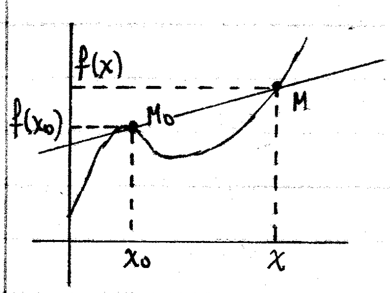
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

▼Εφαπτόμενη καμπύλης στο σημείο M_0

Εστω f συνεχής στο x_0 και $M_0(x_0, f(x_0))$. Αν $M(x, f(x))$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{M_0M} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ M_0(x_0, f(x_0)) \in M_0M \end{array}\right\} \Longrightarrow M_0M: y - f(x_0) = \lambda_{M_0M}(x)(x-x_0)$$



Εστω ότι $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \lambda_{M_0M}(x)$

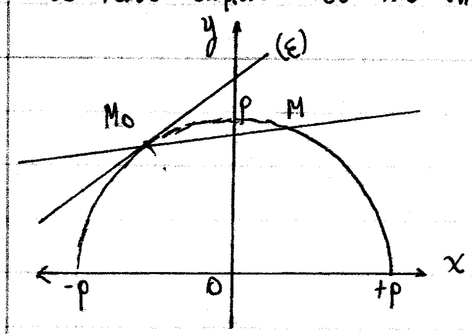
1) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda_{M_0M}(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία

$\boxed{(\varepsilon): y - f(x_0) = \ell(x-x_0)}$ λέγεται εφαπτόμενη της C_f στο σημείο M_0.

και είναι η ευθεία που προκύπτει όταν το σημείο M τείνει να πλησιάσει το σημείο M_0.

2) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda_{M_0M}(x) = \pm\infty$ τότε εφαπτόμενη είναι η ευθεία $\boxed{(\varepsilon): x = x_0}$

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η εφαπτόμενη της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$, $x \in [-\rho, \rho]$ σε κάθε σημείο του Π.Ο. της. (ημικύκλιο)



i) Εστω $x_0 \in (-\rho, \rho) \Longrightarrow \lambda_{M_0M}(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\sqrt{\rho^2-x^2} - \sqrt{\rho^2-x_0^2}}{x-x_0} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{\rho^2-x^2} - \sqrt{\rho^2-x_0^2}\right)\left(\sqrt{\rho^2-x^2} + \sqrt{\rho^2-x_0^2}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{\rho^2-x^2} + \sqrt{\rho^2-x_0^2}\right)} = \frac{(\rho^2-x^2)-(\rho^2-x_0^2)}{(x-x_0)\left(\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2}\right)} =$$

$$= \frac{x_0^2 - x^2}{(x-x_0)\left(\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2}\right)} = \frac{-(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)\left(\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2}\right)} = -\frac{x+x_0}{\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ell = \lim_{x\to x_0} \lambda_{MM_0}(x) = \lim_{x\to x_0}\left[-\frac{x+x_0}{\sqrt{\rho^2-x^2}+\sqrt{\rho^2-x_0^2}}\right] = -\frac{2x_0}{2\sqrt{\rho^2-x_0^2}} = -\frac{x_0}{y_0} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow (\varepsilon): \; y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0) \Leftrightarrow y_0(y-y_0)=-x_0(x-x_0) \Leftrightarrow x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon): \; x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0.$ εφαπτόμενη της C_f.

ii) Αν $x_0=\rho \Rightarrow \lambda_{MoM}(x)=\dfrac{\sqrt{\rho^2-x^2}-\sqrt{\rho^2-\rho^2}}{x-\rho}=-\dfrac{\sqrt{\rho^2-x^2}}{x-\rho}=-\sqrt{\dfrac{\rho+x}{\rho-x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\lambda_{MoM}(x)=\dots=\dots=-\infty \Rightarrow (\varepsilon): x=\rho$ εφαπτόμενη της C_f

iii) Αν $x_0=-\rho \Rightarrow$ Ομοια $(\varepsilon): x=-\rho$ εφαπτόμενη της C_f.

▼ Παράγωγος συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω μία συνάρτηση ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ και $x_0\in\Delta$.

Η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 όταν ο λόγος μεταβολής
$$\lambda(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
έχει πεπερασμένο όριο στο x_0. Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος αριθμός της f στο x_0

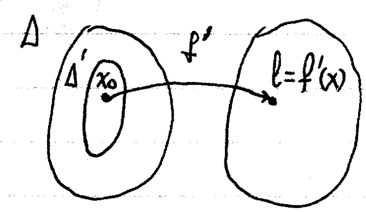
Ετσι: $$\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}.}$$

και, $$\boxed{\ell \text{ παράγωγος αριθμός της } f \text{ στο } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell.}$$

Εστω $\Delta'=\{x_0\in\Delta : f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0\}$ και η διμελής σχέση
$f': \forall x_0\in\Delta' \longrightarrow \ell\in\mathbb{R}: \ell$ παράγωγος αριθμος της f στο x_0

Η f' είναι συναρτηση, διότι το όριο ορίζεται μονοσήμαντα και λέγεται παράγωγος (συνάρτηση) της f. Ετσι είναι

$$\boxed{f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$



Επίσης ισχύει η: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

• Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο x_0 είναι:

$$\begin{cases} (\varepsilon): \; y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0) & \text{, αν } f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \\ (\varepsilon): \; x=x_0 & \text{, αν } \lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x)=\pm\infty. \rightarrow \text{είναι και ασύμπτωτη} \end{cases}$$

Αν $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty\ (-\infty) \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty\ (+\infty)\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x) \Rightarrow$ Η $(\varepsilon): x=x_0$ ~~δεν~~ είναι εφαπτόμενη άλλα είναι και ασύμπτωτη.

• $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } A \Leftrightarrow \forall x_0 \in A : f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0.}$

▼Πλευρική παράγωγος

• $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη από αριστερά στο } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_- \in \mathbb{R}.}$

Συμβολισμός: $f'_a(x_0) \longrightarrow$ παράγωγος από αριστερά

• $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη από δεξιά στο } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_+ \in \mathbb{R}}$

Συμβολισμός: $f'_\delta(x_0) \longrightarrow$ παράγωγος από δεξιά.

Ετσι f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f_a(x_0), f_\delta(x_0) \\ f_a(x_0) = f_\delta(x_0) \end{cases}$

• Οι ημιευθείες $(\varepsilon_-) : y - f(x_0) = f'_a(x_0)(x - x_0) \ : x \leq x_0$

$(\varepsilon_+) : y - f(x_0) = f'_\delta(x_0)(x - x_0) \ : x \geq x_0$

λέγονται ημιεφαπτόμενες από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα.

Αν $f'_a(x_0) = \pm\infty \Rightarrow (\varepsilon_-) : x = x_0$, $f'_\delta(x_0) = \pm\infty \Rightarrow (\varepsilon_+) : x = x_0.$

• Αν f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Leftrightarrow (\varepsilon_+), (\varepsilon_-)$ αντικείμενες ημιευθείες.

▼Διαδοχικές παράγωγοι

Εστω ότι η $f \in F_\Delta$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta' \subseteq \Delta$ με παράγωγο f'.
Αν $\exists \Delta'' \subseteq \Delta' : f'$ παραγωγίσιμη στο Δ'' τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση $f'' : \Delta'' \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε f'' παράγωγος της f'. Η f'' λέγεται <u>δεύτερη παράγωγος</u> της f.
Ομοια ορίζεται η τρίτη παράγωγος f''' και γενικά η νιοστή παράγωγος $f^{(\nu)}$.

• f παραγωγίσιμη ν φορές στο $\Delta \Leftrightarrow \exists f^{(\nu)} : \Delta \to \mathbb{R}$.

<u>Παραδείγματα</u>

1) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in (0, +\infty) \\ x^2 + 2 & , x \in (-\infty, 0] \end{cases}$
είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$\forall x \in (-\infty, 0], f(x) = x^2 + 2 \rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow \forall x \neq 0 : \lambda(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 2}{x} \overset{*}{\Longrightarrow}$

Δεν ορ.
για $x = 0$.

$$\Rightarrow \lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2-2}{x} = x & , x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{x^2-2}{x} & , x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \lambda(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 = f_a'(0)$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \lambda(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-2}{x} = -\infty \Rightarrow f$ όχι παραγωγίσιμη από δεξιά $\Rightarrow f$ όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

(Η C_f δέχεται ημιεφαπτόμενες, από αριστερά $(\varepsilon_-): y-2 = 0(x-0) \Rightarrow (\varepsilon_-): y-2=0$, $x \leq 0$

από δεξιά $(\varepsilon_+): x = 0$, $x \geq 0$.)

2) Δείξτε ότι η $f: f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} & , x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

$f(0) = 0 \Rightarrow \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty): \lambda(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \lambda(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x} = 0$ (ως γινόμενο μηδενικής επί φραγμένης) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

(Η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο 0 την $(\varepsilon): y - 0 = 0(x-0) \Rightarrow (\varepsilon): y = 0$.

3) Δείξτε ότι η $f: f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ άλλα είναι σε αυτό συνεχής.

Π.Ο. Πρέπει $x^2 \geq 0$, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A = \mathbb{R}$.

$\forall x \neq x_0 = 0: \lambda(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt[3]{|x|}} & , x < 0 \\ +\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & , x > 0. \end{cases}$

"μαϊμού" $1/x^{1/3}$

~~$\exists \Delta = (-\infty, 0) \subset A$...~~

$\lim\limits_{x \to 0^-} \lambda(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{|x|}}\right) = -\infty \Rightarrow f$ όχι παραγωγίσιμη από αριστερά στο $x_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Αλλά $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 0} x^2} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ συνεχής στο 0.

$\rightarrow$ Τα σημεία στα οποία η f είναι συνεχής άλλα όχι παραγωγίσιμη, λέγονται <u>σημεία ανάκαμψης</u> και βρίσκονται "συνήθως" στα άκρα κλειστών διαστημάτων.

Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι καταναγκη και παραγωγίσιμη στο x_0. Δηλαδή, δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος

Θ. $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \Longrightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0.}$

Απόδειξη

f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ (1)

Αρκεί $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Είναι $\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0) =$

$= f'(x_0)\cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ συνεχής στο x_0.

• **Παράδειγμα**: Να βρεθούν οι $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η

$$f: f(x) = \begin{cases} ax+b & , x\in(-\infty,3) \\ x^2 & , x\in[3,+\infty) \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

Λύση

Π.Ο. $A = \mathbb{R}$.

f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \\ f \text{ συνεχής στο } x_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'_a(3) = f'_\delta(3) & (1) \\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3). & (2) \end{cases}$

$\exists\, \Delta = (-\infty, 3) \subset A$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(ax+b) = 3a+b.$

$\exists\, \Delta = (3, +\infty) \subset A$ στο οποίο έχει έννοια και εξετάζω το

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x^2 = 3^2 = 9$

Είναι και $f(3) = 9$, $(1) \Leftrightarrow 3a+b = 9 \Leftrightarrow \underline{b = 9-3a}.$ (3).

$\forall x \in (-\infty, 3)$, $f'_a(3) = \lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{ax+b-9}{x-3} =$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{ax+9-3a-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{a(x-3)}{x-3} = a$$

$\forall x\in(3,+\infty)$, $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} \lambda(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(x+3) = 6 = f'_\delta(3)$. οπότε

$(1) \Leftrightarrow a=6 \overset{(3)}{\Rightarrow} \beta = 9-3\cdot 6 = -9$ άρα $(\alpha,\beta)=(6,-9)$.

▼ <u>Ασκήσεις στην εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(x_0,f(x_0))$</u> → Σημείο Επαφής

i) Αν $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \lambda(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο $(x_0, f(x_0))$ την.
$(\varepsilon): y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

ii) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda(x) \in \{+\infty,-\infty\} \Rightarrow$ Η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο $(x, f(x_0))$ την
$(\varepsilon): x=x_0$.

• Ειδικά αν $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-}\lambda(x)=+\infty \ (\text{ή } -\infty)\\ \lim\limits_{x\to x_0^+}\lambda(x)=-\infty \ (\text{ή } +\infty)\end{array}\right\} \Rightarrow$ Η C_f δέχεται εφαπτόμενη στο $(x,f(x_0))$ την $(\varepsilon): x=x_0$.

• Εάν το όριο δεν έχει έννοια ή αν το ένα πλευρικό βγαίνει ∞ και το άλλο πεπερασμένο ή και τα δύο πεπερασμένα άλλα άνισα, τότε η C_f δεν δέχεται εφαπτόμενη στο x_0, δέχεται όμως ημιεφαπτόμενες.

<u>Παραδείγματα</u>: Να εξετάσετε αν δέχονται εφαπτόμενη οι

1) $f(x)=\sqrt{2-x}$ στο $x_0=2$.

Π.Ο. Πρέπει $2-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2 \Leftrightarrow A=(-\infty,2]$. $f(2)=0$

$\forall x\in(-\infty,2)$: $\lambda(x) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{\sqrt{2-x}-0}{x-2} = \dfrac{-\sqrt{2-x}}{2-x} = -\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)} \neq 0}$

$\cancel{\forall x\in(-\infty,2), \ \sqrt{x}}$

$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(-\infty,2): \sqrt{2-x}>0\\ \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2-x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(2-x)} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\lambda(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right] = -\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η C_f δέχεται στο $x_0=2$ εφαπτόμενη την $(\varepsilon): x=2$.

2) $f(x)=2+\sqrt{|x-2|}$ στο $x_0=2$.

Π.Ο. Πρέπει $|x-2|\geq 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}$. $f(2)=2$.

x		2	
$x-2$	$-$	0	$+$

$$f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{2-x}, & x\in(-\infty,2) \\ 2+\sqrt{x-2}, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$$

$\forall x\in(-\infty,2)$: $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{2+\sqrt{2-x}-2}{x-2}=-\dfrac{\sqrt{2-x}}{2-x}=-\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x\in(-\infty,2): \sqrt{2-x}>0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\lambda(x)=\lim_{x\to 2^-}\left[-\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right]=-\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2-x}}=-\infty. \quad (1)$$

$\forall x\in(2,+\infty)$: $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{2+\sqrt{x-2}-2}{x-2}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\lambda(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}=+\infty \quad (2)$

Άρα $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\lambda(x)=-\infty. \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\lambda(x)=+\infty \end{array}\right\} \xRightarrow{!!!}$ Η C_f δέχεται στο $x_0=2$ εφαπτόμενη την $(\varepsilon): x=2$.

3) $f(x)=2x^2+x+1$ στο $x_0=2$.

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. $f(2)=2\cdot 2^2+2+1=11$

$\forall x\neq 2$, $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{2x^2+x+1-11}{x-2}=\dfrac{2x^2+x-10}{x-2}=\dfrac{2x^2+5x-4x-10}{x-2}=$

$=\dfrac{x(2x+5)-2(2x+5)}{x-2}=\dfrac{(x-2)(2x+5)}{x-2}=2x+5 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\lambda(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x+5)=9 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η C_f δέχεται στο $x_0=2$ εφαπτόμενη την (ε): $y-11=9(x-2) \Leftrightarrow 9x-y-7=0$

$\Rightarrow (\varepsilon): 9x-y-7=0$.

▼ <u>Παράγωγος βασικών συναρτήσεων.</u>

1) <u>Η σταθερή συνάρτηση $u(x)=c$, $\forall x\in A=\mathbb{R}$.</u>

Θ. $\boxed{\text{Η } u \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } u'(x)=0.}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\underline{\text{Απόδειξη}}$: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \neq x_0 : \lambda(x) = \dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{c-c}{x-x_0} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \lambda(x) = 0 \Rightarrow$

$\rightarrow$ ~~$u'(x)$~~ u παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $u'(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Ταυτοτική συνάρτηση $i(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Θ. $\boxed{i \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } i'(x) = 1.}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\underline{\text{Απόδειξη}}$: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \neq x_0 : \lambda(x) = \dfrac{i(x)-i(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \Rightarrow$ ~~i παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$~~

με ~~$i'(x$~~ $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda(x) = 1 \Rightarrow$ i παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $i'(x)=1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) Μονωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^\nu, \forall x \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}^*$

Θ. $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \nu x^{\nu-1}, \forall x \in \mathbb{R}.}$

$\underline{\text{Απόδειξη}}$: $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \neq x_0 : \lambda(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} = \dfrac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\dots+x x_0^{\nu-2}+}{x-x_0}$

$= x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\cdot x_0 + \dots + x\cdot x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\lambda(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\cdot x_0 + \dots + x\cdot x_0^{\nu-2} + x_0^{\nu-1}\right) =$

$= \underbrace{x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1}}_{\nu} = \nu x_0^{\nu-1} \Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Γενικά σε συνάρτηση-δύναμη $f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$ με $A = \begin{cases} \mathbb{R}, & a \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{R}^*, & a \in \mathbb{Z}_- \quad (\text{π.χ. } \frac{1}{x}) \\ [0,+\infty), & a>0 \wedge a \notin \mathbb{N}^* \quad (\text{π.χ. } \sqrt{x} \\ (0,+\infty), & a<0 \wedge a \notin \mathbb{Z} \quad (\text{π.χ. } \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a<0 \vee a \geq 1 \Rightarrow f \text{ παραγωγίσιμη στο } A \text{ με } f'(x) = a x^{a-1}, \forall x \in A \\ 0<a<1 \Rightarrow f \text{ παραγωγίσιμη } \underline{\underline{\text{στο } A-\{0\}}} \text{ με } f'(x) = a x^{a-1}, \forall x \in A-\{0\} \end{array}}$$

$\underline{\text{Απόδειξη.}}$ Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$

i) Αν $x_0 \neq 0 \Rightarrow \exists \Delta = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) : x_0 \in \Delta \subseteq A$

$\forall h \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\} : \lambda(x_0+h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^a - x_0^a}{h} = \dfrac{x_0^a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a - x_0^a}{h} =$

$= x_0^{a-1} \dfrac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a - 1}{\frac{h}{x_0}}$ (1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a-1}{\frac{h}{x_0}}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^a-1}{y}=a \Rightarrow \lim_{h\to 0}\lambda(x_0+h)=\lim_{h\to 0}x_0^{a-1}\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a-1}{\frac{h}{x_0}}=$$

Θέτω $\left.\begin{array}{l} y=\frac{h}{x_0} \\ h\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow y\to 0$ $\qquad =a x_0^{a-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $A-\{0\}$ με $f'(x)=ax^{a-1}$.

ii) Αν $x_0=0 \Rightarrow \lambda(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^a-0}{x-0}=x^{a-1}$, $\forall x\in A-\{0\}$

Αν $a\leqslant 0 \vee a>1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\lambda(x)=\lim_{x\to 0}x^{a-1}=0\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη και στο $\{0\}$ με
~~$f'(x)=0=a$~~ $f'(0)=0$

Αν $0<a<1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\lambda(x)=\lim_{x\to 0}x^{a-1}=+\infty \Rightarrow f$ όχι παραγωγίσιμη στο $\{0\}$.

4) <u>Τετραγωνική ρίζα $f(x)=\sqrt{x}$, $A=[0,+\infty)$</u>

$\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } \underline{(0,+\infty)} \text{ με } f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\quad (a=1/2)$

5) <u>Αντίστροφη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$</u>

$\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } A \text{ με } f'(x)=-\frac{1}{x^2}}$ $\quad (a=-1)$

6) <u>Παράγωγος ημίτονου $f(x)=\eta\mu x$, $A=\mathbb{R}$</u>

Θ. $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x)=\sigma\upsilon\nu x}$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$

<u>Απόδειξη</u>: $\forall h\in\mathbb{R}^*$: $\lambda(x_0+h)=\frac{\eta\mu(x_0+h)-\eta\mu x_0}{h}=\frac{2\eta\mu\frac{h}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h}=$

$=\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)$. $\qquad$ (1).

$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$ $\quad$ (Θέτω $\left.\begin{array}{l} y=\frac{h}{2} \\ h\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow y\to 0$)

$\lim_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\lim_{h\to 0}\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right)=\sigma\upsilon\nu x_0$

Άρα $\lim_{h\to 0}\lambda(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu x_0$

$\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη ~~με~~ στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

7) Παράγωγος συνημίτονου $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $A=\mathbb{R}$

Θ. $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x)=-\eta\mu x.}$

Απόδειξη: Έστω $x_0\in\mathbb{R}$

$\forall h\in\mathbb{R}^*: \lambda(x_0+h)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x_0+h)-\sigma\upsilon\nu x_0}{h}=\dfrac{-2\eta\mu\frac{h}{2}\,\eta\mu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h}=-\dfrac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,\eta\mu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ομοια $\displaystyle\lim_{h\to 0}\lambda(\underset{x_0+h}{\cancel{x}})=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\,\eta\mu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right]=-\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\eta\mu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=$

$=-1\cdot\eta\mu x_0=-\eta\mu x_0\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-\eta\mu x$.

8) Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$, $A=\mathbb{R}$

Θ. $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x)=e^x}$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$

Απόδειξη: $\forall h\in\mathbb{R}^*: \lambda(x_0+h)=\dfrac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=e^{x_0}\cdot\dfrac{e^h-1}{h}\Rightarrow$

$\Rightarrow\displaystyle\lim_{h\to 0}\lambda(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left[e^{x_0}\frac{e^h-1}{h}\right]=e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^{x_0}\cdot 1=e^{x_0}\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x$.

9) Παράγωγος της φυσικής λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\ln x$, $A=(0,+\infty)$.

Θ. $\boxed{f \text{ παραγωγίσιμη στο } (0,+\infty) \text{ με } f'(x)=\frac{1}{x}}$

Απόδειξη: Έστω $x_0\in(0,h)$

$\forall h\in\mathbb{R}, \underline{h>-x_0}: \lambda(x_0+h)=\dfrac{\ln(x_0+h)-\ln x_0}{h}=\dfrac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h}=\dfrac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}=$

$=\dfrac{1}{x_0}\,\dfrac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}=\dfrac{1}{x_0}\,\dfrac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\displaystyle\lim_{h\to 0}\lambda(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x_0}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)-1}\right]=\frac{1}{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)-1}=\frac{1}{x_0}\lim_{y\to 0}\frac{\ln y}{y-1}=\frac{1}{x_0}\Rightarrow$

Θέτω $y=1+\frac{h}{x_0}$, $h\to 0$ $\Rightarrow y\to 0$

$\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}$.

▼ Κανόνες παραγώγισης

1) Παράγωγος αθροίσματος

Θ1 $\boxed{f,g \text{ παραγωγίσιμες στο } x_0 \in \Delta \Rightarrow f+g \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ με } (f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)}$

Απόδειξη

f,g παραγωγίσιμες στο $x_0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0) \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=g'(x_0). \end{cases}$ οπότε

Για $x_0\in\Delta$, $x_0+h\in\Delta$

$\forall h\neq 0: \lambda_{f+g}(x_0+h)=\dfrac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=\dfrac{[f(x_0+h)+g(x_0+h)]-[f(x_0)+g(x_0)]}{h}=$

$=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\lambda(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right]=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0)\Rightarrow f+g$ παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

$\boxed{f_1,f_2,\dots,f_k \text{ παραγωγίσιμες στο } \Delta \Rightarrow (f_1+f_2+\dots+f_k) \text{ παραγωγίσιμη στο } \Delta \text{ με } (f_1+f_2+\dots+f_k)'=f_1'+f_2'+\dots+f_k'}$

2) Παράγωγος γινόμενου

Θ. $\boxed{f,g \text{ παραγωγίσιμες στο } x_0\in\Delta \Rightarrow f\cdot g \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ με } (f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0).}$

Απόδειξη : ~~Για κάθε $x_0, x_0+h\in\Delta$ με $h\neq 0$~~

$\forall x_0, x_0+h\in\Delta, \forall h\neq 0: \lambda_{fg}(x_0+h)=\dfrac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}=\dfrac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$

$=\dfrac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$

$$= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\, g(x_0+h) + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\, f(x_0) \qquad (1)$$

f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \Delta \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0). \end{cases}$

g παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow$ g συνεχής στο $x_0 \rightarrow \lim\limits_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$.

οπότε $(1) \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \lambda_{fg}(x_0+h) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\, g(x_0+h) + \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\, f(x_0)\right] =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x_0+h) + \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right] \cdot f(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

Αν $f, g, f_1, f_2, \dots, f_k$ παραγωγίσιμες στο Δ, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ τότε

1) $f\cdot g$ παρ. στο Δ με $(f\cdot g)' = f'g + fg'$
2) $(\lambda \cdot f)$ παρ. στο Δ με $(\lambda\cdot f)' = \lambda f'$
3) $(f_1 f_2 \cdots f_k)$ παρ. στο Δ με $(f_1 f_2 \cdots f_k)' = \sum\limits_{i=1}^{k} (f_1 \cdot \ldots \cdot f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdot \ldots \cdot f_k)$
~~4) $(f^k)' = k f^{k-1} f'$~~
4) f^k παρ. στο Δ με $(f^k)' = k f^{k-1} f'$

- Αν $A = \{f \in \mathbf{F} : f$ παραγωγίσιμη στο $\Delta\} \Rightarrow (A, +, \cdot)$ δακτύλιος.
  Αν $B = \{f \in \mathbf{F} : f$ συνεχής στο $\Delta\} \Rightarrow (B, +, \cdot)$ δακτύλιος • $\underline{A \subseteq B}$

• **Εφαρμογή:** Η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $P'(x) = \nu \alpha_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_{\nu-1} x^{\nu-2} + \dots + \alpha_1$

Απόδειξη:

Π.Ο. $A = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

P παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με
$P'(x) = (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0)' = (\alpha_\nu x^\nu)' + (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1})' + \dots + (\alpha_1 x)' + (\alpha_0)' =$
$= \alpha_\nu (x^\nu)' + \alpha_{\nu-1}(x^{\nu-1})' + \dots + \alpha_1 (x)' + 0 = \nu \alpha_\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)\alpha_{\nu-1} x^{\nu-2} + \dots + 2\alpha_2 x + \alpha_1$

- $f(x) = \alpha x + \beta \; : \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ παρ. στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \alpha$
- $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \; : \alpha \neq 0 \wedge \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ παρ. στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2\alpha x + \beta$.
- $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \Rightarrow P^{(\nu)}(x) = \nu!\, \alpha_\nu$.
  $: \alpha_\nu \neq 0,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{R}$

3) Παράγωγος πηλίκου

Θ. Αν f,g παρ. στο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$ παρ. στο x_0 με $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{[g(x_0)]^2} g'(x_0)$

και $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Απόδειξη

1. $\forall x_0, x_0+h \in \Delta, \forall h \neq 0 : \lambda_{1/g}(x_0+h) = \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} =$

$= \frac{-1}{g(x_0)g(x_0+h)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$ (1).

g παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0)$.

g παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow g$ συνεχής στο $x_0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$ $\xrightarrow{(1)}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \lambda_{1/g}(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-1}{g(x_0)g(x_0+h)} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right] = \frac{-1}{g(x_0)\cdot \lim_{h\to 0} g(x_0+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} =$

$= \frac{-1}{[g(x_0)]^2} \cdot g'(x_0) \Rightarrow 1/g$ παραγωγίσιμη στο x_0 με $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-1}{[g(x)]^2} g'(x)$.

2. g παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow 1/g$ παραγωγίσιμη στο x_0, f παραγωγίσιμη στο x_0 $\Rightarrow \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ παραγωγίσιμη στο x_0

με $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$

$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left[\frac{-1}{[g(x_0)]^2} \cdot g'(x_0)\right] = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Αν f,g παραγωγίσιμες στο Δ και $g(x) \neq 0, \forall x \in \Delta$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{g}, \frac{f}{g}$ παραγ. στο Δ με $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

• Εφαρμογες-θεωρια •

① $\boxed{\log_a \text{ παρ. στο } (0,+\infty) \text{ με } (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}}$, όπου $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Απόδειξη

$\forall x\in(0,+\infty),\ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow$ $\log_a$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (ως γινόμενο αριθμού και παραγωγίσιμης) με $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\underbrace{(\ln x)'}_{1/x} = \frac{1}{x\ln a}$

~~② εφ παρ. στο $(0,+\infty)$ με $(εφx)' = \frac{1}{συν^2x}$~~

② $\boxed{εφ \text{ παρ. στο } A=\mathbb{R}-\{κπ+\frac{π}{2}\} \text{ με } (εφx)' = \frac{1}{συν^2x}}$

Απόδειξη: $\forall x\in A,\ εφx = \frac{ημx}{συνx}$

$ημ, συν$ παρ. στο $A\subseteq\mathbb{R}$.

$συνx \neq 0,\ \forall x\in A=\mathbb{R}-\{κπ+\frac{π}{2}\}$

$\Rightarrow$ εφ παραγωγίσιμη στο A με

$$(εφx)' = \left(\frac{ημx}{συνx}\right)' = \frac{(ημx)'συνx - ημx\cdot(συνx)'}{συν^2x} = \frac{συνx\cdot συνx - ημx(-ημx)}{συν^2x} = \frac{ημ^2x+συν^2x}{συν^2x} = \frac{1}{συν^2x}$$

~~③ σφ παρ. στο $A=\mathbb{R}-\{κπ\}$ με $(σφx)' = -\frac{1}{\ }$~~

③ $\boxed{σφ \text{. παρ. στο } A=\mathbb{R}-\{κπ\} \text{ με } (σφx)' = -\frac{1}{ημ^2x}}$

Απόδειξη $\forall x\in A,\ σφx = \frac{συνx}{ημx}$

$ημ, συν$ παρ. στο $A\subset\mathbb{R}$

$ημx\neq 0,\ \forall x\in A=\mathbb{R}-\{κπ\}$

$\Rightarrow$ σφ παραγωγίσιμη στο A με

$$(σφx)' = \left(\frac{συνx}{ημx}\right)' = \frac{(συνx)'ημx - συνx(ημx)'}{ημ^2x} = \frac{(-ημx)ημx - συνx(συνx)}{ημ^2x} = \frac{-(ημ^2x+συν^2x)}{ημ^2x} =$$

$$= \frac{-1}{ημ^2x}.$$

4) <u>Παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων.</u>

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l} g \text{ παρ. στο } x_0 \\ f \text{ παρ. στο } g(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow (f\circ g) \text{ παρ. στο } x_0 \text{ με } (f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).}$

→ Αν g παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta \Rightarrow g$ συνεχής στο $\Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow g(\Delta)$ διάστημα. Έτσι αν

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ παραγ. στο } \Delta \\ f \text{ παραγ. στο } g(\Delta) \end{array}\right\} \Rightarrow f\circ g \text{ παραγωγίσιμη στο } \Delta \text{ με } (f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'.$$

• <u>Πορίσματα</u>

① $\boxed{f(x)=a^x \Rightarrow f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = a^x \ln a}$

<u>Απόδειξη</u>

Η $f(x)=a^x = e^{x\ln a}$ είναι $f=f_1\circ f_2$ όπου $f_1: f_1(x)= e^x$, $A_{f_1}=\mathbb{R}$

(στο...) $f_2: f_2(x)= x\ln a$, $A_{f_2}=\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως εκθετική} \\ f_2 \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως πολυωνυμική} \end{array}\right\} \Rightarrow f=f_1\circ f_2$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$\cancel{f'(x)= (f_1\circ f_2)'(x)= f_1'(g(x))\, g\, f_1'(f_2(x))\, f_2'(x)=(e^{x\ln a})'(x\ln a)' = e}$

$f'(x)=(f_1\circ f_2)'(x)= f_1'(f_2(x))\, f_2'(x) = f_1'(x\ln a)\, f_2'$

$\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως εκθετική με } f_1'(x)=e^x \\ f_2 \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως πολυωνυμική με } f_2'(x)= \ln a \end{array}\right\} \Rightarrow f=f_1\circ f_2$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $f'(x)=(f_1\circ f_2)'(x)= f_1'(f_2(x))\, f_2'(x)= f_1'(x\ln a)\cdot f_2'(x)= e^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x \ln a$.

② $\boxed{\left.\begin{array}{l} g \text{ παρ. στο } \Delta \\ \forall x\in\Delta : g(x)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\sqrt{g(x)})' = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}}$

<u>Απόδειξη</u>: Η $f(x)=\sqrt{g(x)}$ είναι $f=f_1\circ f_2$ όπου $f_1: f_1(x)=\sqrt{x}$

$f_2: f_2(x)=g(x)>0, \forall x\in\Delta$

$\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ παραγωγίσιμη ως τετρ. ρίζα με } f_1'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ f_2 \text{ παραγωγίσιμη εξ' υποθέσεως με } f_2'(x)=g'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f=f_1\circ f_2$ παραγωγίσιμη με

$$f'(x)= (\sqrt{g(x)})'= (f_1\circ f_2)'(x)= f_1'(f_2(x))\, f_2'(x)=f_1'(g(x))\, f_2'(x)= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\, g'(x)= \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

▼Ανακεφαλαίωση▼

$f(x)$	c	x	x^{a}	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi x$	e^{x}	a^{x}	$\ln x$	$\log_a$
$f'(x)$	0	1	ax^{a-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\frac{-1}{\eta\mu^2 x}$	e^{x}	$a^{x}\ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x\ln a}$
στο	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	*	$(0,+\infty)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}-\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\}$	$\mathbb{R}-\{\kappa\pi\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$

* Όλο το A εκτός άπο το 0 όταν $a\in(0,1)$

$(f+g)' = f'+g' \longrightarrow (c+f)' = f'$

$(fg)' = f'g+fg' \longrightarrow (cf)' = cf'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2} \longrightarrow \left(\frac{c}{f}\right)' = -c\frac{f'}{f^2}$

- $(f^{\kappa})' = \kappa f^{\kappa-1} f'$
- $(\sqrt{f})' = \frac{1}{2\sqrt{f}}\cdot f'$
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2}\cdot f'$.

⟶ Οι δυο πρώτοι τύποι γενικεύονται για κ παράγοντες.

$(f_1+f_2+\dots+f_\kappa)' = f_1'+f_2'+\dots+f_\kappa'$

$(f_1 f_2 \cdots f_\kappa)' = \sum_{i=1}^{\kappa}(f_1 f_2 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_\kappa)$

- $\boxed{(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'} \longrightarrow$

$(\eta\mu f)' = \sigma\upsilon\nu f\cdot f'$ $\qquad (e^{f})' = e^{f}\cdot f'$

$(\sigma\upsilon\nu f)' = -\eta\mu f\cdot f'$ $\qquad (a^{f})' = a^{f}\cdot \ln f\cdot f'$

$(\varepsilon\varphi f)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f}\cdot f'$ $\qquad (\ln f)' = \frac{1}{f}\cdot f'$

$(\sigma\varphi f)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f}\cdot f'$ $\qquad (\log_a f)' = \frac{1}{f\cdot\ln a}\cdot f'$.

- Μορφη f^{φ} ⟶ παραγωγίζονται ως εξής:

$$(f^{\varphi})' = (e^{\varphi\ln f})' = e^{\varphi\ln f}(\varphi\ln f)' = f^{\varphi}[\varphi'\ln f+\varphi(\ln f)'] = \dots$$

στηριζόμενοι στην σχέση $a^{x} = e^{x\ln a}$.

Μεθοδοι - ασκήσεις

- Η παραγώγιση γίνεται με βάση τις παραπάνω ιδιότητες και καλό είναι να γίνεται με ταχύτητα. Πριν βρώ την παράγωγο μίας συναρτησεις όμως, θα πρέπει
  - 1 Να βρίσκω το πεδίο ορισμού της f : A
  - 2 Να βρίσκω το σύνολο $A_1 \subseteq A$ στο οποίο η f παραγωγίζεται.

Το αποτέλεσμα καλό είναι να το απλοποιώ φαιρνοντάς το σε μορφή με λίγα γινόμενα, πηλίκα ώστε να μπορω (αν χρειάζεται) να παίρνω και την δεύτερη παράγωγο.

- Για παραγωγιση συναρτήσεων πολλαπλού τύπου, βλ. σχετικό παράδειγμα

Α ομάδα ασκήσεων : Διαφορικές ταυτότητες.

Παραδείγματα

1) Δείξτε ότι $f(x)=x^2+x^{-2} \Rightarrow x^2 f''(x)+x f'(x)-4f(x)=0$.

Λύση

$f: f(x)=x^2+x^{-2}$, Π.Ο. $A=\mathbb{R}^*$ στο οποίο η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (ως άθροισμα παραγ.) με

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=2x-2x^{-3} \\ f''(x)&=2+6x^{-4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=x^2 f''(x)+x f'(x)-4f(x)=$$

$$=x^2(2+6x^{-4})+x(2x-2x^{-3})-4(x^2+x^{-2})=$$

$$=2x^2+6x^{-2}+2x^2-2x^{-2}-4x^2-4x^{-2}=0x^2+0x^{-2}=0=B.$$

2) $f(x)=e^{-x}\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow f^{(4)}(x)+4f(x)=0$.

Λύση

$f: f(x)=e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$. Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ ...

$f'(x)=-e^{-x}\sigma\upsilon\nu x-e^{-x}\eta\mu x=-e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)$

$f''(x)=e^{-x}(\eta\mu x+\cancel{\sigma\upsilon\nu x})-e^{-x}(\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-\eta\mu x)=2e^{-x}\eta\mu x$

$f'''(x)=-2e^{-x}\eta\mu x+2e^{-x}\sigma\upsilon\nu x=2e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$

$f^{(4)}(x)=-2e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x-\cancel{\eta\mu x})+2e^{-x}(-\cancel{\eta\mu x}-\sigma\upsilon\nu x)=-4e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$

Άρα $A=f^{(4)}(x)+4f(x)=-4e^{-x}\sigma\upsilon\nu x+4e^{-x}\sigma\upsilon\nu x=0=B$.

Β ομάδα : Θεωρητικές ασκήσεις.

1) Εαν οι f,g παραγωγίσιμες στο $x_0\in\Delta=A_f\cap A_g$. με $g(x_0)\neq 0$, $g'(x_0)\neq 0$ και αν η συνάρτηση $F: F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ~~είναι παραγωγίσιμη στο xο~~ είναι $F'(x_0)=0$ τότε δείξτε ότι $F(x_0)=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

~~Λύση~~

$$\left.\begin{aligned} &\qquad g(x_0)\neq 0 \\ &f,g \text{ παραγωγίσιμες στο } x_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ (ως πηλίκο) με}$$

$$F'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Λύση Δίνεται f,g παραγωγίσιμες στο x_0 (1)

$g(x_0)\neq 0$ (2) , $g'(x_0)\neq 0$ (3)

$F: F(x_0)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (4) , $F'(x_0)=0$. (5)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\to f,g \text{ παραγωγίσιμες στο } x_0\\ (2)\to g(x_0)\neq 0\end{array}\right\} \overset{(4)}{\Longrightarrow} F: F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ με}$$

$$F'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \underset{(5)}{=} 0 \Rightarrow f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)=0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow f'(x_0)g(x_0)=f(x_0)g'(x_0)\\ (2),(3)\Rightarrow g(x_0)\neq 0 \wedge g'(x_0)\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \overset{(4)}{\Longrightarrow} F(x_0)=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

2) Αν $f(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 : a_5\neq 0$, δείξτε ότι

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{x^5}{5!}f^{(5)}(0)$$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο η f παραγωγίζεται (τουλάχιστον) πέντε φορές ως πολυώνυμο 5ου βαθμου ($a_5\neq 0$). με

$f'(x)=5a_5x^4+4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1 \Rightarrow f'(0)=a_1=1!a_1.$

$f''(x)=20a_5x^3+12a_4x^2+6a_3x+2a_2 \Rightarrow f''(0)=2a_2=2!a_2$

$f'''(x)=60a_5x^2+24a_4x+6a_3 \Rightarrow f'''(0)=3!a_3.$

$f^{(4)}(x)=120a_5x+24a_4 \Rightarrow f^{(4)}(0)=4!a_4.$

$f^{(5)}(x)=5!a_5$ (τύπος) $\Rightarrow f^{(5)}(0)=5!a_5$

οπότε $B^\circ=a_0+\frac{x}{1!}1!a_1+\frac{x^2}{2!}2!a_2+\frac{x^3}{3!}3!a_3+\frac{x^4}{4!}4!a_4+\frac{x^5}{5!}5!a_5=$

$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5=f(x)=A^\circ.$

Γ' ομάδα: Ασκήσεις στην γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

1) Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η $(\varepsilon): y=\lambda x-3$ να εφάπτεται στην C_f της $f: f(x)=x^2+2x-2$ και να βρείτε τα σημεία επαφής.

Έστω $M(a,b)$ σημείο επαφής της (ε) στην C_f.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } (\varepsilon) \text{ εφάπτεται στην } C_f\\ \text{στο σημείο } M\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} M\in C_f & (1)\\ M\in C_g & (2)\\ \lambda_\varepsilon=f'(a) & (3)\end{cases}$$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x+2 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \lambda=2a+2.$ οπότε

$$\begin{cases} b=\lambda a-3\\ b=a^2+2a-2\\ \lambda=2a+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a-2=\lambda a-3\\ \to\\ \lambda=2a+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a-2=(2a+2)a-3\\ \to\\ \to\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+\cancel{2a}-2=2a^2+\cancel{2a}-3\\ \to\\ \to\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1^2+2\cdot 1-2=1 \\ \lambda=2\cdot 1+2=4 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=(-1)^2+2(-1)-2=-3 \\ \lambda=2(-1)+2=0 \end{cases}$$

Άρα δύο λύσεις: $\lambda=4$ και σημείο επαφής $M_1(1,1)$

$\lambda=0$ και σημείο επαφής $M_2(-1,-3)$.

2) Δίνονται οι $f: f(x)=ax^2+bx+2$ και $g: g(x)=\frac{x-1}{x}$. Να βρεθούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε οι C_f και C_g να δέχονται στο $x_0=1$ κοινή εφαπτόμενη.

Έστω

$f: f(x)=ax^2+bx+2$ Π.Ο $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με $f'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(1)=2a+b$

$\Rightarrow$ Η C_f δέχεται στο $x_0=1$ $(\varepsilon\varphi_1): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-(a+\cancel{b}+2)=(2a+b)x-(2a+\cancel{b}) \Leftrightarrow (2a+b)x-y-(a-2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(\varepsilon\varphi_1): (2a+b)x-y-(a-2)=0.}$

$g: g(x)=\frac{x-1}{x}$ Π.Ο. $A=\mathbb{R}^*$ στο οποίο g παραγωγίσιμη με

$g'(x)=\frac{1\cdot x-(x-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(1)=1 \Rightarrow$ Η C_g δέχεται στο x_0

$(\varepsilon\varphi_2): y-g(1)=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-0=1(x-1) \Leftrightarrow x-y-1=0 \Rightarrow \underline{(\varepsilon\varphi_2): x-y-1=0}$

Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο $x_0=1 \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi_1)=(\varepsilon\varphi_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+b}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{-(a-2)}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=1 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ 6+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5. \end{cases}$$

- <u>Σύνθετες συναρτήσεις.</u> $\longrightarrow \boxed{(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'}$

Η παραγώγιση τους στηρίζεται στο θεώρημα:

f παραγωγίσιμη στο $A_f\cap A_g$.

g παραγωγίσιμη στο $A_f\cap A_g$.

f παραγωγίσιμη στο x_0

g παραγωγίσιμη στο ο

1) $f: f(x)=3\sigma\upsilon\nu(2x+5) \longrightarrow f'$;

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με

$\cancel{f'(x)=3(\sigma\upsilon\nu(2x+5))'=}$

$f'(x)=3[\sigma\upsilon\nu(2x+5)]'=-3\eta\mu(2x+5)\cdot(2x+5)'=-6\eta\mu(2x+5).$

2) $f(x)=\sqrt{x^3+5} \longrightarrow$ Π.Ο.

Π.Ο. Πρέπει $x^3+5\geq 0 \Leftrightarrow x^3\geq -5 \Leftrightarrow x\geq -\sqrt[3]{5} \Leftrightarrow A=[-\sqrt[3]{5},+\infty)$

f παραγωγίσιμη στο $(-\sqrt[3]{5},+\infty)$ με (ΠΡΟΣΟΧΗ).

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^3+5}}(x^3+5)'=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$$

• 3) $f(x)=ημ(συν^2x)\cdot συν(ημ^2x) \longrightarrow f'$ (τα έχει "όλα" τα παράδειγμα, γραμμένα αναλυτικά

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με

$f'(x)=[ημ(συν^2x)]'συν(ημ^2x)+ημ(συν^2x)\cdot[συν(ημ^2x)]'=$

$=[συν(συν^2x)\cdot(συν^2x)']συν(ημ^2x)+ημ(συν^2x)[-ημx(ημ^2x)\cdot(ημ^2x)']=$

$=[συν(συν^2x)\cdot 2συνx(συνx)']συν(ημ^2x)+ημ(συν^2x)[-ημx(ημ^2x)\cdot 2ημx(ημx)']=$

$=-συν(συν^2x)2συνx\,ημx\cdot συν(ημ^2x)-ημ(συν^2x)\cdot ημ(ημ^2x)\cdot 2ημx\,συνx=$

$=-2ημx\,συνx[συν(συν^2x)συν(ημ^2x)+ημ(συν^2x)ημ(ημ^2x)]=$

$=-2ημx\,συνx\cdot συν(συν^2x-ημ^2x)=2ημx\cdot συνx\cdot συν(συν2x)$

• Μορφή f^g

• 4) $f(x)=(x^2+2)^x \longrightarrow f'$;

Π.Ο. Πρέπει $x^2+2>0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}$ στο οποίο η f παραγωγίσιμη με

$f'(x)=(e^{x\ln(x^2+2)})'=e^{x\ln(x^2+2)}(x\ln(x^2+2))'=(x^2+2)^x[\cancel{x}\,1\ln(x^2+2)+x(\ln(x^2+2))']=$

$=(x^2+2)^x\left(\ln(x^2+2)+x\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x\right)=(x^2+2)^x\left[\ln(x^2+2)+\frac{2x^2}{x^2+2}\right].$

5) Αν η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f: f(x)=g(e^{2x})$, να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της f.

$f=g\circ h$ όπου $h: h(x)=e^{2x}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
g δυο φορες παραγ. στο $\mathbb{R} \Rightarrow g$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
$\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$f'(x)=[g(e^{2x})]'=g'(e^{2x})\cdot(e^{2x})'=2e^{2x}g'(e^{2x}) \Rightarrow f'=2h\cdot(g'\circ h) \Rightarrow f'$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμης με σύνθεση δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$\cancel{f''(x)=[2e^{2x}g'(e^{2x})]'=2[(e^{2x})'g'(e^{2x})+e^{2x}(g''(e^{2x}))']=2[2e^{2x}g'(e^{2x})+e^{2x}g''}$

$f''(x)=[2e^{2x}g'(e^{2x})]'=2[(e^{2x})'\cdot g'(e^{2x})+e^{2x}\cdot[g'(e^{2x})]']=2[2e^{2x}g'(e^{2x})+e^{2x}\cdot g''(e^{2x})\cdot(e^{2x}$

$=2[2e^{2x}g'(e^{2x})+2e^{2x}g''(e^{2x})e^{2x}]=4e^{2x}[g'(e^{2x})+e^{2x}g''(e^{2x})]$

6) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι αρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $g: g(x)=(x^2+1)\cdot f(x)+8x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ δείξτε ότι $g'(0)=8$.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \Rightarrow g$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αθροισμα παραγωγισιμων συναρτήσεων, με
$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)+8 \Rightarrow g'(0)=2\cdot 0\cdot f(0)+(0^2+1)f'(0)+8 =$
$= f'(0)+8$. Αρκει $f'(0)=0$.

f αρτια $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(-x) \underset{*}{\Rightarrow} [f(x)]'=[f(-x)]' \Rightarrow f'(x)=(-x)'f'(-x) \Rightarrow$

δεν ισχυει το αντιστροφο

$\Rightarrow f'(x)=-f'(-x) \Rightarrow f'(0)=-f'(0) \Rightarrow 2f'(0)=0 \Rightarrow f'(0)=0$.

Αρα $g'(0)=f'(0)+8=0+8=8$.

- Ευρεση νιοστής παραγώγου.

Παίρνω ένδειξη και ύστερα αποδεικνύει την ενδειξη με επαγωγή.

παράδειγμα: Να βρεθει η νιοστή παράγωγος της $f(x)=\eta\mu x$

Για $\nu=1$, $f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu(x+\frac{\pi}{2})$

$\nu=2$, $f''(x)=\left(\eta\mu(x+\frac{\pi}{2})\right)'=\sigma\upsilon\nu(x+\frac{\pi}{2})\cdot(x+\frac{\pi}{2})'=\eta\mu\left[(x+\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\right]=\eta\mu(x+\frac{2\pi}{2})$

$\nu=3$, $f'''(x)=\left(\eta\mu(x+\frac{2\pi}{2})\right)'=\sigma\upsilon\nu(x+\frac{2\pi}{2})\cdot(x+\frac{2\pi}{2})'=\eta\mu\left[(x+\frac{2\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\right]=\eta\mu(x+\frac{3\pi}{2})$.

Ενδειξη ότι $f^{(\nu)}(x)=\eta\mu(x+\frac{\nu\pi}{2})$.

Για $\nu=1$, ισχυεί.

Εστω ότι για $\nu=k$, $f^{(k)}=\eta\mu(x+\frac{k\pi}{2})$ ισχύει.

Θα δειξω ότι ισχύει και για $\nu=k+1$.

$f^{(k+1)}(x)=[f^{(k)}(x)]' \underset{\text{υποθ.}}{=} [\eta\mu(x+\frac{k\pi}{2})]'=\sigma\upsilon\nu(x+\frac{k\pi}{2})\cdot(x+\frac{k\pi}{2})'=\eta\mu(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=$
$=\eta\mu\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$

Αρα ισχυει και $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$ ότι $f^{(\nu)}=\eta\mu(x+\frac{\nu\pi}{2})$.

- Παραγώγιση συναρτήσεων πολλαπλού τύπου

Βρίσκω την παράγωγο στα ανοικτά διαστήματα με τους τύπους και ύστερα τους παράγωγους αριθμους (αν υπάρχουν)

- 1 στα συνοριακά σημεια

και
- 2 στα ακρα κλειστών διαστημάτων του Π.Ο. (τα οποία δεν εξετάζονται χώρια στην συνέχεια)

με τον ορισμό.

παράδειγμα: Να βρεθεί η παράγωγος της $f: f(x)=\begin{cases} 3-\sqrt{x-2} & , x\in[2,11) \\ -3+\sqrt{x-2} & , x\in[11,+\infty) \end{cases}$

Λυση: Π.Ο. $A=[2,+\infty)$

Στο $(2,11)$, $f(x)=3-\sqrt{x-2}$ παραγωγίσιμη ~~στο~~ (διότι $x-2\neq 0, \forall x\in(2,11)$) με $f'(x)=\dfrac{1}{-2\sqrt{x-2}}$

Στο $(11,+\infty)$, $f(x)=-3+\sqrt{x-2}$ παραγωγίσιμη (διότι $x-2\neq 0, \forall x\in(11,+\infty)$) με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

Στο 2 : $\forall x\in(2,11): \lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3-\sqrt{x-2}-3}{x-2}=-\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2}=-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ (1)

$f(2)=3$

$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(2,11): x-2>0 \Rightarrow \sqrt{x-2}>0 \Rightarrow -\sqrt{x-2}<0 \\ \lim\limits_{x\to 2}(-\sqrt{x-2})=-\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\lambda(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right]=-\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ όχι παραγωγίσιμη στο 2.

Στο 11 : Παίρνω πλευρικά όρια $f(11)=-3+\sqrt{11-2}=-3+3=0$

$\forall x\in(2,11): \lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(11)}{x-11}=\dfrac{3-\sqrt{x-2}}{x-11}=\dfrac{9-(x-2)}{(x-11)[3+\sqrt{x-2}]}=\dfrac{-(x-11)}{(x-11)[3+\sqrt{x-2}]}=$

$=\dfrac{-1}{3+\sqrt{x-2}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 11^-}\lambda(x)=\lim\limits_{x\to 11^-}\dfrac{-1}{3+\sqrt{x-2}}=\dfrac{-1}{3+\sqrt{11-2}}=-\dfrac{1}{6}=f'_{\alpha}(11)$.

$\forall x\in(11,+\infty): \lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(11)}{x-11}=\dfrac{-3+\sqrt{x-2}}{x-11}=\dfrac{-(3-\sqrt{x-2})}{x-11}=\dots=\dfrac{1}{3+\sqrt{x-2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 11^+}\lambda(x)=\lim\limits_{x\to 11^+}\dfrac{1}{3+\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{3+\sqrt{11-2}}=\dfrac{1}{6}=f'_{\delta}(11)$

οπότε $f'_{\alpha}(11)\neq f'_{\delta}(11) \Rightarrow f$ όχι παραγωγίσιμη στο 2.

Άρα f παραγωγίσιμη στο $A'=(2,11)\cup(11,+\infty)$ με

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{x-2}} & , x\in(2,11) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & , x\in(11,+\infty). \end{cases}$$

Εφαρμογες των παραγώγων

▼Ακρότατα συνάρτησης

<u>Ορισμος</u>: Εστω f μια συνάρτηση με Π.Ο. A. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει ή έχει <u>τοπικό μέγιστο</u> (<u>τοπικό ελάχιστο</u>) σ'ένα σημείο $x_0 \in A$ όταν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x-x_0|<\delta$ να είναι

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad [f(x) \geqslant f(x_0)].$$

Συμβολικα:

Εστω $f \in F_A$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ έχει τοπικό max στο } x_0 \in A \Leftrightarrow \exists\, \delta>0 : \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A : f(x) \leqslant f(x_0) \\ f \text{ έχει τοπικό min στο } x_0 \in A \Leftrightarrow \exists\, \delta>0 : \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A : f(x) \geqslant f(x_0) \end{array}}$$

<u>Θ. Fermat</u>: Αν μια συνάρτηση f
- •1 ορίζεται σε ένα <u>ανοικτό</u> διάστημα Δ
- •2 έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$
- •3 είναι παραγωγίσιμη στο x_0

$\Rightarrow f'(x_0)=0$

<u>Απόδειξη</u>: Εστω ότι f έχει τοπικό max στο x_0.

f έχει τοπικό max στο $x_0 \in \Delta$, Δ ανοικτό διάστημα $\Rightarrow \exists\, (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta : \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f(x) \leqslant f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0) \leqslant 0$.

i) Ειδικά αν $x \in (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow x<x_0 \Rightarrow x-x_0<0$, Είναι και $f(x)-f(x_0) \leqslant 0$ $\Rightarrow \lambda(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$, f παραγωγίσιμη στο x_0

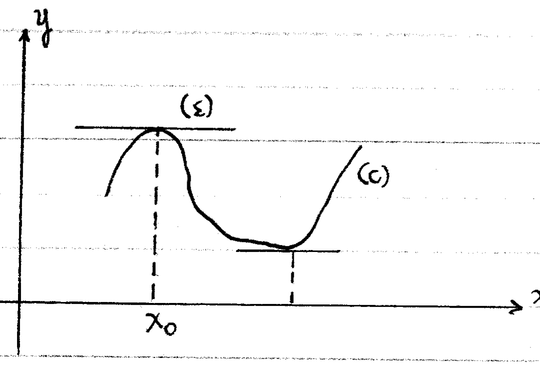
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} \lambda(x) \geq 0 \Rightarrow \underline{f'(x_0)=f'_a(x_0) \geqslant 0}$ (1)

ii) Αν $x \in (x_0, x_0+\delta) \to x>x_0 \Rightarrow x-x_0>0$, Είναι $f(x)-f(x_0) \leqslant 0$ $\Rightarrow \lambda(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x} \leqslant 0$, f παραγωγίσιμη στο x_0

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} \lambda(x) \leqslant 0 \Rightarrow \underline{f'(x_0)=f'_\delta(x_0) \leqslant 0}$ (2)

Αρα $f'(x_0) \geqslant 0$, $f'(x_0) \leqslant 0$ $\Rightarrow f'(x_0)=0$.

Ομοια αν η f έχει στο x_0 τοπικό min.



Γεωμετρική ερμηνεία

Επειδη $f'(x_0)=0 \Rightarrow \lambda_\varepsilon=0$, δηλαδη:

η εφαπτόμενη του διαγράμματος (c) της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι // στον άξονα Ox. Δηλαδη, το διαγραμμα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης στα σημεία max ή min που δεν ταυτίζονται μέε τα άκρα του, δέχεται εφαπτόμενη // προς τον Ox.

• Παρατηρήσεις

1) Η υπόθεση ότι το x_0 είναι σημείο ανοικτού διαστήματος είναι αναγκαία. Διότι π.χ. η $f(x)=2x+1$ με $A=[0,1]$ έχει max το $x_0=1$ (διότι $\forall x\in[0,1]: x\leq x_0 \Rightarrow 2x\leq 2x_0 \Rightarrow f(x)=2x+1\leq 2x_0+1=f(x_0)$) στο οποίο όμως $f'(1)=2\neq 0$

2) Ο μηδενισμός της παραγώγου μίας συνάρτησης σε ένα σημείο, δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ακρότατου στο σημείο αυτό. (⟷ σημεία καμπής)

π.χ. Εστω $f(x)=x^3$. Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με $f'(x)=3x^2$.

Στο $x_0=0$, $f'(0)=0$ άλλο η f δεν έχει ακρότατο στο σημείο αυτό διότι

$\forall x\in(-\infty,0): f(x)<0$ και $\forall x\in(0,+\infty): f(x)>0$.

3) Μια συναρτηση μπορεί να έχει ακρότατο σ'ενα σημειο του Π.Ο. της χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Π.χ. Η $f(x)=|x|$ οχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ διότι

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(-\infty,0): \lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{-x}{x}=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\lambda(x)=-1=f'_a(0)\\ \forall x\in(0,+\infty): \lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\lambda(x)=1=f'_\delta(0)\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ όχι παραγωγίσιμη στο } x_0=0.$$

Αλλα $f(x)=|x|\geq 0=f(0), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Η f έχει στο 0 min

4) Αν μια συναρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα Δ τότε για να βρω τα πιθανά ακρότατα αρκεί να βρω ~~τα~~ τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ διότι για κάθε ακρότατο (αν υπάρχουν) θα μηδενίζει (σύμφωνα με το θ. Fermat) την f'.

~~Να~~ Παράδειγμα

Να βρεθουν τα πιθανά ακρότατα της $f: f(x)=\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{2e^x}$ στο $(0,2\pi)$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $e^{2x}\neq 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\cdot 2e^x-(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)\cdot 2e^x}{4e^{2x}}=\frac{2e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{4e^{2x}}=\frac{4e^x\sigma\upsilon\nu x}{4e^{2x}}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}$$

f παραγωγίσιμη στο ανοικτο $\Delta=(0,2\pi) \Rightarrow$ Η f έχει πιθανα ακρόατατα στις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Στο ~~xo~~ $(0,2\pi)$: $0<\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}<2\pi \Leftrightarrow 0<\kappa+\dfrac{1}{2}<2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<\kappa<\dfrac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$
$\kappa\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \kappa\in\{0,1\}$. Αρα πιθανα ακρόατατα στο $(0,2\pi)$ είναι τα

$x_0=\dfrac{\pi}{2}$

$x_1=\dfrac{3\pi}{2}$

θ. Rolle

Αν μία συνάρτηση f είναι
- $\bullet_1$ συνεχής στο κλειστο διάστημα $[a,b]$
- $\bullet_2$ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b)
- $\bullet_3$ $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b): f'(\xi)=0$

Απόδειξη (ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ)

f συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi_1,\xi_2\in[a,b]: \forall x\in[a,b]$, $f(\xi_1)\leq f(x)\leq f(\xi_2)$ (1)

i) Εαν $\xi_1\in(a,b) \vee \xi_2\in(a,b)$, έστω $\xi\in\{\xi_1,\xi_2\}: \xi\in(a,b)$.

(1) $\Rightarrow$ Η f έχει στο $\xi^{\in(a,b)}$ ακρόατατο
f ορίζεται στο (a,b)
, f παραγωγίσιμη στο (a,b)
$\Rightarrow$ ισχύει το θ. Fermat στο (a,b) $\Rightarrow$

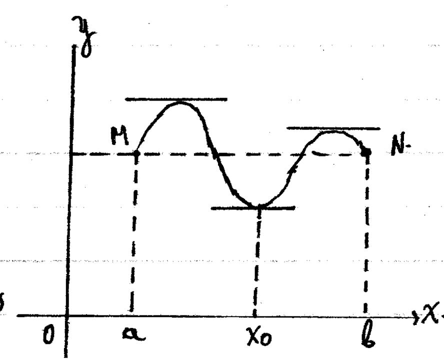
$\Rightarrow f'(\xi)=0 \Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b): f'(\xi)=0$.

ii) Εαν $\xi_1\notin(a,b) \wedge \xi_2\notin(a,b) \Rightarrow$ Εστω $\xi_1=a$, $\xi_2=b$.

$f(a)=f(b)=c \underset{(1)}{\Rightarrow} \forall x\in[a,b]: c\leq f(x)\leq c \Rightarrow \forall x\in[a,b]: f(x)=c \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ η σταθερή συνάρτηση στο $[a,b] \Rightarrow$ Είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $f'(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$. $\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b): f'(\xi)=0$.

Γεωμετρική ερμηνεία



Αν το γραφημα C_f δέχεται εφαπτόμενη σε κάθε σημείο (με εξαίρεση τα άκρα) και αν η ευθεία ΜΝ των άκρων ειναι // προς τον Οx , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του C_f ~~(α~~που δεν συμπίπτει με τα άκρα του στο οποίο η εφαπτόμενη είναι // προς τον άξονα Οx.

- Οι συνθήκες του θ. Rolle είναι αναγκαίες άλλα όχι ικανές για να $\exists\, \xi\in(a,b): f'(\xi)=0$.

• <u>Εφαρμογή</u>: Η εξίσωση $x^{2\nu}+ax+b=0$: $\nu\in\mathbb{N}^*$, δεν έχει περισσότερες από δύο ρίζες $\rho_{1,2}\in\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>: Θέτω $f(x)=x^{2\nu}+ax+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Έστω ότι έχει τρείς ρίζες $\rho_{1,2,3}\in\mathbb{R}$ και π.χ. $\rho_1<\rho_2<\rho_3 \to f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$ (1

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\nu x^{2\nu-1}+a \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [\rho_1,\rho_2] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (\rho_1,\rho_2) \\ (1) \to f(\rho_1)=f(\rho_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ισχύει το θ. Rolle στο $[\rho_1,\rho_2] \Rightarrow \exists\, \xi_1\in(\rho_1,\rho_2): f'(\xi_1)=0.$

Ομοια ισχύει το θ. Rolle στο $[\rho_2,\rho_3] \Rightarrow \exists\, \xi_2\in(\rho_2,\rho_3): f'(\xi_2)=0$

$\Rightarrow f'$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ ← Ατοπο διότι η $f'(x)=2\nu x^{2\nu-1}+a=0$ είναι διώνυμη εξίσωση περιττού βαθμού, άρα έχει ΜΜΛ

<u>παράδειγμα</u>

1) Εαν $f(x)=x|\eta\mu x|$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$ δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει λύση στο $(-\pi,\pi)$.

<u>Λύση</u>:

x	$-\pi$		0		π
$\eta\mu x$		$-$	0	$+$	

άρα $f(x)=\begin{cases} -x\cdot\eta\mu x, & x\in[-\pi,0) \\ +x\eta\mu x, & x\in[0,\pi] \end{cases}$. Αρκεί να ισχυει το θ. Rolle.

• <u>Συνέχεια</u>

Στο $[-\pi,0)$, $f(x)=-x\eta\mu x$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών. (πολυωνυμικής και τριγωνο μετρικής).

Στο $(0,\pi]$, $f(x)=x\eta\mu x$ συνεχής, όμοια.

Στο $x_0=0$, $\forall x\in(-\pi,0): f(x)=-x\eta\mu x \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x\eta\mu x)=\lim_{x\to 0^-}x\cdot\lim_{x\to 0^-}\eta\mu x=0$

$\forall x\in(0,\pi): f(x)=x\eta\mu x \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\eta\mu x)=\lim_{x\to 0^+}x\cdot\lim_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} f(x)=0 \\ f(0)=0\cdot|\eta\mu 0|=0\end{array}\right\} \Rightarrow f$ συνεχής στο 0

Αρα, <u>f συνεχής στο $[-\pi,\pi]$.</u> (1)

• <u>Παραγωγισιμότητα</u>

Στο $(-\pi,0)$ f παραγωγίσιμη με $f'(x)=-\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$

Στο $(0,\pi)$ f παραγωγίσιμη με $f'(x)=+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

Στο 0, $\forall x\in(-\pi,0): f(x)=-x\eta\mu x \Rightarrow \lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{-x\eta\mu x}{x}=-\eta\mu x \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\lambda(x)=\lim_{x\to 0^-}(-\eta\mu x)=\eta\mu 0=0=f'_a(0)$

$\forall x\in(0,\pi): f(x)=x\eta\mu x \Rightarrow \lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x\eta\mu x}{x}=\eta\mu x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\lambda(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=\eta\mu 0=0 \Rightarrow$
$=f'_\delta(0)$.

οπότε $f'_a(0)=f'_\delta(0)=0 \Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο 0

Άρα f παραγωγίσιμη στο $(-\pi,\pi)$. (2).

- $\left.\begin{array}{l} f(-\pi)=-\pi|\eta\mu(-\pi)|=-\pi\cdot 0=0 \\ f(\pi)=+\pi|\eta\mu\pi|=\pi\cdot 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\pi)=f(-\pi)$ (3)

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ ισχύει το θ. Rolle $\Rightarrow \exists\xi\in(a,b): f'(\xi)=0 \Rightarrow$ Η εξίσωση $f'(\xi)=0$ έχει λύση στο (a,b).

▼ Εφαρμογές του Rolle στις πολυωνυμικές εξισώσεις

Χρησιμοποιούμε τα εξής θ.

1) Bolzano: $\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\xi\in(a,b): f(\xi)=0$.

2) D'Alembert: $\left.\begin{array}{l} f \text{ πολυώνυμο στο } \mathbb{C} \\ \text{βαθμού } \nu\in\mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow$ το f έχει ν ρίζες στο $\mathbb{C}$. (το πολύ).

~~3) f έχει πραγματικούς σ~~

3) $\left.\begin{array}{l} f \text{ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές} \\ a+bi \text{ ρίζα του } f \end{array}\right\} \Rightarrow a-bi$ ρίζα του f.

4) $\rho\in\mathbb{C}$ ρίζα του πολυωνύμου $f(x) \Leftrightarrow \exists$ πολυώνυμο $\Pi(x): f(x)=(x-\rho)\Pi(x)$

- Αν $\rho\in\mathbb{C}$ ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ τότε λέμε ότι
  ρ ν-πλή ρίζα $\Leftrightarrow (x-\rho)^\nu / f(x) \wedge (x-\rho)^{\nu+1} \not| f(x)$.

- Γενικό παράδειγμα

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ πολυωνυμική στο } \mathbb{R} \\ f \text{ έχει } \kappa \text{ άνισες ρίζες} \end{array}\right\} \Rightarrow f' \text{ έχει τουλάχιστον } \kappa-1 \text{ άνισες ρίζες}}$$

Απόδειξη

f έχει κ άνισες ρίζες. Έστω $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_\kappa$ οι ρίζες της f και π.χ. $\rho_1<\rho_2<\dots<\rho_\kappa \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\rho_1)=f(\rho_2)=\dots=f(\rho_\kappa)=0$. (1)

f πολυωνυμική $\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \Rightarrow \forall i\in\{1,2,\dots,\kappa-1\}: f$ παραγωγίσιμη στο $[\rho_i,\rho_{i+1}]$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f \text{ παραγωγίσιμη στο } (\rho_i,\rho_{i+1}) \\ f \text{ συνεχής στο } [\rho_i,\rho_{i+1}] \end{array}\right. \\ (1)\Rightarrow f(\rho_i)=f(\rho_{i+1})=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Ισχύει το θ. Rolle, $\forall\Delta=[\rho_i,\rho_{i+1}]$ με $i\in\{1,2,\dots,\kappa-1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\xi_i\in(\rho_i,\rho_{i+1}): f'(\xi)=0$.

Τα Δ είναι σε πλήθος $\kappa-1 \Rightarrow$ Η $f'(x)$ έχει τουλάχιστον $\kappa-1$ ρίζες. τις
$\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$, ..., $\xi_{\kappa-1}\in(\rho_{\kappa-1},\rho_\kappa)$ οι οποίες είναι μεταξύ τους άνα

δύο άνισες διότι ανήκουν σε ανά δύο ξένα διαστήματα.

• **παραδείγματα**

1) Αν $f: f(x) = (x+4)(x-2)(3x-1)(x-6)$, πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $f'(x)=0$; στο $\mathbb{R}$

Λύση

$\left.\begin{array}{l} f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως πολυωνυμική} \\ f(-4)=f(2)=f(\frac{1}{3})=f(6)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ισχύει το Θ. Rolle στα $[-4,\frac{1}{3}],[\frac{1}{3},2],[2,6] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, \xi_1 \in (-4,\frac{1}{3}) : f'(\xi_1)=0 \\ \exists\, \xi_2 \in (\frac{1}{3},2) : f'(\xi_2)=0 \\ \exists\, \xi_3 \in (2,6) : f'(\xi_3)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1 \neq \xi_2 \neq \xi_3$ ρίζες της f'. (3)

f $4^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο $\Rightarrow f'$ $3^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο $\Rightarrow$ (Θ. D'Alembert) η f' έχει το πολύ τρεις ρίζες διαφορετικές ~~(3) Η f' έχει ρίζες μόνο τις ξ1, ξ2, ξ3.~~ (4)

(3),(4) $\Rightarrow$ Η f έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$ τις ξ_1, ξ_2, ξ_3.

2) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^5+2x^3+7x+12=0$ έχει 1 ρίζα πραγματική και 4 ~~μιγαδικές~~ μη πραγματικές.

Λύση : Θέτω $f(x)= x^5+2x^3+7x+12=0$

•1 Δείχνω ότι υπάρχει μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

α' τρόπος : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^5+2x^3+7x+12) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \Rightarrow \exists\, a\in\mathbb{R}: f(a)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^5+2x^3+7x+12) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty \Rightarrow \exists\, b\in\mathbb{R}: f(b)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(a)\cdot f(b)<0 \\ f \text{ συνεχής στο } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow$ ισχύει το Θ. Bolzano στο $[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi\in (a,b): f(\xi)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η εξίσωση $f(x)=x^5+2x^3+7x+12=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

β' τρόπος : $\left.\begin{array}{l} \text{Η } f(x)= x^5+2x^3+7x+12 \text{ είναι πολυωνυμική } 5^{ου} \text{ βαθμού} \\ \text{και έχει συντελεστές πραγματικούς} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ έχει 5 ρίζες στο $\mathbb{C}$ από τις οποίες οι μη πραγματικές είναι ανά δύο συζυγείς $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \rho_1\in\mathbb{R}: \rho_1$ ρίζα της f

•2 Δείχνω ότι δεν υπάρχει άλλη ρίζα στο $\mathbb{R}$ διαφορετική της ρ_1.

Έστω ότι $\exists\, \rho_2\in\mathbb{R}: \rho_1\neq\rho_2$ και π.χ. $\rho_1<\rho_2 \wedge \rho_2$ ρίζα $f(x) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(\rho_1)=f(\rho_2)=0. \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x)=5x^4+6x^2+7 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Στο $[\rho_1,\rho_2]$ ισχύει το Θ. Rolle

$\Rightarrow \exists\, \xi\in(\rho_1,\rho_2) : f'(\xi)=0 \leftarrow$ Άτοπο διότι $\forall x\in\mathbb{R},\ 5x^4+6x^2+7>0$ ως άθροισμα ~~τετραγώνων~~ τετραγώνων και θετικού $\longrightarrow \nexists$ ρίζα $\rho_2\in\mathbb{R}: \rho_1\neq\rho_2$.

•3 Η ρ_1 απλή.

Εστω ρ_1 ~~απο~~ όχι απλη $\Rightarrow \rho_1$ τριπλή $\vee\ \rho_1$ πενταπλή (διότι οι μιγαδικές είναι ανα δύο συζυγείς).

$\Rightarrow (x-\rho_1)^3 / f(x) \Rightarrow \exists\, n(x)$ πολυώνυμο: $f(x)=(x-\rho_1)^3 n(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=3(x-\rho_1)^2 n(x)+(x-\rho_1)^3 n'(x) \Rightarrow f'(\rho_1)=0 \Rightarrow \rho_1$ ρίζα της $f' \longleftarrow$ Ατοπο διότι

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=5x^4+6x^2+7>0 \longrightarrow \rho_1$ απλη.

Αρα η $f(x)=0$ έχει <u>μόνο μία</u> απλή ρίζα στο $\mathbb{R}$ την ρ_1

f πολυωνυμική $5^{ου}$ βαθμου $\Rightarrow$ Η f έχει 5 ρίζες στο $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Οι άλλες 4 είναι μη πραγματικές.

3) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(-1,1)$

<u>Λυση</u>: Θέτω $f(x)=x^3-3x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$f(-1)=-1+3+1=3$

$f(1)=1-3+1=-1$

$\Rightarrow f(-1)\cdot f(1)=-3<0$

f συνεχής στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική

$\Rightarrow$ ισχύει στο $[-1,1]$ το θ. Bolzano $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \rho\in(-1,1): f(\rho)=0 \Rightarrow$ Η $x^3-3x+1=0$ έχει ρίζα $\rho\in(-1,1)$.

Εστω ότι έχει και δεύτερη ρίζα $\rho_1\in(-1,1)$ με $\rho_1\neq\rho$ και π.χ. $\rho_1<\rho$.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow$ f συνεχής στο $[-1,1]$, f παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$

ρ_1,ρ ρίζες της $f \Rightarrow f(\rho)=f(\rho_1)=0$

$\Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[-1,1] \Rightarrow \exists\, \xi\in(-1,1): f'(\xi)=0 \longleftarrow$ Ατοπο διότι~~

~~$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm1 \notin(-1,1) \longrightarrow$ Αρα η $\rho_1 \in(0,1)$ είναι μοναδική~~

~~ρίζα του $f \Rightarrow$~~

$\Rightarrow$ ισχυει το θεώρημα Rolle στο $[\rho_1,\rho] \Rightarrow \exists\, \xi\in(\rho_1,\rho): f'(\xi)=0$

$\rho_1,\rho\in(-1,1) \Rightarrow (\rho_1,\rho)\subseteq(-1,1)$

$\Rightarrow$ ~~$\exists\,\xi\in(\rho_1,\rho)$~~ $\Rightarrow \exists\,\xi\in(-1,1): f'(\xi)=0 \longleftarrow$ Άτοπο διοτι

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm1 \notin(-1,1) \longrightarrow$ αρα η f έχει μια μόνο ρίζα $\rho\in(-1,1)$.

4) Να λυθεί η εξίσωση $xe^x-e^x+1=0$.

<u>Λύση</u>: "Βλέπω" ότι το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Θέτω $f(x)=xe^x-e^x+1 \Rightarrow f(0)=0e^0-e^0+1=0-1+1=0 \Rightarrow 0$ ρίζα της f.

Θα δείξω ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.

Εστω ότι η f έχει και άλλη ρίζα $\rho\neq0$.

i) <u>Αν $\rho>0$.</u>

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x \Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [0,\rho] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (0,\rho). \end{cases}$

$\rho, 0$ ρίζες της $f \Rightarrow f(\rho) = f(0) = 0$

$\Rightarrow$ ισχύει το θ. Rolle στο $[0,\rho] \Rightarrow \exists\, \xi \in (0,\rho) : f'(\xi) = 0 \leftarrow$ Άτοπο διότι

$\left.\begin{array}{l} \forall x \in (0,\rho) : x \neq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xe^x \neq 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0,\ \forall x \in (0,\rho) \longrightarrow$ άρα η f δεν έχει άλλη ρίζα $\rho > 0$.

ii) <u>Αν $\rho < 0$</u>

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [\rho,0] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (\rho,0) \end{cases}$ $\Rightarrow$ ισχύει το θ. Rolle στο $[\rho,0] \Rightarrow$

$\rho, 0$ ρίζες της $f \Rightarrow f(\rho) = f(0) = 0$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (\rho,0) : f'(\xi) = 0 \leftarrow$ Άτοπο διότι $\forall x \in (\rho,0) : x \neq 0 \wedge e^x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = xe^x \neq 0 \longrightarrow$ άρα δεν υπάρχει άλλη ρίζα $\rho < 0$

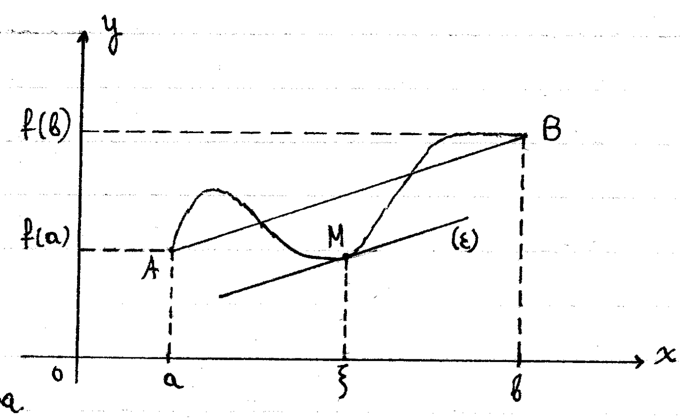
και έτσι, η ρίζα $\rho = 0$ είναι μοναδική. Έτσι $xe^x - e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

<u>Θ. Μέσης Τιμής (Langrange)</u>

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Αν το γράφημα της f στο $[a,b]$ δέχεται εφαπτόμενη σε κάθε σημείο (με εξαίρεση τα άκρα), υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του γραφήματος (που δεν συμπίπτει με τα άκρα του) στο οποίο η εφαπτόμενη είναι // προς τη χορδή AB που ενώνει τα άκρα.



Απόδειξη

▸ Έστω $F: F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} = f(x)(a-b) - x[f(a)-f(b)] + [bf(a)-af(b)]$

$F(a)=\begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\wedge\; F(b)=\begin{vmatrix} f(b) & b & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{F(a)=F(b)}$ (1).

~~F συνεχής στο [a,b] ω~~

f συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow$ <u>F συνεχής στο $[a,b]$</u> ως άθροισμα συνεχών. (2)

f παραγωγίσιμη στο $(a,b) \Rightarrow$ <u>F παραγωγίσιμη στο (a,b)</u> (3) με $F'(x)=f'(x)(a-b)-[f(a)-f(b)]$

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ ισχύει το Θ.Rolle στο $[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b): F'(\xi)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b): f'(\xi)(a-b)-[f(a)-f(b)] = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)(a-b)=f(a)-f(b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

▼ <u>Εφαρμογές του Θ.Μ.Τ. σε ανισοτικές σχέσεις</u>

1) <u>Δύο μεταβλητών</u> $\longrightarrow$ $\boxed{\varphi(a,b) \gtrless g(a,b) : a,b\in A}$

•1 Φέρνω την ανισοτική σχέση σε τέτοια μορφή έτσι ώστε να εμφανισεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. δηλαδή παράσταση της μορφής $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

•2 Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ αφού πάρω κατάλληλη f οπότε $\exists\, \xi\in(a,b): f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

•3 $\xi\in(a,b) \Rightarrow a<\xi<b$ και από αυτή την ανισότητα δημιουργώ την $f'(\xi)$.
Απο την σχέση που προκύπτει, αποδεικνύω αλγεβρικά το ζητούμενο.

<u>παράδειγμα</u>

1) Δείξτε $\nu(b-a)a^{\nu-1} < b^\nu - a^\nu < \nu(b-a)b^{\nu-1} \;: 0<a<b \;, \nu\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

<u>Λύση</u>:

$0<a<b \Rightarrow$ Αρκεί $\nu a^{\nu-1} < \underbrace{\dfrac{b^\nu-a^\nu}{b-a}}_{\text{συμπέρασμα Θ.Μ.Τ.}} < \nu b^{\nu-1}$

▸ Θέτω $f(x)=x^\nu, \forall x\in\mathbb{R}$

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\nu x^{\nu-1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \nu \xi^{\nu-1} = \dfrac{b^{\nu}-a^{\nu}}{b-a}$ (1)

Αλλά $\xi \in (a,b) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a<\xi<b \\ 0<a<b \end{array}\right\} \Rightarrow a^{\nu-1} < \xi^{\nu-1} < b^{\nu-1} \Rightarrow \nu a^{\nu-1} < \nu\xi^{\nu-1} < \nu b^{\nu-1} \overset{(1)}{\Rightarrow} \nu a^{\nu-1} < \dfrac{b^{\nu}-a^{\nu}}{b-a} < \nu b^{\nu-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu(b-a)a^{\nu-1} < b^{\nu}-a^{\nu} < \nu(b-a)b^{\nu-1}$,

2) Δείξτε ότι $0<a<b<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon\varphi a < \dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu a)-\ln(\sigma\upsilon\nu b)}{b-a} < \varepsilon\varphi b$.

Λύση

Θέτω $f: f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$

f παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$ με $f'(x) = \dfrac{-1}{\sigma\upsilon\nu x}(-\eta\mu x) = \dfrac{+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = +\varepsilon\varphi x \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $[a,b] \subset (0,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{-\ln(\sigma\upsilon\nu b)+\ln(\sigma\upsilon\nu a)}{b-a} =$

$= \dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu a)-\ln(\sigma\upsilon\nu b)}{b-a} \Rightarrow \varepsilon\varphi \xi = \dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu a)-\ln(\sigma\upsilon\nu b)}{b-a}$ (1).

$\xi \in (a,b) \Rightarrow a<\xi<b \Rightarrow \varepsilon\varphi a < \varepsilon\varphi \xi < \varepsilon\varphi b$ (διότι $y = \varepsilon\varphi x \nearrow$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \varepsilon\varphi a < \dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu a)-\ln(\sigma\upsilon\nu b)}{b-a} < \varepsilon\varphi b$.

2) Μιας μεταβλητής $\longrightarrow$ $A(x) \geq B(x), \forall x \in (a,b)$ οπου $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$

•1 Θέτω $f(x) = A(x) - B(x)$ και βρίσκω το Π.Ο. της f, έστω A.

•2 Θα είναι, $(a,b) \subseteq A$. Διακρίνω δύο περιπτώσεις

i) Αν ένα τουλάχιστον από τα a,b είναι στοιχείο του A τότε

αν $a \in A \Rightarrow$ εφαρμόζω στην f Θ.Μ.Τ. στα $[a,x], \forall x \in (a,b)$

αν $b \in A \Rightarrow$ εφαρμόζω στην f Θ.Μ.Τ στα $[x,b], \forall x \in (a,b)$.

~~Και από τις σχέσεις $x \in (a,b)$ και $\xi \in (a,b)$ δημιουργώ την~~

Από τις σχέσεις $x \in (a,b)$, $\xi \in (a,b)$ και την εξίσωση του Θ.Μ.Τ αποδεικνύω το ζητούμενο

ii) Αν $a \notin A \wedge b \notin A$ τότε βρίσκω τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho_{1,2,\dots,\nu}$.

και εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στην f στα διαστήματα

$[\rho_i, x], \ \forall x \in [\rho_i, b]$

$[x, \rho_i], \ \forall x \in [a, \rho_i]$

Παραδείγματα

1) Δείξτε ότι $e^x > ex$, $\forall x \in (1,+\infty)$.

Λύση $(a=1,\ b=+\infty)$

Θέτω $f(x)=e^x-ex$, Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ $(\bullet\ a\in A)$ 1^{η} περ.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-e \Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [1,x]\subset\mathbb{R} \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (1,x)\subset\mathbb{R}\end{cases}$ $,\forall x\in(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ Ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[1,x]$, $\forall x\in(1,+\infty) \Rightarrow \exists\, \xi\in(1,x): f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\xi}-e=\dfrac{(e^x-ex)-(e^1-e\cdot 1)}{x-1} \Leftrightarrow e^{\xi}-e=\dfrac{e^x-ex}{x-1} \Leftrightarrow \underbrace{e^x-ex=(e^{\xi}-e)(x-1)}_{(1)}$, $\forall x\in(1,+\infty)$

$\left.\begin{array}{l} x\in(1,+\infty)\Rightarrow x>1 \Rightarrow x-1>0 \\ \xi\in(1,x)\Rightarrow 1<\xi<x \Rightarrow e^1<e^{\xi}<e^x \Rightarrow e^{\xi}-e>0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} e^x-ex=(e^{\xi}-e)(x-1)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x>ex$, $\forall x\in(1,+\infty)$.

2) Δείξτε ότι $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

Λύση $(a=0,\ b=+\infty)$

Θέτω $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$, Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} 1+x>0 \\ 1+x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow 1+x>0 \Leftrightarrow x>-1 \Leftrightarrow x\in(-1,+\infty) \Leftrightarrow \underline{A=(-1,+\infty)}$

$(\bullet\ b=+\infty\notin A$ αλλά $a=0\in A)$. 1^{η} περ.

f παραγωγίσιμη στο $\underset{A}{(-1,+\infty)}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{(1+x)-x}{(1+x)^2}=$

$=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{(1+x)-1}{(1+x)^2}=\dfrac{x}{(1+x)^2} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [0,x] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (0,x)\end{cases}$ $,\forall x\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$, $\forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \exists\,\xi\in(0,x): f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\xi}{(1+\xi)^2}=\dfrac{f(x)-\left[\ln 1-\frac{0}{0+1}\right]}{x-0} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\xi}{(1+\xi)^2} \Leftrightarrow \ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{x\xi}{(1+\xi)^2}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} x\in(0,+\infty)\Rightarrow x>0 \\ \xi\in(0,x)\Rightarrow \xi>0 \Rightarrow \dfrac{\xi}{(1+\xi)^2}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x\xi}{(1+\xi)^2}>0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

3) Δείξτε (με Θ.Μ.Τ) ότι $\ln x \leq x-1$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

Λύση: ($\bullet$ $a=0$, $b=+\infty$)

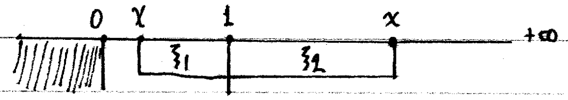
Θέτω $f: f(x)=\ln x - x + 1$. Π.Ο. Πρέπει $x>0 \Leftrightarrow A=(0,+\infty)$.

($\bullet$ $a=0\notin A$, $b=+\infty\notin A$) 2η περ.

f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)=A$ με $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ (1).

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$. Παίρνω τα διαστήματα $[x,1], \forall x\in(0,1)$

$[1,x], \forall x\in(1,+\infty)$.



i) Στο $[x,1]$, $\forall x\in(0,1)$.

$(1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [x,1] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x,1) \end{array}\right\} \Rightarrow$ ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[x,1] \Rightarrow$ $\forall x\in(0,1)$.

$\Rightarrow \exists\, \xi_1\in(x,1): f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1-\xi_1}{\xi_1}=\frac{f(x)-[\ln 1-1+1]}{x-1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1}=\frac{1-\xi_1}{\xi_1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x - x + 1 = \frac{(x-1)(1-\xi_1)}{\xi_1}$ (2)

$x\in(0,1) \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow x-1<0$

$\xi_1\in(x,1) \Rightarrow x<\xi_1<1$, $0<x$ $\Rightarrow 0<\xi_1<1 \Rightarrow \frac{1-\xi_1}{\xi_1}>0$

$\Rightarrow \frac{(x-1)(1-\xi_1)}{\xi_1}<0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \ln x - x + 1 <0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x < x-1 \Rightarrow \ln x \leq x-1$, $\forall x\in(0,1)$

ii) Στο $[1,x]$, $\forall x\in(1,+\infty)$

$(1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [1,x] \\ f \text{ ~~συνεχής~~ παραγωγίσιμη στο } (1,x) \end{array}\right\} \Rightarrow$ ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[1,x]$, $\forall x\in(1,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \xi_2\in(1,x): f'(\xi_2)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1-\xi_2}{\xi_2}=\frac{f(x)-[\ln 1-1+1]}{x-1} \Leftrightarrow f(x)=\frac{(x-1)(1-\xi_2)}{\xi_2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x - x + 1 = \frac{(x-1)(1-\xi_2)}{\xi_2}$ (3)

~~x∈[1,x+∞~~ ~~x∈~~

$x\in(1,+\infty) \Rightarrow 1<x \Rightarrow x-1>0$

$\xi_2\in(1,x) \Rightarrow 1<\xi_2<x \Rightarrow \frac{1-\xi_2}{\xi_2}<0$

$\Rightarrow \frac{(x-1)(1-\xi_2)}{\xi_2}<0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \ln x - x + 1<0 \Rightarrow \ln x < x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x \leq x-1$, $\forall x\in(1,+\infty)$

iii) Στο $x_0=1$, $\ln 1 \leq 1-1 \Leftrightarrow 0<0$ ισχύει

ΑΡΑ: $\ln x \leq x-1$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

▼ Άμεσες συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

Θ_1 $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ παραγωγίσιμη στο } \Delta \\ f'(x)=0, \forall x\in\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ σταθερή στο } \Delta.}$

Απόδειξη

Αρκεί $\forall x_1,x_2\in\Delta : f(x_1)=f(x_2)$.

Έστω π.χ. $x_1<x_2$

$\left.\begin{array}{l} x_1,x_2\in\Delta \Rightarrow [x_1,x_2]\subseteq\Delta \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [x_1,x_2] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x_1,x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[x_1,x_2] \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists x_0\in(x_1,x_2) : f'(x_0)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ f'(x_0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in\Delta \Rightarrow f$ σταθερή στο Δ.

Θ_2. $\boxed{\left.\begin{array}{l} f,g \text{ παραγωγίσιμες στο } \Delta \\ f'=g' \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, u \text{ σταθερή στο } \Delta : f=g+u.}$

Απόδειξη

$f'=g' \Rightarrow \forall x\in\Delta : f'(x)=g'(x) \Rightarrow \forall x\in\Delta : f'(x)-g'(x)=0 \Rightarrow \forall x\in\Delta : (f'-g')(x)=0$

$\Rightarrow \forall x\in\Delta : (f-g)'(x)=0 \underset{\Theta_1}{\Rightarrow} f-g$ σταθερή στο $\Delta \Rightarrow \exists\, u$ σταθερή στο $\Delta : f-g=u \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, u$ σταθερή στο $\Delta : f=g+u$.

Εφαρμογές-θεωρία

① Εαν $f\in F_{\mathbb{R}}$ τότε $\boxed{f'=f \Leftrightarrow f(x)=ce^x}$

Απόδειξη

ευθύ: Έστω $f\in F_{\mathbb{R}} : f'=f$. Αρκει η $F : F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ σταθερή

F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{f(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ σταθερη στο $\mathbb{R} \Rightarrow F(x)=c$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}=c$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=ce^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Αντίστροφο : Αν $f(x)=ce^x \Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=ce^x \Rightarrow f'=f$

② Θεώρημα Cauchy.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f,g \text{ συνεχείς στο } [a,b] \\ f,g \text{ παραγωγίσιμες στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b): [f(b)-f(a)]\,g'(\xi) = [g(b)-g(a)]\,f'(\xi).}$$

Απόδειξη

► Θέτω $C(x) = [f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x)$

f,g συνεχείς στο $[a,b] \Rightarrow C$ συνεχής στο $[a,b]$ ως άθροισμα συνεχών. (1)

f,g παραγωγίσιμες στο $(a,b) \Rightarrow C$ παραγωγίσιμη στο (a,b) με

$$C'(x) = [f(b)-f(a)]\,g'(x) - [g(b)-g(a)]\,f'(x). \quad (2).$$

$$C(a) = [f(b)-f(a)]\,g(a) - [g(b)-g(a)]\,f(a) = f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - f(a)g(b) + \cancel{f(a)g(a)} =$$
$$= f(b)\,g(a) - f(a)\,g(b). \quad (3).$$

$$C(b) = [f(b)-f(a)]\,g(b) - [g(b)-g(a)]\,f(b) = \cancel{f(b)g(b)} - f(a)\,g(b) - \cancel{f(b)g(b)} + f(b)g(a) =$$
$$= f(b)\,g(a) - f(a)\,g(b) \underset{(3)}{=} C(a) \quad (4).$$

(1),(2),(4) $\Rightarrow$ Ισχύει το θ. Rolle στο $[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b): C'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [f(b)-f(a)]\,g'(\xi) - [g(b)-g(a)]\,f'(\xi) \Leftrightarrow [f(b)-f(a)]\,g'(\xi) = [g(b)-g(a)]\,f'(\xi).$$

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b): [f(b)-f(a)]\,g'(\xi) = [g(b)-g(a)]\,f'(\xi).$$

→ Το θεώρημα Cauchy είναι γενίκευση του Θ.Μ.Τ.
Για $g(x) = x$, $\forall x \in [a,b]$, εάν ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει το Θ.Μ.Τ.
Εφαρμόζεται επίσης σε ανισοτικές σχέσεις.

▼ Παράγουσα συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ.
Ονομάζουμε παράγουσα (ή αρχική) συνάρτηση της f κάθε συνάρτηση F ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ για την οποία $F' = f$.

Δηλ. Αν $f \in F_\Delta$, $\boxed{F \text{ παράγουσα } f \Leftrightarrow F \text{ παραγωγίσιμη στο } \Delta \text{ με } F' = f.}$

Θ. $\left.\begin{array}{l} f\in F_\Delta \\ F \text{ παράγουσα } f \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{P}=\{\varphi\in F_\Delta : \varphi \text{ παράγουσα } f\}=\{F+u : u \text{ σταθερή στο } \Delta\}.$

Απόδειξη

Ευθύ: Αν $\left.\begin{array}{l} F \text{ παράγουσα } f \\ u \text{ σταθερή στο } \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow (F+u)'=F'+u'=f+0=f \Rightarrow F+u$ παράγουσα f.

Αντίστροφο: $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Έστω } \varphi \text{ παράγουσα } f \Rightarrow \varphi'=f \\ \text{Είναι και } F \text{ παράγουσα } f \Rightarrow F'=f \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi'=F' \\ \varphi, F \text{ παραγωγίσιμες στο } \Delta \text{ (ως παράγουσες)} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, u$ σταθερή στο Δ: $\varphi=F+u$.

Πίνακας παραγουσών

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}+c$	e^x	e^x+c
1	$x+c$	$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x+c$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x+c$	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert+c$
(όπου $a\neq -1$)		$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi x+c$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\log_a\lvert x\rvert+c$

παράδειγμα

Να βρείτε την οικογένεια των καμπυλών των οποίων η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της έχει συντελεστή διεύθυνσης $2x$ και την καμπύλη της οικογένειας από το σημείο $(\sqrt{2},0)$.

Λύση

Έστω f ένα στοιχείο της οικογένειας με Π.Ο A.

$\left.\begin{array}{l} \lambda_{\varepsilon\varphi}=2x,\ \forall x\in A \\ \lambda_{\varepsilon\varphi}=f'(x),\ \forall x\in A \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=2x,\ \forall x\in A \Rightarrow f(x)=x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$

Άρα $(\text{οικ}): f(x)=x^2+c,\ \forall c\in\mathbb{R}$

$(\sqrt{2},0)\in(c)\in(\text{οικ}) \Leftrightarrow 0=(\sqrt{2})^2+c \Leftrightarrow c=-2 \Rightarrow$ Άρα $(c): y=x^2-2.$

- Παρατήρηση στις ταυτοανισότητες

ΜΕΡΙΚΕΣ ΦΟΡΕΣ βγαίνουν με την μεθοδολογία που εφαρμόζουμε στις διπαραμετρικές

παράδειγμα: Δείξτε ότι $\ln x\leq x-1,\ \forall x\in(0,+\infty)$

Λύση

$$\ln x \le x-1 \Leftrightarrow \underset{\forall x \neq 1}{\ln x - \ln 1 \le x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1} \le 0, & x\in(1,+\infty) \\[2mm] \dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1} \ge 0, & x\in(\cancel{-\infty}\,0,1) \end{cases}$$

i) Θα δείξω ότι $\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1} \le 0, \forall x\in(1,+\infty)$

Θέτω $f(x)=\ln x$

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*_+$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [1,x] \subseteq \mathbb{R}^*_+ \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (1,x)\subseteq \mathbb{R}^*_+ \end{cases} \Rightarrow$ ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[1,x]$, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (1,x) : f'(x_0) = \frac{\ln x_{\cancel{0}} - \ln 1}{x_{\cancel{0}}-1} = \frac{\ln x}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{\ln x}{x-1}$$

$$x_0\in(1,x) \Rightarrow 1<x_0<x \Rightarrow 1>\frac{1}{x_0}>\frac{1}{x} \Rightarrow 1>\frac{\ln x}{x-1} \Rightarrow \ln x < x-1 \ (\text{διότι } x-1>0)$$

ii) Θα δείξω ότι $\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1} \ge 0, \forall x\in(0,1)$

Θέτω $f(x)=\ln x$.

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*_+$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } \cancel{[0,x]}\ [x,1] \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x,1) \end{cases} \Rightarrow$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $(x,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists x_0\in(x,1) : f'(x_0) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{-\ln x}{1-x} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{\ln x}{x-1}$$

$$x_0\in(x,1) \Rightarrow x<x_0<1 \Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{x_0}>1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x-1}>1 \Rightarrow \ln x<x-1 \ (\text{διότι } x-1<0).$$

iii) Στο $x_0=1$, $\ln 1 \le 1-1 \Leftrightarrow 0\le 0$ ισχύει.

▼ Θεώρημα De L'Hospital

Θ1.

- $\bullet_1$ Αν f,g παραγωγίσιμες σε μια $\Pi(x_0)$ και $g'(x_0) \neq 0$, $\forall x \in \Pi(x_0)$
- $\bullet_2$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$
- $\bullet_3$ $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Θ2

- $\bullet_1$ Αν f,g παραγωγίσιμες σε μια $\Pi(x_0)$ και $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in \Pi(x_0)$
- $\bullet_2$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \{+\infty, -\infty\}$.
- $\bullet_3$ $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Εφαρμογές θ. Del' Hospital

▼ Απροσδιόριστες μορφές στα όρια

1η περίπτωση: Μορφή $\frac{0}{0}$ $\longrightarrow$ εφαρμόζω κατευθείαν Del'Hospital

παράδειγμα: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$.

Θέτω $f(x) = e^x + e^{-x} - 2\sigma\upsilon\nu x$, $g(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(e^x + e^{-x} - 2\sigma\upsilon\nu x) = e^0 + e^0 - 2\sigma\upsilon\nu 0 = 1+1-2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(1 - \sigma\upsilon\nu x) = 1 - \sigma\upsilon\nu 0 = 1 - 1 = 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ (1).

~~f,g παραγωγίσιμες στο $\Pi(0) = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$~~
~~με $f'(x) = e^x - e^{-x} + 2\eta\mu x$, $g'(x) = \eta\mu x$~~

f,g παραγωγίσιμες με $f'(x) = e^x - e^{-x} + 2\eta\mu x$, $g'(x) = \eta\mu x$ στο $\Pi(0) = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ και $\forall x \in \Pi(0)$, $g'(x) \neq 0$. (2).

• Πρώτα βρίσκω τις παραγώγους και ύστερα παίρνω διάστημα $\Pi(0)$.

Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ το οποίο θα δειχθεί (3).

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ ισχύει ο Del' Hospital $\Rightarrow y = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2\text{συν}x}{1-\text{συν}x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}+2\text{ημ}x}{\text{ημ}x}$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} (e^x-e^{-x}+2\text{ημ}x) = e^0-e^0+2\text{ημ}0 = 1-1+2\cdot 0 = 0\\ &\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} (\text{ημ}x) = \text{ημ}0 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} g'(x) = 0. \quad (1).$$

$f'(x) = e^x-e^{-x}+2\text{ημ}x$ παραγωγίσιμες με $f''(x) = e^x+e^{-x}+2\text{συν}x$

$g'(x) = \text{ημ}x$ και $g''(x) = \text{συν}x$

στο $n(0) = \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)\cup\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ στο οποίο $g''(x)\neq 0,\ \forall x\in n(0)$. (2)

Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ το οποίο θα δειχθεί (3).

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ ισχύει ο Del' Hospital $\Rightarrow y = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}+2\text{ημ}x}{\text{ημ}x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}+2\text{συν}x}{\text{συν}x} =$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}+2\text{συν}x)}{\lim_{x\to 0}(\text{συν}x)} = \frac{e^0+e^0+2\text{συν}0}{\text{συν}0} = \frac{1+1+2\cdot 1}{1} = 4.$$

- <u>Παρατήρηση - προσοχή</u>: Ο Del' Hospital δεν καταργεί όσα μάθαμε στο κεφάλαιο των ορίων:

$\lim_{x\to(k\pi+\pi/2)^-} \text{εφ}x = +\infty$, $\lim_{x\to(k\pi+\pi/2)^+} \text{εφ}x = -\infty$, $\lim_{x\to(k\pi)^+} \text{σφ}x = +\infty$, $\lim_{x\to(k\pi)^-} \text{σφ}x = -\infty$.

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{ημ}x}{x} = 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{εφ}x}{x}$, ~~lim~~

$\alpha > 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty \wedge \lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$, $0<\alpha<1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0 \wedge \lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$.

$\lim_{x\to 0} \ln x = 0 \wedge \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

<u>2η περίπτωση</u>: Μορφή $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $\mapsto$ εφαρμόζω κατευθείαν Del' Hospital.

<u>παράδειγμα</u>: $y = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x+1}$

Θέτω $f(x) = \ln(1+e^x)$, $g(x) = x+1$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}(1+e^x)\right] = \ln\left[1+\lim_{x\to+\infty} e^x\right] = +\infty.\\ &\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty. \quad (1)$$

Οι $f(x)=\ln(1+e^x)$ παραγωγίσιμες με $f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

$g(x)=x+1$ $\qquad g'(x)=1$

στο $\Pi(+\infty)=\mathbb{R}$. στο οποίο $g'(x)\neq 0, \forall x\in \Pi(0)$

Υπαρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ το οποίο θα δειχθεί (3)

(1),(2),(3) ⟹ ισχύει ο Del'Hospital ⟹ $y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}$

Θέτω $f_1(x)=e^x$, $g_1(x)=1+e^x$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g_1(x)=+\infty.$ (4).

f_1, g_1 παραγωγίσιμές με $f_1'(x)=e^x$, $g_1'(x)=e^x$. στο $\Pi(0)=\mathbb{R}$ στο οποίο $g_1'(x)\neq 0$, $\forall x\in\Pi(0)$. (5)

Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_1'(x)}{g_1'(x)}$ το οποίο θα δειχτεί (6).

(4),(5),(6) ⟹ ισχύει ο Del'Hospital ⟹ $y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$.

<u>$3^η$ περίπτωση</u> : Μορφή $\infty-\infty$ ⟶ κάνω πράξεις και έρχεται στην μορφή $0/0$ ή ∞/∞.

<u>παράδειγμα</u> : $y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\eta\mu^2 x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{DH}{=}$

$=\cancel{\lim\limits_{x\to 0}\ 2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^4}\cdot\dfrac{x^2}{\eta\mu^2 x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\eta\mu^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}}_{1}\right)^2}=$

<u>παράδειγμα</u> : $y=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

$y=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\dfrac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{D.H.}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}$

4η περίπτωση : Μορφή $0\cdot\infty \longrightarrow \underset{0}{f}\cdot\underset{+\infty}{g} = \begin{cases} \dfrac{g}{\frac{1}{f}} = \dfrac{\infty}{\infty} = \dots \\[2ex] \dfrac{f}{1/g} = \dfrac{0}{0} = \dots \end{cases}$

παράδειγμα βλ. φυλλάδια....

• Ο Del'Hospital έχει εφαρμογή στην παραγώγιση συναρτήσεων πολλαπλού τύπου.

παράδειγμα : Να βρεθεί η παράγωγος της

$$f: f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x} & , x\in(-\infty,0) \\ x^3-1 & , x\in[0,+\infty). \end{cases}$$

Λύση

Στο $(-\infty,0)$, $f(x) = -\dfrac{\eta\mu x}{x}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} = \dfrac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

Στο $(0,+\infty)$, $f(x) = x^3-1$ παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2$.

Στο $x_0 = 0$. $f(0) = -1$

$$\forall x\in(-\infty,0): \lambda(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-\frac{\eta\mu x}{x}+1}{x} = \frac{x-\eta\mu x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to0^-}\lambda(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{x-\eta\mu x}{x^2} \overset{D.H}{=}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2x} \overset{D.H.}{=} \lim_{x\to0^-}\frac{\eta\mu x}{2} = \frac{\eta\mu 0}{2} = 0. = f'_\alpha(0)$$

$$\forall x\in(0,+\infty): \lambda(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3-1+1}{x} = x^2 \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\lambda(x) = \lim_{x\to0^+}x^2 = 0 = f'_\delta(0).$$

$f'_\alpha(0) = f'_\delta(0) = 0 \Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$.

ΑΡΑ.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} & , x\in(-\infty,0) \\ 0 & , x=0 \\ 3x^2 & , x\in(0,+\infty) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} & , x\in(-\infty,0) \\ 3x^2 & , x\in[0,+\infty). \end{cases}$$

▼ Θεωρητικές ασκήσεις επανάληψης

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

① **Μονοτονία συνάρτησης** : βρίσκεται·

i) Με τον ορισμό $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \gtrless f(x_2)\ ,\ \forall x_1, x_2 \in A$.

ii) Με τον λόγο μεταβολής $\lambda = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$

iii) **Μονοτονία βασικών συναρτήσεων**·

a) **Ομοπαραλληλική**·

$f(x) = ax + b$. Αν $a>0 \Rightarrow f \nearrow$
ΠΟ: $A=\mathbb{R}$. $\quad a<0 \Rightarrow f \searrow$
$a = b \Rightarrow f$ σταθερή

β) $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Αν $a>0 \Rightarrow f \searrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \wedge f \nearrow$ στο $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ $\quad a<0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \wedge f \searrow$ στο $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$

γ) $f(x) = \dfrac{a}{x}$ Αν $a>0 \Rightarrow f \searrow$ στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$
ΠΟ: $A=\mathbb{R}^*$ $\quad a<0 \Rightarrow f \nearrow$ στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

δ) $f(x) = a^x$ Αν $a>1 \Rightarrow f \nearrow$
Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ $\quad 0<a<1 \Rightarrow f \searrow$
$a=1 \Rightarrow f$ σταθερή.

ε) $f(x) = \log_a x$ $\quad a>1 \Rightarrow f \nearrow$
Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ $\quad 0<a<1 \Rightarrow f \searrow$
$a=1 \Rightarrow f$ σταθερή.

- Η μονοτονία μίας συνάρτησης εξαρτάται από <u>το πρόσημο της f'.</u> ως εξής

Θ1)

> Έστω f παραγωγίσιμη στο Δ.
> $f \nearrow$ στο $\Delta \Leftrightarrow \forall x \in \Delta : f'(x) \geq 0$
> $f \searrow$ στο $\Delta \Leftrightarrow \forall x \in \Delta : f'(x) \leq 0$.

Απόδειξη :

<u>Ευθύ</u> : Έστω $f \nearrow \Rightarrow \forall x, x_0 \in \Delta,\ x \neq x_0 : \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (1)$.

f παραγωγίσιμη στο $\Delta \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\ ,\ \forall x_0 \in \Delta$.

<u>Αντίστροφο</u> : Έστω $f'(x) \geq 0\ ,\ \forall x \in \Delta$. (1)

$\forall x_1, x_2 \in \Delta \rightarrow [x_1, x_2] \subseteq \Delta$
f παραγωγίσιμη στο Δ $\Bigg\} \Rightarrow \Bigg\{$ f συνεχής στο $[x_1, x_2]$, f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Στο $[x_1,x_2]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ $\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_1,x_2): f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x} \overset{(1)}{>} 0\ ,\ \forall x_1,x_2\in\Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow f\uparrow$ στο Δ.

Ομοια όταν $f\downarrow$ στο Δ.

Θ$_2$)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν } f \text{ παραγωγίσιμη στο } \Delta\\ \forall x\in\Delta: f'(x)>0 \Longrightarrow f\uparrow \text{ στο } \Delta\\ \forall x\in\Delta: f'(x)<0 \Longrightarrow f\downarrow \text{ στο } \Delta.\end{array}}$$

(το αντίστροφο δεν ισχύει)

<u>Απόδειξη</u>

$\forall x\in\Delta: f'(x)>0.$ (1)

$\left.\begin{array}{l}\forall x_1,x_2\in\Delta\Rightarrow[x_1,x_2]\subseteq\Delta\\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } \Delta\end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [x_1,x_2]\\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x_1,x_2)\end{array}\right\}\Rightarrow$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $[x_1,x_2]\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\,\xi\in(x_1,x_2): f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-1} \underset{(1)}{>} 0\ ,\ \forall x_1,x_2\in\Delta \Rightarrow f\uparrow$ στο Δ.

<u>Παραδείγματα</u> : Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία.

1) $f(x)=x^4-8x^2+17$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με $f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)$.

x		-2		0		2	
$4x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

Στο $(-\infty,-2)$ $f\downarrow$
Στο $(-2,0)$ $f\uparrow$
Στο $(0,2)$ $f\downarrow$
Στο $(2,+\infty)$ $f\uparrow$.

2) $f(x)=\ln x-x$

Π.Ο. Πρέπει $x>0 \Leftrightarrow$ ~~$A=\mathbb{R}$~~ $A=(0,+\infty)$

f παραγωγίσιμη στο A με $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

x		0		1	
$1-x$			$+$	0	$-$
x		$\|\|$	$+$		$+$
f'		$\|\|$	$+$	0	$-$
f			$\nearrow$		$\searrow$

Στο $(0,1)$ $f\uparrow$
Στο $(1,+\infty)$ $f\downarrow$.

3) $f(x)=e^x-x$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x-1$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

x		0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$		$\uparrow$

4) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Π.Ο. Πρέπει $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \Leftrightarrow A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

f παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$. $f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow x<0$.

x		-1		1	
f'	$-$				$+$
f	$\downarrow$				$\uparrow$

Στο $(-\infty,-1)$, $f\downarrow$

Στο $(1,+\infty)$, $f\uparrow$.

$\leftarrow$ <u>Προσοχή</u>: Στον πίνακα να φαίνεται <u>όλο</u> το πεδίο ορισμού A.

- Σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου, βρίσκω την παράγωγο στα ανοικτά διαστήματα, <u>δίχως</u> να χρειάζεται να εξετάσω τα συνοριακά σημεία

5) $f(x)=2x^2+|x^2-x|$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

x		0		1	
x^2-x	$+$	0	$-$	0	$+$

$\forall x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \Rightarrow x^2-x>0 \Rightarrow f(x)=2x^2+x^2-x=3x^2-x$.

$\forall x\in(0,1) \Rightarrow x^2-x<0 \Rightarrow f(x)=2x^2-x^2+x=x^2+x$

Άρα $f(x)=\begin{cases} 3x^2-x, & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \\ x^2+x, & x\in(0,1) \end{cases}$

Στο $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ $f(x)=3x^2-x$ παραγωγίσιμη με $f'(x)=6x-1$

Στο $(0,1)$ $f(x)=x^2+x$ παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x+1$.

x		$-1/2$		0		$1/6$		1	
$6x-1$	$-$		$-$			0			$+$
$2x+1$		0			$+$		$+$		
f'	$-$	0	$-$		$+$	0	$+$		$+$
f	↘		↘		↗		↗		↗

Στο $(-\infty,0)$, $f\downarrow$
Στο $(0,1)$, $f\uparrow$
Στο $(1,+\infty)$, $f\uparrow$.

▼Ακρότατα συνάρτησης

Θ1) Εστω f παραγωγίσιμη στο (a,b) : $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ με $f'(x_0)=0$, $x_0\in(a,b)$

1) $\left.\begin{array}{l} f'(x)\geq 0, \forall x\in(a,x_0] \\ f'(x)\leq 0, \forall x\in[x_0,b) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Η f έχει στο x_0 τοπικό max. το $f(x_0)$

2) $\left.\begin{array}{l} f'(x)\leq 0, \forall x\in(a,x_0] \\ f'(x)\geq 0, \forall x\in[x_0,b) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Η f έχει στο x_0 τοπικό min το $f(x_0)$

Απόδειξη

Θα δείξω το 1).

$f'(x)\geq 0, \forall x\in(a,x_0] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f\uparrow \text{ στο } (a,x_0] \\ x\leq x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\leq f(x_0), \forall x\in(a,x_0]$

$f'(x)\leq 0, \forall x\in[x_0,b) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f\downarrow \text{ στο } [x_0,b) \\ x\geq x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\leq f(x_0), \forall x\in[x_0,b)$

$\Rightarrow f(x)\leq f(x_0), \forall x\in(a,b) \Rightarrow$ Η f έχει στο x_0 τοπικό max το $f(x_0)$.

Ομοια αποδεικνύεται το 2).

Θ2) Εστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Delta=(a,b)$ ($a,b\in\overline{\mathbb{R}}$) και $f'(x_0)=0$, $x_0\in\Delta$.

1) $f''(x_0)>0 \Leftrightarrow$ Η f έχει στο x_0 τοπικό min το $f(x_0)$

2) $f''(x_0)<0 \Leftrightarrow$ Η f έχει στο x_0 τοπικό max το $f(x_0)$

Απόδειξη

f δύο φορες παραγωγίσιμη $\Rightarrow f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-\overset{0}{f'(x_0)}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

1) Αν $f''(x_0)>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0 \Rightarrow \exists\, n(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$: $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow x-x_0<0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(x)<0, \forall x\in(x_0-\delta,x_0) \\ x\in(x_0,x_0+\delta)\Rightarrow x-x_0>0 \Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in(x_0,x_0+\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Στο x_0, η f έχει min το $f(x_0)$.

2) Ομοια εργάζομαι σε αυτή την περίπτωση

Πιθανά ακρότατα

Έστω f συνάρτηση με Π.Ο. μια ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων.
Τα πιθανά ακρότατα αναζητούνται στις εξής τρεις κατηγορίες σημείων του Π.Ο της f.

1) Στα σημεία ανάκαμψης → δηλαδή στα σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται αλλά είναι συνεχής.
2) Στα άκρα κλειστών διαστημάτων, δηλαδή στα ακραία σημεία του Π.Ο. της f.
3) Στις ρίζες της f' που είναι εσωτερικά σημεία του Π.Ο. της f.

→ Μέθοδος: Για να διαπιστώσω αν ένα πιθανό ακρότατο είναι ακρότατο δουλεύω ως εξής:

Παραδείγματα

1) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$. Π.Ο. Πρέπει $x^2 \geq 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x)=(x^{2/5})'=\begin{cases}\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}, & x\in(0,+\infty)\\[2mm] \dfrac{-2}{5\sqrt[5]{|x|^3}}, & x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

$$\frac{2}{5}\frac{1}{x^{3/5}}$$

Σκέψη

- f συνεχής στο $x_0=0$, αλλά όχι παραγωγίσιμη $\Rightarrow x_0=0$ σημείο ανάκαμψης.
- Το Π.Ο. $A=(-\infty,+\infty)$ δεν έχει ακραία σημεία
- $f'(x)\neq 0, \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \Rightarrow$ Η f' δεν έχει ρίζες

ΑΡΑ: Πιθανό ακρότατο έχω μόνο στο $x_0=0$ που είναι σημείο ανάκαμψης.

Διαπίστωση

α' τρόπος: Από το πρόσημο της f' συμπεραίνω ότι η f έχει (ολικό) min στο $x_0=0$ το $\varepsilon=f(0)=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	ǁ	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\varepsilon=0$	$\nearrow$	$+\infty$

β' τρόπος: Με τον ορισμό, επειδή $f(0)=0\leq\sqrt[5]{x^2}=f(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(0)\leq f(x), \forall x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ στο x_0 η f έχει ολικό min το $f(0)=0$.

2) $f(x)=x^2-2x+3$ στο $A=[-1,0]\cup[2,4)$

f παραγωγίσιμη στο A με $f'(x)=2x-2$.

- $\nexists$ σημεία ανάκαμψης διότι η f παραγωγίζεται σ'όλο το A.
- Τα $-1,0,2$ είναι ακραία σημεία του A

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \notin A \Rightarrow$ Η f' δεν έχει ρίζες στο A

Άρα πιθανά ακρότατα έχω μόνο στα $-1, 0, 2$

Απο το πρόσημο της f'

x		-1		0	1	2		4	
f'			$-$				$+$		
f			$\searrow$				$\nearrow$		
		$\mu=6$		$\varepsilon=3$		$\varepsilon=3$			

Η f έχει min στο 0 το $f(0)=0-0+3=3$

Η f έχει max στο -1 το $f(-1)=(-1)^2-2(-1)+3=1+2+3=6$.

Η f έχει min στο 2 το $f(2)=4-4+3=3$

3) $f(x)=x^4-5x^2+6$.

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με $f'(x)=4x^3-10x$

• f παραγωγίσιμη σ'όλο το $\mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ σημεία ανάκαμψης.

• Το Π.Ο. $A=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ δεν έχει ακραία σημεία.

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-10x=0 \Leftrightarrow 2x(2x^2-5)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \vee 2x^2-5=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

Άρα πιθανά ακρότατα είναι τα σημεία $0, \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-5$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			$\varepsilon=\frac{-1}{4}$		$\mu=6$		$\varepsilon=-\frac{1}{4}$		

Η f έχει min στο $x=\frac{-\sqrt{10}}{2}$ το $f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^4-5\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+6=\frac{100}{16}-\frac{50}{4}+6=$

$=\frac{25}{4}-\frac{50}{4}+6=\frac{25-50+24}{4}=\frac{-1}{4}$

Η f έχει max στο $x=0$ το $f(0)=6$

Η f έχει min στο $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$ το $f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ (διότι f άρτια)

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^4-5x^2+6)=\lim_{x\to-\infty} x^4=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^4-5x^2+6)=\lim_{x\to+\infty} x^4=+\infty$.

4) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

Π.Ο. Πρέπει $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,2] \Leftrightarrow A=[-2,2]$.

x		-2		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

f παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ με $f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$

$= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

- f συνεχής στο $[-2,2]$ αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x=-2$, $x=+2 \Rightarrow +2,-2$ σημεία ανάκαμψης.
- $-2, 2$ είναι ακραία σημεία το Π.Ο. $A=[-2,2]$.
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 4-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2-2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2} \in (-2,2)$ δεκτές.

Άρα πιθανά ακρότατα στα $-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$.

x		-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2	
$4-2x^2$			$-$	0	$+$	0	$-$		
$\sqrt{4-x^2}$		0	$+$		$+$		$+$	0	
f'		$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	
f		0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	
		$\mu=0$		$\varepsilon=-2$		$\mu=2$		ε	

Η f έχει max στο $x=-2$ το $f(-2) = -2\sqrt{4-4} = 0$.

Η f έχει min στο $x=-\sqrt{2}$ το $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4-2} = -2$

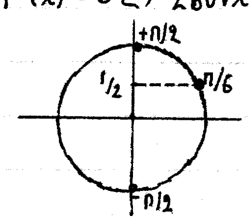
Η f έχει max στο $x=\sqrt{2}$ το $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-2} = +2$

Η f έχει min στο $x=2$ το $f(2) = 2\sqrt{4-4} = 0$.

5) $f(x) = 2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x + 3$ στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

f παραγωγίσιμη στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με $f'(x) = 4\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x - 1)$.

- f παραγωγίσιμη σ'όλο το Π.Ο. $\Rightarrow \nexists$ σημεία ανάκαμψης.
- Τα $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ είναι ακραία σημεία του Π.Ο.
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x-1)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \lor \eta\mu x = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2} \lor x=\frac{\pi}{6}$



Άρα πιθανά ακρότατα στα $\pm\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$

$\sigma\upsilon\nu x > 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right): -\pi/2 < x < \pi/6 \Rightarrow -1 < \eta\mu x < \frac{1}{2}$ ($\eta\mu \nearrow$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$) $\Rightarrow -2 < 2\eta\mu x < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\eta\mu x - 1 < 0$

$\forall x \in \left(+\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right): \pi/6 < x < \pi/2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu x < 1$ ($\eta\mu \nearrow$ στο $(\pi/6, \pi/2)$) $\Rightarrow 1 < 2\eta\mu x < 2 \Rightarrow 2\eta\mu x - 1 > 0$.

Αρα

x	$-\pi/2$		$\pi/6$		$\pi/2$
$2\sigma\upsilon\nu x$	0	+		+	0
$2\eta\mu x-1$		−	0	+	
f'	0	−	0	+	0
f		↘		↗	
	$\mu=7$		$\varepsilon=\frac{5}{2}$		μ

Η f έχει max στο $x=-\frac{\pi}{2}$ το $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\eta\mu^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 2\cdot 1 - 2(-1) + 3 = 7$.
Η f έχει min στο $x=\frac{\pi}{6}$ το $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\eta\mu^2\frac{\pi}{6} - 2\eta\mu\frac{\pi}{6} + 3 = 2\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$
Η f έχει max στο $x=\frac{\pi}{2}$ το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\eta\mu^2\frac{\pi}{2} - 2\eta\mu\frac{\pi}{2} + 3 = 2 - 2 + 3 = 3$

→ Το 2ο κριτήριο δεν συμφέρει διότι 1) Δύσκολα βγαίνει το f'' (μερικές φορές)
2) Αν τύχει $f''(x_0)=0$ τότε δεν μπορώ να πω αν έχω max ή min. και πάω στο πρώτο κριτήριο.

Συνήθως χρησιμοποιείται σε πολυωνυμικές συναρτήσεις και σε συναρτήσεις με άπειρα ακρότατα.

σ) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f δύο φορές παραγωγίσιμη με
$f'(x) = 3x^2 - 4x$
$f''(x) = 6x - 4$

- f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ σημεία ανάκαμψης.
- Το Π.Ο. $A=(-\infty, +\infty)$ δεν έχει ακραία σημεία.
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(3x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 3x-4=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{4}{3}$.

Αρα η f έχει πιθανά ακρότατα στα $0, \frac{4}{3}$.

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ Η f έχει στο $x=0$ max το $f(0)=1$

$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6\cdot\frac{4}{3} - 4 = \frac{24-12}{3} = \frac{12}{3} = 4 > 0 \Rightarrow$ Η f έχει στο $x=\frac{4}{3}$ min το $f\left(\frac{4}{3}\right) =$
$= \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{64}{27} - 2\cdot\frac{16}{9} + 1 = \frac{64-96+27}{27} = \frac{-5}{27}$

7) $f(x) = x - ημ2x$

Π.Ο $A=\mathbb{R}$ στο οποίο f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 1 - 2συν2x$

- f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ σημεία ανάκαμψης.
- Το Π.Ο. $A=(-\infty,+\infty)$ δεν έχει ακραία σημεία.
- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2συν2x=0 \Leftrightarrow συν2x = \frac{1}{2} = συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow 2x = 2κπ \pm \frac{π}{3} \Leftrightarrow x = κπ \pm \frac{π}{6}$, $κ\in\mathbb{Z}$.

Άρα η f έχει πιθανά ακρότατα στα σημεία $x = κπ \pm \frac{π}{6}$, $κ\in\mathbb{Z}$.

f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 4ημ2x$.

$f''(κπ+\frac{π}{6}) = 4ημ\left[2(κπ+\frac{π}{6})\right] = 4ημ(2κπ+\frac{π}{3}) = 4ημ\frac{π}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow$ Η f έχει στα $x=κπ+\frac{π}{6}$ min τα $f(κπ+\frac{π}{6}) = (κπ+\frac{π}{6}) - ημ\left[2(κπ+\frac{π}{6})\right] = κπ+\frac{π}{6} - ημ(2κπ+\frac{π}{3}) =$

$= κπ+\frac{π}{6} - ημ\frac{π}{3} = κπ+\frac{π}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$f''(κπ-\frac{π}{6}) = 4ημ\left[2(κπ-\frac{π}{6})\right] = 4ημ(2κπ-\frac{π}{3}) = -4ημ\frac{π}{3} = -4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow$

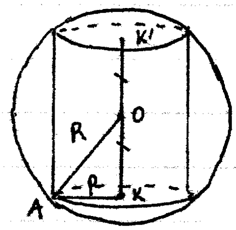
$\Rightarrow$ Η f έχει στα $x=κπ-\frac{π}{6}$ max τα $f(κπ-\frac{π}{6}) = (κπ-\frac{π}{6}) - ημ\left[2(κπ-\frac{π}{6})\right] =$

$= κπ-\frac{π}{6} - ημ(2κπ-\frac{π}{3}) = κπ-\frac{π}{6} + ημ\frac{π}{3} = κπ-\frac{π}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

▼Γεωμετρικά max-min

<u>παράδειγμα</u>: Δίνεται σφαίρα ακτίνας $R=3$. Να εγγράψετε ορθό κύλινδρο που να έχει μέγιστο όγκο.

<u>Λύση</u> Έστω ένας τέτοιος κύλινδρος.



$V_K = E_{βασ}\cdot υ = πρ^2υ$.

Θέτω $x = OK \Rightarrow \begin{cases} υ = K'K = 2x \\ ρ = \sqrt{R^2-x^2} = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow ρ^2 = 9-x^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_K(x) = 2πx(9-x^2) \ : \ x\in(0,3)$

V_K παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ με

$V'_K = 2π(9-x^2) + 2πx(-2x) = 18π - 2πx^2 - 4πx^2 = 18π - 6πx^2 = 6π(3-x^2)$

- V_K παραγωγίσιμη σ'όλο το Π.Ο. της $\Rightarrow \nexists$ σημεία ανάκαμψης.
- Το Π.Ο. $A=(0,3)$ δεν έχει ακραία σημεία
- $V'_K(x)=0 \Leftrightarrow 6π(3-x^2)=0 \Leftrightarrow 3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} = \begin{cases} +\sqrt{3} \leftarrow \text{δεκτή} \\ -\sqrt{3} \leftarrow \text{απορ.} \end{cases}$

Άρα πιθανά ακρότατα έχω στο $\sqrt{3}$.

x	$-\sqrt{3}$	0		$\sqrt{3}$		3
V_K'		‖	$+$	0	$-$	‖
V_K		‖	$\nearrow$		$\searrow$	‖

Η V_K έχει στο $x_0=\sqrt{3}$ max το $V_K(\sqrt{3}) = 2\pi\sqrt{3}(9-3) = 12\sqrt{3}\pi \Rightarrow$ Άρα για $x=\sqrt{3}$ έχω τον μέγιστο όγκο.

ΑΡΑ: $\upsilon = 2x = 2\sqrt{3}$, $\rho = \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$.

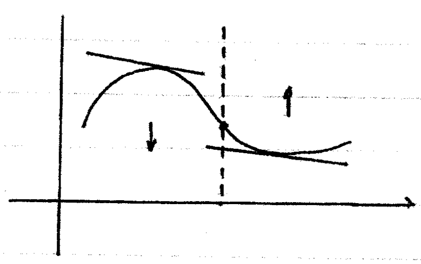
▼ Κοίλα της γραφικής παράστασης

↦ Εξαρτώνται από το πρόσημο της f'' ως εξής:

1) Αν $\forall x \in \Delta : f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ.
Δηλαδή η γραφική παράσταση της f είναι "πάνω" από την εφαπτόμενη της σε οποιοδήποτε σημείο της (κυρτή $\cup$)

2) Αν $\forall x \in \Delta : f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ
Δηλαδή η γραφική παράσταση της f είναι "κάτω" από την εφαπτόμενη της σε οποιοδήποτε σημείο της (κοίλη $\cap$).

- •1 $f' \uparrow$ στο $\Delta \Rightarrow f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ κυρτή
- •2 $f' \downarrow$ στο $\Delta \Rightarrow f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ κοίλη.



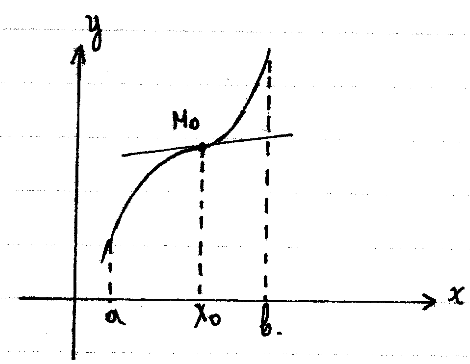
▼ Σημεία καμπής

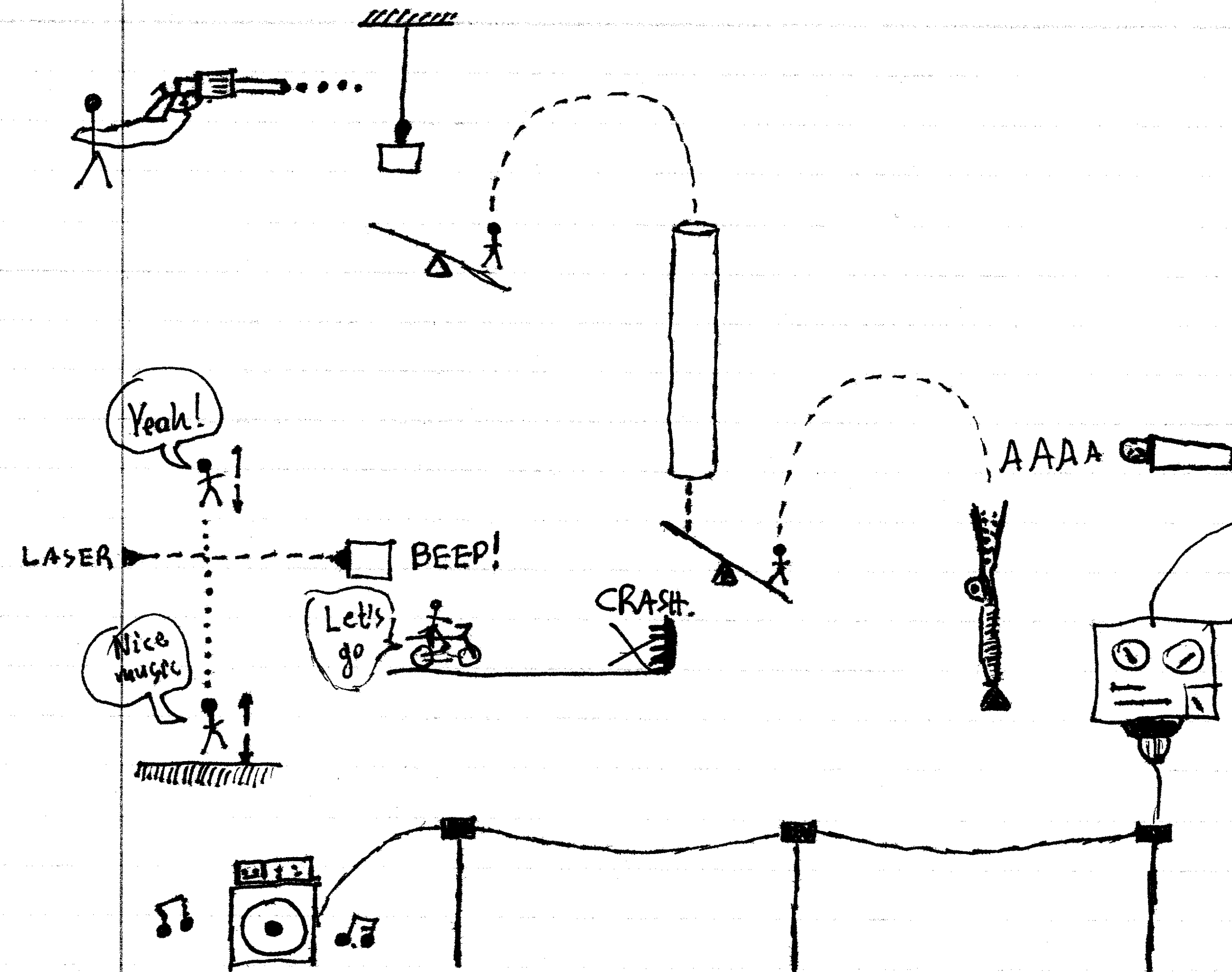
Πιθανά σημεία καμπής είναι •1 Οι ρίζες της f''
•2 Τα σημεία ανάκαμψης της f.

• Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν ενός πιθανού σημείου καμπής x_0 τότε η f θα παρουσιάζει καμπή στο x_0.

Γεωμετρική ερμηνεία

Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(a, x_0]$ και άνω στο $[x_0, b)$
ή άνω στο $(a, x_0]$ και κάτω στο $[x_0, b)$
Δηλ. και στις δύο περιπτώσεις, η εφαπτόμενη της (c) στο x_0 διαπερνά την γραφική παράσταση της f.





Yeah!
LASER
BEEP!
Let's go
CRASH.
Nice music
AAAA