ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

~~(ΘΕΩΡΙΑ)~~

ΚΕΦ 1°: Πρώτες έννοιες της Γεωμετρίας

Αρχικές έννοιες

σημείο	(Α, Β, Γ)
ευθεία	(ε, ..)
επιπεδο	(q, ..)
χωρος	

Δεχόμαστε την υπαρξή τους χωρίς ορισμό.

Αξιώματα - Θεωρήματα

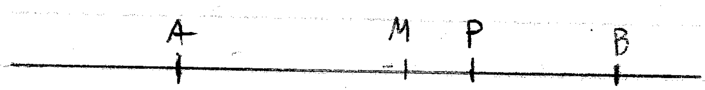
Αξιώματα	Θεωρήματα
καθε προταση αληθης που δεν αποδεικνύεται	αποδεικνύονται στηριζομενοι στα αξιωματα

Σχέσεις ευθ. τμημάτων (γωνιων, τόξων)

Δουλεύω ως εξής:

- 1 Αναλύω το πρωτο μέλος σε ΑΘΡΟΙΣΜΑ ή ΔΙΑΦΟΡΑ αλλων τμημάτων.
- 2 Εκφράζω τα τμήματα που έχω συναρτήσει αυτών που θέλω στο άλλο μέλος.
- 3 Κάνω πράξεις και φτανω στο άλλο μέλος.

$\boxed{5.B}$



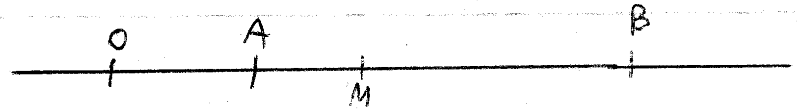
$$PM = \frac{PA - PB}{2}$$

$$A = PM = PA - MA = PA - \frac{AB}{2} = PA - \frac{PA+PB}{2} = \frac{2PA - PA - PB}{2} = \frac{PA-PB}{2} = B$$

$AM + MB$

$MB + \frac{3}{4}BM = AB$

$\boxed{6.B}$



$$MB = \frac{3}{4}MA \Rightarrow OM = \frac{3 \cdot OA + 4 \cdot OB}{7}$$

• $A = OM = OA + AM = \cancel{0.OA + OB}$ (1)

• Είναι $AB = AM + MB = AM + \frac{3}{4}AM = \frac{7}{4}AM \Leftrightarrow AM = \frac{4}{7}AB$

$= \frac{4}{7}(OB - OA)$ (2)

(1)→ $OM = OA + \frac{4}{7}(OB - OA) = \frac{7OA + 4 \cdot OB - 4OA}{7}$

$= \frac{3 \cdot OA + 4 \cdot OB}{7}$

•→ $OM = OA + AM = OA + \frac{4}{3}BM$

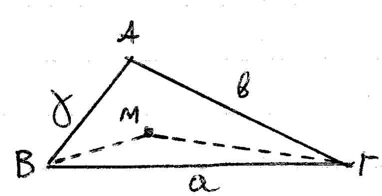
$= OA + \frac{4}{3}(OB - OM)$

$\Leftrightarrow OM = OA + \frac{4OB - 4OM}{3} \Leftrightarrow 3OM = 3OA + 4OB - 4OM \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7OM = 3OA + 4OB \Leftrightarrow OM = \frac{3OA + 4OB}{7}$

▼ Ανισοτικές σχέσεις

1) Τριγωνική ανισότητα



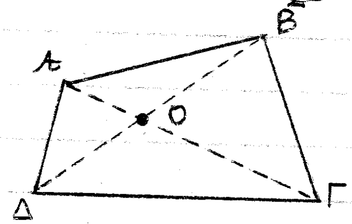
$$\boxed{\begin{array}{l} |\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma \\ |\gamma - \alpha| < \beta < \gamma + \alpha \\ |\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta \end{array}}$$

2) $$\boxed{\begin{array}{l} MB + M\Gamma < AB + A\Gamma \\ M\Gamma + MA < B\Gamma + BA \\ MA + MB < \Gamma A + \Gamma B \end{array}}$$

Για να δείξω μια ανισωτική σχέση κάνω ευθεία απόδειξη χρησιμοποιώντας τα παραπάνω.

$\boxed{9.B}$ Δείξε ότι $\forall\ \overset{\triangle}{AB\Gamma\Delta}$ έχω

α) $A\Gamma + B\Delta > AB + \Delta\Gamma$ β) $\tau < A\Gamma + B\Delta < 2\tau$



α) $\cancel{A\Gamma + B\Delta}$

$\cancel{AB + \Delta B}$ $\cancel{AB + \Delta\Gamma > (A\Gamma}$

$$A\Gamma + B\Delta = AO + O\Gamma + BO + O\Delta = (AO + BO) + (O\Gamma + O\Delta) > AB + \Gamma\Delta$$

β)

$\tau < A\Gamma + B\Delta$

Είναι $A\Gamma + \Delta B \overset{(α)}{>} AB + \Gamma\Delta > \dfrac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2} \Leftrightarrow$

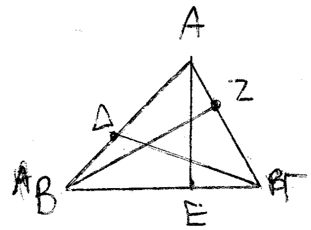
$\Leftrightarrow \cancel{AB + \Gamma\Delta >}\ 2AB + 2\Gamma\Delta > AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{AB + \Gamma\Delta > B\Gamma + \Delta A}$

$AB + AB + \Gamma\Delta + \Gamma\Delta > AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A$

$A\hat{B}\Gamma = (A B \cup B\Gamma \cup \Gamma A)$

12



$AE + BZ + \Gamma\Delta < 3\tau$

Αρκει $AE < \tau \wedge BZ < \tau \wedge \Gamma\Delta < \tau$

Είναι $AE < AB + B\Gamma + \Gamma A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AE < (AB + BE) + (E\Gamma + \Gamma A)$ ισχύει γιατί $AE < AB + BE$ $(A\hat{B}E)$

Ομοια $BZ < \tau$, $\Gamma\Delta < \tau$ αρα

$AE + BZ + \Gamma\Delta < \tau + \tau + \tau \Leftrightarrow AE + BZ + \Gamma\Delta < 3\tau$

~~ΚΕΦ~~ V Κύκλος

Κύκλος $\to$ $\boxed{\kappa(O,\rho) = \{M : (MO) = \rho\}}$

κυκλικός δίσκος $\to$ $\boxed{\kappa.\delta(O,\rho) = \{M : (MO) = \rho\}}$

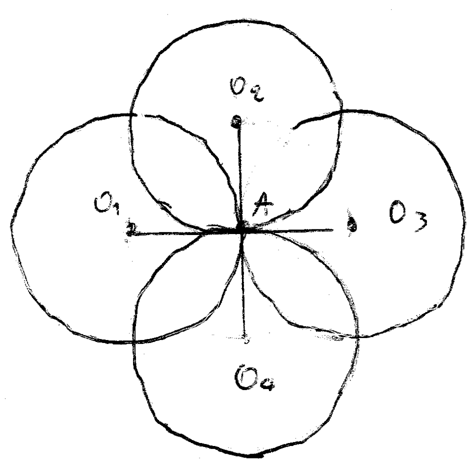
τόξο ~~χορδή~~ $\to$ $\boxed{\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B \cap \kappa(O,\rho)}$

κυκλικός τομέας $\to$ $\boxed{\kappa.\tau.(\overset{\frown}{AB}) = A\hat{O}B \cap \kappa.\delta(O,\rho)}$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΞΩΝ: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta \vee A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΚΥΡΤΩΝ ΤΟΞΩΝ $\overset{\frown}{AB} \gtrless \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB \gtrless \Gamma\Delta \vee A\hat{O}B \gtrless \Gamma\hat{O}\Delta$

$\boxed{B.1}$



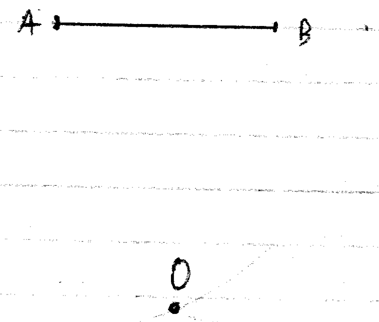
$\kappa(O_1,3) = \kappa(O_2,3) = \kappa(O_3,3) = \kappa(O_4,4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (O_1A) = (O_2A) = (O_3A) = (O_4A) = 3 \Leftrightarrow (O_1A) = 3 \wedge (O_2A) = 3 \wedge (O_3A) = 3 \wedge (O_4A) = 3$

$\Leftrightarrow O_1 \in \kappa(A,3) \wedge O_2 \in \kappa(A,3) \wedge O_3 \in \kappa(A,3) \wedge O_4 \in \kappa(A,3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{O_1, O_2, O_3, O_4\} \subset K(A,3)$

$\boxed{B.2}$



Για να ορίσω τον κύκλο, χρειάζομαι το κέντρο O. Επειδή είναι $OA=OB$ (ακτίνες), το τρίγωνο μου $A\hat{O}B$ είναι ισοσκελές άρα το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή ενός ισοσκελούς τριγώνου. Στην συνέχεια, το σημείο O και το OA ορίζουν τον ζητούμενο κύκλο $K(O,OA)$ τον οποίο σχεδιάζω.

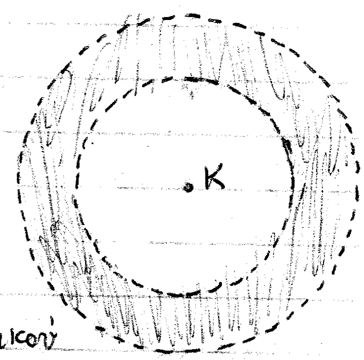
$\boxed{B.3}$ $\Omega = \{M : 3cm < (KM) < 5cm\}$

$= \cancel{\{M : 3cm <}$

$= \{M : (KM) > 3cm \wedge (KM < 5)\}$

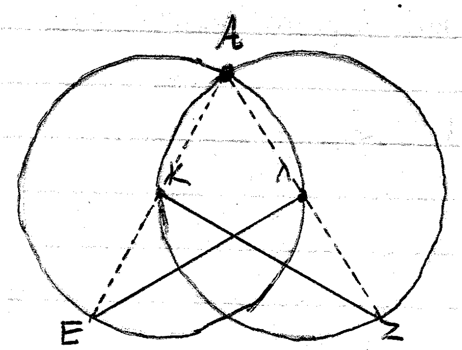
$= \{M : (KM) > 3\} \cap \{(KM) < 5\}$

$= K^c(K,3) \cap [K.\delta(K,5) - K(K,5)]$



Πρόκειται για την τομή του εξωτερικού του εσωτερικού κύκλου με το εσωτερικό του εξωτερικού κύκλου

$\boxed{B.4}$



- Να δείξω ότι $\widehat{E\Lambda} = \widehat{KZ}$

$\widehat{E\Lambda} = \widehat{KZ} \Leftrightarrow \widehat{AE} - \widehat{A\Lambda} = \widehat{ZA} - \widehat{AK}$ Είναι $\widehat{AE} = \widehat{ZA}$ (έχουν χορδή την διάμετρο)

άρα $\widehat{A\Lambda} = \widehat{AK} \Leftrightarrow KA = \Lambda A$ αληθές γιατί $KA, \Lambda A$ ακτίνες ίσων κύκλων

ΓΩΝΙΕΣ

Μια γωνία μπορεί να είναι

1) κυρτή $\varphi < 180^\circ$
2) οξεία $\varphi < 90^\circ$
3) ορθή $\varphi = 90^\circ$
4) αμβλεία $\varphi > 180^\circ$
5) μηδενική $\varphi = 0^\circ$
6) ευθεία $\varphi = 180^\circ$
7) πλήρης $\varphi = 360^\circ$

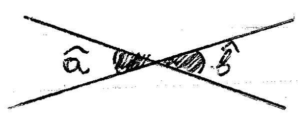
Δυο γωνίες $\hat{a}, \hat{b}$ μπορούν να είναι

1) Συμπληρωματικές $\hat{a} + \hat{b} = 90^\circ$
2) Παραπληρωματικές $\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$
3) Κατακορυφήν $\hat{a} \cap \hat{b} = O \wedge$ και οι πλευρές των ανα δύο αντικείμενες ημιευθείες

$\Downarrow$

$\boxed{\hat{a} = \hat{b}}$

είναι ίσες

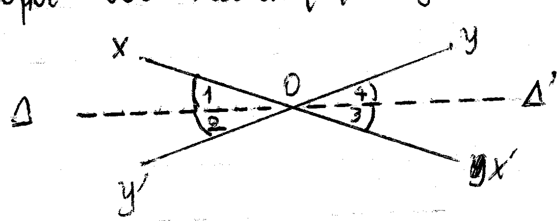


▼ ~~Αξιοσημείωτα~~

4) Εφεξής $\underline{\hat{a} \cap \hat{b} = Oa}$

▼ **Αξιοσημείωτα θεωρήματα**

1) Οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες

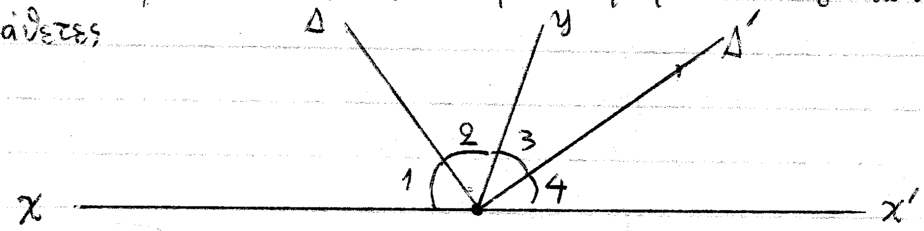


• Αρκεί $\Delta O \Delta' = 180^\circ$

$$\Delta\hat{O}\Delta' = x\hat{O}\Delta' + \hat{O}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_3 \\ 2\hat{O}_1 =}}{=} x\hat{O}\Delta' + \frac{x\hat{O}y'}{2} = x\hat{O}\Delta' + \frac{x'\hat{O}y}{2} = x\hat{O}\Delta' + \hat{O}_3 =$$

$$= xOx' = 180^\circ$$

2) Οι διχοτόμοι δυο εφεξής παραπληρωματικών γωνιων είναι κάθετες



~~$O_1 = O_2$~~

ως διχοτόμοι $\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \end{cases}$ ~~$O_1 + O_4 = 90^\circ$~~

» »

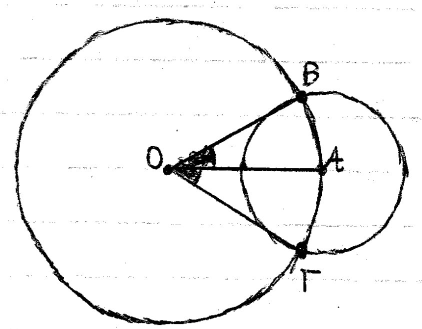
~~xOx'~~

$x\hat{O}y + y\hat{O}x' = 180 \Leftrightarrow O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 180 \Leftrightarrow O_2 + O_2 + O_3 + O_3 = 180$

$\Leftrightarrow 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta O \Delta' = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta O \perp O\Delta'$

$\boxed{1.B}$

Δινεται $\kappa(O,\rho)$ και φέρνω μία ακτίνα OA και έναν $\kappa(A, \frac{\rho}{2})$. Αν $\kappa(O,\rho) \cap \kappa(A, \frac{\rho}{2}) = \{B, \Gamma\}$, να δειξω ότι $B\hat{O}A = A\hat{O}\Gamma$



$BA = B\Gamma$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου

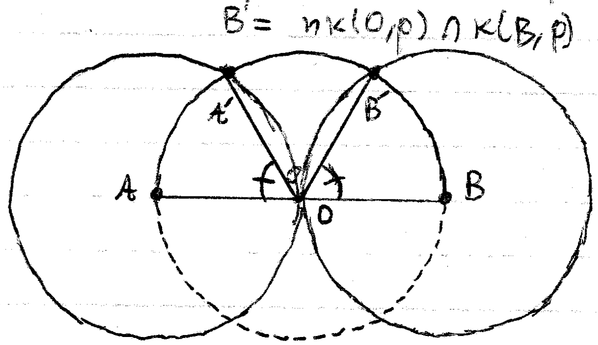
$\Leftrightarrow \widehat{BA} = \widehat{A\Gamma}$

$\Leftrightarrow B\hat{O}A = A\hat{O}\Gamma$ ως γωνιές που βαίνουν σε ίσα τόξα

$\boxed{2.B}$ ~~τα~~ $\eta \kappa(O,\rho)$, διαμετρος του $AB = 2\rho$

$\kappa(A,\rho)$, $\kappa(B,\rho)$, $A' = \eta\kappa(O,\rho) \cap \kappa(A,\rho)$ Να δειχθει

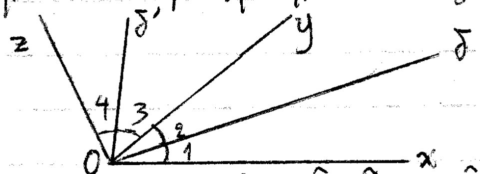
$B' = \eta\kappa(O,\rho) \cap \kappa(B,\rho)$ $A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$



$AA' = BB' = \rho \Leftrightarrow \widehat{AA'} = \widehat{BB'} \Leftrightarrow A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$

$\boxed{4.B}$

Δείξτε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών σχηματίζουν γωνία ίση με το ημιάθροισμα των γωνιών αυτών.

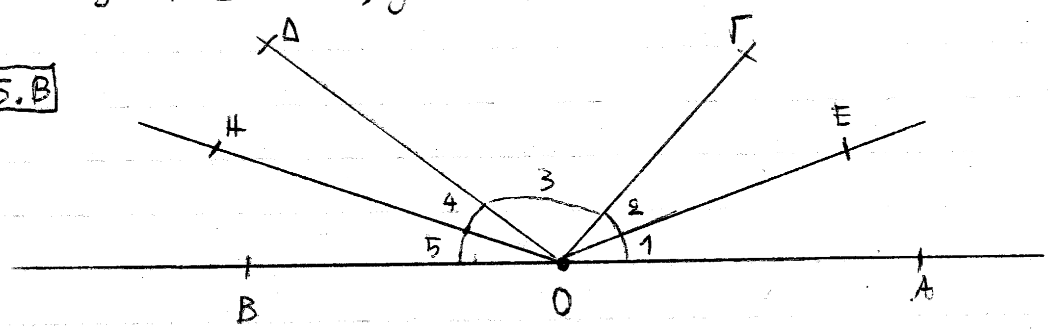


Είναι $\delta\hat{O}\delta' = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = \frac{\hat{O}_1+\hat{O}_2}{2} + \frac{\hat{O}_3+\hat{O}_4}{2} = \frac{x\hat{O}y + y\hat{O}z}{2}$

γιατί

$x\hat{O}y = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2O_2$, $y\hat{O}z = \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_3$

$\boxed{5.B}$



$E\hat{O}H = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 100^\circ$ $\quad O_3 = ;$

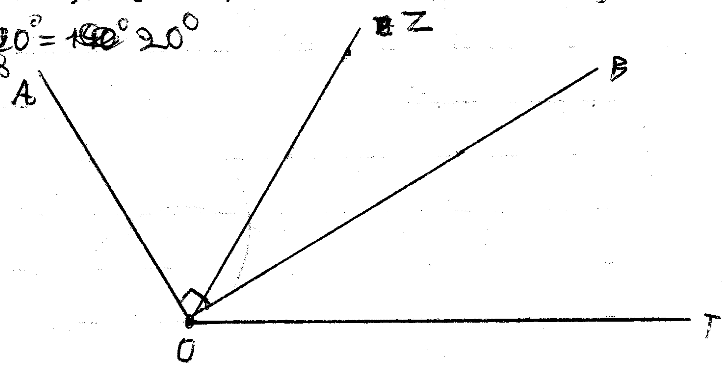
$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_5 + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_5 = 80^\circ$

$O_3 = 180^\circ - (\hat{O}_1 + \hat{O}_5) - (\hat{O}_2 + \hat{O}_4) = 180^\circ - (\hat{O}_1 + \hat{O}_5) - (\hat{O}_1 + \hat{O}_5) =$

$= 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$

~~6.B~~

$\boxed{9.B}$



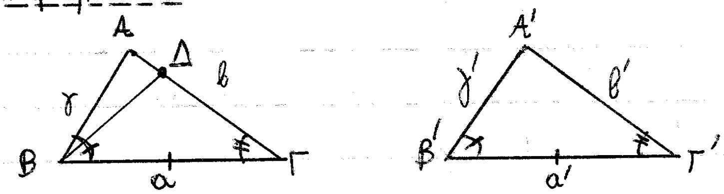
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΤΡΙΓΩΝΑ

▼ Αξίωμα ισότητος τριγώνων

$$\beta=\beta' \wedge \gamma=\gamma' \wedge \hat{A}=\hat{A}' \Longrightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

▼ Θεώρημα 1 : $a=a' \wedge \hat{B}=\hat{B}' \wedge \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}' \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$



Αρκει να δείξω ότι $A\Gamma=A'\Gamma'$

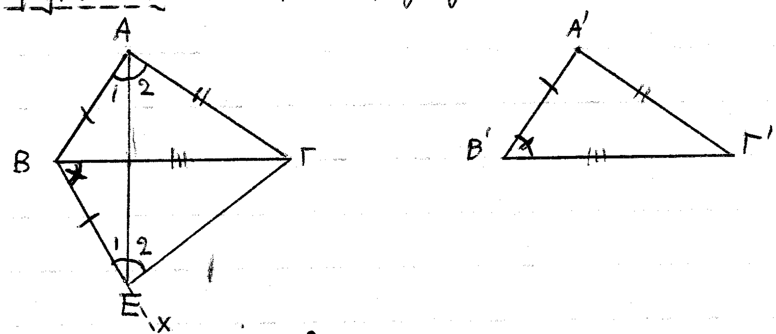
Εστω $\Gamma\Delta=\Gamma'A' \Rightarrow \overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ $\left(\begin{array}{l} a=a' \\ \Gamma\Delta=\beta' \\ \Gamma=\Gamma' \end{array}\right)$

$\Rightarrow \Delta\hat{B}\Gamma=\hat{B}' \wedge \hat{B}'=\hat{B} \Rightarrow \Delta\hat{B}\Gamma=\hat{B}$

$\Rightarrow B\Delta \equiv BA \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta\in AB \\ \Delta\in A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\in AB\cap A\Gamma \Rightarrow \Delta\equiv A$

$\left.\begin{array}{l} \Gamma\Delta=\Gamma A \\ \Gamma\Delta=\Gamma'A' \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma A=\Gamma'A' \Rightarrow \beta=\beta' \wedge a=a' \wedge \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}' \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$

▼ Θεωρημα 2 : $a=a' \wedge \beta=\beta' \wedge \gamma=\gamma'$



Αρκεί να δείξω $\hat{A}=\hat{A}'$

Φέρνω γωνια $\Gamma Bx=\hat{B}'$ και παίρνω ενα σημείο Ε στην Bx ωστε $BE=A'B'=AB$ ~~για το A~~

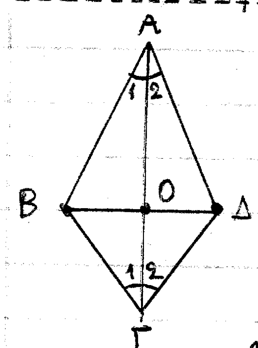
$\overset{\triangle}{BE\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ διότι
$B\Gamma=B'\Gamma'$
$BE=A'B'$
$\Gamma\hat{B}E=\hat{B}'$

άρα $\Gamma E = \Gamma'A' = \Gamma A \wedge \hat{E} = \hat{A}'$ (1)

$AB = BE \Rightarrow B\hat{A}E$ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_1$
$\Gamma E = \Gamma A \Rightarrow A\hat{\Gamma}E$ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{E}_2$ $\Big\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 \Rightarrow \hat{A} = \hat{E}$ (2)

(1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' \wedge AB = A'B' \wedge A\Gamma = A'\Gamma' \Rightarrow A\hat{B}\Gamma = A'\hat{B}'\Gamma'$

Ιδιότητες Ρομβοειδούς $AB\Gamma\Delta$ ⟶ $AB = A\Delta \wedge \Gamma B = \Gamma\Delta$



1) $A\Gamma$ διχοτόμος των $\hat{A}, \hat{\Gamma}$
2) $A\Gamma \underset{\text{μέσο}}{\perp} B\Delta$

Απόδειξη του 1

~~$AB = A\Delta \Rightarrow AB\Delta$ ισοσκελές $\Rightarrow$~~

$\left.\begin{array}{l} AB = A\Delta \\ B\Gamma = \Delta\Gamma \\ A\Gamma = A\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(3\pi\lambda \text{ ίσα})}{A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma} \Rightarrow A_1 = A_2 \wedge \Gamma_1 = \Gamma_2 \Rightarrow A\Gamma$ διχοτόμος των $\hat{A}, \hat{\Gamma}$

Απόδειξη του 2

$AB = A\Delta \Rightarrow AB\Delta$ ισοσκελές $\Rightarrow$ (AO διχοτόμος (α) $\Leftrightarrow$ AO ύψος (α) $\wedge$ AO διάμεσος (α))

$\Rightarrow AO \perp B\Delta \wedge O$ μέσο της $B\Delta \Rightarrow AO \underset{\text{μέσο}}{\perp} B\Delta \Rightarrow A\Delta \underset{\text{μέσο}}{\perp} B\Delta$

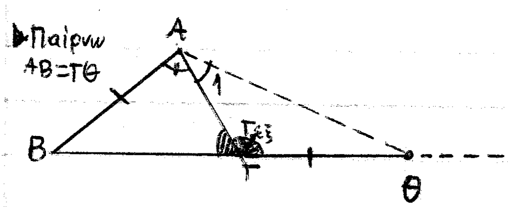
Εξωτερικές γωνίες τριγώνου ⟶ $A_{\varepsilon\xi} > \hat{B} \wedge A_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$

A ⟷ B, B ⟷ Γ, Γ ⟷ A

Ας συγκρίνω την $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ με την $\hat{A}$. Σύμφωνα με τον νόμο της Τριχοτομίας
$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} < \hat{A} \vee \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} \vee \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} > \hat{A}$

- Έστω $\Gamma_{\varepsilon\xi} = \hat{A}$

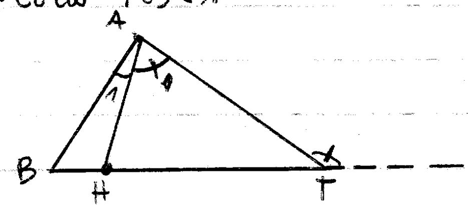
▸ Παίρνω $AB = \Gamma\Theta$



$\left.\begin{array}{l} A\Gamma = A\Gamma \\ \Gamma\Theta = AB \\ \Gamma_{\varepsilon\xi} = \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{\Gamma}\Theta = A\hat{B}\Gamma$
$\Downarrow$
$\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$

$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow B\hat{A}\Theta = 180^\circ \Rightarrow A \in B\Gamma$ άτοπο

• Εστω $\Gamma_{\varepsilon\xi} < \hat{A}$



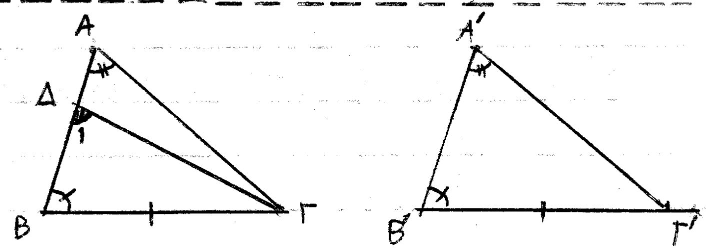
Εαν $\hat{A} > \Gamma_{\varepsilon\xi}$ τότε μπορω να εκφράσω τήν $\hat{A}$ ως αθροισμα της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ με άλλη γωνία

$$\underbrace{\hat{A} = \Gamma\hat{A}H}_{(=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi})} + H\hat{A}B$$

Τότε στο $AH\Gamma$, εξωτερικη γωνία είναι ιση με εσωτερική → ατοπο

⟹ $\Gamma_{\varepsilon\xi} > A$. Ομοια $\Gamma_{\varepsilon\xi} > B$

▼ Κριτηριο → $a = a' \wedge A = A' \wedge B = B' \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$



Αρκει να δείξω ότι $AB = A'B'$ οπότε θα εφαρμόσω το αξίωμα.
Εστω ότι $AB \neq A'B'$ και $AB > A'B'$

▶ Παίρνω $B\Delta = B'A'$

$$\left.\begin{array}{l} B\Delta = B'A' \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \underset{(2\pi\lambda - \pi\varepsilon\rho.\gamma\omega\nu)}{\Rightarrow} B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma = B'\overset{\triangle}{A'}\Gamma' \Rightarrow \Delta_1 = A' \overset{(\upsilon\pi)}{=} A$$

Αλλα $\hat{\Delta}_1 > \hat{A}$ ως εξωτερική στο $A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ συμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα

αρα ατοπο

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{AB = A'B'} \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

~~Σύνοψη~~ Κριτήρια ορθογωνίων τριγώνων

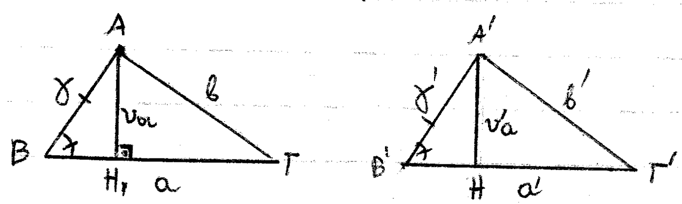
Αρκεί να έχουν εκτός απο την ορθή, δυό ακόμη στοιχεία ίσα από τα οποία το ένα τουλάχιστον να είναι πλευρά

Συνέπεια ισότητας τριγώνων $\rightarrow A\hat{B}\Gamma = A'\hat{B'}\Gamma' \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_\alpha=\upsilon_\alpha' \wedge \upsilon_\beta=\upsilon_\beta' \wedge \upsilon_\gamma=\upsilon_\gamma' \\ \mu_\alpha=\mu_\alpha' \wedge \mu_\beta=\mu_\beta' \wedge \mu_\gamma=\mu_\gamma' \\ \delta_\alpha=\delta_\alpha' \wedge \delta_\beta=\delta_\beta' \wedge \delta_\gamma=\delta_\gamma' \end{cases}$

δυο ισα τριγωνα εχουν τα δευτερευοντα στοιχεία ίσα

▶ Αρκει να δείξω ότι $\upsilon_\alpha=\upsilon_\alpha' \wedge \mu_\alpha=\mu_\alpha' \wedge \delta_\alpha=\delta_\alpha'$ οπότε, λόγω συμμετρίας θα ισχύουν και τα υπόλοιπα.

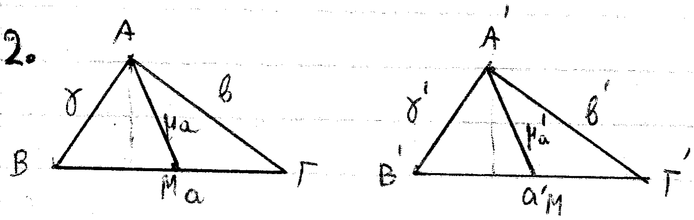
1.



$$\left.\begin{array}{l}\gamma=\gamma' \\ \hat{B}=\hat{B'} \\ \text{είναι ορθ}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}H = A'\overset{\triangle}{B'}H' \Rightarrow \underline{\upsilon_\alpha=\upsilon_\alpha'}$$

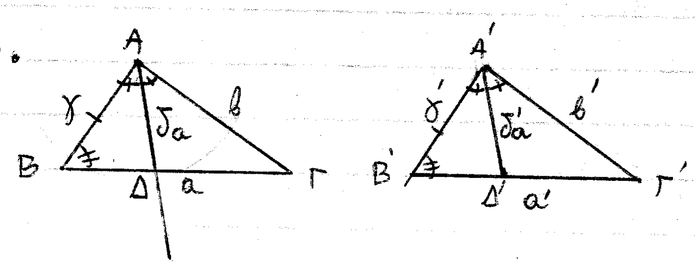
(υποτ-οξ.γων)

2.



$$\left.\begin{array}{l} a=a' \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{a'}{2} \Rightarrow BM=B'M' \\ \gamma=\gamma' \\ B=B' \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}M = A'\overset{\triangle}{B'}M' \Rightarrow \underline{\mu_\alpha=\mu_\alpha'}$$

3.

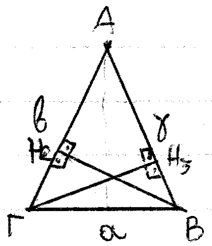


$$\left.\begin{array}{l} A=\hat{A} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}=\frac{\hat{A}'}{2} \Rightarrow \Delta\hat{A}B = \Delta'\hat{A'}B' \\ \hat{B}=\hat{B}' \\ \gamma=\gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{\Delta}B = A'\overset{\triangle}{\Delta'}B' \Rightarrow \delta_\alpha=\delta_\alpha'$$

▼ **Βασικη**

$$\boxed{\begin{aligned} \beta=\gamma &\Leftrightarrow \upsilon_\beta=\upsilon_\gamma \\ \beta=\gamma &\Rightarrow \mu_\beta=\mu_\gamma \\ \beta=\gamma &\Rightarrow \delta_\beta=\delta_\gamma \end{aligned}}$$

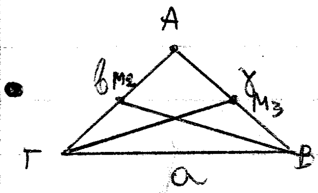
•



Ευθυ: $\left.\begin{aligned} \beta=\gamma &\Rightarrow \hat{B}=\hat{\Gamma} \\ \alpha&=\alpha \\ 90^\circ=\Gamma\hat{H}_2B&=B\hat{H}_3\Gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{BH_2\Gamma}=\overset{\triangle}{\Gamma H_3 B} \Downarrow \upsilon_\beta=\upsilon_\gamma$

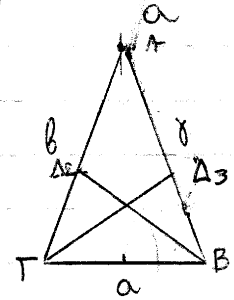
Αντίστροφα: ορθογώνια $\left.\begin{aligned} \hat{A}&=\hat{A} \\ BH_2&=\Gamma H_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AH_2B}=\overset{\triangle}{AH_3\Gamma} \Rightarrow \beta=\gamma$

•



$\left.\begin{aligned} \beta&=\gamma \\ AM_3&=AM_2 \\ \hat{A}&=\hat{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AM_3\Gamma}=\overset{\triangle}{AM_2B} \Rightarrow \mu_\beta=\mu_\gamma$

•



$\left.\begin{aligned} \alpha&=\alpha \\ \hat{\Gamma}&=\hat{B} \\ \Delta_2\hat{B}\Gamma&=\Delta_3\hat{\Gamma}B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{B\Delta_2\Gamma}=\overset{\triangle}{B\Delta_3\Gamma} \Rightarrow \delta_\beta=\delta_\gamma$

• **Πορίσματα**

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha=\beta=\gamma &\Leftrightarrow \upsilon_\alpha=\upsilon_\beta=\upsilon_\gamma \\ \alpha=\beta=\gamma &\Rightarrow \mu_\alpha=\mu_\beta=\mu_\gamma \\ \alpha=\beta=\gamma &\Rightarrow \delta_\alpha=\delta_\beta=\delta_\gamma \end{aligned}}$$

•

$$\alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha=\beta &\Leftrightarrow \upsilon_\alpha=\upsilon_\beta \\ \beta=\gamma &\Leftrightarrow \upsilon_\beta=\upsilon_\gamma \\ \gamma=\alpha &\Leftrightarrow \upsilon_\gamma=\upsilon_\alpha \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \upsilon_\alpha=\upsilon_\beta=\upsilon_\gamma$$

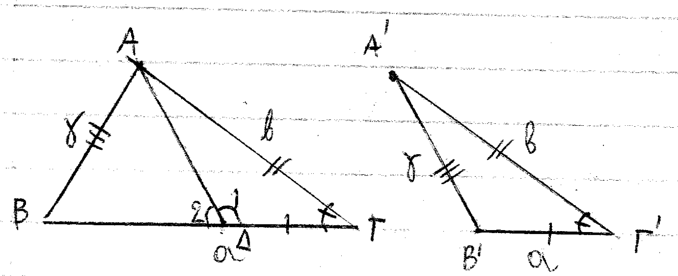
• Όμοια όλα τα υπόλοιπα.

▼ **Βασικό θεώρημα**

$$\boxed{\beta=\beta' \wedge \gamma=\gamma' \wedge \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}' \Rightarrow \hat{B}=\hat{B}' \vee \hat{B}+\hat{B}'=2\llcorner}$$

Κανω διακριση δύο περιπτώσεων

ι) Αν $\alpha=\alpha' \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}=\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'} \Rightarrow \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow \hat{B}=\hat{B}' \vee \hat{B}+\hat{B}'=2\llcorner$



ii) Αν $\alpha \neq \alpha'$ τότε έστω $\alpha > \alpha'$

▶ Φέρνω $\Gamma\Delta = \Gamma'B'$

$A\hat{\Gamma}\Delta = A'\hat{\Gamma}'B' \Rightarrow \underline{\Delta_1 = B'}$ $\wedge$ $A\Delta = A'B' = AB \Rightarrow A\hat{\Delta}B$ ισοσκελές $\Rightarrow \underline{\hat{B} = \hat{\Delta}_2}$

(2πλ-1γων)

$\hat{B} + \hat{B}' = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_1 = 2^L$

Ανισοτικές Σχέσεις

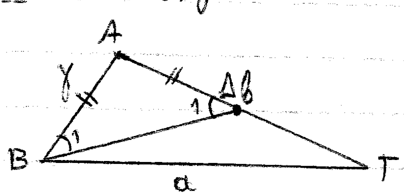
▼Σύγκριση πλευρών και γωνιών. Σε ένα τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$

1) $|\beta - \gamma| < \alpha < |\beta + \gamma|$ $\quad \alpha \leftrightarrow \beta \leftrightarrow \gamma$ (Τριγωνική ανισότητα)

2) $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}, \hat{\Gamma}$ $\quad$ »

3) $\beta > \gamma \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}$ ↵ Απόδειξη

Ευθύ : Έστω $\beta > \gamma$



▶ Φέρνω $B\Delta$ με $A\Delta = AB$

$A\hat{B}\Delta$ ισοσκελές $\Rightarrow B_1 = \Delta_1 \overset{(2)}{>} \Gamma$ ως εξωτερική στο $B\hat{\Delta}\Gamma$

Αντίστροφα : Έστω $\hat{B} > \hat{\Gamma}$

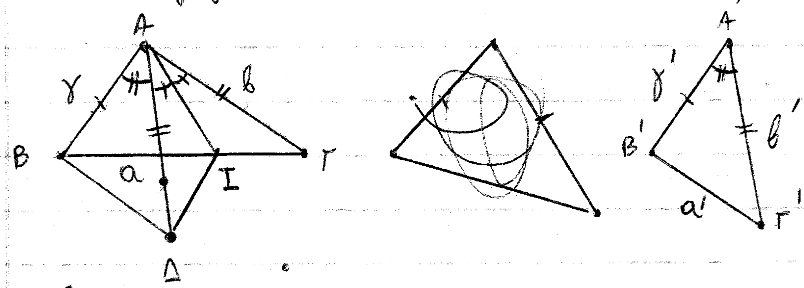
Εαν $\beta = \gamma \Rightarrow A\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές $\Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$ άτοπο

$\beta < \gamma \underset{\text{ευθύ}}{\Rightarrow}$ ~~ABΓ~~ $\hat{B} < \hat{\Gamma} \Rightarrow$ άτοπο

$\underset{\text{Ν-τριχοτομίας}}{\Rightarrow} \hat{B} > \hat{\Gamma}$

▼ Σε δύο τρίγωνα $\hat{ABΓ}$, $A'B'Γ'$

$β=β' \wedge γ=γ' \wedge \hat{A}>\hat{A}' \Leftrightarrow α>α'$



Ευθυ

▶ Φαίρνω $B\hat{A}Δ=\hat{A}' \wedge AΔ=A'Γ'$, αρα $AΔ=AΓ$

$\hat{ABΔ}=\hat{A'B'Γ'} \Rightarrow BΔ=B'Γ'=α'$

(2πλ-περ. γων)

▶ Φαίρνω AI διχοτόμο της $Δ\hat{A}Γ$

$\hat{AIΔ}=\hat{AIΓ} \Rightarrow ΔI=ΔΓ$

(2πλ-περ.γων)

▶ Εφαρμόζω τριγωνική ανισότητα στο BΔI

$BΔ<BI+IΔ \Rightarrow BΔ<BI+\underset{IΓ}{\cancel{IΓ}} \Rightarrow BΔ<BΓ \Rightarrow α'<α \Rightarrow α>α'$

Αντίστροφο $β=β', γ=γ'$ $α>α' \Rightarrow \hat{A}>\hat{A}'$

Έστω $\hat{A}=\hat{A}'' \Rightarrow \hat{ABΓ}=\hat{A'B'Γ'} \Rightarrow α=α'$ ατοπο

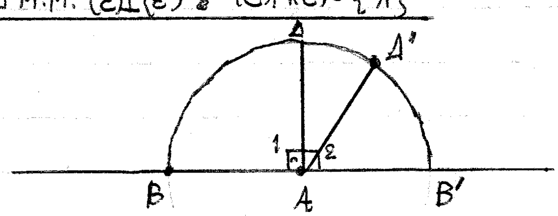
$\hat{A}<\hat{A}' \underset{ευθυ}{\Rightarrow} α<α'$ ατοπο

$\Bigg\} \Rightarrow \hat{A}>\hat{A}'$

Κ. ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ-ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

▼ Καθετότητα : $\boxed{ε_1 \perp ε_2 \overset{ορ}{\Longleftrightarrow} (\hat{ε_1, ε_2})=90°}$

•₁ $A \in (ε) \Rightarrow \exists$ μ.μ. $(ε') \perp (ε)$: $(ε') \cap (ε) = \{A\}$



▶ Φέρνω ημικύκλιο με κέντρο A και τυχαία ακτίνα $ρ=AB=AB'$

▶ Παίρνω το μέσο Δ του τόξου BB'

$\overset{\frown}{BΔ}=\overset{\frown}{ΔB'} \Rightarrow A_1=A_2$

$A_1+A_2=2^L$

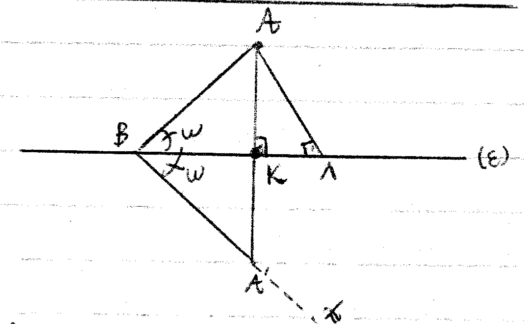
$\Bigg\} \Rightarrow A_1=A_2=90 \Rightarrow ΔA \perp (ε)$

αρα υπάρχει μία τουλάχιστον (ε'). Θα αποδείξω οτι είναι μοναδική.

▸ Εστω $\Delta' \in \eta\mu(A,\rho)$ με $\Delta' A \perp (\varepsilon)$

$A\Delta' \perp (\varepsilon) \Rightarrow \Delta'\hat{A}B = \Delta'\hat{A}B' \Rightarrow \widehat{B\Delta'} = \widehat{\Delta' B'} \Rightarrow \Delta'$ μεσο του $\widehat{BB'} \Rightarrow \Delta' \equiv \Delta$ διότι το μέσο ενος ~~κορ~~ τόξου είναι μοναδικό.

•2 $A \notin (\varepsilon) \Rightarrow \exists$ M.M $(\varepsilon') : A \in (\varepsilon') \wedge (\varepsilon') \perp (\varepsilon)$



▸ Παίρνω $\begin{cases} AB \text{ τυχαία } (B \in (\varepsilon)) \\ K\hat{B}x = \omega \\ ABA' : AB = A'B \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B \Rightarrow A\hat{B}A' \text{ ισοσκελές} \\ A\hat{B}K = A'\hat{B}K \Rightarrow BK = \delta_B \end{array}\right\} \Rightarrow BK = \upsilon_B \Rightarrow BK \perp AA' \Rightarrow AA' \perp (\varepsilon)$$

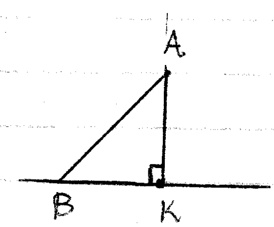
Αρα υπάρχει μία τουλάχιστον (ε'). Θα αποδείξω ότι είναι μοναδική.

▸ Εστω $\Lambda \in (\varepsilon) : A\Lambda \perp (\varepsilon)$

Είναι άτοπο γιατί το $A\hat{K}\Lambda$ έχει $\hat{k}, \hat{\lambda}$ δύο ορθές.

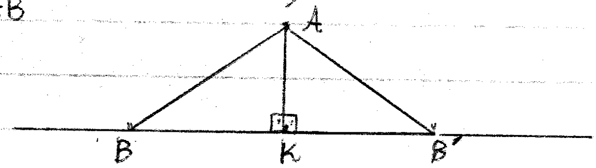
•→ Απόσταση σημείου A απο ευθεία (ε)

είναι το κάθετο τμήμα AK από το σημείο προς την ευθεία



•3 $\forall B \in (\varepsilon) : AK \leqslant AB$ (Η ισότης ισχυει όταν $K \equiv B$)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Στο τρίγωνο } A\hat{K}B \quad \hat{K} > \hat{B} \Rightarrow AB > AK \Rightarrow AK < AB \\ \text{Αν όμως } B \equiv K \text{ τότε } AK = AB \end{array}\right\} \Rightarrow AK \leqslant AB$$



•4 $KB = KB' \Leftrightarrow AB = AB'$

Ευθύ

$KB = KB' \underset{(2\kappa\alpha\theta)}{\Longrightarrow} A\hat{K}B = A\hat{K}B' \Rightarrow AB = AB'$

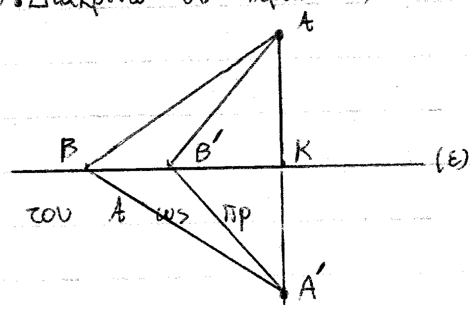
Αντίστροφο

$$\left.\begin{array}{l} AB = AB' \Rightarrow A\hat{B}B' \text{ ισοσκελές} \\ AK = \upsilon_A \end{array}\right\} \Rightarrow AK = \mu_A \Rightarrow BK = KB'$$

•4 $\underline{KB > KB' \Leftrightarrow AB > AB'}$

<u>Ευθυ</u> Εστω $KB>KB'$. Διακρίνω δύο περιπτώσεις

i) $B' \in BK$

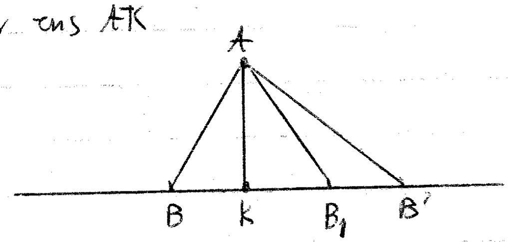


▶ Παίρνω συμμετρικό του A ως προς την (ε)

$AK=A'K \Rightarrow AB=A'B \wedge AB'=A'B'$

Στο τρίγωνο ABA' είναι $AB+BA' > AB'+B'A' \Rightarrow 2AB>2AB' \Rightarrow AB>AB'$

ii) AB, AB' εκατέρωθεν της AK



▶ Παίρνω B_1 : $BK=KB_1$ και φέρνω το AB_1

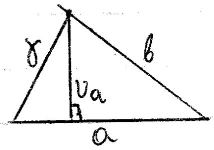
$BK=B_1K \Rightarrow AB=AB_1$. Απο την προηγούμενη περίπτωση $AB_1<AB' \Rightarrow AB'>AB$

<u>Αντίστροφο</u> Εστω $AB'>AB$

Αν $KB=KB' \Rightarrow AB=AB'$ Ατοπο
$KB'<KB \underset{\text{ευθυ}}{\Rightarrow} AB'<AB$ Ατοπο
$\Rightarrow KB'>KB$

•3-4 <u>Συμπέρασμα</u>: $\boxed{KB \gtrless KB' \Leftrightarrow AB \gtrless AB'}$

• <u>Βασικη</u> • Σε $\forall\ \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $\boxed{\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}} \Rightarrow \upsilon_\alpha+\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma < \alpha+\beta+\gamma$



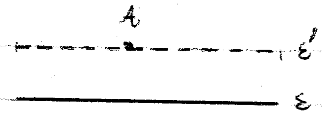
$\left.\begin{array}{l}\upsilon_\alpha<\beta\\ \upsilon_\alpha<\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow 2\upsilon_\alpha<\beta+\gamma \Rightarrow \upsilon_\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}$

καθ < πλαγ

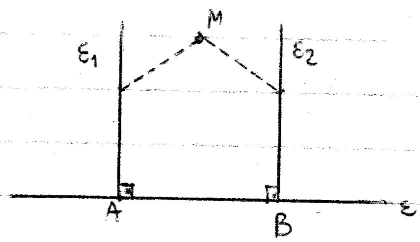
$\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma < \frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{2} = \alpha+\beta+\gamma = 2\tau$

▼ <u>Παραλληλία</u> $\boxed{\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset}$

Ευκλείδιο αίτημα $A \notin \varepsilon \Rightarrow \exists$ μμ $\varepsilon' : A \in \varepsilon' \wedge \varepsilon' \parallel \varepsilon$

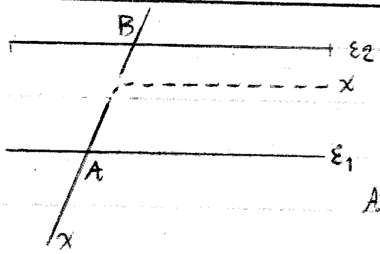


•1 $\varepsilon_1 \perp \varepsilon \wedge \varepsilon_2 \perp \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$



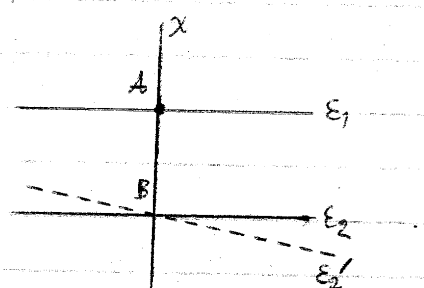
Εστω $\varepsilon \cap \varepsilon_1 = A$ και έστω $\exists M: \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = M$
$\varepsilon \cap \varepsilon_2 = B$
τότε έχω άτοπο διότι στο $A\hat{M}B$ υπάρχουν 2 ορθές. $\Rightarrow \nexists M: \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = M \Rightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

•2 $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \wedge x \cap \varepsilon_1 = A \Rightarrow \exists B \in \varepsilon_2 : x \cap \varepsilon_2 = B$



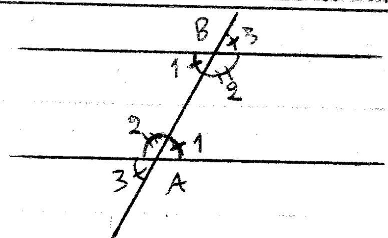
Εστω ότι $\nexists B \in \varepsilon_2 : x \cap \varepsilon_2 = B \Rightarrow x \cap \varepsilon_2 = \emptyset$
$\Rightarrow x \parallel \varepsilon_2 \wedge A \in x$ άρα απο το A φέρνω δύο
Αλλά $\rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \wedge A \in \varepsilon_1$ παράλληλες ως προς την ε_2
$\rightarrow$ Άτοπο

•3 $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \wedge x \perp \varepsilon_1 \Rightarrow x \perp \varepsilon_2$

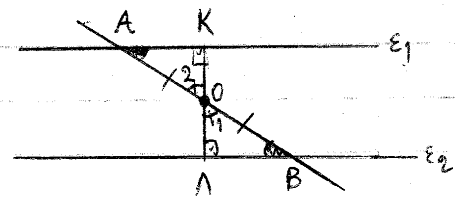


Απο το προηγούμενο θεώρημα
$\exists B \in \varepsilon_2 : x \cap \varepsilon_2 = B$
▶ Εστω $x \not\perp \varepsilon_2$. Φέρνω $x \perp \varepsilon_2'$
Αλλα $\rightarrow x \perp \varepsilon_1$
$\Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2' \wedge \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $B \in \varepsilon_2 \cap \varepsilon_2'$ ← Άτοπο απο το B φέρνω 2 $\parallel$ ως προς την ε_1
Αλλα

•4 $\boxed{\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{εντός εναλλάξ είναι ίσες } \hat{A}_1 = \hat{B}_1,\ \hat{A}_2 = \hat{B}_2,\ \hat{A}_3 = \hat{B}_3 \\ \text{εντός εκτός και επί ταυτά είναι ίσες } \hat{A}_1 = \hat{B}_3 \\ \text{εντός και επί ταυτά είναι παραπληρωματικές } \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 2^{L} \end{cases}}$



Εντός εναλλάξ.

1) 

~~Ευθυ~~ Εστω $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

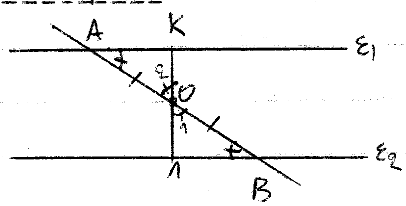
- Εστω O μέσο της AB.
- Φέρνω $OK \perp \varepsilon_1$.

$OK \perp \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow OK \perp \varepsilon_2$

- Παίρνω $\Lambda = OK \cap \varepsilon_2$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{\Lambda} = \hat{K} = 1^L \\ OB = OA\end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{K}A = O\hat{K}B \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

Αντίστροφο Εστω $\hat{A} = \hat{B}$



- O μέσο της AB
- $K: OK \perp \varepsilon_1$
- $\Lambda: OK \cap \varepsilon_2 = \Lambda$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{B} = \hat{A} \\ OB = OA\end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{K}A = O\hat{\Lambda}B \Rightarrow \hat{K} = \hat{\Lambda}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{K} = \hat{\Lambda} \\ \text{Ομως } OK \perp \varepsilon_1 \Rightarrow K = 1^L\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{K} = \hat{\Lambda} = 1^L \Rightarrow K\Lambda \perp \varepsilon_1 \wedge K\Lambda \perp \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

2) Εντός εκτός και επι ταυτα

Ευθύ ~~Ευθυ~~ $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow A_1 = \underset{\text{υπ}}{B_1} = \underset{\text{κατα κορυφήν}}{B_3}$

Αντίστροφο $\left.\begin{array}{l}A_1 = B_3 \\ \text{Αλλα} \rightarrow B_3 = B_1\end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = B_1 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

3) Εντός και επί ταυτά: Είναι προφανής

~~$\hat{B}_1 = \hat{A}_2$~~

-ειδικα ,δυο
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Rightarrow (\varepsilon_1, \hat{\ } \varepsilon_2) = 1^L$

Γωνίες με πλευρες

- **Παράλληλες:** αν είναι
  - και οι δύο οξείες ή αμβλείες, είναι ίσες
  - η μια οξεία και η άλλη αμβλεία, είναι παραπληρωματικές.

~~Εω Εστω~~

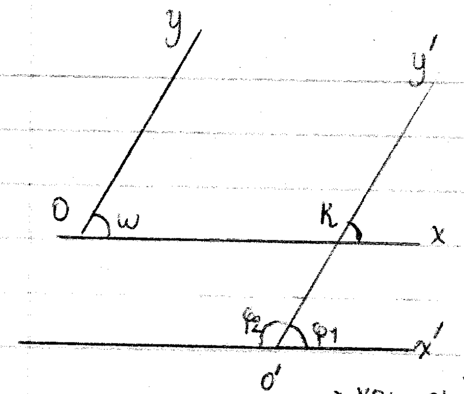
Εστω $\omega < 1^L \wedge \varphi_1 < 1^L$ (οξεία)

$\varphi_1 = y'\hat{K}x$ (ως εντος εκτός και επι ταυτά με τέμνουσα την $O'K$)

$y'\hat{K}x = \omega$ (ως εντος εκτος και επι ταυτά με τέμνουσα την OK)

$\Rightarrow \varphi_1 = \omega \Rightarrow x\hat{O}y = x'\hat{O}y'$ QED.

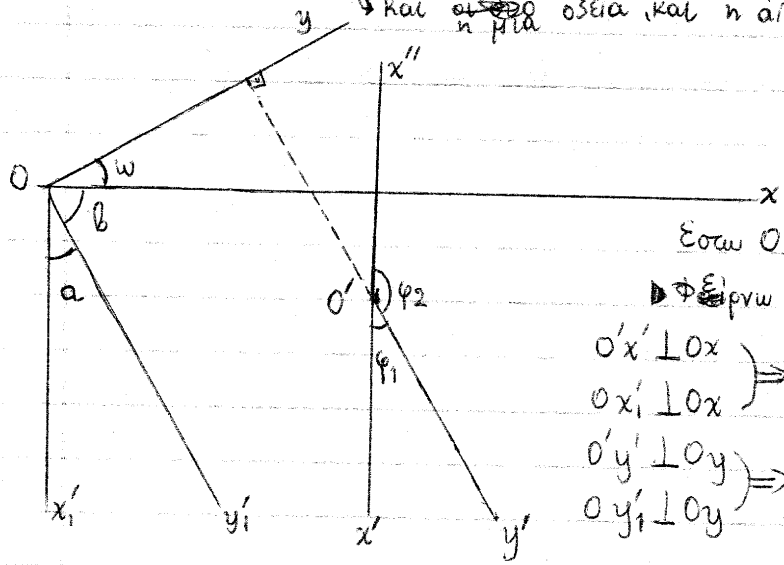
$\varphi_1 < 1^L \wedge \varphi_1 + \varphi_2 = 2^L \Rightarrow \varphi_2 > 1^L$ (αμβλεια)



$\varphi_2 = 2^{L} - \varphi_1 \overset{\varphi_1=\omega}{=} 2^{L} - \omega \Rightarrow \varphi_2 + \omega = 2^{L}$ QED.

$\Rightarrow \varphi_2, \omega$ παραπληρωματικές

• **Κάθετες**: αν είναι
- → και οι δύο οξείες ή αμβλείες, είναι ίσες
- → και ~~οι δύο~~ η μια οξεία, και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές



Έστω $O'x' \perp Ox \wedge O'y' \perp Oy$, $\varphi_1 < 1^{L}$, $\omega < 1^{L}$

Φέρνω $Ox_1' \perp Ox \wedge Oy_1' \perp Oy$

$\left.\begin{array}{l} O'x' \perp Ox \\ Ox_1' \perp Ox \end{array}\right\} \Rightarrow O'x' \parallel Ox_1'$ (κάθετες στην Ox)

$\left.\begin{array}{l} O'y' \perp Oy \\ Oy_1' \perp Oy \end{array}\right\} \Rightarrow O'y' \parallel Oy_1'$ (κάθετες στην Oy)

$\Downarrow$

$x'\hat{O}'y = x_1'\hat{O}y_1' \Rightarrow \varphi_1 = a$

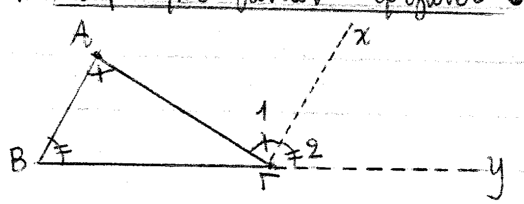
Διότι έχουν παράλληλες τις πλευρές του και είναι και οι δύο οξείες ($\vee$ αμβλείες)

$\left.\begin{array}{l} a + b = x_1'\hat{O}x = 1^{L} = y_1'\hat{O}y = b + \omega \Rightarrow a = \omega \\ \text{Αλλά} \rightarrow a = \varphi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\varphi_1 = \omega}$ QED

$\varphi_2 = 2^{L} - \varphi_1 \overset{\varphi_1=\omega}{=} 2^{L} - \omega \Rightarrow \varphi_2 + \omega = 2^{L} \Rightarrow \varphi_2, \omega$ παραπληρωματικές QED

Γωνίες πολυγώνων

1 **Άθροισμα γωνιών τριγώνου** → $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2^{L}$



Φέρνω $\Gamma x \parallel AB$

$\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}$ ως εντός εναλλάξ με τέμνουσα την ΑΓ

$\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}$ ως εντός εκτός και επί ταυτά με τέμνουσα την ΒΓ

$\Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_2 = B\hat{\Gamma}y = 2^{L}$ άρα

$\Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma + \hat{A} + \hat{B} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2^{L}$ QED

Πορίσματα

1) $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma} + \hat{A}$, $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B}$

2) $\hat{A} = \hat{A}' \wedge \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

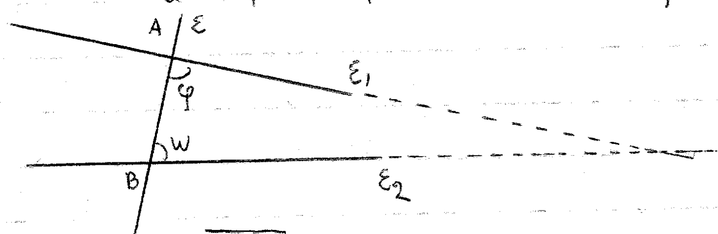
3) $\hat{A} = 1^{L} \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 1^{L}$

4) $\hat{A} = 1 \wedge b = \gamma \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$

5) $a = b = \gamma \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$

ΘΕΩΡΗΜΑ $\left.\begin{matrix} A = \varepsilon \cap \varepsilon_1 \\ B = \varepsilon \cap \varepsilon_2 \end{matrix}\right. \wedge \left.\begin{matrix} \varepsilon_1 \hat{A} B = \varphi \\ \varepsilon_2 \hat{B} A = \omega \end{matrix}\right. , \varphi + \omega < 180^\circ \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \neq \emptyset \\ \varepsilon_1 \not\equiv \varepsilon_2 \end{matrix}\right. \wedge$

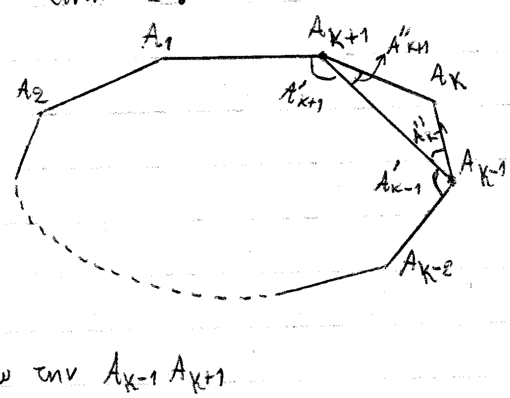
το σημείο τομής τους βρίσκεται προς το μέρος των γωνιών αυτών



~~ε₁ ∦ ε₂~~ $\varphi + \omega \neq 2^{L} \Rightarrow \overline{(\varepsilon_1 // \varepsilon_2)}$ διότι οι εντός και επί τα αυτά δεν είναι ίσες $\Rightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \neq \emptyset$. Βρίσκεται προς το μέρος των γωνιών διότι αλλιώς θα είχαμε τρίγωνο με άθροισμα γωνιών $> 180^\circ$ (άτοπο) QED

● Άθροισμα γωνιών ν-γώνου ● $\rightarrow \Sigma_\nu = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_\nu = (2\nu - 4)^{L}$, $\forall \nu \geq 3$

Για $\nu = 3$: $\Sigma_3 = (2 \cdot 3 - 4)^{L} = 2^{L}$ ισχύει, διότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 2^{L}.



▶ Φέρνω την $A_{K-1} A_{K+1}$

Έστω ότι ισχύει για $\nu = K$,

$A_1 A_2 \dots A_{K-1} A_{K+1}$: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}'_{K-1} + \hat{A}'_{K+1} = \Sigma_K = (2K - 4)^{L}$

Θα δείξω ότι ισχύει για $\nu = K+1$

$A_1 A_2 \dots A_{K-1} A_K A_{K+1}$: ~~$\hat{A}_1 + A_2$~~

$\Sigma_{K+1} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_{K-1} + \hat{A}_K + \hat{A}_{K+1}$

$= \underline{\hat{A}_1} + \underline{\hat{A}_2} + \dots + (\underline{\hat{A}'_{K-1}} + \hat{A}''_{K-1}) + \hat{A}_K + (\underline{\hat{A}'_{K+1}} + \hat{A}''_{K+1}) =$

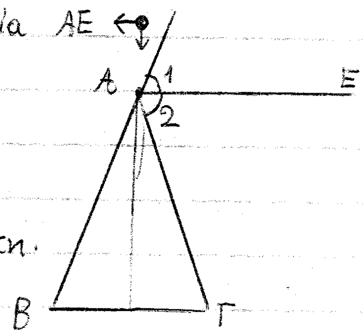
$\to 2^L$ ως γωνίες τριγώνου

$= (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}'_{k-1} + \hat{A}'_{k+1}) + (\hat{A}''_{k-1} + \hat{A}_k + \hat{A}''_{k+1})$

$= \Sigma_k + 2^L = (2k-4)^L + 2^L = [2(k+1)-4]^L$ ισχύει

άρα ισχύει $\forall \nu \geq 3$ QED.

● <u>Εφαρμογή</u>: Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και ημιευθεία AE



Π_1: $AB = A\Gamma$

Π_2: $AE \parallel B\Gamma$

Π_3: AE διχ της $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$

Εαν ισχύουν δυο προτάσεις, ισχύει και η τρίτη.

<u>$\Pi_1 \wedge \Pi_2 \Rightarrow \Pi_3$</u>

$\left.\begin{array}{l} AB = A\Gamma \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} \text{ ισοσκελές} \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} \\ AE \parallel B\Gamma \Rightarrow \hat{A}_1 = B \wedge \hat{A}_2 = \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow$ AE διχ της $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$

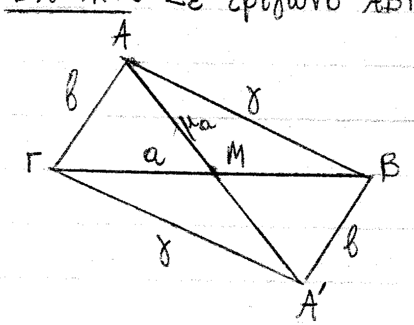
<u>$\Pi_2 \wedge \Pi_3 \Rightarrow \Pi_1$</u>

$\left.\begin{array}{l} AE \parallel B\Gamma \Rightarrow A_1 = B \wedge A_2 = \Gamma \\ A_1 = A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές

<u>$\Pi_3 \wedge \Pi_1 \Rightarrow \Pi_2$</u>

$\left.\begin{array}{l} A_{\varepsilon\xi} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma} \\ \text{Αλλα } A_1 = A_2 \wedge \hat{B} = \hat{\Gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\hat{A}_1 = 2\hat{B} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B} \Rightarrow AE \parallel B\Gamma$

● <u>ΒΑΣΙΚΗ</u> ● Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\boxed{\dfrac{|\beta-\gamma|}{2} < \mu_a < \dfrac{\beta+\gamma}{2}}$



▶ Προεκτείνω το AM σε ισο τμήμα MA'

$A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}A'$ (2πλ - 1η περ. γων)

$\Downarrow$ $\Gamma A' = \gamma$

Τριγ. ανισότητα στο $\overset{\triangle}{A\Gamma A'}$

$|A\Gamma - \Gamma A'| < AA' < A\Gamma + \Gamma A' \Leftrightarrow |\beta-\gamma| < 2\mu_a < \beta+\gamma \Leftrightarrow \dfrac{|\beta-\gamma|}{2} < \mu_a < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$

<u>Συμπέρασμα</u> $\boxed{\mu_a + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma}$

ΕΙΔΙΚΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Παραλληλόγραμμο

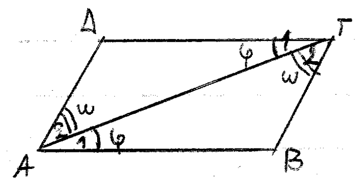
• Ορισμος $\boxed{AB\Gamma\Delta \text{ παρ/μο} \Leftrightarrow AB \parallel \Gamma\Delta \wedge B\Gamma \parallel A\Delta}$, $O = A\Gamma \cap B\Delta$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ : Αν το ΑΒΓΔ είναι παρ/μο, τότε

1) $AB = \Gamma\Delta \wedge A\Delta = B\Gamma$ 2) $\hat{A} = \hat{\Gamma} \wedge \hat{B} = \hat{\Delta}$ 3) $AO = O\Gamma \wedge BO = O\Delta$

Αποδείξεις

1)



$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (εντος εναλλάξ, $AB \parallel \Gamma\Delta$, τεμ. ΑΓ)

$\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_2$ (εντος εναλλάξ, $A\Delta \parallel B\Gamma$, τεμ. ΑΓ)

$\underbrace{\text{ΑΓ κοινη}}$

$\Downarrow$

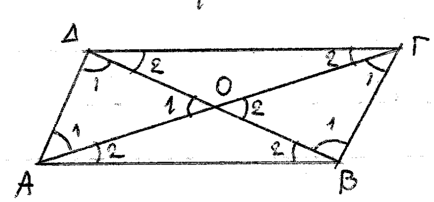
$A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Gamma}B \Rightarrow AB = \Gamma\Delta$. Ομοια $B\Gamma = A\Delta$

2) $\hat{A} = 180 - \hat{B}$ (ως εντος επιταυτά, $A\Delta \parallel B\Gamma$, τεμ. ΑΒ)

$= 180 - (180 - \hat{\Gamma})$ (» » » , $AB \parallel \Gamma\Delta$, τεμ ΒΓ $\rightarrow \hat{B} = 180 - \hat{\Gamma}$)

$= \hat{\Gamma}$. Ομοια $\hat{B} = \hat{\Delta}$

3)



$A\Delta = B\Gamma$

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (ως εντός εναλλάξ, $AB \parallel \Gamma\Delta$, τεμν. ΑΓ)

$\underline{\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1}$ (» » » , $A\Delta \parallel B\Gamma$, » »)

$\Downarrow$

$O\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{O}B \Rightarrow \begin{cases} AO = O\Gamma \\ BO = O\Delta \end{cases}$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ: Εαν ισχύει έστω ένα απο τα παρακάτω

1) $AB=\Gamma\Delta \wedge A\Delta=B\Gamma$ 2) $\hat{A}=\hat{\Gamma} \wedge \hat{B}=\hat{\Delta}$ 3) $AO=O\Gamma \wedge BO=O\Delta$ 4) $AB=\parallel\Gamma\Delta \vee B\Gamma=\parallel\Delta A$

τότε το ΑΒΓΔ είναι παρ/μο

1) $AB=\Gamma\Delta \wedge A\Delta=B\Gamma \wedge A\Gamma$ κοινή $\Rightarrow A\hat{B}\Gamma=A\hat{\Gamma}\Delta \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1 \wedge \hat{A}_2=\Gamma_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB\parallel\Gamma\Delta$ διοτι έχουν τις εντός εναλλάξ με τεμν. ΑΓ ίσες.

και $B\Gamma\parallel A\Delta$ όμοια $\Rightarrow AB\Gamma\Delta$ #

2) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360 \Rightarrow (\hat{A}+\hat{\Gamma})+(\hat{B}+\hat{\Delta})=360 \Rightarrow 2\hat{A}+2\hat{B}=360 \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=180$

$\Rightarrow A\Delta\parallel B\Gamma$ διοτι έχουν τις εντός και επιταυτα παραπληρωματικές.

Ομοια ~~ΑΔ~~ $AB\parallel\Gamma\Delta$ άρα ΑΒΓΔ #

3) $AO=O\Gamma \wedge \Delta O=OB \wedge \hat{O}_1=\hat{O}_2 \Rightarrow O\hat{A}\Delta=B\hat{O}\Gamma \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1 \wedge \hat{A}_2=\hat{\Gamma}_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB\parallel\Gamma\Delta \wedge B\Gamma\parallel\Delta A \Rightarrow AB\Gamma\Delta$ #

4) $AB=\parallel\Gamma\Delta \Rightarrow AB=\Gamma\Delta \wedge \hat{A}_2=\hat{\Gamma}_2 \wedge \hat{B}_2=\hat{\Delta}_2 \Rightarrow O\hat{A}B=O\hat{\Gamma}\Delta \Rightarrow AO=O\Gamma \wedge BO=O\Delta$

$\underset{3}{\Rightarrow} AB\Gamma\Delta$ #

Κεντρο συμμετρίας

ενός σχήματος G λέγετε το σημείο Α που έχει την ιδιότητα $\boxed{S(A)\,G=G}$

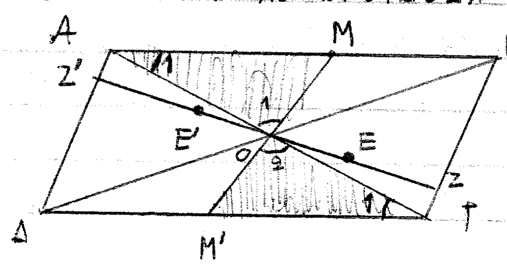
Θεώρημα: Ο κεντρο συμμ. του ΑΒΓΔ $\Leftrightarrow \boxed{S(O)(AB\Gamma\Delta)=AB\Gamma\Delta}$

~~Αρκεί: $\forall M\in AB\cup B\Gamma\cup\Gamma\Delta\cup\Delta A, \exists$~~

Αρκεί: ~~$\forall M\in AB\Gamma\Delta, \exists$~~

$\forall M'\in S(O)(AB\Gamma\Delta), \exists M\in AB\Gamma\Delta : M'=S(O)M$

Εστω ότι $M\in AB\cup B\Gamma\cup\Gamma\Delta\cup\Delta A$, ειδικα όταν ΑΒ



▶ Προεκτείνω την ΜΟ και παίρνω

● $M'=MO\cap\Gamma\Delta$

$\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1 \wedge \hat{O}_1=\hat{O}_2 \wedge AO=O\Gamma \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow OM=OM' \\ M\hat{O}M'=2^L\end{array}\right\} \Rightarrow M'=S(O)M\in\Gamma\Delta$

~~Αρ~~

δηλ. ισχύει. Ομοια και όταν $M\in B\Gamma,\Gamma\Delta,\Delta A$

Εστω Ε εσωτερικό στο ΑΒΓΔ

▶ Παίρνω $E'=S(O)E$ και ~~ΖΟ∩ΕΑΒΓ~~ $\{Z,Z'\}=EE'\cap(AB\cup B\Gamma\cup\Gamma\Delta\cup\Delta A)$

$\Updownarrow$

$ZO=Z'O$

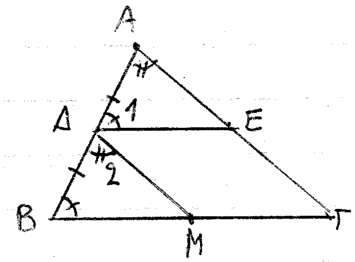
$E \in OZ \Rightarrow OE < OZ$. $OE' = OE < OZ = OZ' \Rightarrow E' \in OZ' \Rightarrow E'$ εσωτερικό στο $AB\Gamma\Delta$

Q.E.D.

Εφαρμογές των παρ/μων

1) Στο τρίγωνο

i) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο } AB \\ \Delta E \parallel B\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow E \text{ μέσο } A\Gamma \wedge \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}}$



Φέρνω $\Delta M \parallel A\Gamma$ με $M \in B\Gamma$

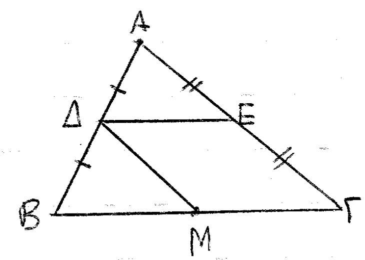
$\Delta E \parallel M\Gamma \wedge \Delta M \parallel A\Gamma \Rightarrow \Delta M\Gamma E \# \Rightarrow \Delta E = M\Gamma \quad (1)$

$$\left.\begin{array}{l} B\Delta = A\Delta \\ \hat{B} = \hat{\Delta}_1 \\ \hat{A} = \hat{\Delta}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}M \Rightarrow \Delta E = BM \quad (2) \wedge AE = \Delta M \quad (3)$$

$(1) \wedge (2) \quad 2\Delta E = BM + M\Gamma = B\Gamma \Rightarrow \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$

Επίσης $E\Gamma = \Delta M \underset{(3)}{=} AE \Rightarrow E$ μέσο της $A\Gamma$.

ii) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\Delta \text{ μέσο } AB \\ E \text{ μέσο } A\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E \parallel B\Gamma \wedge \Delta E = \frac{B\Gamma}{2}}$



Φέρνω $\Delta M \parallel A\Gamma$ με $M \in B\Gamma$

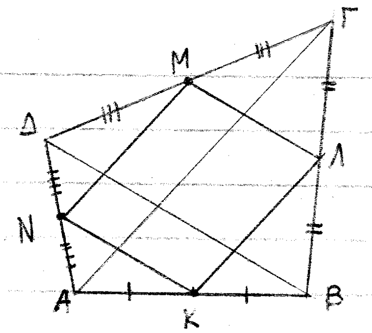
$\Downarrow \leftarrow i)$

$BM = M\Gamma \wedge \Delta M \,=\!\!\parallel\, E\Gamma$

$\hookrightarrow \Delta M E\Gamma \# \Rightarrow \Delta E \,=\!\!\parallel\, M\Gamma \Rightarrow \Delta E \,=\!\!\parallel\, \frac{B\Gamma}{2}$

2) Στο τετράπλευρο

$\boxed{\left.\begin{array}{l}K \text{ μέσο } AB \wedge \Lambda \text{ μέσο } B\Gamma \\ M \text{ μέσο } \Gamma\Delta \wedge N \text{ μέσο } \Delta A\end{array}\right\} \Rightarrow K\Lambda MN \#}$



▶ Φέρνω το $ΑΓ$

Στο $Δ\hat{Γ}Α$ M, N μέσα των $ΔΓ, ΔΑ \Rightarrow$

$\Rightarrow MN =\parallel \frac{ΑΓ}{2}$

Ομοια $KΛ =\parallel \frac{ΑΓ}{2}$ $\Bigg\} \Rightarrow MN =\parallel KΛ \Rightarrow MNKΛ \#$

▼ Ορθογώνιο

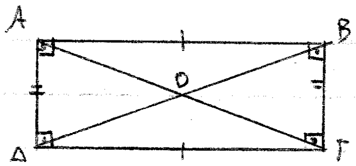
• Ορισμός $\boxed{ΑΒΓΔ \text{ ορθογώνιο} \Leftrightarrow \hat{Α}=\hat{Β}=\hat{Γ}=\hat{Δ}}$

● ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $ΑΒΓΔ \# (\hat{Α}=\hat{Γ} \wedge \hat{Β}=\hat{Δ}) \Rightarrow$ έχει όλες τις ιδιότητες του $\#$

2) $\hat{Α}=\hat{Β}=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$ (Διότι $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}+\hat{Δ}=360 \Rightarrow 4\hat{Α}=4\hat{Β}=4\hat{Γ}=4\hat{Δ}=360$)

3) $ΑΓ = ΒΔ$



$Α\hat{Γ}Δ = Β\hat{Δ}Γ$ (2πλ - περ. γωνία)

$\Rightarrow ΑΓ = ΒΔ$

● ΚΡΙΤΗΡΙΑ : Αν $ΑΒΓΔ \#$ και ισχύει ένα τουλάχιστον απο τα παρακάτω

1) $Α=90^\circ \vee Β=90^\circ \vee Γ=90^\circ \vee Δ=90^\circ$ 2) $ΑΓ=ΒΔ$

το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο.

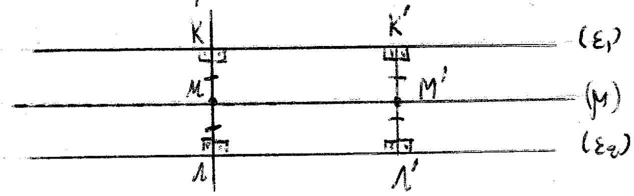
1) Εστω $\hat{Α}=90$. $ΑΒΓΔ\# \Rightarrow \hat{Γ}=\hat{Α}=90 \Rightarrow \hat{Β}+\hat{Δ}=90$
Αλλα $\hat{Β}=\hat{Δ}$ $\Big\} \Rightarrow \hat{Β}=\hat{Δ}=90$

άρα $\hat{Α}=\hat{Β}=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90 \Rightarrow ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο.

2) $ΑΒΓΔ\# \Rightarrow ΑΔ=ΒΓ$
$ΓΔ$ κοινή
$ΑΓ=ΒΔ$ $\Bigg\} \Rightarrow Α\hat{Δ}Γ = Β\hat{Γ}Δ \Rightarrow \hat{Γ}=\hat{Δ}$
Αλλα $\hat{Γ}+\hat{Δ}=90$ $\Big\} \Rightarrow \hat{Γ}=\hat{Δ}=90 \xRightarrow{1)} ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο.

▼ Μεσοπαράλληλος (Εφαρμογή)

- Απόσταση δύο $\parallel$ ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το κάθετο τμήμα προς αυτές $K\Lambda$
- Μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η παράλληλος (μ) ~~από~~ προς τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που διέρχεται από το μέσο της απόστασής τους.



- Θεώρημα: ~~Κάθε~~ Ένα σημείο ~~...~~ μ ισαπέχει από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αν και ~~αντίστροφα~~ και μόνο αν ανήκει στην μεσοπαράλληλο μ.

Αντίστροφα: Έστω $M' \in \mu$ και ~~...~~ $M'K' \perp \varepsilon_1 \wedge M'\Lambda' \perp \varepsilon_2$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} KK' \parallel MM' \\ K\Lambda \parallel K'\Lambda' \end{array}\right\} \Rightarrow KK'\Lambda M' \# \; . \; \cancel{\ldots} \Rightarrow K'M' = KM = \frac{K\Lambda}{2} \\ \text{(καθ. σε κοινή ευθ.)} \\ \text{Άλλα όμοια } KK'\Lambda\Lambda' \# \Rightarrow K\Lambda = K'\Lambda' \end{array}\right\} \Rightarrow K'M' = \frac{K'\Lambda'}{2}$$

$\Rightarrow M'$ μέσο της $K'\Lambda'$

Ευθύ: Έστω M, M' ~~μέσα των $K\Lambda$, $K'\Lambda'$ δηλ.~~ σημεία σημεία που ισαπέχουν από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

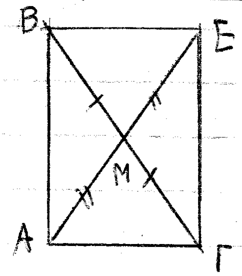
$$\Rightarrow \begin{array}{l} MK = M\Lambda \\ M \in K\Lambda \end{array} \wedge \left.\begin{array}{l} M'K' = M'\Lambda' \\ M' \in K'\Lambda' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Για να δείξω το ζητούμενο αρκεί $M, M' \in \mu \Leftrightarrow MM' \parallel \varepsilon_{1,2}$

B.15

Ιδιότητες ορθογωνίου τριγώνου

1) $\boxed{\hat{A}=90 \Leftrightarrow \mu_a=\frac{a}{2}}$

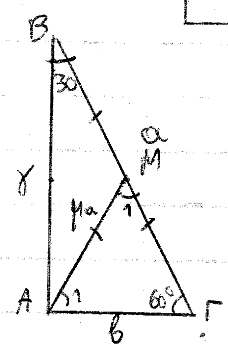


▶ Παίρνω την προέκταση $ME=AM$

Τότε $\left.\begin{array}{l} AM=ME \\ BM=M\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB E\Gamma \# \\ \hat{A}=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow AB E\Gamma$ ορθογώνιο

$\Rightarrow AE=B\Gamma \Rightarrow 2AM=B\Gamma \Rightarrow \mu_a=\frac{a}{2}$

2) Εαν $A=90^\circ$ τότε $\boxed{\hat{B}=30^\circ \Leftrightarrow b=\frac{a}{2}}$



▶ Παίρνω την διάμεσο AM

Ευθύ : Εστω $\hat{B}=30^\circ$

$AM=\frac{B\Gamma}{2}=\Gamma M \Rightarrow AM\Gamma$ ισοσκελής $\Rightarrow \hat{A}_1=\hat{\Gamma}=90-\hat{B}$
$=60 \Rightarrow \hat{M}_1=180-\hat{A}_1-\hat{\Gamma}=180-60-60=60$
$\Rightarrow \hat{A}=\hat{\Gamma}=\hat{M}_1=60 \Rightarrow A\hat{\Gamma}M$ ισόπλευρο $\Rightarrow$

$\Rightarrow b=\mu_a=\frac{a}{2}$

Αντίστροφο Εστω $b=\frac{a}{2}$

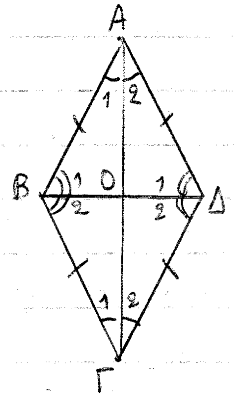
$A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}=AM \wedge AM=\frac{B\Gamma}{2}=\Gamma M \Rightarrow A\Gamma=\Gamma M=AM \Rightarrow A\hat{\Gamma}M$ ισόπλευρο $\Rightarrow$
$\hat{\Gamma}=60 \Rightarrow \hat{B}=90-\hat{\Gamma}=90-60=30$

Ρόμβος

Ορισμος $\boxed{AB\Gamma\Delta \text{ ρόμβος} \Leftrightarrow AB=B\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta A}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ : Αν το $AB\Gamma\Delta$ ρομβος τότε
1) $AB\Gamma\Delta \#$ 2) $A\Gamma \perp B\Delta$ 3) $A\Gamma, B\Delta$ διχοτόμοι των γωνιών του.

1) Είναι προφανής διότι $AB=\Gamma\Delta \wedge B\Gamma=\Delta A$



2) $\left.\begin{array}{l} AB = A\Delta \\ OB = O\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow A, O \in$ στην μεσοκάθετο της $B\Delta$

$\Rightarrow AO \perp B\Delta \rightarrow A\Gamma \perp B\Delta$

3) ΑΟ διάμεσος ($OB = O\Delta$) και ύψος ($A\Gamma \perp B\Delta$) στο $A\hat{B}\Delta \Rightarrow$ ΑΟ διχοτόμος $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Όμοια $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \wedge \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \wedge \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$

<u>ΚΡΙΤΗΡΙΑ</u> Ενα # είναι ρόμβος εαν έχει

1) $AB = B\Gamma$ (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες)

2) $A\Gamma \perp B\Delta$ 3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία)

1) ΑΒΓΔ# $\Rightarrow AB = \Gamma\Delta \wedge B\Gamma = \Delta A$. Αλλα $AB = B\Gamma \Rightarrow AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A \Rightarrow$ ΑΒΓΔ ρόμβος.

2) $\left.\begin{array}{l} A\Gamma \perp B\Delta \Rightarrow AO \perp B\Delta \Rightarrow AO \text{ ύψος} \\ \text{Αλλα ΑΒΓΔ\#} \Rightarrow BO = O\Delta \rightarrow AO \text{ διάμεσος} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB = A\Delta \\ \text{ΑΒΓΔ\#} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ΑΒΓΔ ρόμβος

3) $\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow AO \text{ διχοτόμος} \\ \text{ΑΒΓΔ\#} \Rightarrow BO = O\Delta \Rightarrow AO \text{ διάμεσος} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ΑΒΔ ισοσκελες $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB = A\Delta \\ \text{ΑΒΓΔ\#} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ΑΒΓΔ ρόμβος

<u>Τετράγωνο</u>

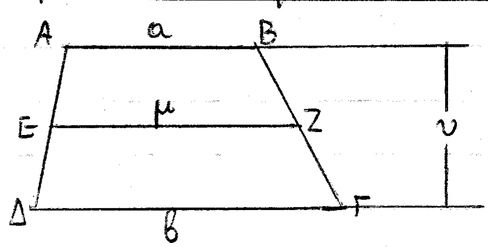
<u>Ορισμος</u> $\boxed{\text{ΑΒΓΔ τετράγωνο} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} \end{cases}}$

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u> : Απο τον ορισμο είναι ~~τετράγ~~ ορθογώνιο και ρόμβος $\Rightarrow$ έχει τις ιδιότητες του ορθογώνιου και του ρόμβου.

<u>ΚΡΙΤΗΡΙΑ</u> : Αρκει να δείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος

<u>Τραπέζιο</u>

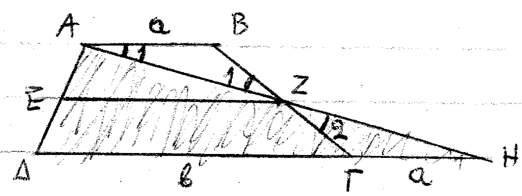
Ορισμός $\boxed{\text{ΑΒΓΔ τραπέζιο} \Leftrightarrow AB \parallel \Gamma\Delta \vee B\Gamma \parallel \Delta A}$



• Υψος τραπεζίου ⟶ $υ =$ απόσταση $ΑΒ, ΓΔ$

• Διάμεσος τραπεζίου ⟶ $μ = ΕΖ$ (Ε μεσο ΑΔ, Ζ μέσο ΒΓ)

• $\boxed{μ \parallel α, β \wedge μ = \frac{α+β}{2}}$



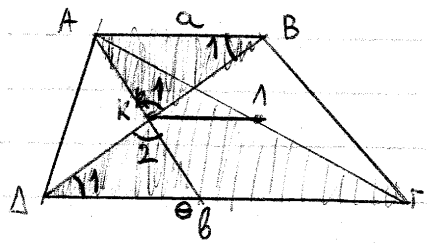
▶ Φέρνω το ΑΖ και παίρνω το $Η = ΑΖ \cap ΓΔ$

$ΒΖ = ΓΖ \wedge \hat{Ζ}_1 = \hat{Ζ}_2 \wedge \hat{Α}_1 = \hat{Η} \Rightarrow \overset{\triangle}{ΑΒΖ} = \overset{\triangle}{ΖΓΗ} \Rightarrow ΑΖ = ΖΗ \wedge ΓΗ = ΑΒ = α$

Αλλα στο $\overset{\triangle}{ΑΔΗ}$: Ε μεσο ΑΔ $\wedge$ Ζ μέσο ΑΗ

$\Rightarrow ΕΖ \parallel ΔΗ \wedge ΕΖ = \frac{ΔΗ}{2} \Rightarrow μ \parallel α, β \wedge μ = \frac{ΔΗ}{2} = \frac{α+β}{2}$

• $\boxed{\left.\begin{matrix} Κ \text{ μέσο } ΒΔ \\ Λ \text{ μέσο } ΑΓ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ΚΛ \parallel α, β \wedge ΚΛ = \frac{|α-β|}{2}}$



▶ Παίρνω $Θ = ΑΚ \cap ΓΔ$ και έστω $α < β$

$ΒΚ = ΚΔ \wedge \hat{Κ}_1 = \hat{Κ}_2 \wedge \hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 \Rightarrow \overset{\triangle}{ΑΚΒ} = \overset{\triangle}{ΚΔΘ}$

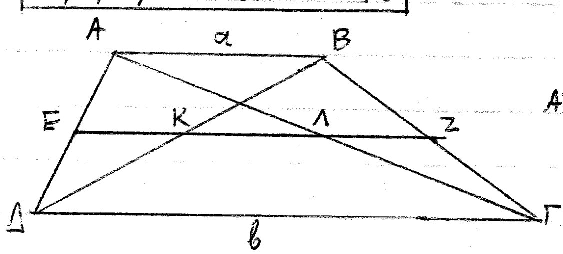
$\Rightarrow ΔΘ = ΑΒ = α \wedge ΑΚ = ΚΘ$

Αλλα Κ, Λ μεσα των ΑΘ, ΑΓ $\underset{\overset{\triangle}{ΑΘΓ}}{\Rightarrow} ΚΛ =\parallel \frac{ΘΓ}{2} \Rightarrow ΚΛ \parallel α, β$

και $ΚΛ = \frac{ΘΓ}{2} = \frac{ΓΔ - ΘΔ}{2} = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2} = \frac{β - α}{2}$

Ομοια εαν $α > β \Rightarrow ΚΛ = \frac{α-β}{2}$ άρα $ΚΛ = \frac{|α-β|}{2}$

• $\boxed{Ε, Κ, Λ, Ζ \text{ συνευθειακα}}$



$\overset{\triangle}{ΑΓΔ}$: $\left.\begin{matrix} ΚΛ \parallel ΓΔ \\ ΕΛ \parallel ΓΔ \end{matrix}\right\}$ Απο το Λ όμως δεν μπορώ να φέρω 2 $\parallel$

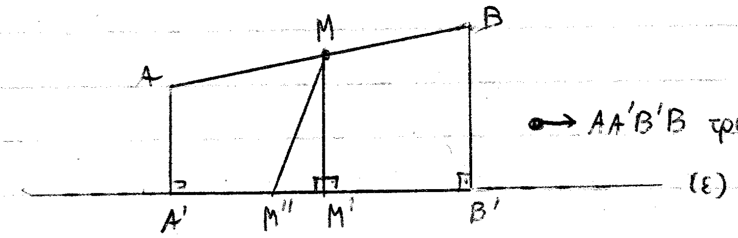
άρα Ε, Κ, Λ $\in$ στην ίδια ευθεία

Ομοια Κ, Λ, Ζ $\in$ » » »

$\Rightarrow$ Ε, Κ, Λ, Ζ συνευθειακά

▼ Χαρακτηριστικά τραπέζια

● Το μέσο ενος ευθύγραμμου τμήματος προβάλεται στο μέσο της προβολής του τμήματος πάνω στην ίδια ευθεία.



→ $AA'B'B$ τραπέζιο με βάσεις $AA' \parallel BB'$

<u>Απόδειξη</u> : Εστω ότι M' δεν είναι μέσο.

▶ Παίρνω τότε εγώ το μέσο M'' και φέρνω την MM''.

$MM'' \parallel BB'$ ως διάμεσος του τραπεζίο $AA'B'B$.

$MM' \parallel BB'$ ως $\perp$ στην (ε)

άθρα απο το M φέρνω δύο $\parallel$ προς το BB' ← Ατοπο

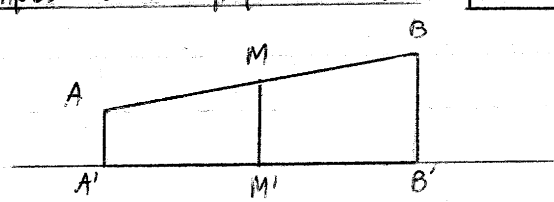
άρα M' μέσο.

● <u>Χαρακτηριστικό</u> λέγεται το τραπέζιο όπου η μία πλάγια πλευρα ισούτε με το υψος.

- Το $AA'B'B$ είναι χαρακτηριστικό τραπέζιο.

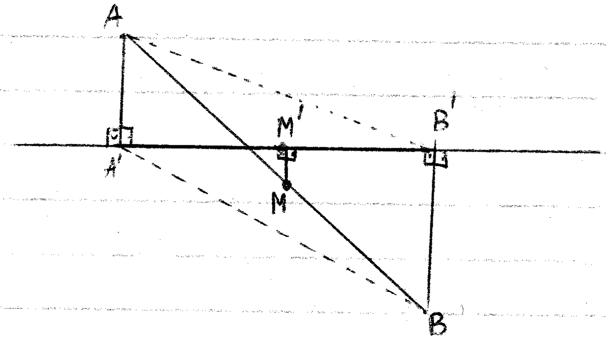
▼ <u>Εφαρμογές</u>

● <u>A,B προς το ίδιο μέρος της (ε)</u> $\Rightarrow \boxed{AA' + BB' = 2MM'}$



$\left.\begin{array}{l} AA'B'B \text{ τραπέζιο.} \\ M' \text{ μεσο (το δειξαμε)} \\ M \text{ μέσο} \end{array}\right\} \Rightarrow MM' = \dfrac{AA' + BB'}{2} \Rightarrow \underline{AA' + BB' = 2MM'}$

● <u>A,B εκατέρωθεν της (ε)</u> $\Rightarrow \boxed{|AA' - BB'| = MM'}$

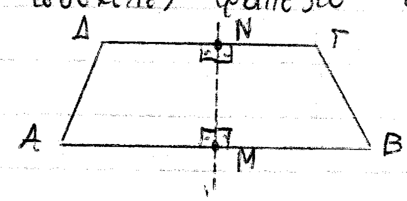


$AA'B'B$
M', M μεσα ΔΙΑΓΩΝΙΩΝ $\Rightarrow MM' = \dfrac{|AA'-BB'|}{2} \Rightarrow |AA'-BB'| = 2MM'$

Ισοσκελές τραπέζιο

• Ορισμος $\boxed{AB\Gamma\Delta \text{ ισ. τραπ} \Leftrightarrow AB \parallel \Gamma\Delta \wedge A\Delta = B\Gamma}$

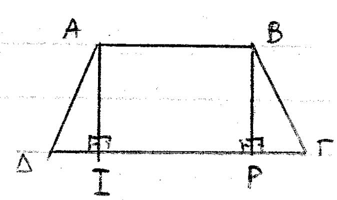
• Είναι τραπέζιο, άρα ισχύουν οι ιδιότητες του τραπεζίου.
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ : Αν το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο τότε:
1) $\hat{A} = \hat{B} \wedge \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ 2) $A\Gamma = B\Delta$
3) M, N μέσα $AB, \Gamma\Delta \Rightarrow MN \underset{\text{μέσο}}{\perp} AB, \Gamma\Delta$



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ~~Αντίστροφα~~ εάν ΑΒΓΔ τραπέζιο και ισχύει ενα απο τα παρακάτω, το τραπέζιο είναι ισοσκελές:
1) $\hat{A} = \hat{B} \vee \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ 2) $A\Gamma = B\Delta$
3) M, N μέσα $AB, \Gamma\Delta \wedge MN \perp AB, \Gamma\Delta$

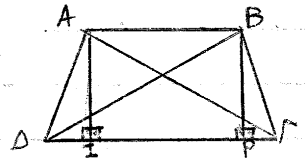
• Αποδείξεις

1) Ευθυ : Εστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο.
▶ Φέρνω $AI \perp \Gamma\Delta$, $BP \perp \Gamma\Delta$
$AI = BP \wedge A\Delta = B\Gamma \wedge \hat{I} = \hat{P} \Rightarrow A\hat{I}\Delta = B\hat{P}\Gamma$
$\Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Αλλα $\hat{A} = 180 - \hat{\Gamma} = 180 - \hat{\Delta} = \hat{B}$
$\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \wedge \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$



Αντίστροφο : Εστω ΑΒΓΔ τραπέζιο και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$
$AI = BP \wedge \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} \Rightarrow A\hat{I}\Delta = B\hat{P}\Gamma \Rightarrow A\Delta = B\Gamma$
$AB\Gamma\Delta$ τρ $\Rightarrow AB \parallel \Gamma\Delta$
$\Rightarrow$ ισ. τραπέζιο.

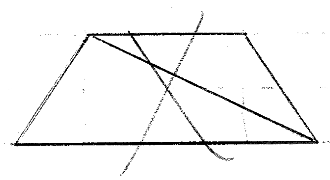
2) Ευθυ : Εστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο

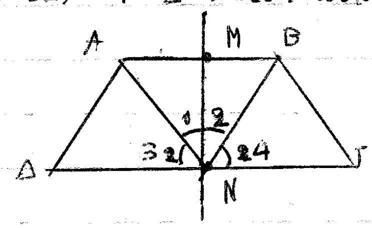


▶ Φέρνω τις διαγώνιους
$\hat{Γ}=\hat{Δ} \wedge ΑΔ=ΒΓ \wedge ΓΔ$ κοινη ⇒
⇒ $Α\hat{Γ}Δ = Β\hat{Γ}Δ \Rightarrow ΑΓ=ΒΔ$.

Αντίστροφο Εστω ΑΒΓΔ τραπέζιο και ΑΓ=ΒΔ
▶ Φέρνω τις ΑΙ, ΒΡ ⊥ ΓΔ
$\overset{\triangle}{ΑΙΓ} = Β\hat{Ρ}Δ$ (ΑΙ=ΒΡ ∧ ΑΓ=ΒΔ) ⇒ $\hat{Γ}=\hat{Δ}$ ⇒ 1 ⇒ ισο~~[illegible]~~ τραπέζιο.

3)





▶ Φέρνω τις ΝΑ, ΝΒ
Ευθυ : Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο, Μ,Ν μέσα ΑΒ, ΓΔ
ΑΔ=ΒΓ ∧ ΔΝ=ΝΓ ∧ $\hat{Δ}=\hat{Γ}$ ⇒ $Α\hat{Ν}Δ = Β\hat{Ν}Γ$ ⇒ ΑΝ=ΝΒ ⇒ $Α\hat{Ν}Β$ ισοσκελές.
Αλλα ΝΜ διάμεσος ⇒ ΝΜ ύψος ⇒ ΝΜ $\underset{μέσο}{\perp}$ ΑΒ.

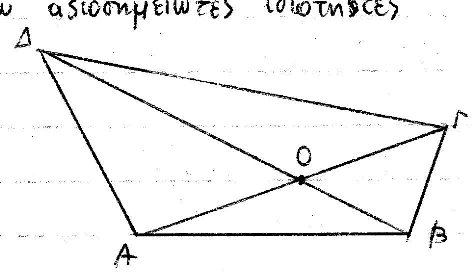
Αντίστροφο Εστω ΑΒΓΔ τραπέζιο και
Μ,Ν μέσα ΑΒ,ΓΔ ∧ ΜΝ ⊥ ΑΒ,ΓΔ

▶ ΝΜ $\underset{μέσο}{\perp}$ ΑΒ (διοτι Μ,Ν μέσα) ⇒ ΝΑ=ΝΒ (1)

Επίσης ΜΝ υψος ∧ διαμεσος ⇒ διχοτόμος ⇒ $\hat{Ν}_1=\hat{Ν}_2 \Rightarrow 90-\hat{Ν}_1 = 90-\hat{Ν}_2$
⇒ $\hat{Ν}_3=\hat{Ν}_4$ (2). Αλλα ΔΝ=ΝΓ (3)
άρα (1)∧(2)∧(3) ⇒ $Α\hat{Ν}Δ = Β\hat{Ν}Γ$ ⇒ ΑΔ=ΒΓ

▼ Τετράπλευρα (γενικα) ⟶ ΑΒΓΔ.

Έχουν τις παρακάτω αξιοσημείωτες ιδιότητες
1) $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}+\hat{Δ}=360$
2) ΑΓ+ΒΔ < ΑΒ+ΓΔ

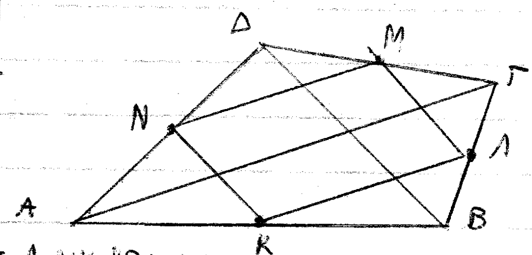


▶ Παίρνω $Ο = ΑΓ \cap ΒΔ$.

$A\hat{O}B: \quad AO+OB<AB$
$\Gamma\hat{O}\Delta: \quad \Gamma O+O\Delta<\Gamma\Delta$ $\Rightarrow (AO+\Gamma O)+(BO+O\Delta)<AB+\Gamma\Delta \Rightarrow A\Gamma+B\Delta<AB+\Gamma\Delta$

3) K,Λ,M,N μέσα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A \Rightarrow K\Lambda MN$ # (Αποδείχτηκε)

$K\Lambda MN$ ορθογώνιο $\Leftrightarrow A\Gamma\perp B\Delta$
$K\Lambda MN$ ρόμβος $\Leftrightarrow A\Gamma=B\Delta$
$K\Lambda MN$ ~~ρόμ~~τετρ. $\Leftrightarrow A\Gamma=\perp B\Delta$



α) $K\Lambda MN$ ορθογώνιο
$\Leftrightarrow \hat{N}=90^\circ \Leftrightarrow NM\perp NK$. (1)
Αλλα εκ κατασκευής ισχυει $NM \parallel A\Gamma \wedge NK \parallel B\Delta$ (2)
$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow A\Gamma\perp B\Delta$ QED.

β) $K\Lambda MN$ ρόμβος $\Leftrightarrow NM=NK \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2}=\frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Gamma=B\Delta$

γ) $K\Lambda MN$ τετράγωνο $\Leftrightarrow K\Lambda MN$ ορθ $\wedge$ ρομβ $\Leftrightarrow A\Gamma\perp B\Delta \wedge A\Gamma=B\Delta \Leftrightarrow A\Gamma=\perp B\Delta$

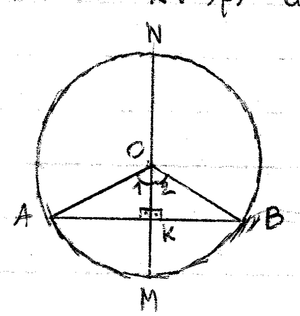
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

▼ Ορισμοί

$K(O,\rho)=\{M : MO=\rho\}$	← κύκλος
$K.\delta(O,\rho)=\{M : MO\leq\rho\}$	← κυκλικός δίσκος

Ενα σημειο A ως προς κύκλο $K(O,\rho)$ αν
i) είναι εσωτερικο , αν $AO<\rho$
ii) είναι στην περιφέρεια , αν $AO=\rho$
iii) είναι εξωτερικο , αν $AO>\rho$.

▼ Απόστημα χορδής λέγεται η απόσταση του κέντρου ενος κύκλου $K(O,\rho)$ απο την χορδη.

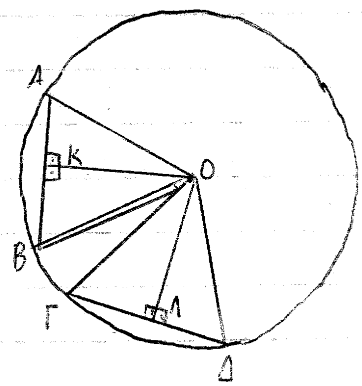


• Αν $OK\perp AB \Rightarrow K$ μέσο AB
M,N μέσα της $\overset{\frown}{AB}$

$AO=OB \Rightarrow A\hat{O}B$ ισοσκελές $\Rightarrow OK$ ύψος $\Rightarrow OK$ διαμ., διχ
$\Rightarrow K$ μέσο AB
και $\hat{O}_1=\hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB} \wedge \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NB} \Rightarrow M,N$ μέσα της $\overset{\frown}{AB}$

▼ Σύγκριση χορδών - αποστημάτων

1) $\boxed{AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow OK = O\Lambda}$



Ευθύ: έστω $AB = \Gamma\Delta$

$\Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow AK = \Gamma\Lambda$, $AO = O\Gamma$ $\Rightarrow A\hat{O}K = \Gamma\hat{O}\Lambda$

$\Downarrow$

$OK = O\Lambda$

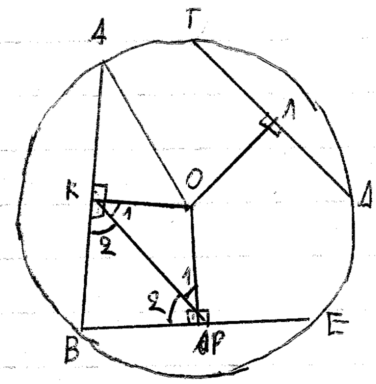
Αντίστροφο: Έστω $OK = O\Lambda$, $AO = \Gamma O$ $\Rightarrow A\hat{O}K = \Gamma\hat{O}\Lambda$

$\Downarrow$

$AK = \Gamma\Lambda \Rightarrow AB = \Gamma\Delta$

2) $\boxed{AB > \Gamma\Delta \Leftrightarrow OK < O\Lambda}$

▶ Παίρνω χορδή $BE = \Gamma\Delta$ και το KP.



Ευθύ: έστω $AB > \Gamma\Delta$

$\Rightarrow AB > BE \Rightarrow BK > BP \overset{B\hat{K}P}{\Rightarrow} \hat{P}_2 > \hat{K}_2 \Rightarrow$ $(O\hat{K}P)$

$\Rightarrow 90 - \hat{P}_1 > 90 - \hat{K}_1 \Rightarrow \hat{P}_1 < \hat{K}_1 \Rightarrow OK < OP \Rightarrow OK < O\Lambda$.

Αντίστροφο: Έστω $OK < O\Lambda$

$\Rightarrow OK < OP \overset{O\hat{K}P}{\Rightarrow} \hat{P}_1 < \hat{K}_1 \Rightarrow 90 - \hat{P}_1 > 90 - \hat{K}_1 \Rightarrow \hat{P}_2 > \hat{K}_2 \overset{K\hat{B}P}{\Rightarrow} KB > BP$

$\Rightarrow AB > BE \Rightarrow AB > \Gamma\Delta$.

▼ Σχετική θέση ευθείας - κύκλου (O, ρ).

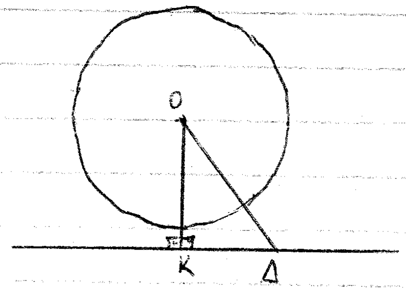
Εξαρτάται από την απόσταση $d = OK$ του κύκλου από την ευθεία και την ακτίνα ρ του κύκλου.

i) $(\varepsilon) \cap (O,\rho) = \emptyset \Leftrightarrow d > \rho$ ⟶ Η (ε) είναι εκτός του κύκλου.

ii) $(\varepsilon) \cap (O,\rho) = \{A\} \Leftrightarrow d = \rho$ ⟶ Η (ε) λέγεται εφαπτόμενη του κύκλου.

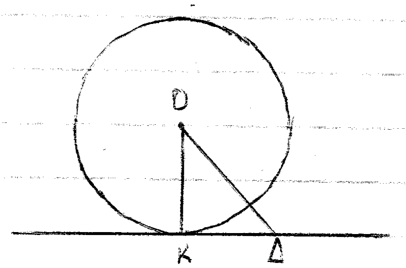
iii) $(\varepsilon) \cap (O,\rho) = \{A,B\} \Leftrightarrow d < \rho$ ⟶ Η (ε) λέγεται τέμνουσα του κύκλου.

$D=2\rho$



i) Έστω $d>\rho \Leftrightarrow OK>\rho \Leftrightarrow K\notin \kappa(O,\rho)$

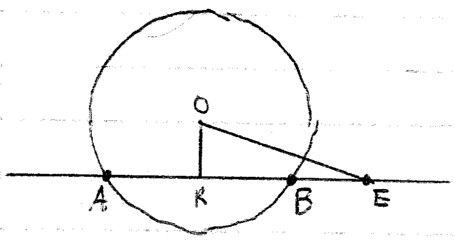
Αλλα $O\Delta > OK > \rho$, ($O\Delta$ πλ. τμήμα) $\Leftrightarrow$ και το $\Delta \notin \kappa(O,\rho) \Rightarrow (\varepsilon)\cap \kappa(O,\rho)=\emptyset$



ii) $d=\rho \Leftrightarrow OK=\rho \Leftrightarrow K\in(O,\rho)$.

Για καθε άλλο Δ, $O\Delta > OK = \rho \Rightarrow \Delta\notin\kappa(O,\rho)$

άρα $(\varepsilon)\cap\kappa(O,\rho)=\{A\}$



iii) $d<\rho \Leftrightarrow OK<\rho \Leftrightarrow K\in\kappa(O,\rho)$

▶ Παίρνω $E\in(\varepsilon)$ ώστε $KE>\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow OE>KE>\rho \Rightarrow E\notin\kappa(O,\rho)$

Αξιωματικα, δεχόμαστε ότι $\exists B\in KE$ ώστε $OB=\rho \Rightarrow B\in(\varepsilon)\cap\kappa(O,\rho)$.

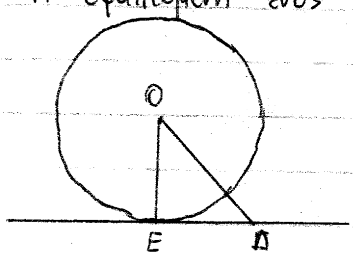
▶ Παίρνω $A\in(\varepsilon)$ ώστε $KA=KB. \Rightarrow OK \underset{\text{μεσο}}{\perp} AB \Rightarrow OA=OB=\rho\Rightarrow A\in\kappa(O,\rho)$.

▶ Έστω ότι έχουν και τρίτο κοινο σημείο $A' \Rightarrow OA'=OA=OB \Rightarrow KA'=KB=KA$

$\Rightarrow$ αξιωματικά $A\equiv A'$

• <u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u> Ευθεία και κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

• Η εφαπτόμενη ενός κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής.



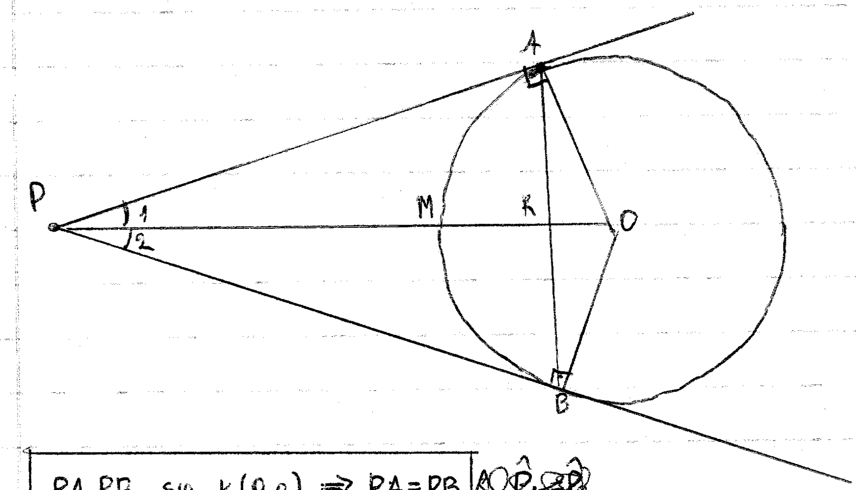
$(\varepsilon)\cap\kappa(O,\rho)=\{E\} \Rightarrow \forall \Delta\neq E \Rightarrow \Delta\notin\kappa(O,\rho)\Rightarrow$

$\Rightarrow O\Delta>\rho$.

Αλλα $E\in\kappa(O,\rho)\Rightarrow OE=\rho \Rightarrow \forall\Delta\neq E,\ O\Delta>OE$

$\Rightarrow OE\perp(\varepsilon)$

▼ Εφαπτόμενες κύκλου απο σημείο



$\boxed{PA, PB \text{ εφ. } k(O,\rho) \Rightarrow PA = PB}$ $\cancel{\wedge O\hat{P}_1 = \hat{P}_2}$

$$\left.\begin{array}{l} P\hat{A}O,\ P\hat{B}O \text{ ορθ.} \\ OA = OB \wedge OP \text{ κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow P\hat{A}O = P\hat{B}O \Rightarrow PA = PB.$$

$\boxed{PAOB \text{ ρομβοειδές}}$

$$\left.\begin{array}{l} PA = PB \\ OA = OB = \rho \end{array}\right\} \Rightarrow PAOB \text{ ρομβοειδές} \Rightarrow$$

$\Rightarrow PO$ διχ. των $\hat{P}, \hat{O}$ και $PO \underset{\text{μεσο}}{\perp} AB \Rightarrow OK$ απόστημα.

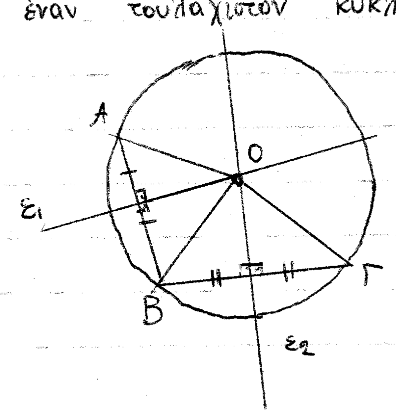
▼ Σχετική θέση δύο κύκλων $\longrightarrow (K,R), (\Lambda,\rho)$

εξαρτάται από την διάκεντρο $d = K\Lambda$, το αθροισμα $R+\rho$ και τη διαφορά $|R-\rho|$ των ακτίνων.

1) • $\boxed{(K,R) \equiv (\Lambda,\rho) \underset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} K \equiv \Lambda \wedge R = \rho}$ ← Δύο κύκλοι συμπίπτουν όταν.

-1 $\cancel{(K,R) \equiv (\Lambda,\rho)} \Rightarrow \exists\, A,B,\Gamma \in q : A,B,\Gamma \in (K,R) \wedge A,B,\Gamma \in (\Lambda,\rho)$

▶ Εστω τρια μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ. Θα δείξω ότι διέρχονται απο έναν τουλάχιστον κύκλο.



▶ φέρνω $\varepsilon_1 \underset{\text{μεσο}}{\perp} AB$ και $\varepsilon_2 \underset{\text{μεσο}}{\perp} B\Gamma$ και παίρνω

$O = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$.

$$\left.\begin{array}{l} O \in \varepsilon_1 \Rightarrow OA = OB \\ O \in \varepsilon_2 \Rightarrow OB = O\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB = O\Gamma = R \Rightarrow A,B,\Gamma \in k(O,R)$$

$\Rightarrow$ υπάρχει τουλάχιστον ένας κύκλος.

Θα δείξουμε ότι είναι ο μοναδικός. Έστω $(O', O'A)$ με $A, B, \Gamma \in (O', O'A)$
$\Rightarrow O'A = O'B = O'\Gamma \Rightarrow O' \in (\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) \Rightarrow O' \equiv O$ (1) $\Rightarrow O'A = OA$. (2)

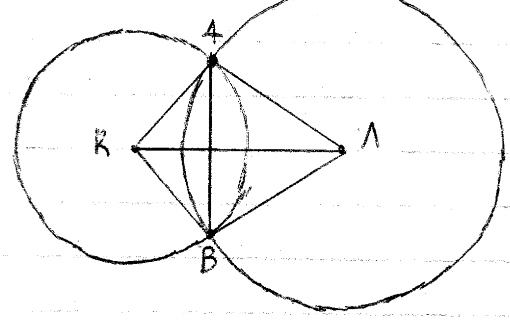
$\left.\begin{array}{l} O' \equiv O \\ O'A = OA \end{array}\right\} \Rightarrow (O', O'A) \equiv (O, OA)$.

-2. Αντίθετο αντίστροφα

$\exists$

<u>Πόρισμα</u>: Δύο διαφορετικοί κύκλοι μπορεί να έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

-2. $\left.\begin{array}{l} A \in (K,R) \cap (\Lambda, \rho) \\ A \notin K\Lambda \end{array}\right\} \Rightarrow B = \hat{S}(K\Lambda) A \in (K,R) \cap (\Lambda,\rho)$ (1)



$B = S(K\Lambda)A \Rightarrow K\Lambda \underset{\mu\varepsilon\sigma o}{\perp} AB \Rightarrow KA = KB \wedge \Lambda A = \Lambda B$. (1)

Αλλα $A \in (K,R) \cap (\Lambda, \rho) \Rightarrow KA = R \wedge \Lambda A = \rho \Rightarrow KB = R \wedge \Lambda B = \rho \Rightarrow$
$\Rightarrow B \in (K,R) \cap (\Lambda, \rho)$.

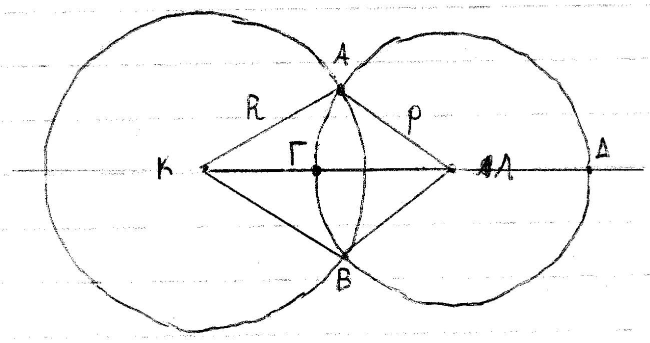
ii) • Ορισμος: $\boxed{\text{Δύο κύκλοι τέμνονται} \Leftrightarrow \exists A,B : K(O,R) \cap \Lambda(O,\rho) = \{A,B\}}$

-1. $|R-\rho| \leq d < R+\rho \Leftrightarrow K(K,R) \cap (\Lambda,\rho) = \{A,B\}$

<u>Αντίστροφο</u>: Έστω ότι τέμνονται

Στο $K\hat{A}\Lambda \Rightarrow |KA - A\Lambda| < K\Lambda < KA + A\Lambda \Rightarrow |R-\rho| < d < R+\rho$

<u>Ευθυ</u>: Έστω ότι $|R-\rho| < d < R+\rho$. και $R > \rho$.



▸ Εστω $\{\Gamma, \Delta\} = K\Lambda \cap (\Lambda, \Lambda A)$

$\cancel{K\Gamma = KA - \Gamma A = d - \rho}$

$K\Lambda < R+\rho \Rightarrow d-\rho < R \Rightarrow K\Lambda - \Lambda\Gamma < R \Rightarrow K\Gamma < R \Rightarrow \Gamma$ εσωτ. του (K,R)

$R-\rho < K\Lambda \Rightarrow R < d+\rho \Rightarrow R < K\Delta \Rightarrow \Delta$ εξωτ. του (K,R)

Αξιωματικά όμως, $\exists\ A : \widehat{\Gamma\Delta} \cap (K,R)$.

Αλλα $R+\rho > d \Rightarrow KA + A\Lambda > K\Lambda \Rightarrow A \notin K\Lambda \Rightarrow B = S(K\Lambda)A \in (K,R)\cap(\Lambda,\rho)$

Τρίτο σημείο δεν υπάρχει άρα.

$(K,R)\cap(\Lambda,\rho) = \{A,B\}$.

<u>Παρατήρηση</u>: $\boxed{\begin{array}{l} K A \Lambda B \text{ Ρομβοειδές} \Rightarrow - - - \\ R=\rho \Leftrightarrow K A \Lambda B \text{ ρόμβος.} \end{array}}$

iii) • $\boxed{\text{Δύο κύκλοι εφάπτονται} \Leftrightarrow (K,R)\cap(\Lambda,\rho) = \{A\}.}$

απο το θεώρημα (1) έχω τα πορίσματα.

1) $A \in K\Lambda$ 2) $\left.\begin{array}{l} E \in (K,R)\cap(\Lambda,\rho) \\ E \in K\Lambda \end{array}\right\} \Rightarrow (K,R)\cap(\Lambda,R) = \{E\}$.

• ~~Δύο~~ $(K,R),(\Lambda,\rho)$ εφάπτονται εξωτερικώς $\Leftrightarrow K,\Lambda$ εκατέρωθεν του A.

• $(K,R),(\Lambda,\rho)$ εφάπτονται εσωτερικώς $\Leftrightarrow K,\Lambda$ προς το ίδιο μέρος του A.

-3. Εφάπτονται εσωτερικώς $\Leftrightarrow d = |R-\rho|$

Εφάπτονται εξωτερικώς $\Leftrightarrow d = R+\rho$

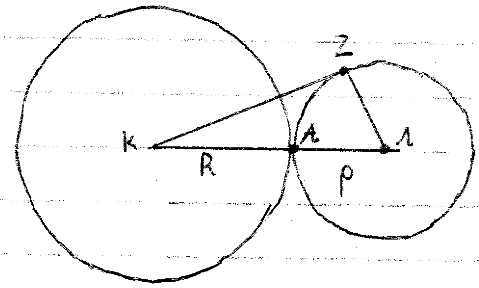
<u>ΟΡΙΣΜΟΙ</u>

• Δύο κύκλοι $(K,R),(\Lambda,\rho)$ εφάπτονται εξωτερικώς $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\ Z \in (\Lambda,\rho) - (K,R)\ ;\ KZ > R$

• Δύο κύκλοι $(K,R),(\Lambda,\rho)$ εφάπτονται εσωτερικώς $\overset{(R>\rho)}{\Leftrightarrow}$
$\forall Z \in (\Lambda,\rho)-(K,R)$: $KZ < R$.

-3. <u>Εφάπτονται εξωτερικώς $\Leftrightarrow d = R+\rho$</u>

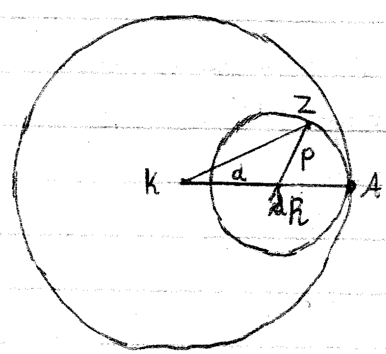


<u>Ευθύ</u> : Έστω ότι εφάπτονται εξωτερικώς
$\{A\}=(K,R)\cap(\Lambda,\rho) \Rightarrow A\in K\Lambda \Rightarrow d=K\Lambda = KA + A\Lambda = R+\rho$
<u>Αντίστροφο</u> : Έστω $d = R+\rho$.
▶ $A=(\Lambda,\rho)\cap K\Lambda \Rightarrow A\Lambda = \rho$
$KA = K\Lambda - A\Lambda = d-\rho = (R+\rho)-\rho = R \Rightarrow A\in(K,R)$ ⇒ ~~Α σημείο επαφής.~~
$A\in(\Lambda,\rho)$ ⇒ $(K,R),(\Lambda,\rho)$ εφάπτονται
$A\in K\Lambda$

▶ Έστω $Z\in(\Lambda,\rho)$ και $Z\neq A$
Στο $K\hat{Z}\Lambda$, $KZ > |K\Lambda - \Lambda Z| \Rightarrow KZ > |d-\rho| \Rightarrow KZ > |(R+\rho)-\rho| \Rightarrow$
$\Rightarrow KZ > |R| \Rightarrow KZ > R$. ⇒ $(K,R),(\Lambda,\rho)$ εφάπτονται εξωτερικώς.

-4. <u>Εφάπτονται εσωτερικώς $\Leftrightarrow d = |R-\rho|$</u>

Έστω $R>\rho$



<u>Ευθύ</u> : Έστω ότι εφάπτονται εσωτερικώς
$A\in \text{πρ}(K\Lambda) \Rightarrow d = K\Lambda = KA - A\Lambda = R-\rho$

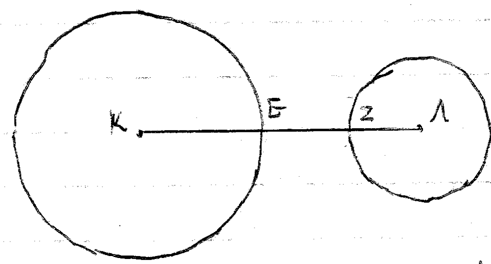
<u>Αντίστροφο</u> : Έστω ότι $d = |R-\rho| = R-\rho$
▶ $A = (\Lambda,\rho)\cap \text{πρ}(K\Lambda)$.
$KA = K\Lambda + \Lambda A = d+\rho = (R-\rho)+\rho = R \Rightarrow A\in(K,\rho)$
Αλλά και $A\in \text{πρ}(K\Lambda) \Rightarrow B\equiv A \Rightarrow$ εφάπτονται.

▶ Έστω $Z\in(\Lambda,\rho)$ και $Z\neq A$
Στο $K\hat{\Lambda}Z$: $KZ < K\Lambda + \Lambda Z \Rightarrow KZ < d+\rho \Rightarrow KZ < (R-\rho)+\rho \Rightarrow KZ < R \Rightarrow Z$ εσωτ. στο (K,R)
⇒ εφάπτονται εσωτερικώς.

iv) $\boxed{\text{Δεν τέμνονται} \overset{op}{\Leftrightarrow} (K,R)\cap(\Lambda,\rho)=\emptyset}$, $R>\rho$.

- $(\Lambda,\rho) \in$ κ.δ$(K,R) \overset{op}{\Leftrightarrow} (\Lambda,\rho)$ εσωτ. (K,R)
- $(\Lambda,\rho) \notin$ κ.δ$(K,R) \overset{op}{\Leftrightarrow} (\Lambda,\rho)$ εξωτ. (K,R)

-1. <u>(Λ,ρ) εξωτ $(K,R) \Leftrightarrow d>R+\rho$</u>



▶ $E =$ ~~KO~~ $K\Lambda \cap (K,R)$

$Z = K\Lambda \cap (\Lambda,\rho)$

<u>Ευθυ</u>: Έστω ότι τέμνονται εξωτερικά

$d = K\Lambda = KE + EZ + Z\Lambda = R+\rho+EZ$

$\Rightarrow d>R+\rho$.

<u>Αντίστροφο</u>: Έστω $d>R+\rho$ ~~τότ~~

$\Rightarrow |R-\rho|<d<R+\rho,\ d=R+\rho,\ d=|R-\rho|$ ψευδή

$\Rightarrow$ Δεν τέμνονται.

Έστω ότι δεν είναι εξωτ $\Rightarrow$ θα είναι εσωτ $\Rightarrow$

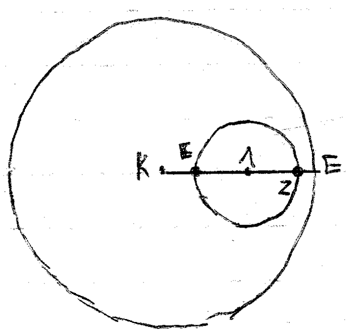
$\Rightarrow d \underset{\text{-2. ευθυ.}}{<} R-\rho < R < R+\rho \longleftarrow$ Άτοπο. $\Rightarrow$ είναι εξωτ.

-2. <u>(Λ,R) εσωτ $(K,R) \Leftrightarrow d<|R-\rho|$</u>

Έστω $R>\rho$

▶ $E = (K,R) \cap$ πρ$(K\Lambda)$

$Z = (\Lambda,\rho) \cap$ πρ$(K\Lambda)$



<u>Ευθυ.</u> Έστω ότι τέμνονται εσωτερικά

$d = K\Lambda = KE - E\Lambda = KE - (\Lambda Z + ZE) = (R-\rho) - ZE \Rightarrow$

$\Rightarrow d<R-\rho$.

<u>Αντίστροφο</u> Έστω $d<R-\rho$.

~~Αντί~~ $\Rightarrow R-\rho<d<R+\rho,\ d=R+\rho,\ d=R-\rho$ ψευδή

$\Rightarrow$ Δεν τέμνονται

Έστω ότι δεν είναι ~~εξωτ~~ $\Rightarrow$ θα είναι εξωτ $\Rightarrow d \overset{\text{ευθυ-1.}}{>} R+\rho > R > R-\rho \longleftarrow$ Άτοπο

$\Rightarrow$ είναι εσωτ.

▼ Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων

- λέγεται μία ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους.
- Μία κοινή εφαπτόμενη είναι

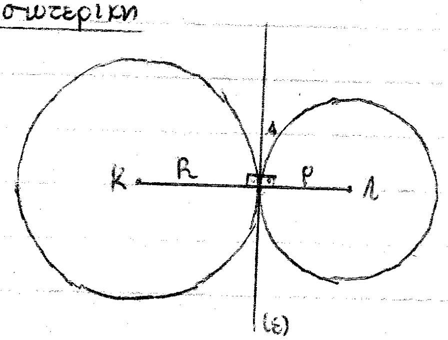
i) Εξωτερική, όταν έχει τους δύο κύκλος στο ίδιο ημιεπίπεδο.

ii) Εσωτερική, όταν έχει τους δύο κύκλους εκατερωθέν.

▼ ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

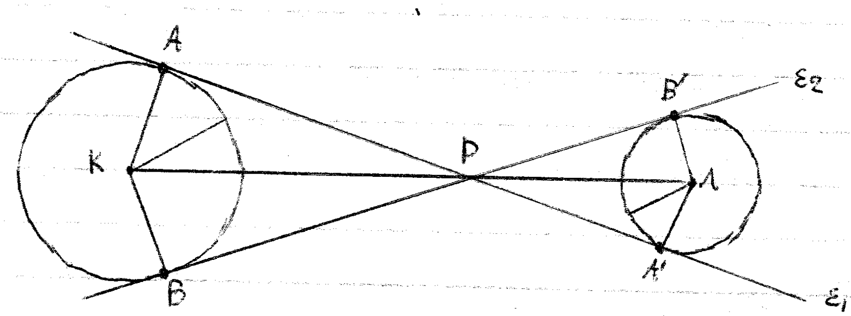
1) Εσωτερική

α.



- $\varepsilon \perp K\Lambda \wedge A \in \varepsilon$
- $R = \rho \Leftrightarrow \varepsilon \underset{\mu\varepsilon\sigma o}{\perp} K\Lambda$

β.



- $PAKB$, $PA'\Lambda B'$ Ρομβοειδή (Βλ. Εφαπτ. κύκλου από σημείο)
- $\Rightarrow AA' = BB'$
- $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = P \in K\Lambda$.

$KA = KB \wedge KA \perp PA \wedge KB \perp PB \Rightarrow K \in \delta_{A\hat{P}B} \Rightarrow PK = \delta_{A\hat{P}B}$

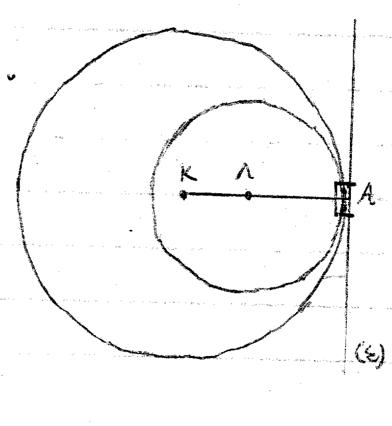
Ομοια $P\Lambda = \delta_{B'\hat{P}A'}$

$A\hat{P}B$, $A'\hat{P}B'$ κατα κορυφήν

$\Rightarrow PK, P\Lambda$ συνευθ. $\Rightarrow P \in K\Lambda$

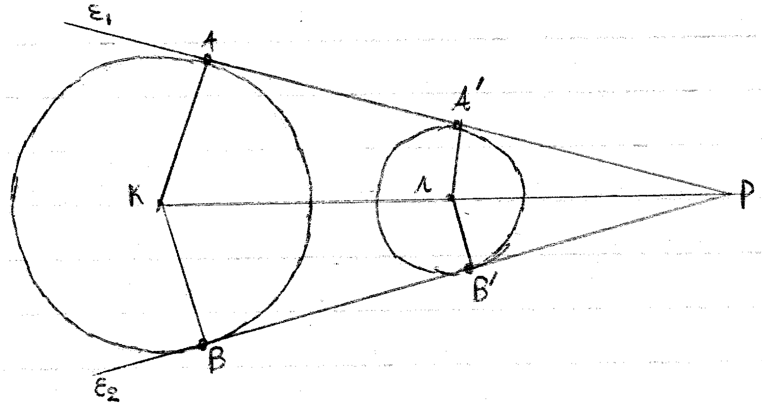
2) Εξωτερική

α.



- K, Λ, A συνευθειακά
- $A \perp \pi\rho(K\Lambda)$

β.



- $PAKB$, $PA'\Lambda B'$ Ρομβοειδη
- $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = P \in K\Lambda$ (Ομοια)
- $R=\rho \Leftrightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
- $AA' = BB'$

Ευθυ: $\left.\begin{array}{l} KA = \Lambda A' \\ KA \parallel \Lambda A' \end{array}\right\} \Rightarrow KAA'\Lambda\# \Rightarrow AA' \parallel K\Lambda$. Ομοια $BB' \parallel K\Lambda \Rightarrow AA' \parallel BB'$

Αντίστροφο: $\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow AA' \parallel BB' \\ AA' = BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AA'B'B\# \Rightarrow AB = A'B'$ (1)

$\left.\begin{array}{l} KB \perp \varepsilon_2 \\ KA \perp \varepsilon_1 \end{array}\right\} \Rightarrow KB \equiv KA \Rightarrow K, A, B$ συνευθ. $\Rightarrow AB$ διάμετρος. Ομοια $A'B'$ διάμετρος.

$(1) \Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow 2R = 2\rho \Rightarrow R = \rho$.

γ, δ. Ομοια με το β. όταν $(K,R), (\Lambda,\rho)$ εφάπτονται ή τέμνονται.

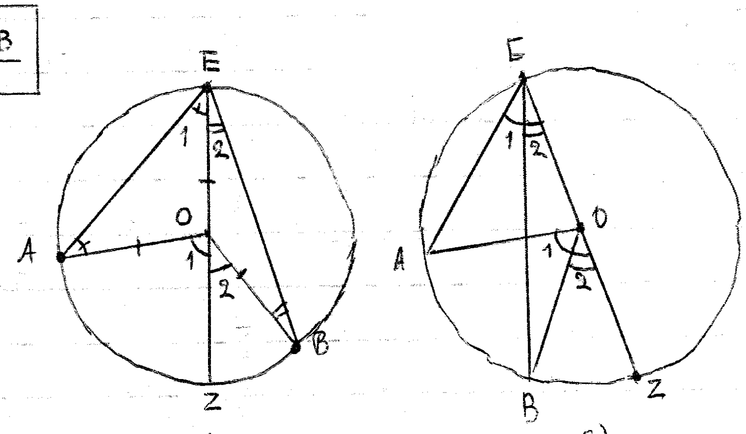
Εγγεγραμμένες γωνίες

λέγονται οι γωνίες που έχουν κορυφή στην περιφέρεια του κύκλου και ~~τέμνουν~~ ~~α~~ πλευρές που τέμνουν τον κύκλο σε δύο σημεία.

- $E \in (O,R) \Rightarrow \boxed{A\hat{E}B = \dfrac{A\hat{O}B}{2}}$

1η περίπτωση $O \in A\hat{E}B$

2η περίπτωση $O \notin A\hat{E}B$



1) 2)

▶ Φέρνω την διάμετρο ΕΖ.

$E\hat{O}A$, $E\hat{O}B$ ισοσκελή $\Rightarrow$ $O_1 = A\hat{O}Z \overset{\text{εξ.}}{=} 2\,O\hat{E}A$

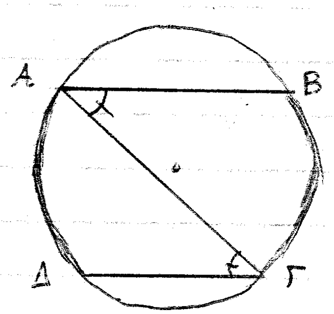
$O_2 = B\hat{O}Z = 2\,O\hat{E}B$

i) $O \in A\hat{E}B \Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{O}_1 = 2\hat{E}_1 \\ \hat{O}_2 = 2\hat{E}_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2(\hat{E}_1 + \hat{E}_2) \Rightarrow A\hat{O}B = 2A\hat{E}B \Rightarrow A\hat{E}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$

ii) $O \notin A\hat{E}B \Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{O}_1 = 2\hat{E}_1 \\ \hat{O}_2 = 2\hat{E}_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 - \hat{O}_2 = 2(\hat{E}_1 - \hat{E}_2) \Rightarrow A\hat{O}B = 2A\hat{E}B \Rightarrow A\hat{E}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$

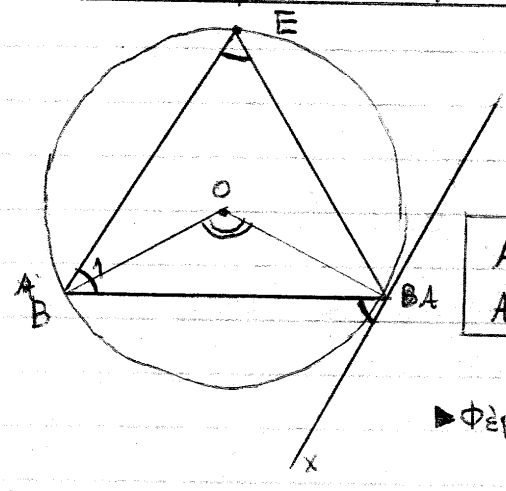
Πόρισμα 1: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} A\hat{E}B = A'\hat{E}B' \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{cases}$

Πόρισμα 2: $\boxed{AB \parallel \Gamma\Delta \Leftrightarrow \overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}}$



$AB \parallel \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{A}B \overset{\text{Π1}}{\Leftrightarrow} \overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$

▼ Γωνία υπό χορδής και εφαπτόμενης



• $B\hat{A}x$ → γωνία ευθείας AB και κύκλου (O,ρ)

$\boxed{\left.\begin{matrix}AB \text{ χορδή} \\ Ax \text{ εφαπτόμενη}\end{matrix}\right\} \Rightarrow B\hat{A}x = A\hat{E}B = \frac{A\hat{O}B}{2}}$

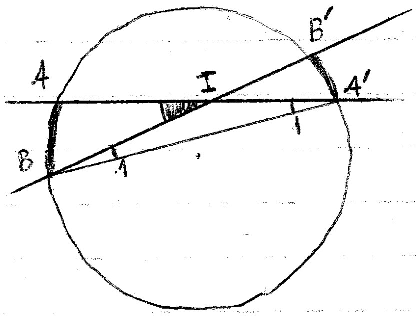
▶ Φέρνω $BE \parallel Ax \underset{\S 7.3}{\Rightarrow} \overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{AE}$ (i)

$B\hat{A}x = B_1 = \text{εγγ}\,\overset{\frown}{AE} = \text{εγγ}\,\overset{\frown}{BA} = A\hat{E}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$

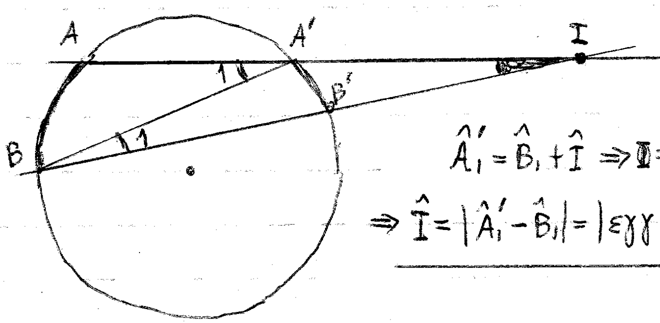
▼ Γωνία δύο τεμνόμενων χορδών $\rightarrow I = AA' \cap BB'$

1η περίπτωση: $I \in \delta(O,R)$ $\rightarrow \hat{I} = \hat{A}'_1 + \hat{B}_1 = εγγ\, \widehat{AB} + εγγ\, \widehat{A'B'} = \dfrac{A\hat{O}B + A'\hat{O}B'}{2}$

▶ BA'



2η περίπτωση: $I \notin \delta(O,R)$

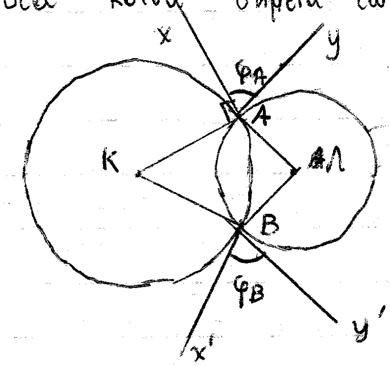


$\hat{A}'_1 = \hat{B}_1 + \hat{I} \Rightarrow \hat{I} =$

$\Rightarrow \hat{I} = |\hat{A}'_1 - \hat{B}_1| = |εγγ\, \widehat{AB} - εγγ\, \widehat{A'B'}| = \dfrac{|A\hat{O}B - A'\hat{O}B'|}{2}$

▼ Γωνία τεμνόμενων κύκλων

λέγεται η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων στα κοινά σημεία των δύο κύκλων.



• $\boxed{\varphi_A = \varphi_B = 180 - K\hat{A}\Lambda = 180 - K\hat{B}\Lambda}$

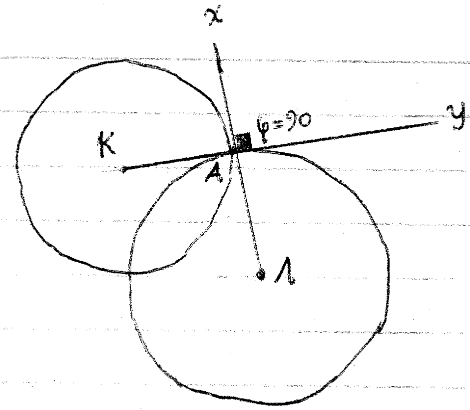
$K\hat{A}\Lambda = K\hat{\Lambda}B \Rightarrow K\hat{A}\Lambda = K\hat{B}\Lambda$.

$\varphi_A = 360 - K\hat{A}x - K\hat{A}\Lambda - \Lambda\hat{A}y =$
$= 360 - 90 - K\hat{A}\Lambda - 90 = 180 - K\hat{A}\Lambda$

Όμοια $\varphi_B = 180 - KB\Lambda$ άλλα $K\hat{A}\Lambda = K\hat{B}\Lambda$ ΟΕΔ

• Δύο κύκλοι τέμνονται ορθογωνίως εάν σχηματίζουν γωνία ορθή.

– $(K,R), (\Lambda,\rho)$ ορθογώνιοι $\Rightarrow$ οι εφαπτόμενες κάθε κύκλου στα κοινά τους σημεία διέρχονται από το κέντρο του άλλου κύκλου.



$$\left.\begin{array}{l} K\hat{A}x = 90 \\ K\hat{A}\Lambda = \varphi = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow x\hat{A}\Lambda = K\hat{A}x + \Lambda\hat{A}K = 90+90=180$$

$\Rightarrow$ ΛΑ, Αx αντικείμενες ημιευθείες QED.

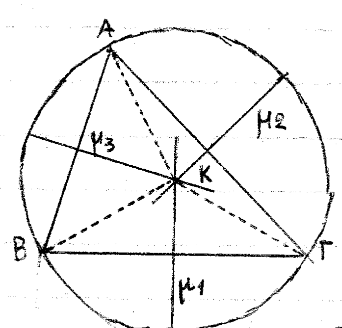
• <u>Παρατηρήσεις</u>

Όταν δίνεται διάμετρος και χορδή από το ένα άκρο της τότε φέρνω και την χορδή από το άλλο άκρο της οπότε σχηματίζεται ορθή γωνία.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

είναι τα σημεία τομής τριάδων από δευτερεύοντα στοιχεία.

① <u>Περίκεντρο</u> ⟶ $\boxed{\mu_1 \cap \mu_2 \cap \mu_3 = K}$ όπου $\mu_1 = \underset{\text{μέσο}}{\perp} a$, $\mu_2 = \underset{\text{μέσο}}{\perp} \beta$, $\mu_3 = \underset{\text{μέσο}}{\perp} \gamma$

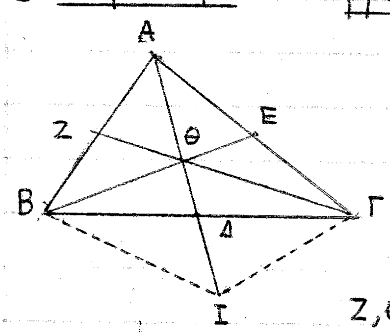


▸ Φέρνω τις μ_1, μ_2 και ~~$K\in\mu_1\cap\mu_2$~~. Επειδή a, β δεν είναι $// \Rightarrow \mu_1, \mu_2$ όχι $// \Rightarrow K = \mu_1 \cap \mu_2$.

$K \in \mu_1 \wedge K \in \mu_2 \Rightarrow KB = K\Gamma \wedge K\Gamma = KA \Rightarrow KA = KB \Rightarrow K \in \mu_3$
$\Rightarrow K = \mu_1 \cap \mu_2 \cap \mu_3$.

• Το K είναι κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (διότι $KA=KB=K\Gamma$).

② <u>Βαρύκεντρο</u> ⟶ $\boxed{\mu_\alpha \cap \mu_\beta \cap \mu_\gamma = \Theta}$



▸ φέρνω τις ΒΕ, ΓΖ.

$E\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 180 \Rightarrow \exists\, \Theta : \Theta = BE \cap \Gamma Z$.

Έστω $A\Theta \cap B\Gamma = \Delta$, αρκεί $A\Delta = \mu_\alpha$.

▸ Φέρνω $\Theta I = \Theta A$.

$$\left.\begin{array}{l} Z, \Theta \text{ μέσα } AB, AI \Rightarrow \Theta Z \mathrel{=\!\!\|} \dfrac{BI}{2} \Rightarrow \Gamma\Theta \parallel BI \\ \text{Όμοια } \Theta E \mathrel{=\!\!\|} \dfrac{\Gamma I}{2} \Rightarrow B\Theta \parallel \Gamma I \end{array}\right\} \Rightarrow B\Theta\Gamma I \;\#.$$

$\Rightarrow B\Delta = \Delta\Gamma$. $\Rightarrow \Delta$ μέσο $B\Gamma \Rightarrow A\Delta$ διάμεσος.

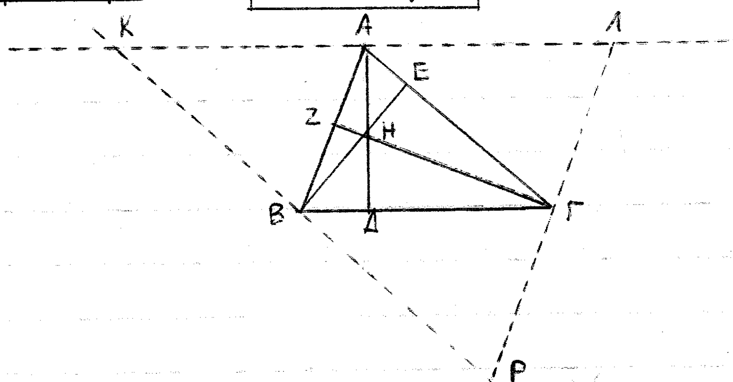
$A\Theta = \frac{2}{3}\mu_\alpha$	$B\Theta = \frac{2}{3}\mu_\beta$	$\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\mu_\gamma$
$\Theta\Delta = \frac{1}{3}\mu_\alpha$	$\Theta E = \frac{1}{3}\mu_\beta$	$\Theta Z = \frac{1}{3}\mu_\gamma$

$B\Theta\Gamma I \,\# \Rightarrow \Theta\Delta = \Delta I \Rightarrow \cancel{\Theta\Delta} \; \Theta I = 2\Theta\Delta$.

$\Theta I = A\Theta \Leftrightarrow 2\Theta\Delta = A\Theta \Leftrightarrow 2(A\Delta - A\Theta) = A\Theta \Leftrightarrow 2A\Delta = 3A\Theta \Leftrightarrow \underline{A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta = \frac{2}{3}\mu_\alpha}$

$\Theta\Delta = A\Delta - A\Theta = \mu_\alpha - \frac{2}{3}\mu_\alpha = \frac{1}{3}\mu_\alpha$. Τα υπόλοιπα όμοια.

③ Ορθόκεντρο $\longrightarrow$ $\boxed{\upsilon_\alpha \cap \upsilon_\beta \cap \upsilon_\gamma = H}$



Φέρνω //ες από το Α στην α, το Β στην β και το Γ στην γ. Έστω ότι τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Ρ.

Είναι εκ' κατασκευής $\left.\begin{matrix} K A \Gamma B \,\# \\ A \Lambda \Gamma B \,\# \\ A \Gamma P B \,\# \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} KA = B\Gamma = A\Lambda \\ KB = A\Gamma = BP \\ \Lambda\Gamma = AB = \Gamma P \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Α, Β, Γ μέσα πλευρών του $\overset{\triangle}{K\Lambda P}$. (1)

Άλλα $\left.\begin{matrix} A\Delta \perp \alpha \\ BE \perp \beta \\ \Gamma Z \perp \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A\Delta \perp K\Lambda \\ BE \perp KP \\ \Gamma Z \perp P\Lambda \end{matrix}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow}$ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ μεσοκάθετοι του ΚΛΡ

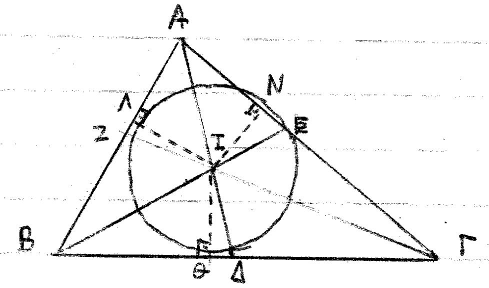
$\Rightarrow$ τέμνονται στο σημείο Η.

$\longrightarrow$ Ορθικό τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta E Z}$

του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι το τρίγωνο του οποίου οι κορυφές Δ, Ε, Ζ είναι

$A\Delta = \upsilon_\alpha$, $BE = \upsilon_\beta$, $\Gamma Z = \upsilon_\gamma$.

④ <u>Εγκεντρο</u> $\longrightarrow$ $\boxed{\delta_\alpha \cap \delta_\beta \cap \delta_\gamma = I}$



▶ Εστω $\delta_\beta = BE$ και $\delta_\gamma = \Gamma Z$.

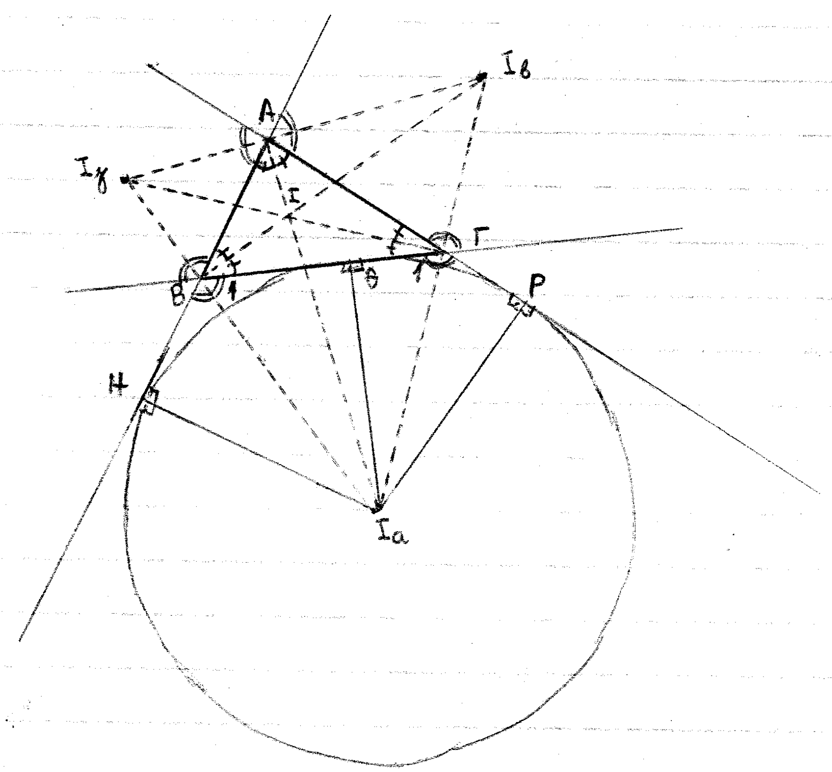
$\hat{E}\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B = \dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B}+\hat{\Gamma} < 180 \Rightarrow BE \cap \Gamma Z \neq \emptyset$.

▶ Εστω $I = \delta_\beta \cap \delta_\gamma$. Φέρνω την AI, $(I\Lambda, IN, I\theta) \perp (AB, A\Gamma, B\Gamma)$.

$$\left.\begin{array}{l} BE = \delta_\beta \Rightarrow I\Lambda = I\theta \\ \Gamma Z = \delta_\gamma \Rightarrow I\theta = IN \end{array}\right\} \Rightarrow I\Lambda = IN \Rightarrow AI = \delta_\alpha \Rightarrow \delta_\alpha \cap \delta_\beta \cap \delta_\gamma = I.$$

• Το I είναι κέντρο του κύκλου $\kappa(I,\rho)$ με $\rho = I\Lambda = IN = I\theta$ που ονομάζεται <u>εγγεγραμμένος στο $A\hat{B}\Gamma$ κύκλος.</u>

⑤ <u>Παράκεντρα</u> $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \delta_\alpha \cap \delta'_\beta \cap \delta'_\gamma = I_\alpha \\ \delta'_\alpha \cap \delta_\beta \cap \delta'_\gamma = I_\beta \\ \delta'_\alpha \cap \delta'_\beta \cap \delta_\gamma = I_\gamma \end{array}}$



▶ Εστω $\delta_\beta', \delta_\gamma'$

$$\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{B}_{\epsilon\xi}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}_{\epsilon\xi}}{2} = \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}+\frac{\hat{B}+\hat{A}}{2} = \hat{A}+\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} < \hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_\beta' \cap \delta_\gamma' \neq \emptyset .$$

▶ Εστω $I_\alpha = \delta_\beta' \cap \delta_\gamma'$. Φέρνω την AI_α και $I_\alpha H \perp AB$, $I_\alpha P \perp A\Gamma$, $I_\alpha \Theta \perp B\Gamma$

$$\left.\begin{aligned} BI_\alpha = \delta_\beta' &\Rightarrow HI_\alpha = \Theta I_\alpha \\ \Gamma I_\alpha = \delta_\gamma' &\Rightarrow PI_\alpha = \Theta I_\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow HI_\alpha = PI_\alpha \Rightarrow AI_\alpha = \delta_\alpha \Rightarrow I_\alpha \in \delta_\alpha .$$

• Τα $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$ είναι κέντρα των παραγεγραμμένων κύκλων $\kappa(I_\alpha,\rho_\alpha), \kappa(I_\beta,\rho_\beta), \kappa(I_\gamma,\rho_\gamma)$.

• $\boxed{\text{Το } A\hat{B}\Gamma \text{ είναι ορθικό τρίγωνο του } I_\alpha \hat{I}_\beta I_\gamma} \Rightarrow \boxed{I \text{ ορθόκεντρο } I_\alpha \hat{I}_\beta I_\gamma \text{, έγκεντρο } A\hat{B}\Gamma}$

$\Downarrow$

A, I_β, I_γ
B, I_α, I_γ συνευθειακά
$\Gamma, I_\alpha, I_\beta$

$I_\gamma\Gamma \perp I_\beta\Gamma$ (ως διχ. εφεξής παραπλ.) $\Rightarrow I_\gamma\Gamma \perp I_\alpha I_\beta \Rightarrow I_\gamma\Gamma$ ύψος.
Ομοια $I_\alpha A, I_\beta B$ ύψη του $I_\alpha \hat{I}_\beta I_\gamma$ αρα $A\hat{B}\Gamma$ ορθικό του $I_\alpha \hat{I}_\beta I_\gamma$.

• Οταν φέρνω κάθετη σε διχοτόμο, την προεκτείνω για να προκύψει ισοσκελές τρίγωνο