightarrow \beta = \Gamma\Delta\sqrt{2} \Rightarrow \Gamma\Delta = \frac{\beta\sqrt{2}}{2}$
Ομοια $BE = \frac{\gamma\sqrt{2}}{2}$ κι εχω
$E = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\beta+\gamma)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\beta+\gamma)^2 = \frac{\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2}{4}$

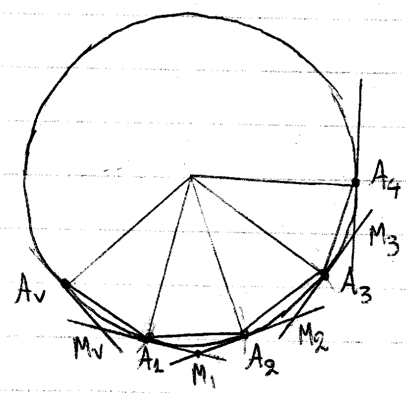
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ορισμος : $A_1A_2 \cdots A_\nu$ κανονικο $\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \cdots = \hat{A}_\nu \\ A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_\nu A_1 \end{cases}$

• Σε κάθε πολύγωνο, $\Sigma_\nu = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \cdots + A_\nu = (2\nu - 4) \cdot 90$ οπότε στο κανονικό πολύγωνο έχω

$$\boxed{A_1 = A_2 = \cdots = A_\nu = \frac{2\nu - 4}{\nu} \cdot 90}$$

Θ. Αν ν σημεία χωρίζουν έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε το πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$ που ορίζεται από τα σημεία αυτά είναι κανονικό και οι εφαπτόμενες του κύκλου στις κορυφές του σχηματίζουν επίσης κανονικό πολύγωνο.



Είναι εκ' κατασκευής
$\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_2A_3} = \cdots = \overset{\frown}{A_\nu A_1} = \tau = \frac{360}{\nu} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_\nu A_1$ (1).

(2) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \cdots = \hat{A}_\nu$ (ως εγγεγρ. σε τόξα ίσα με $(\nu-2)\tau$)

Και (1),(2) $\Rightarrow$ $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ κανονικό πολύγωνο (έχουν $A_1A_2 = \cdots = A_\nu A_1$ και παρα τη βάση γωνίες ~~ως ίσες~~ ~~δύο~~ ως υπο χορδής-εφ).

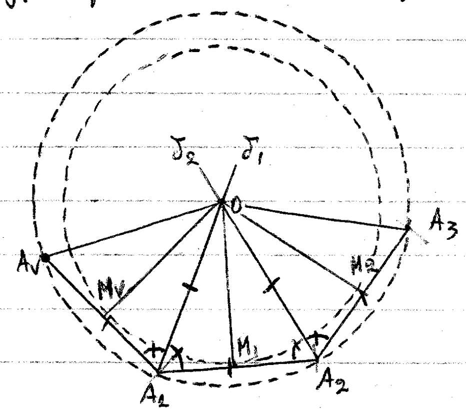
$A_1\hat{M}_1A_2 = A_2\hat{M}_2A_3 = \cdots = A_\nu\hat{M}_\nu A_1$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \cdots \hat{M}_\nu \\ M_1A_2 = A_2M_2 = M_2A_3 = A_3M_3 = \cdots = M_{\nu-1}A_\nu = A_\nu M_\nu = M_\nu A_1 = A_1M_1 \end{cases} \Leftarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \cdots = \hat{M}_\nu \\ M_1M_2 = M_2M_3 = \cdots = M_\nu M_1 \end{cases} \Leftrightarrow M_1M_2M_3 \cdots M_\nu$ κανονικό πολύγωνο

Θ. Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και περιγράψιμο σε άλλον ομόκεντρο κύκλο.



i) Έστω $A_1A_2\ldots A_\nu$ κ.π.

▶ Φέρνω $A_1\delta_1$ διχοτόμο της A_1

$A_2\delta_2$ διχοτόμο της A_2 και παίρνω $O = A_1\delta_1 \cap A_2\delta_2$.

$A_1A_2\ldots A_\nu$ κ.π $\Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{A_1}{2} = \frac{A_2}{2} \Rightarrow OA_1A_2$ ισοσκελές $\Rightarrow OA_1 = OA_2$

$A_1A_2 = A_2A_3$

$O\hat{A}_1A_2 = O\hat{A}_2A_3 = \frac{A_1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow O\hat{A}_1A_2 = O\hat{A}_2A_3 \Rightarrow OA_1 = OA_2 = OA_3$ και όμοια,

$OA_1 = OA_2 = OA_3 = \cdots = OA_\nu \Rightarrow$ $A_1A_2\ldots A_\nu$ εγγ. στον $(O, OA_1) \Rightarrow$ εγγράψιμο.

ii) ▶ Φέρνω $OM_1, OM_2, \ldots, OM_\nu \perp A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_\nu A_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow OM_1 = OM_2 = \cdots = OM_\nu$ (ως ύψη ίσων ισοσκελών τριγώνων)

$\Downarrow$

$M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ ομοκυκλικά.

▶ Φέρνω (O, OM_1).

Τότε $OM_1 \perp A_1A_2, \ldots \Rightarrow A_1A_2$ εφ, … εφαπτόμενες στον $(O, OM_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ περιγράψιμο.

▼ Συμβολισμοί – ονομασίες

Κέντρο O, λέμε το κοινό σημείο των δύο κύκλων

Ακτίνα R, λέμε την απόσταση του O, από κάθε κορυφή του (ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου)

Δηλαδή $OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_\nu = R$.

Απόστημα a_ν λέμε την απόσταση το O από κάθε πλευρά του (ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου)

Δηλαδη $\quad a_v = OM_1 = OM_2 = OM_3 = \dots = OM_v = \rho$

<u>κεντρική γωνία ω_v</u>, λέμε την επίκεντρη γωνία που ορίζεται από δύο διαδοχικές ακτίνες του. Είναι

$$\boxed{\omega_v = \frac{360}{v}}$$

$\hookrightarrow \quad \boxed{\hat{A}_1 + \omega = 180}$

Αποδειξη: $\displaystyle A_1 + \omega = \frac{2v-4}{v} \cdot 90 + \frac{360}{v} = 90\left[\frac{2v-\cancel{4}}{v} + \frac{\cancel{4}}{\cancel{v}}\right] = 90 \cdot 2 = 180.$

Θ₁. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητας τους είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων ή το λόγο των αποστημάτων τους.

Δηλ. $\underline{A_1A_2 \dots A_v \approx A_1'A_2' \dots A_v'}$ και $\displaystyle \frac{\lambda_v}{\lambda_v'} = \frac{R}{R'} = \frac{a_v}{a_v'}$

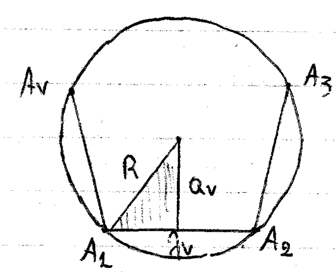
διότι έχουν ισες τις γωνίες τους με $\frac{2v-4}{v} \cdot 90$
και ανα δύο οι πλευρές τους έχουν λογο λ/λ'.

$\hookrightarrow$ Π_v εγγ. σε (O,R)
Π_v' περιγ. σε (O,R) $\Big\} \Rightarrow \boxed{\lambda_v' = \frac{R \cdot \lambda_v}{a_v}}$

$$\Pi_v \approx \Pi_v' \Rightarrow \frac{\lambda_v}{\lambda_v'} = \frac{a_v}{a_v'} \Rightarrow \frac{\lambda_v}{\lambda_v'} = \frac{a_v}{R} \Rightarrow \lambda_v' = \frac{R \cdot \lambda_v}{a_v}$$

▼ <u>Μετρικές σχέσεις.</u>

OMA_2 ορθογώνιο $\Rightarrow \boxed{a_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2}$

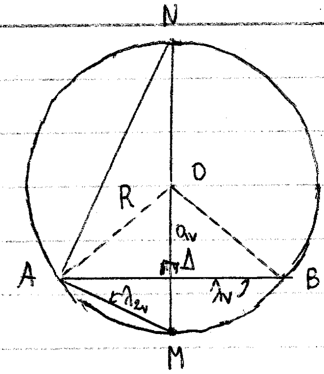


Το εμβαδο κάθε πολυγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο, είναι (ως γνωστόν) $E = \frac{1}{2} P \cdot \rho$

Αρα, στο κ.π. $\boxed{E_v = \frac{v}{2} \cdot a_v \lambda_v}$

Αν πάρουμε τα μέσα των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές ενός κανονικού ν-γώνου, βρίσκουμε ένα εγγεγραμμένο Κ.Π. με 2ν πλευρές του οποίου η πλευρά δίνεται από την σχέση

$$\boxed{\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R-a_\nu)} \longleftarrow \text{Τύπος Αρχιμήδη}$$



AB πλευρά κανονικού ν-γώνου και AM πλευρά κανονικού 2ν-γώνου.

▶ φέρνω διάμετρο MN ($\Delta = AB \cap MN$).

$\Downarrow$

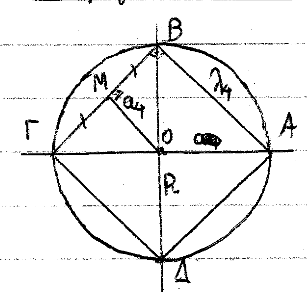
$$\widehat{MN} \text{ ημικύκλιο} \Rightarrow M\hat{A}N = 90 \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}N \text{ ορθογώνιο} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{2\nu}^2 = AM^2 = MN \cdot M\Delta = (2R)(OM - O\Delta) = 2R(R-a_\nu).$$

Εγγραφή κανονικών ν-γώνων σε κύκλο

Έκφραση πλευράς λ_ν και αποστήματος a_ν, συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου R.

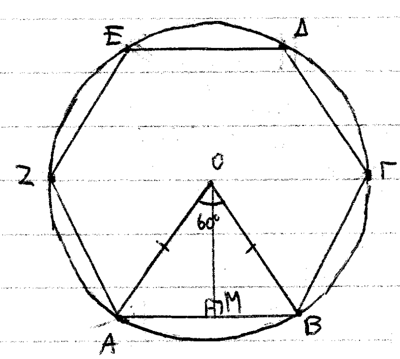
1) Τετράγωνο, ν=4



$$\lambda_4 \overset{O\overset{\triangle}{B}A}{=} \sqrt{OA^2+OB^2} = \sqrt{R^2+R^2} = R\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} O \text{ μέσο } A\Gamma \\ OM \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow a_4 = OM = \frac{AB}{2} = \frac{\lambda_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

2) Εξάγωνο, ν=6

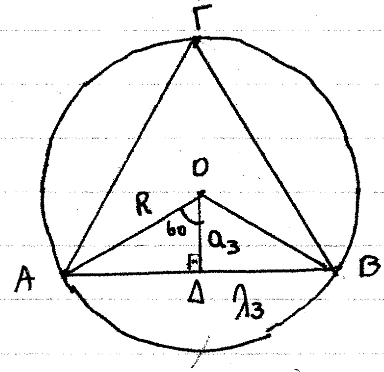


$$\left.\begin{array}{l} \omega = \frac{360}{\nu} = \frac{360}{6} = 6 = A\hat{O}B \\ OA = OB \end{array}\right\} \Rightarrow OAB \text{ ισό~~σκελές~~πλευρο}$$

$$\Rightarrow \lambda_6 = AB = R.$$

$$\left.\begin{array}{l} OM \text{ ύψος} \\ OAB \text{ ισόπλευρο} \end{array}\right\} \Rightarrow a_6 = OM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

3) Ισοπλευρο τρίγωνο , ν=3

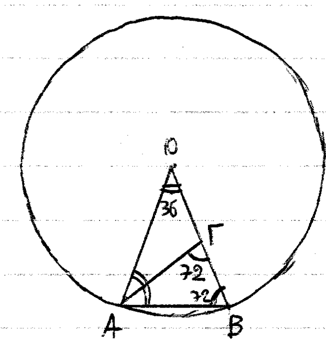


$$\hat{AOB} = \omega = \frac{360}{\nu} = \frac{360}{3} = 120 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow A\hat{O}\Delta = \frac{A\hat{O}B}{2} = 60 \Rightarrow \\ \hat{\Delta} = 90\end{aligned}\right\} \Rightarrow a_3 = O\Delta = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$$

οποτε $\cancel{\lambda_3}$ $a_3^2 + \frac{\lambda_3^2}{4} = R^2 \Rightarrow \lambda_3 = R\sqrt{3}$

4) Κανονικό δεκάγωνο, ν=10



$$A\hat{O}B = \omega_{10} = \frac{360}{10} = 36^\circ \Rightarrow O\hat{A}B = O\hat{B}A = 72^\circ$$

▶ Φέρνω ΑΓ διχοτόμο της $O\hat{A}B$

ΑΓ διχ της ΟΑΒ $\Rightarrow O\hat{A}\Gamma = \frac{O\hat{A}B}{2} = 36 = A\hat{O}B \Rightarrow$ ΓΑΟ ισοσκελές

$\Rightarrow$ ΓΑ=ΓΟ.

$A\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{A}O + A\hat{O}\Gamma = 36+36 = 72 = O\hat{B}A \Rightarrow$ ΑΒΓ ισοσκελες $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ΓΑ=ΑΒ , οποτε $\lambda_{10} = \Gamma A = \Gamma O$

ΑΓ διχοτ. $O\hat{A}B \Rightarrow \frac{AB}{OA} = \frac{B\Gamma}{\Gamma O} \Rightarrow \frac{\lambda_{10}}{R} = \frac{R-\lambda_{10}}{\lambda_{10}} \Rightarrow \lambda_{10}^2 = R(R-\lambda_{10}) \Rightarrow \cdots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{10} = R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$a_{10}^2 = R^2 - \frac{\lambda_{10}^2}{4} = R^2 - \frac{1}{4}R^2\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = \frac{R^2}{16}(16-5-1+2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{16}(10+2\sqrt{5}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{a_{10}=} R\cdot \boxed{a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

5) Κανονικό πεντάγωνο, ν=5

τύπος Αρχιμήδη $\rightarrow \lambda_{10}^2 = 2R(R-a_5) \Leftrightarrow a_5 = \frac{1}{2R}(2R^2 - \lambda_{10}^2) = \frac{1}{2R}\left[2R^2 - \frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5})\right] =$

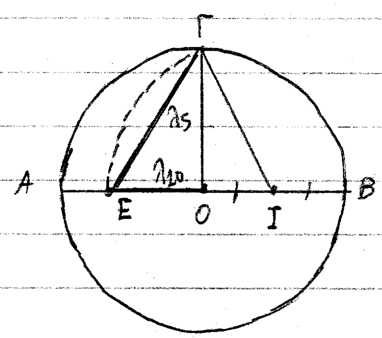
$$\Rightarrow \boxed{a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)}$$

$$\lambda_5^2 = 4R^2 - 4a_5^2 = \cdots = \cancel{\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \Rightarrow \boxed{\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

→ Κ.Π.

ν	λ_ν	a_ν
$\nu=3$	$\lambda_3=R\sqrt{3}$	$a_3=\frac{R}{2}$
$\nu=4$	$\lambda_4=R\sqrt{2}$	$a_4=\frac{R\sqrt{2}}{2}$
$\nu=5$	$\lambda_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$a_5=\frac{R}{4}\cdot(\sqrt{5}+1)$
$\nu=6$	$\lambda_6=R$	$a_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}$
$\nu=10$	$\lambda_{10}=R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$a_{10}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

→ Εγγραφή δεκαγώνου σε κύκλο (Μέθοδος κατασκευής)



AB διάμετρος
ΟΓ⊥ΑΒ
Ι μέσο ΟΒ
ΙΕ=ΙΓ

$\Rightarrow \begin{cases} EO=\lambda_{10} \\ E\Gamma=\lambda_5 \end{cases}$

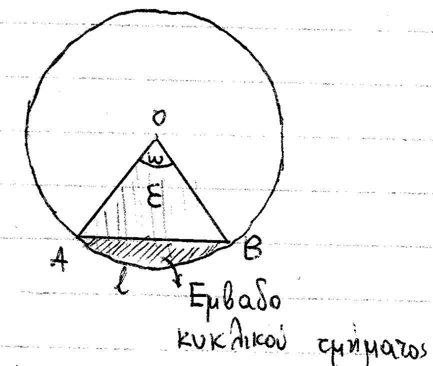
Απόδειξη: ΟΓΙ ορθογ. $\Rightarrow I\Gamma^2=OI^2+O\Gamma^2=\frac{R^2}{4}+R^2=\frac{5R^2}{4}\Rightarrow I\Gamma=\frac{R\sqrt{5}}{2}$

$EO=IE-OI=I\Gamma-OI=\frac{R\sqrt{5}}{2}-\frac{R}{2}=R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\lambda_{10}.$

ΓΕΟ ορθογώνιο $\Rightarrow \Gamma E^2=EO^2+O\Gamma^2=\frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5})+R^2=\frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5}+4)=$

$$=\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5})\Rightarrow \Gamma E=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\lambda_5$$

Μετρηση του κύκλου.



- Μήκος κύκλου ⟶ $\boxed{L = 2\pi R}$
- Μήκος τόξου ⟶ $\boxed{\ell = 2\pi R \cdot \frac{\omega}{360} = \frac{\pi R \omega}{180}}$
- Εμβαδό κυκλικού δίσκου ⟶ $\boxed{E = \pi R^2}$
- Εμβαδο κυκλικού τομέα ⟶ $\varepsilon = \frac{1}{2} \ell R \Rightarrow \varepsilon = \pi R^2 \frac{\omega}{360}$
- Εμβαδο κυκλικού τμήματος ⟶ $E_{KTM} = \frac{1}{2} \ell R - (OAB)$