ΑΝΑΛΥΣΗ Αποδείξεις - Βασικές.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ανισοτικές σχέσεις

•1 Ανισότητα Bernoulli

Αν $a > -1$ και $v \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow (1+a)^v \geq 1 + va$

- Η ισότητα ισχύει όταν $a=0$ ή όταν $v=1$
- Η σχέση επίσης ισχύει για $a=-1$ και $v \in \mathbb{N}^*$

Απόδειξη: Εστω $a > -1$.

Για $v=0$, $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a \Leftrightarrow$ ($a \neq -1$)

$\Leftrightarrow 1 \geq 1$ ισχύει

Εστω ότι ισχύει για $v=k$, δηλαδή $(1+a)^k \geq 1 + ka$ (1)

Θα δείξω ότι ισχύει και για $v=k+1$, $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$.

υποθ → $(1+a)^k \geq 1+ka$
$a > -1 \Rightarrow 1+a > 0$
$\Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a) = 1+a+ka+ka^2 =$

$= 1+(k+1)a + ka^2 \geq 1+(k+1)a \Rightarrow$

διοτι $ka^2 \geq 0$ ως ~~δε~~γινόμενο μη αρνητικο~~θετικού~~ με τέλειο τετράγωνο.

$\Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$ (λόγω της μεταβατικής).

αρα ισχύει για $v=k+1$ και επαγωγικά, ισχύει $\forall v \in \mathbb{N}$.

•2 Ανισότητα Weierstrass

Αν $a_i \in \mathbb{R}_+^*$ και $v \geq 2$ $\Rightarrow \prod_{i=1}^{v}(1+a_i) > 1 + \sum_{i=1}^{v} a_i$

Εστω $a_i \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$

Για $v=2$, $(1+a_1)(1+a_2) > 1+(a_1+a_2) \Leftrightarrow 1+a_1+a_2+a_1a_2 > 1+a_1+a_2 \Rightarrow a_1a_2 > 0$

ισχύει ως γινόμενο θετικών

Εστω ότι ισχύει για $v=k$: $\prod_{i=1}^{k}(1+a_i) > 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i$.

Θα δειξω ότι ισχύει για $v=k+1$.

$a_{k+1} \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow 1+a_{k+1} > 0$
υποθ → $\prod_{i=1}^{k}(1+a_i) > 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i$
$\Rightarrow (1+a_{k+1}) \prod_{i=1}^{k}(1+a_i) > (1+a_{k+1})\left(1+\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) > 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} + a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) > 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i + \underbrace{a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i}_{+\ \text{διοτι}\ a_i \in \mathbb{R}_+^*} > 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) > 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \quad \text{(λόγω μεταβατικής).}$$

αρα ισχυει για $\nu = k+1$ άρα επαγωγικά, ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{Αν}\ \ 0 < a_i < 1,\ \forall i = 1,2,\dots,\nu \ \ \text{και}\ \ \nu \geq 2 \Rightarrow \prod_{i=1}^{\nu}(1-a_i) > 1 - \sum_{i=1}^{\nu} a_i}$$

Αποδειξη: Εστω $0 < a_i < 1,\ \forall i = 1,2,\dots,\nu$.

Για $\nu = 2$: $(1-a_1)(1-a_2) > 1-(a_1+a_2) \Leftrightarrow 1 - a_1 - a_2 + a_1 a_2 > 1 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 a_2 > 0$ ισχύει ως γινόμενο θετικών.

Εστω ότι ισχύει για $\nu = k$ $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1-a_i) > 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i$

Θα δείξω ότι ισχύει για $\nu = k+1$.

$0 < a_{k+1} < 1 \Rightarrow 0 > -a_{k+1} > -1 \Rightarrow 1 > 1 - a_{k+1} > 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 1 - a_{k+1} > 0 \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1-a_i) > 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i \end{array}\right\} \Rightarrow (1-a_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1-a_i) > (1-a_{k+1})\left(1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) > 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i - a_{k+1} + a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i = 1 - \sum_{i=1}^{k+1} a_i + \underbrace{a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i}_{+} > 1 - \sum_{i=1}^{k+1} a_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) > 1 - \sum_{i=1}^{k+1} a_i \quad \text{(λόγω μεταβατικής).}$$

αρα ισχυεί για $\nu = k+1$ αρα επαγωγικά, ισχυεί $\forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq 2$.

→ Αν $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_\nu = a$ τότε η ανισότητα του Weierstrass ανάγεται στην ανισότητα του Bernoulli.

Πεδίο τιμών συνάρτησης.

$\longrightarrow f(A)$: $\boxed{y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists\, x \in A : f(x) = y}$

Για να βρώ το Π.Τ. συνάρτησης $y = f(x)$ δουλεύω ως εξής:

- 1 Βρίσκω το Π.Ο A (αν δεν δίνεται)
- 2 Λύνω ως προς x και βρίσκω για ποιες τιμές του y η έκφραση για το x έχει νόημα.
- 3 Ελέγχω αν οι τιμές αυτές του y δίνουν $x \in A$.

① $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f(x) = ax + b \\ a \neq 0,\ A = \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow f(A) = \mathbb{R}}$

• Αν $a = 0 \Rightarrow f(A) = \{b\}$ (Όχι θεωρία).

Απόδειξη: Έστω y εικόνα του $x \Leftrightarrow y = ax + b \Leftrightarrow ax = y - b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Αν $a \neq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-b}{a}$, $\forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(A) = \mathbb{R}$ (διότι κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι εικόνα ενός $x \in A = \mathbb{R}$).

Αν $a = 0 \Leftrightarrow y = b \Leftrightarrow f(A) = \{b\}$.

- Σε περιορισμό $A \subset \mathbb{R}$, δουλεύω συνθετικά ως εξής:
  $x \in A \Longleftrightarrow p_1(x) \Longleftrightarrow p_2(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow p[f(x)] \Leftrightarrow p(y)$
  οπότε $f(A) = \{y : p(y)\}$.

$\longrightarrow$ Μαθηματικά αυτοσυνεπής είναι και ο παρακάτω ΓΕΝΙΚΟΣ τρόπος.

β' τρόπος : $\left.\begin{array}{l} y = f(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \varphi(y) \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(y) \in A \Rightarrow p(\varphi(y)) \Rightarrow \cdots \Rightarrow p'(y) \Rightarrow$

οπότε $f(A) = \{y : p'(y)\}$.

Προτιμότερος είναι ο συνθετικός τρόπος.

② $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \cancel{f(x)}\, y = ax^2 + bx + \gamma \\ a \neq 0,\ A = \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f(A) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right), & a > 0 \\ f(A) = \left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right], & a < 0 \end{cases}}$

Απόδειξη: Έστω y εικόνα του x.

$y = ax^2 + bx + \gamma \Leftrightarrow \underline{ax^2 + bx + \gamma - y = 0} \longleftarrow$ Διακρίνουσα Δ'

$y \in f(A)$ ↑ ισχύει $\cancel{} \Longleftrightarrow y = f(x) \Longleftrightarrow y \in f(A)$

$\cancel{x \in A \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow ax^2 + bx + \gamma - y = 0$ έχει πραγμ. ρίζες $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 - 4a(\gamma - y) \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4a\gamma + 4ay \geq 0 \Leftrightarrow \Delta + 4ay \geq 0 \Leftrightarrow 4ay \geq -\Delta$.

Αν $\alpha<0,\ 4\alpha y \geqslant -\Delta \Leftrightarrow y \leqslant -\frac{\Delta}{4\alpha} \Rightarrow y \in \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right]$

Αν $\alpha>0,\ 4\alpha y \geqslant -\Delta \Leftrightarrow y \geqslant -\frac{\Delta}{4\alpha} \Rightarrow y \in \left[-\frac{\Delta}{4\alpha}, +\infty\right)$

!●! Σε περιορισμό $A \subset \mathbb{R}$, δουλεύω συνθετικά, όπως στο διώνυμο χρησιμοποιώντας όμως, <u>μόνο</u> τον τύπο

$$\boxed{y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθει το Π.Ο της $f(x) = x^2 - 1$, αν $x \in (-5, 6]$

Λυση: Εστω y εικόνα του x: $y = x^2 - 1$ ← Είναι ήδη στην επιθυμητή μορφή

$x \in (-5,6] \Leftrightarrow -5 < x \leqslant 6 \Leftrightarrow -5 < x \leqslant 0 \vee 0 \leqslant x \leqslant 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x < 5 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 < 25 \Leftrightarrow -1 \leqslant x^2 - 1 < 24 \Leftrightarrow -1 \leqslant y < 24 \Leftrightarrow y \in [-1, 24) \\ 0 \leqslant x \leqslant 6 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 36 \Leftrightarrow -1 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 35 \Leftrightarrow -1 \leqslant y \leqslant 35 \Leftrightarrow y \in [-1, 35] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y \in [-1, 24) \cup [-1, 35] = [-1, +35] \Leftrightarrow f(A) = [-1, +35]$.

<u>Παραδείγμα</u>: Να βρεθει το Π.Ο. της $f(x) = 2x^2 + 3x$, αν $x \in [-1, 2)$

Λύση: Εστω y εικόνα του x: $y = 2x^2 + 3x = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$

$$\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{9}{8}$$

$x \in [-1, 2) \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 2 \Leftrightarrow -1 + \frac{3}{4} \leqslant x + \frac{3}{4} < 2 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leqslant x + \frac{3}{4} < \frac{11}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leqslant x + \frac{3}{4} \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant -\left(x + \frac{3}{4}\right) \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \leqslant \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \leqslant \frac{1}{16} \\ 0 \leqslant x + \frac{3}{4} < \frac{11}{4} \Leftrightarrow 0 \leqslant \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 < \frac{121}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 < \frac{121}{16} \Leftrightarrow 0 \leqslant 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 < \frac{121}{8} \Leftrightarrow -\frac{9}{8} \leqslant 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} < \frac{121}{8} - \frac{9}{8}$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{8} \leqslant y < \frac{112}{8} = 14 \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{9}{8}, 14\right) \Leftrightarrow f(A) = \left[-\frac{9}{8}, 14\right)$

③ Αν $f(x)=ax^\nu+b$, $a\neq 0$, $A=\mathbb{R}$ $\Rightarrow \begin{cases} \nu \text{ περιττός, } f(A)=\mathbb{R} \\ \nu \text{ άρτιος } \begin{cases} a>0 \Rightarrow f(A)=[b,+\infty) \\ a<0 \Rightarrow f(A)=(-\infty,b] \end{cases} \end{cases}$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω y εικόνα του x: $y=ax^\nu+b \Leftrightarrow ax^\nu=y-b \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x^\nu=\frac{y-b}{a}$

• Αν ν περιττός, $x^\nu=\frac{y-b}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[\nu]{\frac{y-b}{a}}, & \text{αν } \frac{y-b}{a}\geq 0 \text{ δηλ.} \\ x=\sqrt[\nu]{\frac{y-b}{a}}, & \text{αν } \frac{y-b}{a}<0 \end{cases}$

Όμως $\forall y\in\mathbb{R}$, $\frac{y-b}{a}\geq 0 \vee \frac{y-b}{a}<0$ δηλ. για $\forall y\in\mathbb{R}$ υπάρχει εικόνα $x\in A=\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=y$

άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

• Αν ν άρτιος, πρέπει $\underline{\frac{y-b}{a}\geq 0}$ (1) οπότε $x=\pm\sqrt[\nu]{\frac{y-b}{a}}$.

αν $a>0$, (1) $\Leftrightarrow y-b\geq 0 \Leftrightarrow y\geq b \Leftrightarrow y\, f(A)=[b,+\infty)$.

αν $a<0$, (1) $\Leftrightarrow y-b\leq 0 \Leftrightarrow y\leq b \Leftrightarrow f(A)=(-\infty,b]$

→ Οι αποδείξεις πρέπει να γίνονται με <u>διπλό</u> συνεπάγεται έτσι ώστε $\forall y: p(y)$ να υπάρχει $x\in A(=\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$.

④ Αν $f(x)=\frac{ax+b}{\gamma x+\delta}$, $A=\mathbb{R}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\}$ $\Rightarrow \begin{cases} D\neq 0 \Rightarrow f(A)=\mathbb{R}-\{\frac{a}{\gamma}\} \\ D=0 \Rightarrow f(A)=\{\frac{a}{\gamma}\} \end{cases}$, όπου $D=\begin{vmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=a\delta-b\gamma$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω y εικόνα του $x\in A$, $y=\frac{ax+b}{\gamma x+\delta} \Leftrightarrow y\gamma x+y\delta=ax+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{(y\gamma-a)x=b-y\delta}$ (1) Έστω <u>$D\neq 0$.</u>

•1 Αν $y\gamma-a=0 \Leftrightarrow y=\frac{a}{\gamma}$, (1) $\Leftrightarrow 0x=b-\frac{a\delta}{\gamma} \Leftrightarrow 0x=b\gamma-a\delta=-D\neq 0$ ← Αδύνατη.

Άρα, για $y=\frac{a}{\gamma}$, $\nexists x\in A: f(x)=y$ άρα $\frac{a}{\gamma}\notin f(A)$.

•2 Αν $y\gamma-a\neq 0 \Leftrightarrow y\neq\frac{a}{\gamma}$, (1) $\Leftrightarrow x=\frac{b-y\delta}{y\gamma-a}$ άρα $\exists x\in A: f(x)=y$ άρα $y\in f(A)$
↳ (...)

$(\ldots) \mapsto$ Αν $x \notin A \Leftrightarrow x = -\dfrac{\delta}{\gamma} \Leftrightarrow \dfrac{\beta - y\delta}{y\gamma - a} = -\dfrac{\delta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta\gamma - y\gamma\delta = -y\gamma\delta + a\delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0y = a\delta - \beta\gamma = D \neq 0 \leftarrow$ Άτοπο, άρα $x \in A$.

Απο τα παραπάνω συμπεραίνω ότι $f(A) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{\gamma}\right\}$

• Ειδικά αν $D = 0 \Leftrightarrow a\delta - \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow a\delta = \beta\gamma \Leftrightarrow \dfrac{a}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta} = \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda\gamma \\ \beta = \lambda\delta \end{cases}$

άρα $f(x) = \dfrac{ax + \beta}{\gamma x + \delta} = \dfrac{\lambda\gamma x + \lambda\delta}{\gamma x + \delta} = \dfrac{\lambda(\gamma x + \delta)}{\gamma x + \delta} = \lambda = c^{te} \Rightarrow$

οπότε $f(A) = \{\lambda\} = \left\{\dfrac{a}{\gamma}\right\}$.

B. Σε ρητές συναρτήσεις $\boxed{f(x) = \dfrac{a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0}{\beta_\mu x^\mu + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}}$

1) Σε ανάγωγο κλάσμα

•1 Αφού βρω το A, λύνω ως προς x και σχηματίζω εν'γένει μία δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής

$$a(y)x^2 + \beta(y)x + \gamma(y) = 0 \quad (1)$$

•2 Διακρίνω τις παρακάτω περιπτώσεις:

1) $a(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_1 \dots$. Τότε $(1) \Rightarrow x = -\dfrac{\gamma(y)}{\beta(y)}$

Θέτω $y = y_{1,2,\dots,\nu}$ και παίρνω τα αντίστοιχα $x = \rho_{1,2,\dots,\nu}$ οπότε, αν

i) $\exists\, \rho_i \in A \Leftrightarrow$ Για $y = y_i$ υπάρχει $x = \rho_i : y = f(x) \Leftrightarrow y_i \in f(A)$

ii) $\rho_i \notin A \Leftrightarrow$ Για $y = y_i$ δεν υπάρχε $x = \rho_i : y = f(x) \Leftrightarrow y_i \notin f(A)$
$\forall i$

Έτσι βρίσκω μερικά στοιχεία του $f(A)$.

2) $a(y) \neq 0$. Για να υπάρχει $x : f(x) = y$ πρέπει $a(y)x^2 + \beta(y)x + \gamma(y) = 0$ (2) να έχει ρίζες πραγματικές $\Leftrightarrow$ Πρέπει $\Delta \geq 0$ άρα βρίσκω τα y
* (ή πιο σωστά $\rho \in A$) *(απο τις κατάλληλες συνθήκες)
όρια του y και σε συνδυασμό με το 1) το $f(A)$.

(3) Θέτω όπου x, τα $x \notin A$ (αυτά που μηδ. παρον.) και εξαιρώ τα y που προκύπτουν από την (2)

⟶ Αν προκύψει εξίσωση ανωτέρου βαθμού, το $f(A)$ βρίσκεται μόνο με γραφική παράσταση

μόνο αν και η άλλη ρίζα $\notin A$.

2) Σε μη ανάγωγο κλάσμα

•1 Αφου βρω το A, παραγοντοποιώ επανω-κάτω και απλοποιώ.
•2 Βρίσκω το Π.Τ της νέας συνάρτησης (που είναι "επέκταση" της αρχικής)
•3 Απο αυτό το Π.Τ. εξαιρώ τις τιμές του y που παίρνω, άν στη νέα συνάρτηση βάλω στην θέση του x τις τιμές που εξαιρούνται απο το A.

• παράδειγμα: $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$, $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$

Λύση $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x+3}{x-2} \Leftrightarrow y=\dfrac{x+3}{x-2}$ ← Επέκταση της f.

Το Π.Τ της νέας συνάρτησης είναι $y\in\mathbb{R}-\{1\}$ ⇒ (ομογραφικη...)
Επειδη το $x=3\notin A \Leftrightarrow y=\dfrac{3+3}{3-2}=6\notin f(A)$
$\Rightarrow f(A)=\mathbb{R}-\{1,6\}$.

Γ. Σε αρρητες συναρτήσεις → $\boxed{f(x)=\sqrt[v]{\varphi(x)}}$

•1 Βρίσκω το A $(\varphi(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ldots)$
•2 Βάζω τον περιορισμό $y=\sqrt[v]{f(x)}\geq 0$
  Αν $y=\sqrt[v]{\varphi(x)}+a$, βάζω $y-a\geq 0$
  Αν $y=-\sqrt[v]{\varphi(x)}+a$, βάζω $y-a\leq 0$
•3 Υψώνω το τετράγωνο και λύνω ως προς x.
•4 Βρισκω για ποιες τιμες του y, $x\in A$ και αν αυτές οι τιμές ικανοποιουν την συνθήκη του •2 τότε ανήκουν στο $f(A)$

• παράδειγμα $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

Λύση: Πρέπει $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,1] \Leftrightarrow A=[-1,1]$
  Συνθηκη: $y\geq 0$ (1)

Ετσι: $y=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2=1-x^2 \Leftrightarrow x^2=1-y^2$. Για να έχει λύση, πρέπει
$1-y^2\geq 0 \Leftrightarrow y\in[-1,1]$ ~~(οποτε $\forall y\in[-1,1], \exists x\in A: f(x)=y$.)~~
~~Αλλα $y\geq 0$ $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ άρα $f(A)=[0,1]$.~~

Πρέπει $y\geq 0$ → δεκτές είναι οι λύσεις $y\in[0,1]$ οπότε $\forall y\in[0,1], \exists x\in A: f(x)=y$.
αρα $f(A)=[0,1]$.

Δ. Σε συναρτήσεις με απόλυτα – πολλαπλού τύπου

- •1 Βρίσκω το A και κάνω διάκριση περιπτώσεων.
- •2 Βρίσκω τα $f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_\nu)$ για τα διαστήματα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ οπότε το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \cdots \cup f(A_\nu)$.

Φραγμένη συνάρτηση

Ορ. $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ φραγμένη άνω} \Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathbb{R} : \forall x \in A,\ f(x) \leq \Phi \\ f \text{ φραγμένη κάτω} \Leftrightarrow \exists\, \varphi \in \mathbb{R} : \forall x \in A,\ f(x) \geq \varphi \\ f \text{ φραγμένη} \Leftrightarrow f \text{ φραγμένη άνω και κάτω.} \end{array}}$

Θεώρημα: $\boxed{f \text{ φραγμένη} \Leftrightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in A,\ |f(x)| \leq \vartheta}$

Αποδειξη: Ευθυ

$\left.\begin{array}{l} f \text{ φραγμ.} \Rightarrow \exists\, \varphi, \Phi \in \mathbb{R} : \varphi \leq f(x) \leq \Phi,\ \forall x \in A \\ \text{Αλλα, (λόγω της } -|x| \leq x \leq |x|)\ -|\varphi| \leq \varphi \text{ και } \Phi \leq |\Phi| \end{array}\right\} \Rightarrow -|\varphi| \leq \varphi \leq f(x) \leq \Phi \leq |\Phi| \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{-|\varphi| \leq f(x) \leq |\Phi|}.$ (1)

Εστω $\vartheta = \max\{|\varphi|, |\Phi|\} \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \begin{cases} |\varphi| \leq \vartheta \Rightarrow -\vartheta \leq -|\varphi| \\ |\Phi| \leq \vartheta \end{cases}$ (το ίσο ισχύει όταν όπως το απολυτο είναι το max αλλιως, ισχύει το μικροτερο.)

Ενισχύω λοιπόν την (1) και έχω $-\vartheta \leq -|\varphi| \leq f(x) \leq |\Phi| \leq \vartheta \Rightarrow$

$\Rightarrow -\vartheta \leq f(x) \leq \vartheta \Rightarrow \underline{|f(x)| \leq \vartheta},\ \forall x \in A$

Αρα υπάρχει ένα τουλαχιστον ϑ για να ισχύει το θεώρημα. (Υπάρχουν άπειρα).

Αντίστροφο

Αν $\exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in A : |f(x)| \leq \vartheta \Rightarrow -\vartheta \leq f(x) \leq \vartheta \Rightarrow f$ φραγμένη με "ένα" κατω φραγμα το $-\vartheta$ και άνω φράγμα το ϑ.

•ΒΑΣΙΚΗ $\left.\begin{array}{l} f, g \in F_A \\ f, g \text{ φραγμένες} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f+g \text{ φραγμ.} \\ cf \text{ φραγμ. } (c>0 \text{ σταθ.}) \\ f \cdot g \text{ φραγμ.} \end{cases}$

→ Χρήσιμες ανισότητες

1) $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} |\eta\mu x| \leq 1 \\ 0 \leq \eta\mu^{2k} x \leq 1 \end{cases}$ 2) $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 \\ 0 \leq \sigma\upsilon\nu^{2k} x \leq 1. \end{cases}$

3) $\left.\begin{array}{l}\text{Αν } a,\beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0 \\ \text{και } \gamma \in \mathbb{R}_+\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a-\gamma}{\beta} \leq \dfrac{a}{\beta} \leq \dfrac{a+\gamma}{\beta} \\ \dfrac{a}{\beta+\gamma} \leq \dfrac{a}{\beta} \leq \dfrac{a}{\beta-\gamma} \end{cases}$

4) $|a|-|\beta| \leq ||a|-|\beta|| \leq |a+\beta| \leq |a|+|\beta|.$

• ακρότατα συνάρτησης

$$\boxed{max = (x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ f(x) \leq f(x_0)}$$

$$\boxed{min = (x_0, f(x_0)) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ f(x) \geq f(x_0)}$$

▼ Σύνθεση συναρτήσεων

• Αν $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_2 : B \to \mathbb{R}$ τότε η σύνθεση $f_1 \circ f_2$ ορίζεται
ως $f_1 \circ f_2 : B' \to \mathbb{R}$
με $(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$, όπου $B' = \{x \overset{\in B}{:} f_2(x) \in A\}$.
και η σύνθεση $f_1 \circ f_2$ ορίζεται
ως $f_2 \circ f_1 : A' \to \mathbb{R}$
με $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$, όπου $A' = \{x \overset{\in A}{:} f_1(x) \in B\}$.

• Εν γένει $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

▼ Θεώρημα $\boxed{f \text{ γνήσιως μονότονη} \Rightarrow f \text{ "1-1"}}$

Απόδειξη: f γνήσιως μονότονη $\Rightarrow f \nearrow \vee f \searrow) \Rightarrow$ ~~$\forall x_1, x_2 \in$~~ $f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)$
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ Εστω $x_1 < x_2 \in A$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ΑΡΑ: f "1-1".

Αντίστροφη συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f: A \longrightarrow B$ λέγεται

1) f "επι" $\Leftrightarrow f(A) = B$

2) f "1-1" $\Leftrightarrow \forall x_{1,2} \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Αν f "επι" $\wedge$ "1-1" τότε ορίζεται η $f^{-1}: B \longrightarrow A$ με τύπο $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ "επι" και} \\ \text{γνησίως μονότονη} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f^{-1} \text{ με ίδιο είδος μονοτονίας.}}$

Απόδειξη: $\left.\begin{array}{l} f \text{ γνησίως μονότονη} \Rightarrow f \text{ "1-1"} \\ f \text{ "επι"} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow \exists f^{-1}$.

Εστω $f \uparrow$ και f^{-1} όχι $\uparrow$.

$\left.\begin{array}{l} f^{-1} \text{ όχι } \uparrow \Rightarrow \exists\, y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2) : y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \\ x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 < y_2 \\ \left.\begin{array}{l} x_1 \geq x_2 \\ f \uparrow \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 < y_2 \\ y_1 \geq y_2 \end{cases} \longleftarrow$ Ατοπο, άρα $f^{-1} \uparrow$

Όμοια, αν $f \downarrow \Rightarrow f^{-1} \downarrow$ κτλ.

→ ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ. (όχι θεωρία).

(1) $\boxed{f \text{ "επι" } \wedge \text{ "1-1"} \Rightarrow \exists (f^{-1})^{-1} \text{ και } (f^{-1})^{-1} = f}$

Απόδειξη: Αν $f: A \rightarrow B$

(1) $\boxed{f \text{ αντιστρέψιμη} \Rightarrow f^{-1} \text{ "1-1" } \wedge \text{ "επι"}}$

Απόδειξη: Αν $f: A \longrightarrow B$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow f^{-1}: B \longrightarrow A$.

f αντιστρέψιμη $\Rightarrow f$ "επι" $\Rightarrow f(A) = B \Rightarrow \forall (x \in A \overset{y=}{\Longleftrightarrow} f(x) \in B) \Rightarrow$

$\Rightarrow (f^{-1}(y) \in A \Leftrightarrow y \in B) \Rightarrow f^{-1}(B) = A \Rightarrow f^{-1}$ επι.

Θα δείξω ότι f^{-1} "1-1". Εστω $y_1 \neq y_2 \in B$ και $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$

Είναι $\left.\begin{array}{l} f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2) \\ x_1=f^{-1}(y_1),\ x_2=f^{-1}(y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=x_2 \xRightarrow{f \text{ συναρτ.}} f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow y_1=y_2$ Άρα f^{-1} "1-1"

② $\boxed{f \text{ αντιστρέψιμη} \Rightarrow (f^{-1})^{-1}=f}$

Απόδειξη: $f:A\to B$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow f^{-1}:B\to A$ "1-1" $\wedge$ "επί" $\Rightarrow f^{-1}$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow$
$\Rightarrow (f^{-1})^{-1}:A\to B \Rightarrow \underline{A_{(f^{-1})^{-1}}=A_f}$

Έστω y εικόνα του x: $\left.\begin{array}{l} y=(f^{-1})^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \Leftrightarrow y=f(x) \\ y=(f^{-1})^{-1}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=(f^{-1})^{-1}(x),\ \forall x\in A \\ A_{(f^{-1})^{-1}}=A_f \end{array}\right\} \Rightarrow (f^{-1})^{-1}=f.$

~~③ f,g "1-1", "επί", $f\circ g$ ταυτοτική $\Rightarrow f=g^{-1} \wedge g=f^{-1}$~~

~~Απόδειξη: f~~

③ $\boxed{f \text{ αντιστρέψιμη} \Rightarrow f\circ f^{-1} \text{ ταυτοτική} \wedge f^{-1}\circ f \text{ ταυτοτική}}$

Απόδειξη: i) Αν $y=(f\circ f^{-1})(x) \Leftrightarrow y=f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=f^{-1}(y) \xLeftrightarrow{f^{-1}\text{ "1-1"}} y=x$
άρα $f\circ f^{-1}$ ταυτοτική.

ii) $\left.\begin{array}{l} f^{-1}\circ f \overset{?}{\underset{2}{=}} f^{-1}\circ (f^{-1})^{-1} \overset{?}{\underset{2}{=}} \\ \overset{i)}{\Rightarrow} f^{-1}\circ (f^{-1})^{-1} \text{ ταυτ.} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}\circ f$ ταυτοτική.

④ $\boxed{\left.\begin{array}{l} f:A\to B,\ g:B\to \Gamma \\ f,g \text{ αντιστρέψιμες} \end{array}\right\} \Rightarrow (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}}$

Απόδειξη: ~~x_1~~ Θα δείξω ότι η $g\circ f:A\to\Gamma$ είναι "1-1" και "επί".

- $x_1\neq x_2\in A \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1))\neq g(f(x_2)) \Rightarrow (g\circ f)(x_1)\neq (g\circ f)(x_2)$ (διότι f,g "1-1") άρα ~~$f\circ g$~~ $g\circ f$ "1-1".
- $(g\circ f)(A)=g(f(A))=g(B)=\Gamma$ (διότι f,g "επί") άρα ~~$f\circ g$ "επί"~~ $g\circ f$ "επί".

Άρα (~~$f\circ g$~~ $g\circ f$) "1-1" $\wedge$ "επί" $\Rightarrow$ $g\circ f$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow (g\circ f)^{-1}$ "1-1" $\wedge$ "επί".

Όμοια f αντιστρεψιμη $\Rightarrow f^{-1}$ "1-1" ∧ "επί" , g αντιστρέψιμη $\Rightarrow g^{-1}$ "1-1" ∧ "επί" $\Rightarrow f^{-1} o g^{-1}$ "1-1" και "επί".

όπου $f^{-1}: B \to A$, $g^{-1}: \Gamma \to B$ $\Rightarrow f^{-1} o g^{-1}: \Gamma \to A$.

Αρκει $\forall z \in \Gamma \quad (g o f)^{-1}(z) = (f^{-1} o g^{-1})(z)$.

Εστω $(g o f)^{-1}(z) \underset{(1)}{=} x \in A$ και $f(x) = y \underset{(2)}{\in} B$.

$\cancel{z = (g o f}$ $\overset{(1)}{\Rightarrow} (g o f)^{-1}(z) = x \Leftrightarrow z = (g o f)(x) = g(f(x)) \overset{2}{=} g(y) \Leftrightarrow \underline{y = g^{-1}(z)}$ (3)

$(2) \Rightarrow f(x) = y \Leftrightarrow \underline{x = f^{-1}(y)}$ (4).

Οπότε $(g o f)^{-1}(z) \underset{(1)}{=} x \underset{(4)}{=} f^{-1}(y) \underset{(3)}{=} f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} o g^{-1})(x)$, έχουν ίδιο Π.Ο το Γ $\Rightarrow (g o f)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Εισαγωγικές έννοιες $\rightarrow$ στο φυλλάδιο.

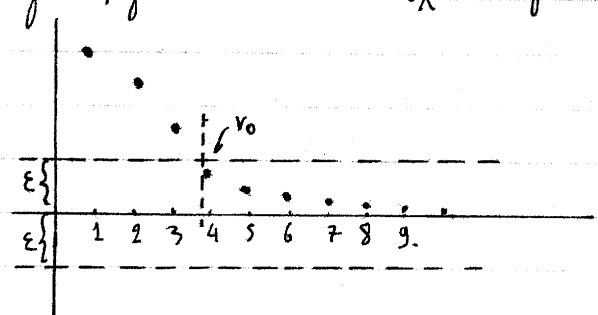
▼ Ακολουθίες με όριο το μηδέν $\rightarrow$ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός : $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{α προσέγγιση του } x \\ \text{με ανοχή } \varepsilon\end{array}\right\} \Leftrightarrow |x-a|<\varepsilon}$

Αυτό σημαίνει ότι $a \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Ορισμός : $\boxed{\lim a_\nu = 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \in \mathbb{N}, \nu>\nu_0 \Rightarrow |a_\nu|<\varepsilon)}$

Γεωμετρική ερμηνεία : Όλοι οι όροι της (a_ν), με εξαίρεση τους ν_0 πρώτους όρους, συσσωρεύονται σε διάστημα κέντρου 0 και ακτίνας ε. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται στην ταινία των παραλλήλων ευθειών $y=-\varepsilon$, $y=\varepsilon$. Αν αυτά ισχύουν για οσοδήποτε μικρό ε ($\forall \varepsilon>0$), τότε $\lim a_\nu = 0$



① $\boxed{a_\nu = 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim a_\nu = 0}$

Απόδειξη : Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\forall \nu \in \mathbb{N}, \nu>0 \Rightarrow |a_\nu| = |0| = 0 < \varepsilon$, άρα $\lim a_\nu = 0$.

② $\boxed{a_\nu = \frac{1}{\nu^\rho} : \rho \in \mathbb{Q}^*_+ \Rightarrow \lim a_\nu = 0}$

Απόδειξη : Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|a_\nu|<\varepsilon$, $\forall \nu \in \mathbb{N} : \nu>\nu_0$ για κάποιο $\nu_0 \leftarrow$ Πρέπει να βρεθεί.

Είναι $|a_\nu|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\nu^\rho}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu^\rho} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu^\rho > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\sqrt[\rho]{\varepsilon}}$

Παίρνω $\nu_0 \in \mathbb{N} : \nu_0 \geqslant \left[\frac{1}{\sqrt[\rho]{\varepsilon}}\right]$. Τότε $\forall \nu > \nu_0 \xrightarrow[\text{μεταβατική}]{\text{λόγω}} \nu > \frac{1}{\sqrt[\rho]{\varepsilon}} \xrightarrow{\text{αντιστρόφως}}$

$\Rightarrow |a_\nu| < \varepsilon$, άρα $\lim a_\nu = 0$.

③ $\boxed{\left.\begin{array}{l} a\in\mathbb{R} : |\alpha|<1 \\ \alpha_\nu = \alpha^\nu \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0}$

Απόδειξη: Εστω $\varepsilon>0$

$$|\alpha_\nu|<\varepsilon \Leftrightarrow |\alpha^\nu|<\varepsilon \Leftrightarrow |\alpha|^\nu<\varepsilon \overset{\ln\nearrow}{\Longleftrightarrow} \ln|\alpha|^\nu<\ln\varepsilon \Leftrightarrow \nu\ln|\alpha|<\ln\varepsilon \Big) \Leftrightarrow \nu > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|\alpha|}$$

$$|\alpha|<1 \Rightarrow \ln|\alpha|<0$$

Παίρνω $\nu_0 \geq \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|\alpha|}\right]$. Τότε $\forall\nu\in\mathbb{N} : \nu>\nu_0 \Rightarrow \nu > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|\alpha|} \Rightarrow |\alpha_\nu|<\varepsilon$, άρα $\lim\alpha_\nu = 0$.

- $\boxed{\text{Αν } \lim\alpha_\nu=0 \Longleftrightarrow \lim(-\alpha_\nu)=0 \Leftrightarrow \lim|\alpha_\nu|=0}$

  (Διοτι $|\alpha_\nu| = |-\alpha_\nu| = ||\alpha_\nu||$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$)

- $\boxed{\lim\alpha_\nu = 0 \Longleftrightarrow \lim\alpha_{\nu+\kappa}=0}$

Απόδειξη

Ευθυ: Εστω $\lim\alpha_\nu=0 \Rightarrow (\forall\varepsilon>0, \exists\nu_0\in\mathbb{N} : \forall\nu\in\mathbb{N}, \nu>\nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu|<\varepsilon)$ (1)

~~Αλλα $\forall\nu\in\mathbb{N}, \nu>\nu_0 \Rightarrow$~~

Αλλα $\forall\kappa\in\mathbb{N}^*$, $\nu+\kappa>\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ άρα έχουμε

$\forall\nu\in\mathbb{N}$, $\nu>\nu_0 \Rightarrow \nu+\kappa>\nu>\nu_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} |\alpha_{\nu+\kappa}|<\varepsilon \Rightarrow \lim\alpha_{\nu+\kappa}=0$.

Αντίστροφο: Εστω $\lim\alpha_{\nu+\kappa}=0 \Rightarrow (\forall\varepsilon>0, \exists\nu_1\in\mathbb{N} : \forall\nu\in\mathbb{N}, \nu>\nu_1 \Rightarrow |\alpha_{\nu+\kappa}|<\varepsilon)$ (2).

Παίρνω $\nu_0 = \nu_1+\kappa\in\mathbb{N} \Rightarrow \forall\nu\in\mathbb{N}, \nu>\nu_0 \Rightarrow \nu>\nu_1+\kappa \Rightarrow \nu-\kappa>\nu_1 \overset{(2)}{\Longrightarrow} |\alpha_{\nu-\kappa+\kappa}|<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |\alpha_\nu|<\varepsilon$, άρα $\lim\alpha_\nu=0$.

~~Θ. $|\alpha_\nu|\leq|b_\nu|$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$ $\nu>\kappa\in\mathbb{N}^*$~~
~~$\lim b_\nu = 0$~~

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l} |\alpha_\nu|\leq|b_\nu|, \forall\nu\in\mathbb{N}^* : \nu>\kappa\in\mathbb{N}^* \\ \lim b_\nu=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu=0}$ ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Απόδειξη

$\lim b_\nu=0 \Rightarrow (\forall\varepsilon>0, \exists\nu_0\in\mathbb{N} : \nu\in\mathbb{N}, \nu>\nu_0 \Rightarrow |b_\nu|<\varepsilon)$ (1).

Παίρνω $\nu_0' = \max\{\nu_0,\kappa\} \Rightarrow \nu_0'\geq\nu_0 \wedge \nu_0'\geq\kappa$.

Θα δείξω ότι $\forall\nu>\nu_0' \Rightarrow |\alpha_\nu|<\varepsilon$.

$$\forall\nu\in\mathbb{N}, \nu>\nu_0' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nu>\nu_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} |b_\nu|<\varepsilon \\ \nu>\kappa \Rightarrow |\alpha_\nu|\leq|b_\nu| \end{array}\right\} \Rightarrow |\alpha_\nu|<\varepsilon \text{, άρα } \lim\alpha_\nu=0.$$

↳ Για να υπολογίσω το όριο, ενισχύω την $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu\leq\cdots\leq\cdots\leq b_\nu \\ \text{οπου } \lim b_\nu=0 \text{ (γνωστο)}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu=0$.

Το (b_ν) μπορεί να είναι μια άπο τις προηγούμενες προτάσεις

Παράδειγμα $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu^2\nu}{2+\sqrt[3]{\nu^5}}$

Είναι $|\alpha_\nu| = \dfrac{|\eta\mu^2\nu|}{2+\sqrt[3]{\nu^5}} \leq \dfrac{1}{2+\sqrt[3]{\nu^5}} \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{\nu^5}} = \dfrac{1}{\nu^{5/3}}$

$\Pi_2 \longrightarrow \lim \dfrac{1}{\nu^{5/3}} = 0$

$\Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0.$

Θ. $\boxed{\lim \alpha_\nu = 0 \Longrightarrow (\alpha_\nu) \text{ φραγμένη}}$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$, π.χ. $\varepsilon = 1$.

$\lim \alpha_\nu = 0 \Rightarrow \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0,\ |\alpha_\nu| < 1$ (1)

Για να δείξω ότι (α_ν) φραγμένη, θα βρω ένα $\vartheta \in \mathbb{R}_+$ έτσι ώστε $|\alpha_\nu| < \vartheta$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$.

Παίρνω $\vartheta = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{\nu_0}|, 1\} \Rightarrow (\forall \nu \in \mathbb{N}^*, \nu \leq \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu| \leq \vartheta) \wedge \underset{(3)}{1 \leq \vartheta}.$ (2)

Έτσι, $\forall \nu > \nu_0,\ |\alpha_\nu| \overset{(1)}{<} 1 \overset{(3)}{\leq} \vartheta$

$\forall \nu \leq \nu_0,\ |\alpha_\nu| \overset{(2)}{\leq} \vartheta$

$\overset{(1),(2),(3)}{\Longrightarrow} \forall \nu \in \mathbb{N}^*,\ |\alpha_\nu| \leq \vartheta \Rightarrow (\alpha_\nu)$ φραγμένη.

Θ. $\boxed{\begin{matrix} \lim \alpha_\nu = 0 \\ (\beta_\nu) \text{ φραγμένη} \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \lim(\alpha_\nu \beta_\nu) = 0}$

Απόδειξη: (β_ν) φραγμένη $\Rightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : |\beta_\nu| \leq \vartheta,\ \forall \nu \in \mathbb{N}$ (1)

$\lim \alpha_\nu = 0$, Έστω $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\varepsilon}{\vartheta} > 0$ $\Big\} \Rightarrow \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu,\ \nu > \nu_0,\ |\alpha_\nu| < \dfrac{\varepsilon}{\vartheta}$ (2)

$\Rightarrow \forall \nu > \nu_0,\ |\alpha_\nu| \cdot |\beta_\nu| < \vartheta \cdot \dfrac{\varepsilon}{\vartheta} \Rightarrow |\alpha_\nu \beta_\nu| < \varepsilon$

Άρα $\lim(\alpha_\nu \beta_\nu) = 0.$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} \lambda \in \mathbb{R} \\ \lim \alpha_\nu = 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \lim \lambda \alpha_\nu = 0}$

- Κάθε απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος είναι μηδενική

δηλαδή $\boxed{\alpha_\nu \text{ απολύτως } \downarrow \text{ Γ. Πρόοδος} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0}$

Απόδειξη:

α_ν απολύτως $\downarrow$ Γ. Πρόοδος $\Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ με $|\lambda| < 1$.

Αλλά $\lim \lambda^{\nu-1} = \lim \lambda^\nu \underset{|\lambda|<1}{=} 0$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow \lim(\alpha_1 \lambda^{\nu-1}) = \lim \alpha_\nu = 0.$

• $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu=0\\ \lim \beta_\nu=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim(\alpha_\nu\beta_\nu)=0}$

Απόδειξη: $\left.\begin{array}{r}\lim \alpha_\nu=0\\ \lim\beta_\nu=0\Rightarrow (\beta_\nu) \text{ φραγμένη}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim(\alpha_\nu\beta_\nu)=0.$

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu=0\\ \lim \beta_\nu=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)=0}$

Απόδειξη: Εστω $\varepsilon>0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2}>0.$

$\left.\begin{array}{l}\lim\alpha_\nu=0\Rightarrow \exists \nu_1\in\mathbb{N}: \forall \nu>\nu_1,\ |\alpha_\nu|<\frac{\varepsilon}{2}\\ \lim\beta_\nu=0\Rightarrow \exists\nu_2\in\mathbb{N}: \forall\nu>\nu_2,\ |\beta_\nu|<\frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} |\alpha_\nu|+|\beta_\nu|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\nu>\nu_0 \Rightarrow$ όπου $\nu_0=\max\{\nu_1,\nu_2\}$

$\Rightarrow \forall\nu>\nu_0,\ |\alpha_\nu+\beta_\nu|\leq|\alpha_\nu|+|\beta_\nu|<\varepsilon \Rightarrow \lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)=0.$

Θ. Το σύνολο των μηδενικών ακολουθιών $A=\{(\alpha_\nu): \lim\alpha_\nu=0\}$ είναι κλειστό ως προς $+,\cdot$

Απόδειξη: Εστω $(\alpha_\nu),(\beta_\nu)\in A \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\alpha_\nu=0\\ \wedge\\ \lim\beta_\nu=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)=0\\ \wedge\\ \lim(\alpha_\nu\beta_\nu)=0\end{array}\right.\Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_\nu+\beta_\nu)\in A \wedge (\alpha_\nu\beta_\nu)\in A$, αρα A κλειστό ως προς $+,\cdot$.

• $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim\alpha_\nu=\lim\beta_\nu=0\\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim(\lambda\alpha_\nu+\mu\beta_\nu)=0}$

Απόδειξη: $\left.\begin{array}{l}\lim\alpha_\nu=0\wedge\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim\lambda\alpha_\nu=0\\ \lim\beta_\nu=0\wedge\mu\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim\mu\beta_\nu=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim(\lambda\alpha_\nu+\mu\beta_\nu)=0$

• $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim\alpha_\nu=0\\ \kappa\in\mathbb{N}^*, \text{κ συγκεκριμένος}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}=0}$ φασολ.

Αποδειξη: Εστω $\varepsilon>0\Leftrightarrow\varepsilon^\kappa>0$

$\lim\alpha_\nu=0\Rightarrow\exists\nu_0\in\mathbb{N}^*: \nu>\nu_0\Rightarrow|\alpha_\nu|<\varepsilon^\kappa \Rightarrow \left|\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}\right|<\varepsilon$

Αρα $\lim\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}=0.$

Παραδείγματα

• 1 $\lim \dfrac{\eta\mu \frac{\nu\pi}{3}}{\nu^2} = 0.$

Είναι $\alpha_\nu = \left(\eta\mu \frac{\nu\pi}{3}\right)\frac{1}{\nu^2}$. Αλλα $\left.\begin{array}{l} b_\nu = \eta\mu\frac{\nu\pi}{3} \text{ φραγμένη (διότι } |b_\nu|\leq 1, \forall \nu\in\mathbb{N}^*) \\ \lim \frac{1}{\nu^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0.$ (ως γινόμενο φραγμένης και μηδενικής)

• 2 $\lim \dfrac{\nu}{(-2)^\nu(\nu^2+1)} = 0.$

Είναι $\alpha_\nu = \dfrac{1}{(-2)^\nu}\,\dfrac{\nu}{\nu^2+1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\nu}{\nu^2+1}\right| = \dfrac{\nu}{\nu^2+1} < \dfrac{\nu}{\nu^2} = \dfrac{1}{\nu} \\ \lim\dfrac{1}{\nu} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \dfrac{\nu}{\nu^2+1} = 0. \\ \text{και} \quad \lim\dfrac{1}{(-2)^\nu} = \lim\left(-\dfrac{1}{2}\right)^\nu = 0 \\ \qquad\qquad (|-1/2|<1) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu = 0. \text{ (ως γινόμενο μηδενικών)}$$

• 3 Αν $\alpha\in[0,1)$, δείξτε ότι

i) $\forall\ \nu > \dfrac{2}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha + \dfrac{1}{\nu} < \dfrac{\alpha+1}{2}$ ii) $\lim\left(\alpha+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu = 0.$

i) $\nu > \dfrac{2}{1-\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{\nu} < \dfrac{1-\alpha}{2} \Rightarrow \alpha + \dfrac{1}{\nu} < \dfrac{1-\alpha}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha + \dfrac{1}{\nu} < \dfrac{\alpha+1}{2}$

$(\alpha\in[0,1) \Rightarrow 1-\alpha>0)$

ii) Είναι $\alpha\in[0,1) \Rightarrow 0\leq\alpha<1 \rightarrow 0<\alpha+1<2 \Rightarrow 0<\dfrac{\alpha+1}{2}<1 \rightarrow \left|\dfrac{\alpha+1}{2}\right|<1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lim\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^\nu = 0 \\ \alpha+\dfrac{1}{\nu} < \dfrac{\alpha+1}{2} \Rightarrow \forall\nu\in\mathbb{N}^*, \left(\alpha+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu < \left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)^\nu \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\left(\alpha+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu = 0. \text{ (διότι φράσεται από μηδενική)}$$

• 4 Δείξτε ότι η $\alpha_\nu = \dfrac{5\nu}{6\nu+7}$ ∤ έχει $\lim\alpha_\nu\neq 0$ (Αρκει να $\exists\,\varepsilon>0: |\alpha_\nu|\geq\varepsilon, \forall\nu\in\mathbb{N}^*$)

Λύση:

Αρκει $\exists\,\varepsilon>0 : \forall\nu>\nu_0\ ,\ |\alpha_\nu|\geq\varepsilon$ (ενισχύω ανάποδα).

$|\alpha_\nu| = \dfrac{5\nu}{6\nu+7} > \dfrac{5\nu}{6\nu+7\nu} = \dfrac{5\nu}{13\nu} = \dfrac{5}{13}, \forall\nu\in\mathbb{N}^*$ αρα $\exists\,\varepsilon = \dfrac{5}{13} > 0 : \forall\nu\in\mathbb{N}^*, |\alpha_\nu|\geq\varepsilon \Rightarrow \lim\alpha_\nu\neq 0$

• Κριτήριο πηλίκου. (D'Alembert)

Θ. $$\boxed{\left.\begin{array}{l} (\alpha_\nu): \alpha_\nu>0, \forall\nu\in\mathbb{N}^* \\ \exists\,\lambda\in(0,1) : \forall\nu\geq\kappa, \kappa\in\mathbb{N}, \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\leq\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu = 0}$$

Έστω $\kappa=1$.

<u>Απόδειξη</u>: $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \lambda \Rightarrow \underline{\alpha_{\nu+1} \leq \lambda \alpha_\nu, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } \nu=1, \ (1) \Rightarrow \alpha_2 \leq \lambda \alpha_1 \\ \nu=2, \ (1) \Rightarrow \alpha_3 \leq \lambda \alpha_2 \\ - - - \ - \ - \ - \ - \\ \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \ (1) \Rightarrow \alpha_\nu \leq \lambda \alpha_{\nu-1} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{διότι } \alpha_\nu>0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*} \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_\nu \leq \lambda^\nu \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{\nu-1} \Rightarrow \alpha_\nu \leq \lambda^\nu \alpha_1, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\alpha_\nu| \leq \lambda^\nu \frac{\alpha_1}{\lambda}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αλλά } \lambda \in (0,1) \Rightarrow |\lambda|<1 \Rightarrow \lim(\lambda^\nu)=0 \Rightarrow \lim\left(\lambda^\nu \frac{\alpha_1}{\lambda}\right)=0 \\ (2) \Rightarrow |\alpha_\nu| \leq \lambda^\nu \frac{\alpha_1}{\lambda}, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0.$$

Αν $\kappa>1$, $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \lambda$, $\forall \nu > \kappa \Rightarrow \frac{\alpha_{(\nu+\kappa)+1}}{\alpha_{\nu+\kappa}} \leq \lambda, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim \alpha_{\nu+\kappa} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \alpha_\nu = \lim \alpha_{\nu+\kappa} = 0$.

<u>Παραδείγματα</u>: 1) $\alpha_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu}$

Είναι $\alpha_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu} > 0, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}}}{\frac{\nu!}{\nu^\nu}} = \frac{\frac{\cancel{(\nu+1)} \cdot \cancel{\nu!}}{(\nu+1)^\nu \cancel{(\nu+1)}}}{\frac{\cancel{\nu!}}{\nu^\nu}} = \frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^\nu} \overset{*}{\leq} \frac{1}{2}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

$\nu=1 \Rightarrow \alpha_\nu = 1$
$\nu=2 \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{1}{2} = \lambda$.
$\nu=1 \Rightarrow \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{1}{2}$

(διότι $\frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^\nu} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu \geq 2 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \geq 2$ ισχύει διότι σύμφωνα με Bernoulli $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \geq 1+\nu \cdot \frac{1}{\nu} = 2$.)

$$\text{Έτσι έχουμε } \left.\begin{array}{l} \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq \frac{1}{2}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{2} \in (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0.$$

1. Το $\lambda \in (0,1)$ που θα πάρουμε βρίσκεται βάζοντας $\nu=1,2,3$ και υπολογίζοντας το $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$. Η πρώτη τιμή του α_ν που ανήκει στο $(0,1)$ την παίρνω για λ.

2) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{2^\nu}$

Είναι $\alpha_\nu = \frac{\nu}{2^\nu} > 0, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{\frac{v+1}{2^{v+1}}}{\frac{v}{2^v}} = \frac{v+1}{2v} \leqslant \frac{3}{4} \quad , \forall v \in \mathbb{N}^*: v \geqslant 2.$$

Για $v=1 \Rightarrow \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{2}{2} = 1.$

Για $v=2 \Rightarrow \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{2+1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4} = \lambda$

(διότι $\frac{v+1}{2v} \leqslant \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4v+4 \leqslant 6v \Leftrightarrow 2v \geqslant 4 \Leftrightarrow \underline{v \geqslant 2}$)

οπότε $\left.\begin{array}{l} \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} \leqslant \frac{3}{4}, \forall \cancel{v \geqslant 2}\, v \in \mathbb{N}: v \geqslant 2 \\ \frac{3}{4} \in (0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_v = 0.$

• Μερικ • <u>Μορφη $\infty - \infty$</u> : Πολ/ζω και διαιρώ με τη συζυγή παράσταση.

<u>Παράδειγμα</u>: $\alpha_v = \sqrt{v+1} - \sqrt{v}$

$$\alpha_v = \sqrt{v+1} - \sqrt{v} = \frac{(\sqrt{v+1} - \sqrt{v})(\sqrt{v+1} + \sqrt{v})}{\sqrt{v+1} + \sqrt{v}} = \frac{(v+1) - v}{\sqrt{v+1} + \sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v+1} + \sqrt{v}}$$

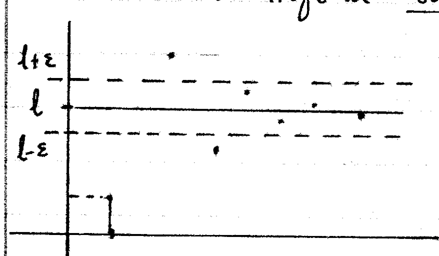
$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_v| = \frac{1}{\sqrt{v+1} + \sqrt{v}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{v} + \sqrt{v}} < \frac{1}{\sqrt{v}} \\ \lim \frac{1}{\sqrt{v}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_v = 0.$$

▼<u>Ακολουθίες με όριο $l \in \mathbb{R}^*$</u> → <u>ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Μια ακολουθία (α_v) συγκλίνει προς τον $l \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν
$\underline{\forall \varepsilon > 0, \exists v_0 \in \mathbb{N} : \forall v \in \mathbb{N}, v > v_0 \Rightarrow |\alpha_v - l| < \varepsilon.}$

Δηλαδη, $\forall v > v_0 \Rightarrow l - \varepsilon < \alpha_v < l + \varepsilon$ Άρα, $\forall \varepsilon > 0$ όλοι οι όροι της (α_v), με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος, συσσωρεύονται σε διάστημα $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ κέντρου l και ακτίνας ε. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται στην ταίνεια που ορίζουν οι παράλληλες ευθείες $y = l - \varepsilon$ και $y = l + \varepsilon$. Τότε η α_v λέγεται <u>συγκλίνουσα</u>. Φυσικά,

$$\boxed{\alpha_v \text{ μηδενική} \Rightarrow \alpha_v \text{ συγκλίνουσα}}$$



- •1 $\lim \alpha_v = l \Leftrightarrow \lim(\alpha_v - l) = 0$
- •2 $\alpha_v = c$ (σταθερη) $\Leftrightarrow \cancel{\lim}\, \alpha_v - c = 0 \Leftrightarrow \lim(\alpha_v - c) = 0 \Leftrightarrow \lim \alpha_v = c$
- •3 $\forall \kappa \in \mathbb{N}$, $\lim \alpha_v = l \Leftrightarrow \lim \alpha_{v+\kappa} = l$
- •4 $\lim \alpha_v = l \Leftrightarrow \lim(-\alpha_v) = -l.$

- <u>Μοναδικότητα του ορίου.</u>

Θ. $\boxed{\lim \alpha_\nu = \ell \Longrightarrow \ell \text{ μοναδικό}}$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\ell' \neq \ell : \lim \alpha_\nu = \ell'$

▸ Έστω $\varepsilon = \dfrac{|\ell-\ell'|}{2} > 0$ (διότι $\ell \neq \ell'$)

Τότε $\lim \alpha_\nu = \ell \Longrightarrow \exists \nu_1 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_1 ,\ |\alpha_\nu - \ell| < \dfrac{|\ell-\ell'|}{2}$ (1)

+

$\lim \alpha_\nu = \ell' \Longrightarrow \exists \nu_2 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_2 ,\ |\alpha_\nu - \ell'| < \dfrac{|\ell-\ell'|}{2}$ (2)

Παίρνω $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$.

$(1)+(2) \Longrightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu - \ell| + |\alpha_\nu - \ell'| < |\ell - \ell'| \Longrightarrow$

$\Longrightarrow |(\alpha_\nu - \ell) - (\alpha_\nu - \ell')| < \cancel{|\ell-\ell'|}\ |\alpha_\nu - \ell| + |\alpha_\nu - \ell'| < |\ell - \ell'| \Longrightarrow$

$\Longrightarrow |\alpha_\nu - \ell - \alpha_\nu + \ell'| < |\ell - \ell'| \Longrightarrow |\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$ ← Άτοπο διότι $|\ell-\ell'| = |\ell-\ell'|$

ταυτότητα

άρα $\ell = \ell' \Longrightarrow \ell$ μοναδικό.

- <u>Η ιδιότητα του φραγμένου συνέπεια της σύγκλισης</u>

Θ. $\boxed{(\alpha_\nu) \text{ φραγμένη} \Longrightarrow (\alpha_\nu) \text{ συγκλίνουσα}}$

<u>Απόδειξη</u>:

Θ. $\boxed{(\alpha_\nu) \text{ συγκλίνουσα} \Longrightarrow (\alpha_\nu) \text{ φραγμένη}}$

<u>Απόδειξη</u>: (α_ν) συγκλίνουσα $\Longrightarrow \lim \alpha_\nu = \ell \Longrightarrow \lim(\alpha_\nu - \ell) = 0 \Longrightarrow (\alpha_\nu - \ell)$ φραγμένη $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\alpha_\nu - \ell)$ απολύτως φραγμένη $\Longrightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : |\alpha_\nu - \ell| \leqslant \vartheta \Longrightarrow -\vartheta \leqslant \alpha_\nu - \ell \leqslant \vartheta \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \ell - \vartheta \leqslant \alpha_\nu \leqslant \vartheta + \ell \quad , \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

Άρα η (α_ν) φραγμένη με "ένα" άνω φράγμα το $\vartheta + \ell$

και κάτω φράγμα το $\vartheta - \ell$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

• Δείξτε ότι $\lim \frac{\nu^2}{\nu^2-1}=1$. (Με ορισμό)

Λύση : Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|\alpha_\nu-1|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\nu^2}{\nu^2-1}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\nu^2-\nu^2+1}{\nu^2-1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\nu^2-1}<\varepsilon \Leftrightarrow \nu^2-1>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \nu^2>\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}>1 \Leftrightarrow \nu>\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}}$ (1).

Παίρνω $\nu_0\in\mathbb{N}^*$: $\nu_0\geq\left[\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}}\right] \Rightarrow \forall \nu>\nu_0, \xRightarrow{M} \nu>\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}} \xRightarrow{(1)} |\alpha_\nu-1|<\varepsilon$

Άρα $\lim\alpha_\nu=1$

• Δείξτε ότι $\lim\frac{3\nu^2-2\nu-4}{\nu^2+1}=3$. Για ποιο ελάχιστο ν_0 ισχύει $\forall\nu>\nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu>2$;
$(\lim\alpha_\nu=\ell \Leftrightarrow \lim(\alpha_\nu-\ell)=0)$

i) Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί ~~lim |αν − 3| < ε~~ $|\alpha_\nu-3|=\left|\frac{3\nu^2-2\nu-4}{\nu^2+1}-3\right|=\left|\frac{\cancel{3\nu^2}-2\nu-4-\cancel{3\nu^2}-3}{\nu^2+1}\right|=$

$=\frac{2\nu+7}{\nu^2+1}<\frac{2\nu+7\nu}{\nu^2}=\frac{9\nu}{\nu^2}=\frac{9}{\nu}$, $\lim\frac{9}{\nu}=0$ $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu-3)=0 \Rightarrow \lim\alpha_\nu=3$.

ii) Είναι $\alpha_\nu>2, \forall\nu>\nu_0$ $\Updownarrow$

$\frac{3\nu^2-2\nu-4}{\nu^2+1}>2 \Leftrightarrow 3\nu^2-2\nu-4>2\nu^2+2 \Leftrightarrow \nu^2-2\nu-6>0$, $\Delta=4+24=28$ $\Rightarrow \nu_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{7}}{2}=1\pm\sqrt{7}$

ν		$1-\sqrt{7}$		0		$1+\sqrt{7}$	
$\nu^2-2\nu+6$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

Επειδή $3<1+\sqrt{7}<4$

$\forall\nu>1+\sqrt{7}>3 \Rightarrow \alpha_\nu>2$ άρα $\nu_0=3$.

• Δείξτε ότι $\lim 5\left[\left(\frac{2}{3}\right)^\nu-1\right]=-5$. $(\lim\alpha_\nu=\ell \Leftrightarrow \lim(\alpha_\nu-\ell)=0)$

Λύση

$\alpha_\nu+5=5\left[\left(\frac{2}{3}\right)^\nu-1\right]+5=5\left(\frac{2}{3}\right)^\nu-5+5=5\left(\frac{2}{3}\right)^\nu \Rightarrow \lim(\alpha_\nu+5)=0$ (ως γινόμενο πραγματικού και μηδενικής) $\Rightarrow \lim\alpha_\nu=-5$.

• Μερικές ασκήσεις λύνονται μόνο με τον ορισμό:

Δείξτε ότι $\alpha_\nu = \ln\frac{2\nu+5}{2\nu} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \ln 2$.

Λύση: Έστω $\varepsilon>0$,

Αρκεί $|\alpha_\nu - \ln 2| = \left|\ln\frac{2\nu+5}{\nu} - \ln 2\right| = \left|\ln\frac{\frac{2\nu+5}{\nu}}{2}\right| = \left|\ln\frac{2\nu+5}{2\nu}\right| =$

$= \left|\ln\left(1+\frac{5}{2\nu}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{5}{2\nu}\right) < \varepsilon \overset{\ln\nearrow}{\Longleftrightarrow} 1+\frac{5}{2\nu} < e^\varepsilon \Leftrightarrow 2\nu+5 < 2\nu e^\varepsilon \Leftrightarrow$

(διότι $1+\frac{5}{2\nu} > 1 \underset{\ln\nearrow}{\Rightarrow} \ln\left(1+\frac{5}{2\nu}\right) > \ln 1 = 0$)

$\Leftrightarrow 2\nu(e^\varepsilon - 1) > 5 \Leftrightarrow \nu > \frac{5}{2(e^\varepsilon-1)}$ (1).

($\varepsilon>0 \Rightarrow e^\varepsilon > e^0 = 1$)

Παίρνω $\nu_0 \geq \left[\frac{2}{2(e^\varepsilon-1)}\right]$ οπότε $\forall \nu\in\mathbb{N}^*: \nu>\nu_0 \overset{M}{\Rightarrow} \nu > \frac{5}{2(e^\varepsilon-1)} \overset{(1)}{\Longrightarrow} |\alpha_\nu - \ln 2| < \varepsilon$

άρα $\lim\alpha_\nu = \ln 2$.

▼ Κριτήρια ΜΗ σύγκλισης

1) $\boxed{(\alpha_\nu) \text{ όχι φραγμένη} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ όχι συγκλίνουσα}}$

Απόδειξη: Είναι το αντίθετο αντίστροφο της πρότασης

(α_ν) συγκλίνουσα $\Rightarrow$ (α_ν) φραγμένη.

2) $\boxed{\text{Μια ακολουθία } (\alpha_\nu) \text{ δεν είναι συγκλίνουσα αν, } \exists\, \varepsilon>0 : \forall \nu_0\in\mathbb{N},\ \exists\, \nu_1 > \nu_0,\ \nu_2>\nu_0 : |\alpha_{\nu_1} - \alpha_{\nu_2}| \geq \varepsilon}$ sos

Απόδειξη: Θα δείξω την αντίθετο αντίστροφη πρόταση δηλαδή

Αν α_ν συγκλίνουσα $\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\nu_0\in\mathbb{N},\ \forall\nu_1>\nu_0,\ \nu_2>\nu_0 : |\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| < \varepsilon$

Αν α_ν συγκλίνουσα $\Rightarrow \lim\alpha_\nu = \ell$
Έστω $\varepsilon>0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$

$\overset{o\rho}{\Longrightarrow} \exists\,\nu_0\in\mathbb{N}:$ $\forall\nu_1>\nu_0 \Rightarrow |\alpha_{\nu_1}-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)
$\forall\nu_2>\nu_0 \Rightarrow |\alpha_{\nu_2}-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Αρκεί $|\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| < \varepsilon$.

Είναι $|\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| = |(\alpha_{\nu_1}-\ell) - (\alpha_{\nu_2}-\ell)| \leq |\alpha_{\nu_1}-\ell| + |\alpha_{\nu_2}-\ell| \overset{(1),(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

οπότε ισχύει η πρόταση

α_ν συγκλίνουσα $\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\nu_0\in\mathbb{N},\ \forall\nu_1>\nu_0,\ \nu_2>\nu_0 : |\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| < \varepsilon$

άρα αντίθετο αντίστροφα

Αν $\exists \varepsilon>0, \forall \nu_0 \in \mathbb{N}, \exists \nu_1>\nu_0, \nu_2>\nu_0 : |\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| \geq \varepsilon \Longrightarrow (\alpha_\nu)$ όχι συγκλίνουσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

● Δείξτε ότι η ακολουθία $(\alpha_\nu) : \alpha_\nu = (-1)^\nu \dfrac{\nu+3}{2\nu}$ δεν είναι συγκλίνουσα.

Λύση: Εστω $\nu_0 \in \mathbb{N}$. Τότε $\exists\ \nu_1 = 2k > \nu_0,\ \nu_2 = 2k+1 > \nu_0$ (λόγω του θ. Αρχιμήδη)

$$|\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| = \left|(-1)^{2k}\frac{2k+3}{2\cdot 2k} - (-1)^{2k+1}\frac{(2k+1)+3}{2(2k+1)}\right| = \left|\frac{2k+3}{4k}+\frac{2k+4}{4k+2}\right| = \frac{2k+3}{4k}+\frac{2k+4}{4k+2} >$$

$$\frac{2k+3}{4k+2}+\frac{2k+4}{4k+2} = \frac{4k+7}{4k+2} > \frac{4k}{4k+2k} = \frac{4k}{6k} = \frac{2}{3}$$

Αρα $\exists \varepsilon>0$ (αρκεί $0<\varepsilon<\frac{2}{3}$, π.χ. $\varepsilon=\frac{2}{9}$) $: |\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| \geq \varepsilon \xrightarrow[\text{μη συγκλ.}]{\text{κρ.}} (\alpha_\nu)$ όχι συγκλίνουσα.

● Δείξτε ότι η $(\alpha_\nu) : \alpha_\nu = (-1)^\nu \nu$ δεν συγκλίνει

Λύση: α' τρόπος: Με το κριτήριο μη σύγκλισης.

β' τρόπος: Με την 1η πρόταση. Αρκεί (α_ν) όχι φραγμένη.

Εστω (α_ν) φραγμένη $\Rightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : |\alpha_\nu| \leq \vartheta,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |(-1)^\nu \nu| \leq \vartheta \Rightarrow$

$\Rightarrow |(-1)^\nu|\nu \leq \vartheta \Rightarrow \nu \leq \vartheta,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \leftarrow$ Ατοπο λόγω θ. Αρχιμήδη

Αρα (α_ν) οχι φραγμένη $\Rightarrow (\alpha_\nu)$ όχι συγκλίνουσα.

● Δείξτε ότι $(\alpha_\nu) : \alpha_\nu = \eta\mu \dfrac{\nu\pi}{2}$ όχι συγκλίνουσα (αντιπαράδειγμα μη συγκλίνουσας και φραγμένης).
και φραγμένη.

Λύση: Εστω $\nu_0 \in \mathbb{N}$

τότε $\exists \nu_1 = 2k > \nu_0,\ \nu_2 = 2k+1 > \nu_0$ (θ. Αρχιμήδη)

και $|\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| = \left|\eta\mu\dfrac{2k\pi}{2} - \eta\mu\dfrac{2k\pi+\pi}{2}\right| = |\underbrace{\eta\mu k\pi}_{0} - \eta\mu(k\pi+\pi)| = |\pm 1| = 1$

Αρα $\exists \varepsilon>0 : |\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| \geq \varepsilon$ (αρκεί $0<\varepsilon<1$, π.χ. $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3}$) $\Rightarrow (\alpha_\nu)$ όχι συγκλίνουσα.

Αλλα, $\left|\eta\mu\dfrac{\nu\pi}{2}\right| \leq 1,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ αρα $\exists\, \vartheta = 1 \in \mathbb{R}^* : |\alpha_\nu| \leq \vartheta,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (\alpha_\nu)$ φραγμένη.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

~~1) Η~~

Γενικές ιδιότητες

1) Η ιδιότητα του φραγμένου συνέπεια της σύγκλισης

Θ. $\boxed{(\alpha_\nu) \text{ συγκλίνουσα} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ φραγμένη}}$ (δείχθηκε)

2) Όριο απόλυτης τιμής ακολουθίας

Θ. $\boxed{\lim\alpha_\nu = \ell \Rightarrow (|\alpha_\nu|) \text{ συγκλίνουσα με } \lim|\alpha_\nu| = |\ell|}$

Απόδειξη: $\left.\begin{matrix}\lim\alpha_\nu = \ell \Rightarrow \lim(\alpha_\nu - \ell) = 0 \\ \big||\alpha_\nu| - |\ell|\big| \leq |\alpha_\nu - \ell|\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\big||\alpha_\nu| - |\ell|\big| = 0$ (διότι φράσσεται από μηδενική)

$\Rightarrow \lim|\alpha_\nu| = |\ell|$.

3) Πρόσημο όρων και πρόσημο ορίου

Θ. $\boxed{\lim\alpha_\nu = \ell \neq 0 \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0 : \alpha_\nu, \ell \text{ ομόσημοι.}}$

Απόδειξη: $\left.\begin{matrix}\lim\alpha_\nu = \ell \Rightarrow \lim(\alpha_\nu - \ell) = 0 \\ \blacktriangleright \text{Έστω } \varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N}, \forall \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{|\ell|}{2} < \alpha_\nu - \ell < \frac{|\ell|}{2} \Rightarrow \ell - \frac{|\ell|}{2} < \alpha_\nu < \ell + \frac{|\ell|}{2}$ (1)

i) Αν $\ell > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \ell - \frac{\ell}{2} < \alpha_\nu < \ell + \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{\ell}{2} < \alpha_\nu < \frac{3\ell}{2} \Rightarrow \underline{\alpha_\nu > \frac{\ell}{2} > 0}$, $\forall\, \underline{\nu > \nu_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{\alpha_\nu, \ell \text{ ομόσημοι}, \forall \nu > \nu_0}$.

ii) Αν $\ell < 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \ell + \frac{\ell}{2} < \alpha_\nu < \ell - \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{3\ell}{2} < \alpha_\nu < \frac{\ell}{2} \Rightarrow \alpha_\nu < \frac{\ell}{2} < 0 \Rightarrow \alpha_\nu, \ell$ ομόσημοι, $\forall \nu > \nu_0$.

↳ Αντιστρόφως αν $\boxed{\left.\begin{matrix}\exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0, \alpha_\nu > 0 \\ (\alpha_\nu) \text{ συγκλίνουσα}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu \geq 0}$

Λ

και αν $\boxed{\left.\begin{array}{l}\exists \nu_0\in\mathbb{N}:\forall\nu>\nu_0,\ \alpha_\nu<0\\ (\alpha_\nu)\text{ συγκλίνουσα}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu\leq 0}$

● ΒΑΣΙΚΟ ΠΟΡΙΣΜΑ

$\lim\alpha_\nu=\ell \rightarrow \exists\nu_0\in\mathbb{N}: \frac{|\ell|}{2}<|\alpha_\nu|<\frac{3|\ell|}{2}, \forall\nu>\nu_0$

(Αποδεικνυονται με το προηγούμενο θεώρημα σε συνδυασμό με ατοπο).

● Εφαρμογη - θεωρια ●⟶ $\boxed{\lim\sqrt[\nu]{\nu}=1}$

Απόδειξη - βιβλίου : Εστω η βοηθητική ακολουθία $\alpha_\nu=\sqrt[2\nu]{\nu}-1$ (1).

Είναι $\forall\nu\in\mathbb{N}^*\ \sqrt[2\nu]{\nu}\geq 1 \Rightarrow \sqrt[2\nu]{\nu}-1\geq 0 \Rightarrow \alpha_\nu\geq 0$

(α)

$(1)\Rightarrow \sqrt[2\nu]{\nu}=\alpha_\nu+1 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{\nu}=(\alpha_\nu+1)^\nu & (2)\\ \sqrt[\nu]{\nu}=(\alpha_\nu+1)^2=1+2\alpha_\nu+\alpha_\nu^2\end{cases}$

Αρκεί $\lim\alpha_\nu=0$.

$(2)\Rightarrow \sqrt{\nu}=(\alpha_\nu+1)^\nu \underset{\text{Ⓑ}}{\geq} 1+\nu\alpha_\nu>\nu\alpha_\nu \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha_\nu<\frac{\sqrt{\nu}}{\nu}=\frac{1}{\sqrt{\nu}}\\ \alpha_\nu\geq 0,\forall\nu\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|\alpha_\nu|<\frac{1}{\sqrt{\nu}}\\ \lim\frac{1}{\sqrt{\nu}}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu=0$ (ως απολύτως φραγμένη από μηδενική.

Αρα $\lim\sqrt[\nu]{\nu}=\lim(1+2\alpha_\nu+\alpha_\nu^2)=1+\lim(\underbrace{2\alpha_\nu+\alpha_\nu^2}_{0})=1.$

Εναλλακτική απόδειξη

Επειδη $\nu\geq 1, \forall\nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[\nu]{\nu}\geq 1, \forall\nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \exists\,\vartheta_\nu\geq 0: \sqrt[\nu]{\nu}=(1+\vartheta_\nu)^2, \forall\nu\in\mathbb{N}^*$ (2).

$(2)\Rightarrow \sqrt{\nu}=(1+\vartheta_\nu)^\nu\geq 1+\nu\vartheta_\nu>\nu\vartheta_\nu, \forall\nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 0\leq\vartheta_\nu<\frac{\sqrt{\nu}}{\nu}, \nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}|\vartheta_\nu|\leq\frac{1}{\sqrt{\nu}}, \forall\nu\in\mathbb{N}^*\\ \lim\frac{1}{\sqrt{\nu}}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\vartheta_\nu=0$

Αρα $\lim(\sqrt[\nu]{\nu}-1)=\lim[(1+\vartheta_\nu)^2-1]=\lim[1+2\vartheta_\nu+\vartheta_\nu^2-1]=\lim(\vartheta_\nu^2+2\vartheta_\nu)=0$ (ως αθροισμα μηδενικών) $\Rightarrow \lim\sqrt[\nu]{\nu}=1.$

▼ Συγκλιση και πράξεις

● Θα δείξουμε ότι το σύνολο $V=\{(\alpha_\nu): \lim\alpha_\nu\in\mathbb{R}\}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ακολουθιών.

• Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

Θ. $\boxed{(\alpha_\nu),(b_\nu) \text{ συγκλίνουσες} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha_\nu+b_\nu) \text{ συγκλίνουσα με } \lim(\alpha_\nu+b_\nu)=\lim\alpha_\nu+\lim b_\nu \\ (\alpha_\nu\cdot b_\nu) \text{ συγκλίνουσα με } \lim(\alpha_\nu\cdot b_\nu)=\lim\alpha_\nu\cdot\lim b_\nu. \end{cases}}$

Απόδειξη :

i) $\left.\begin{array}{l} (\alpha_\nu) \text{ συγκλ.} \Rightarrow \lim\alpha_\nu=\alpha \Rightarrow \lim(\alpha_\nu-\alpha)=0 \\ (b_\nu) \text{ συγκλ.} \Rightarrow \lim b_\nu=b \Rightarrow \lim(b_\nu-b)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim[(\alpha_\nu-\alpha)+(b_\nu-b)]=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim[(\alpha_\nu+b_\nu)-(\alpha+b)]=0 \Rightarrow \underline{\lim(\alpha_\nu+b_\nu)}=\alpha+b=\underline{\lim\alpha_\nu+\lim b_\nu}.$

ii) $\lim(\alpha_\nu b_\nu-\alpha b)=\lim[\alpha_\nu b_\nu-\alpha b+\underline{\underline{\alpha b_\nu}}-\underline{\underline{\alpha b_\nu}}]=\lim[b_\nu(\alpha_\nu-\alpha)+\alpha(b_\nu-b)]\overset{i)}{=}$

$=\lim[b_\nu(\alpha_\nu-\alpha)]+\lim[\alpha(b_\nu-b)]$ (1).

Όμως, $\left.\begin{array}{l} (b_\nu) \text{ συγκλίνουσα} \Rightarrow (b_\nu) \text{ φραγμένη} \\ \lim(\alpha_\nu-\alpha)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim[b_\nu(\alpha_\nu-\alpha)]=0$

και $\left.\begin{array}{l} \lim(b_\nu-b)=0 \\ \alpha\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim[\alpha(b_\nu-b)]=0$

Άρα $(1) \Rightarrow \lim(\alpha_\nu b_\nu-\alpha b)=\lim[b_\nu(\alpha_\nu-\alpha)]+\lim[\alpha(b_\nu-b)]=0+0=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\lim(\alpha_\nu b_\nu)}=\alpha b=\underline{\lim\alpha_\nu\cdot\lim b_\nu}.$

Πορίσματα

i) $\boxed{\lim\alpha_\nu=\ell \Rightarrow \lim(\lambda\alpha_\nu)=\lambda\ell,\ \lambda\in\mathbb{R}}$

ii) $\boxed{\lim\alpha_\nu=\ell \Rightarrow \lim(\alpha_\nu)^\kappa=\ell^\kappa,\ \kappa\in\mathbb{N}^*}$

iii) $\boxed{(\alpha_\nu),(b_\nu) \text{ συγκλίνουσες} \Rightarrow \lim(\lambda\alpha_\nu+\mu b_\nu)=\lambda\lim\alpha_\nu+\mu\lim b_\nu}$

• Μπορεί να υπάρχει το $\lim(\alpha_\nu+b_\nu)$ ή το $\lim(\alpha_\nu b_\nu)$ χωρίς να υπάρχει το ένα (ή και τα δύο) από τα $\lim\alpha_\nu$, $\lim b_\nu$ (π.χ. $\alpha_\nu=(-1)^\nu$, $b_\nu=(-1)^{\nu+1}$).

• Διαίρεση

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l} (\alpha_\nu): \alpha_\nu\neq 0,\ \forall\nu\in\mathbb{N} \\ (\alpha_\nu) \text{ συγκλίνουσα με } \lim\alpha_\nu\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha_\nu}\right) \text{ συγκλίνουσα} \Big\{ \text{ με } \lim\frac{1}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\lim\alpha_\nu}}$

Απόδειξη : Αρκει $\lim\left(\frac{1}{\alpha_\nu}-\frac{1}{\alpha}\right)=0$, όπου $\lim\alpha_\nu=\alpha\neq 0$.

$$\frac{1}{\alpha_\nu}-\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha-\alpha_\nu}{\alpha\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha_\nu}\frac{\alpha-\alpha_\nu}{\alpha},\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*.\Rightarrow\left|\frac{1}{\alpha_\nu}-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha_\nu|}\cdot\frac{|\alpha-\alpha_\nu|}{|\alpha|}\quad(1)$$

Επειδή όμως $\lim\alpha_\nu=\alpha\neq 0\xRightarrow{\text{βασικό πόρισμα}}\exists\,\nu_0\in\mathbb{N}^*:\frac{|\alpha|}{2}<|\alpha_\nu|<\frac{3|\alpha|}{2},\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*,\nu>\nu_0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{|\alpha_\nu|}<\frac{2}{|\alpha|}\Rightarrow\frac{|\alpha-\alpha_\nu|}{|\alpha|\cdot|\alpha_\nu|}<\frac{2|\alpha-\alpha_\nu|}{|\alpha|^2}\xRightarrow{(1)}\left|\frac{1}{\alpha_\nu}-\frac{1}{\alpha}\right|<\frac{2|\alpha-\alpha_\nu|}{|\alpha|^2},\ \forall\nu>\nu_0\quad(2)$$

πολ. κατα μέλη με θετικο

~~Αρα~~ Αλλα, $\lim\alpha_\nu=\alpha\Rightarrow\lim(\alpha_\nu-\alpha)=0\Rightarrow\lim\frac{2(\alpha_\nu-\alpha)}{\alpha^2}=0$

$(2)\Rightarrow\left|\frac{1}{\alpha_\nu}-\frac{1}{\alpha}\right|<\left|\frac{2(\alpha_\nu-\alpha)}{\alpha^2}\right|,\ \forall\nu>\nu_0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim\left(\frac{1}{\alpha_\nu}-\frac{1}{\alpha}\right)=0\Rightarrow\lim\frac{1}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\lim\alpha_\nu}.$$

Πορισμα $\boxed{\left.\begin{matrix}(\alpha_\nu),(\beta_\nu)\text{ συγκλίνουσες με }\lim\beta_\nu\neq 0\\ \beta_\nu\neq 0,\forall\nu\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)\text{ συγκλίνουσα με }\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\frac{\lim\alpha_\nu}{\lim\beta_\nu}}$

- Όριο ρίζας

Θ. (α_ν) συγκλίνουσα

Παρατήρηση : Αφου $\lim\alpha_\nu\neq 0\Rightarrow\exists\,\kappa\in\mathbb{N}:\forall\nu>\kappa,\nu\in\mathbb{N}:\frac{|\alpha|}{2}<|\alpha_\nu|\Rightarrow\alpha_\nu\neq 0,\forall\nu\in\mathbb{N},\nu>\kappa$
Ετσι το θεωρημα διατυπώνεται και έτσι:

$$\boxed{\lim\alpha_\nu\neq 0\Rightarrow\exists\,\kappa\in\mathbb{N}:\lim\frac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}}=\frac{1}{\lim\alpha_\nu}.}$$

• <u>Όριο ρίζας</u>

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l}(\alpha_\nu) \text{ συγκλίνουσα} \\ \alpha_\nu \geq 0,\ \forall \nu \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \forall \kappa \in \mathbb{N}^* : \lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = \sqrt[\kappa]{\lim \alpha_\nu}}$

<u>Απόδειξη</u>: $\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } \ell = \lim \alpha_\nu \\ \alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \ell \geq 0$ (πρόσημο ορίου-όρων (α_ν)).

i) Αν $\underline{\underline{\ell > 0}}$, τότε αρκεί $\lim(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{\ell}) = 0$.

$$|\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{\ell}| = \frac{|\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{\ell}| \cdot |(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1} + (\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-2}\sqrt[\kappa]{\ell} + \dots + \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}(\sqrt[\kappa]{\ell})^{\kappa-2} + (\sqrt[\kappa]{\ell})^{\kappa-1}|}{|(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1} + (\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-2}\sqrt[\kappa]{\ell} + \dots + \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}(\sqrt[\kappa]{\ell})^{\kappa-2} + (\sqrt[\kappa]{\ell})^{\kappa-1}|} =$$

$$= \frac{|\alpha_\nu - \ell|}{(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1} + \cancel{(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-2}\sqrt[\kappa]{\ell} + \dots + \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu}(\sqrt[\kappa]{\ell})^{\kappa-2} + (\sqrt[\kappa]{\ell})^{\kappa-1}}} \leq \frac{1}{(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1}} \cdot |\alpha_\nu - \ell|, \ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = \ell \to \lim(\alpha_\nu - \ell) = 0 \Rightarrow \lim\left[\frac{1}{(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1}}(\alpha_\nu - \ell)\right] = 0 \\ |\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{\ell}| \leq \left|\frac{1}{(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu})^{\kappa-1}}(\alpha_\nu - \ell)\right|, \forall \nu \in \mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim(\sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} - \sqrt[\kappa]{\ell}) = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = \sqrt[\kappa]{\ell} = \sqrt[\kappa]{\lim \alpha_\nu}$.

ii) Αν $\underline{\ell = 0}$, έστω $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow \varepsilon^\kappa > 0, \forall \kappa \in \mathbb{N}^*$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = 0 \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \in \mathbb{N}, \nu > \nu_0 : |\alpha_\nu| < \varepsilon^\kappa \\ \alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu < \varepsilon^k \Rightarrow \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} < \varepsilon$$

Άρα $\lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = 0 = \sqrt[\kappa]{0} = \sqrt[\kappa]{\ell} = \sqrt[\kappa]{\lim \alpha_\nu}$

• <u>Εφαρμογή-θεωρία</u> $\longrightarrow$ $\boxed{\alpha > 0 \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1}$

<u>Απόδειξη</u>: Εάν i) $\alpha = 1 \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} = 1, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.

ii) Έστω $\underline{\alpha > 1} \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{1} = 1, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \vartheta_\nu > 0 : \forall \nu \in \mathbb{N}^* : \sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \vartheta_\nu$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow \alpha = (1+\vartheta_\nu)^\nu \underset{\text{Ⓑ}}{\geq} 1 + \nu\vartheta_\nu > \nu\vartheta_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \to 0 < \vartheta_\nu < \frac{\alpha}{\nu} \Rightarrow |\vartheta_\nu| < \left|\frac{\alpha}{\nu}\right| \\ (\vartheta_\nu > 0 > -1) \qquad\qquad \lim \frac{\alpha}{\nu} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \vartheta_\nu = 0$$

Άρα $(1) \Rightarrow \lim(\sqrt[\nu]{\alpha} - 1) = \lim[(1+\vartheta_\nu) - 1] = \lim \vartheta_\nu = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$

iii) Έστω $\underline{0 < \alpha < 1}$

$$\frac{1}{\alpha} > 0 \underset{ii)}{\Rightarrow} \lim \sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha}} = 1 \to \lim \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}} = 1 \to \frac{1}{\lim \sqrt[\nu]{\alpha}} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1.$$

?

ΜΕΘΟΔΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ (που λύνονται με τις ιδιότητες των πράξεων)

(Μ1) Για ακολουθίες της μορφής $\boxed{\alpha_\nu = \frac{f(\nu)}{g(\nu)}}$

Διαιρώ αριθμητή και παρανομαστή με την μέγιστη δύναμη του ν που υπάρχει στα $f(\nu)$, $g(\nu)$ και χρησιμοποιώ την βασική ιδιότητα $\lim \frac{1}{\nu^\rho} = 0$, $\forall \rho \in \mathbb{Q}_+^*$

Παραδείγματα

1) $\alpha_\nu = \frac{2\nu^2 - 6\nu + 3}{3\nu^2 - 1}$, $\lim \alpha_\nu = ;$

$$\cancel{\lim \alpha_\nu = \lim \frac{2\nu^2 - 6\nu + 3}{3\nu^2 - 1} = \frac{\lim(2\nu^2 - 6\nu + 3)}{\lim(3\nu^2 - 1)} =}$$

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu^2 - 6\nu + 3}{3\nu^2 - 1} = \frac{\nu^2\left(2 - \frac{6}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}\right)}{\nu^2\left(3 - \frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{2 - \frac{6}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}}{3 - \frac{1}{\nu^2}} \Longrightarrow \lim \alpha_\nu = \lim \frac{2 - \frac{6}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}}{3 - \frac{1}{\nu^2}} =$$

$$= \frac{\lim\left(2 - \frac{6}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}\right)}{\lim\left(3 - \frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{2 - \lim\frac{6}{\nu} + \lim\frac{3}{\nu^2}}{3 - \lim\frac{1}{\nu^2}} = \frac{2 - 6\lim\frac{1}{\nu} + 3\lim\frac{1}{\nu^2}}{3 - \lim\frac{1}{\nu^2}} = \frac{2 - 6\cdot 0 + 3\cdot 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

2) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2 + 2\nu + 3}{3\nu^3 + \nu^2 - 1}$, $\lim \alpha_\nu = ;$

$$\alpha_\nu = \frac{\nu^2 + 2\nu + 3}{3\nu^3 + \nu^2 - 1} = \frac{\cancel{\nu^2}\left(1 + \frac{2}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}\right)}{\cancel{\nu^3}\left(3 + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}\right)} \Longrightarrow \lim \alpha_\nu = \lim\left(\frac{1}{\nu} \cdot \frac{1 + \frac{2}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}}\right) =$$

$$= \lim\frac{1}{\nu} \cdot \lim \frac{1 + \frac{2}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}} = \lim\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\lim\left(1 + \frac{2}{\nu} + \frac{3}{\nu^2}\right)}{\lim\left(3 + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2}\right)} = \lim\frac{1}{\nu} \cdot \frac{1 + 2\lim\frac{1}{\nu} + 3\lim\frac{1}{\nu^2}}{3 + \lim\frac{1}{\nu} - \lim\frac{1}{\nu^2}} =$$

$$= 0 \cdot \frac{1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0}{3 + 0 - 0} = 0.$$

3) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2 + 2\nu\sqrt{\nu} + 5}{-\nu^2 - \nu\sqrt{\nu} + 8\nu}$, $\lim \alpha_\nu$

$$\lim \alpha_\nu = \frac{\nu^2 + 2\nu\sqrt{\nu} + 5}{-\nu^2 - \nu\sqrt{\nu} + 8\nu} = \frac{\cancel{\nu^2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\nu}} + \frac{5}{\nu^2}\right)}{\cancel{\nu^2}\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{\nu}} + \frac{8}{\nu}\right)} \quad \text{κτλ...}$$

4) $\alpha_\nu = \sqrt{\frac{3\nu^2 + 2}{5\nu^3 - 1}}$, $\lim \alpha_\nu$

$$\lim \alpha_\nu = \lim \sqrt{\frac{3\nu^2 + 2}{5\nu^3 - 1}} = \sqrt{\lim \frac{3\nu^2 + 2}{5\nu^3 - 1}} = \ldots\ldots\ldots = \sqrt{0} = 0.$$

(M_2) Για ακολουθίες της μορφής: $\boxed{\alpha_\nu = \dfrac{\kappa_1^\nu + \kappa_2^\nu + \dots + \kappa_\rho^\nu}{\lambda_1^\nu + \lambda_2^\nu + \dots + \lambda_\mu^\nu}}$

Διαιρώ αριθμητή και παρανομαστή με την ν-οστή δύναμη της μεγαλύτερης (κατ'απόλυτον) βάσης και χρησιμοποιώ την βασική ιδιότητα: $\lim \alpha^\nu = 0$, οπου $|\alpha|<1$.

Παραδείγματα

1) $\alpha_\nu = \dfrac{3\cdot 4^\nu - 5^{2\nu}}{7+6^{2\nu+1}}$, $\lim \alpha_\nu = ;$

$$\alpha_\nu = \frac{3\cdot 4^\nu - 5^{2\nu}}{7+6^{2\nu+1}} = \frac{3\cdot 4^\nu - 25^\nu}{7+6\cdot 36^\nu} = \frac{\cancel{36^\nu}\left[3\left(\frac{4}{36}\right)^\nu - \left(\frac{25}{36}\right)^\nu\right]}{\cancel{36^\nu}\left[7\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^\nu + 6\right]} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \lim \frac{3\left(\frac{4}{36}\right)^\nu - \left(\frac{25}{36}\right)^\nu}{7\left(\frac{1}{36}\right)^\nu + 6} =$$

$$= \frac{\lim\left[3\left(\frac{4}{36}\right)^\nu - \left(\frac{25}{36}\right)^\nu\right]}{\lim\left[7\left(\frac{1}{36}\right)^\nu + 6\right]} = \frac{3\lim\left(\frac{4}{36}\right)^\nu - \lim\left(\frac{25}{36}\right)^\nu}{7\lim\left(\frac{1}{36}\right)^\nu + 6} = \frac{3\cdot 0 - 0}{7\cdot 0+6} = \frac{0}{6} = 0.$$

2) $\alpha_\nu = \dfrac{(-2)^\nu - 7^\nu}{3^\nu + (-13)^\nu}$, $\lim \alpha_\nu$

$$\alpha_\nu = \frac{(-2)^\nu - 7^\nu}{3^\nu + (-13)^\nu} = \frac{(-13)^\nu\left[\left(\frac{-2}{-13}\right)^\nu - \left(\frac{7}{-13}\right)^\nu\right]}{(-13)^\nu\left[\left(\frac{3}{-13}\right)^\nu + 1\right]} = \frac{\left(\frac{2}{13}\right)^\nu - \left(\frac{-7}{13}\right)^\nu}{\left(-\frac{3}{13}\right)^\nu + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim \alpha_\nu = \lim \frac{\dots}{\dots} = \frac{\lim\left[\left(\frac{2}{13}\right)^\nu - \left(-\frac{7}{13}\right)^\nu\right]}{\lim\left[\left(-\frac{3}{7}\right)^\nu + 1\right]} = \frac{\lim\left(\frac{2}{13}\right)^\nu - \lim\left(-\frac{7}{13}\right)^\nu}{\lim\left(-\frac{3}{7}\right)^\nu + 1} = \frac{0-0}{0+1} = 0$$

- Μονοπαραμετρικές → Αν $\underline{\underline{\omega}}$ η εγγράμματη παράσταση που υψώνεται στην ν-οστή δύναμη, διακρίνω τις περιπτώσεις $|\omega|>1$, $|\omega|<1$, $|\omega|=1$

παράδειγμα: $\alpha_\nu = \dfrac{(1+\lambda)^\nu}{1+(1+\lambda)^{2\nu}}$.

i) Αν $|1+\lambda|<1 \Leftrightarrow -1<1+\lambda<1 \Leftrightarrow -2<\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda\in(-2,0)$

$$\lim(1+\lambda)^\nu = 0 \Rightarrow \lim(1+\lambda)^{2\nu} = \left[\lim(1+\lambda)^\nu\right]^2 = 0^2 = 0$$

άρα $\lim \alpha_\nu = \lim \dfrac{(1+\lambda)^\nu}{1+(1+\lambda)^{2\nu}} = \dfrac{\lim(1+\lambda)^\nu}{1+\lim(1+\lambda)^{2\nu}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

ii) Αν $|1+\lambda|>1 \Leftrightarrow 1+\lambda>1 \vee 1+\lambda<-1 \Leftrightarrow \lambda>0 \vee \lambda<-2 \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

$$\left|\frac{1}{1+\lambda}\right|<1 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^\nu = 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{2\nu} = \left[\lim\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^\nu\right]^2 = 0^2 = 0.$$

άρα

$$\alpha_\nu = \frac{(1+\lambda)^\nu}{1+(1+\lambda)^\nu} = \frac{(1+\lambda)^\nu}{(1+\lambda)^{2\nu}\left[\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{2\nu}+1\right]} = \frac{1}{(1+\lambda)^\nu}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{2\nu}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\alpha_\nu = \lim\left[\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^\nu \frac{1}{\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{2\nu}+1}\right] = \lim\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^\nu\cdot\lim\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{2\nu}+1}\right) =$$

$$= \lim\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^\nu \frac{1}{\lim\left[\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{2\nu}+1\right]} = \lim\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^\nu \frac{1}{1+\lim\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{2\nu}} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0.$$

iii) Αν $\underline{|1+\lambda|=1} \Leftrightarrow 1+\lambda=\pm1 \Leftrightarrow \lambda=0 \vee \lambda=2$

Αν $\lambda=0 \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\alpha_\nu = \frac{1}{2}$.

Αν $\lambda=2 \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{1+(-1)^\nu}$, τότε για $\nu=1$ $\alpha_1 = \frac{(-1)^1}{1+(-1)} = \frac{-1}{0} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\neq 2$.

(Μ3) Για ακολουθίες της μορφής $\boxed{\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(k)}$

Προσδιορίζω το άθροισμα με την βοήθεια των προόδων ή με κατάλληλο τέχνασμα (ανάλυση γενικού όρου) ή με τα βασικά αθροίσματα

$$S_1 = 1+2+3+\dots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$
$$S_2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+\nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$
$$S_3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3 = S_1^2 = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$$

οπότε καταλήγω στις μορφές 1 ή 2.

Χρήσιμες είναι οι προτάσεις

$\left.\begin{array}{l}(\alpha_\nu)\text{ αριθμ. πρόοδος}\\ \text{με διαφορά } \omega\end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\cdot\nu = \frac{2\alpha_1+(\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu$

$\left.\begin{array}{l}(\alpha_\nu)\text{ γεωμ. πρόοδος}\\ \text{με λόγο } \lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}.$

<u>Παραδείγματα</u>

1) $\alpha_\nu = \frac{2+2\cdot2^2+2\cdot3^2+\dots+2\nu^2}{3\nu^3} = \frac{2\cdot S_2}{3\nu^3} = \frac{2\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}}{3\nu^3} = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{9\nu^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\alpha_\nu = \lim\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{9\nu^3} = \lim\frac{2\nu^2+3\nu+1}{9\nu^2} = \underset{M_1}{\dots} = \frac{2}{9}$

2) $\alpha_\nu = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ $\longleftrightarrow$ Διασπαση γενικού όρου

Είναι $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}-\{0,-1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = (A+B)x + A$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{0,-1\} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$ Άρα $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Για } x=1,\ \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \\ x=2,\ \frac{1}{2\cdot 3} = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \\ \text{-- -- -- -- -- --} \\ x=\nu,\ \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \cancel{\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\nu+1} \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} \alpha_\nu = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 - \frac{1}{\nu+1} = \frac{\nu+1-1}{\nu+1} =$$

$$= \frac{\nu}{\nu+1} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \lim \frac{\nu}{\nu+1} = \underset{M_1}{\dots} = 1$$

3) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\left[\left(3+\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(3+\frac{2}{\nu}\right)^2 + \dots + \left(3+\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right] =$

$= \frac{1}{\nu}\left[(\nu-1)\cdot 3^2 + \frac{2\cdot 3}{\nu}\overbrace{(1+2+3+\dots+(\nu-1))}^{S_1} + \frac{1}{\nu^2}\overbrace{(1^2+2^2+\dots+\nu^2)}^{S_2}\right] =$

$= \frac{1}{\nu}\left[9(\nu-1) + \frac{6}{\nu}\cdot\frac{(\nu-1)\nu}{2} + \frac{1}{\nu^2}\cdot\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}\right] = \frac{9(\nu-1)}{\nu} + \frac{3\nu-3}{\nu} + \frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \alpha_\nu = \underset{M_1}{\dots} = 9+3+\frac{1}{3} = \frac{37}{3}$

4) $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^\nu} = \frac{1\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^\nu - 1\right]}{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{1-\frac{1}{2^\nu}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{\nu-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \alpha_\nu = \lim\left(2 - \frac{1}{2^{\nu-1}}\right) = 2 - \lim\frac{1}{2^{\nu-1}} = 2 - \lim\frac{1}{2^\nu} = 2-0 = 2.$

(M4) Για ακολουθίες της μορφής : $\boxed{\alpha_\nu = \sqrt[k]{f(\nu)} - \sqrt[k]{\varphi(\nu)}}$ με συγκεκριμένο $k \in \mathbb{N}^*$

1) Αν $k=2$, πολλαπλασιάζω και διαιρώ με τη συζυγή παράσταση
2) Αν $k>2$, χρησιμοποιώ την ταυτότητα

$$x - y = \frac{x^k - y^k}{x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + x\cdot y^{k-2} + y^{k-1}}$$

για $x = \sqrt[k]{f(\nu)}$, $y = \sqrt[k]{\varphi(\nu)}$

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγω σε ακολουθία της μορφής M_1.

- Αν η μορφή είναι $\alpha_\nu = \sqrt[k]{f(\nu)} - \sqrt[\lambda]{\varphi(\nu)}$, κάνω ίδιους δείκτες με την ταυτότητα $\sqrt[k]{a} = \sqrt[k\rho]{a^\rho}$.

Παράδειγμα

$$\alpha_\nu = \sqrt[3]{\nu^2}\left(\sqrt[3]{\nu+1} - \sqrt[3]{\nu}\right) = \sqrt[3]{\nu^2} \cdot \frac{\nu+1-\nu}{\sqrt[3]{(\nu+1)^2} + \sqrt[3]{(\nu+1)\nu} + \sqrt[3]{\nu}} = \frac{\sqrt[3]{\nu^2}}{\sqrt[3]{(\nu+1)^2} + \sqrt[3]{(\nu+1)\nu} + \sqrt[3]{\nu}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\nu^2}}{\sqrt[3]{\nu^2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{\nu}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{\nu}} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim \alpha_\nu = \ldots = \frac{1}{\sqrt[3]{1+0+0} + \sqrt[3]{1+0} + 1} = \frac{1}{3}$$

Σύγκλιση και διάταξη

- **Συμβιβαστότητα ορίου και διάταξης**

Θ. $\boxed{\left.\begin{matrix}\text{Αν } (\alpha_\nu), (b_\nu) \text{ συγκλίνουσες} \\ \forall \nu > k,\ \alpha_\nu \leq b_\nu\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \leq \lim b_\nu}$ (Προσοχη, αν $\alpha_\nu < b_\nu \Rightarrow \lim \alpha_\nu \leq \lim b_\nu$)

~~(απ)~~, Απόδειξη

$$\left.\begin{matrix}(\alpha_\nu), (b_\nu) \text{ συγκλίνουσες} \overset{(1)}{\Rightarrow} (\alpha_\nu - b_\nu) \text{ συγκλίνουσα} \\ \alpha_\nu \leq b_\nu,\ \forall \nu > k \Rightarrow \alpha_\nu - b_\nu \leq 0,\ \forall \nu > k\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(\alpha_\nu - b_\nu) \leq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \lim \alpha_\nu - \lim b_\nu \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim \alpha_\nu \leq \lim b_\nu.$$

- **Ακολουθίες με το ίδιο όριο**

Θ.Ι.Α → Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

Εστω μια ακολουθία b_ν. Αν υπάρχουν δύο ακολουθίες $(\alpha_\nu), (\gamma_\nu)$ με κοινό όριο, τέτοιες ώστε για κάθε $\nu > k$ (k ένας συγκεκριμένος φυσικός) να είναι $\alpha_\nu \leq b_\nu \leq \gamma_\nu$, τότε και η (b_ν) έχει το ίδιο όριο.

$$\boxed{\left.\begin{matrix}(\alpha_\nu), (\gamma_\nu) \text{ συγκλ.} \\ \forall \nu > k,\ \alpha_\nu \leq b_\nu \leq \gamma_\nu \\ \lim \alpha_\nu = \lim \gamma_\nu = \ell\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim b_\nu = \ell}$$

Απόδειξη

$$\forall \nu > k,\ \alpha_\nu \leq b_\nu \leq \gamma_\nu \Rightarrow 0 \leq b_\nu - \alpha_\nu \leq \gamma_\nu - \alpha_\nu \Rightarrow |b_\nu - \alpha_\nu| \leq |\gamma_\nu - \alpha_\nu| \\ \lim(\gamma_\nu - \alpha_\nu) = \lim\gamma_\nu - \lim\alpha_\nu = \ell - \ell = 0 \Bigg\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim(b_\nu - \alpha_\nu) = 0$ (διότι φράσσεται από μηδενική).

Άρα $\lim b_\nu = \lim[\alpha_\nu + (b_\nu - \alpha_\nu)] = \underbrace{\lim\alpha_\nu}_{\ell} + \underbrace{\lim(b_\nu - \alpha_\nu)}_{0} = \ell + 0 = \ell.$

- Εφαρμογή Έχουμε δείξει ότι 1) $\lim\sqrt[\nu]{\nu} = 1$
  2) $\lim\sqrt[\nu]{\alpha} = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Θα δείξουμε ότι

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu > 0,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \\ \lim\alpha_\nu = \alpha > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1}$$

Απόδειξη

$$\lim\alpha_\nu = \alpha > 0 \Rightarrow \frac{|\alpha|}{2} < |\alpha_\nu| < \frac{3|\alpha|}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < \alpha_\nu < \frac{3\alpha}{2} \Rightarrow \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} < \sqrt[\nu]{\frac{3\alpha}{2}},\ \forall \nu > k \\ \lim\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{2}} = \lim\sqrt[\nu]{\frac{3\alpha}{2}} = 1 \Bigg\} \Rightarrow$$

$\xrightarrow{\text{ΘΙΑ}} \lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1.$

ΜΕΘΟΔΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ (που λύνονται με γνωστές ακολουθίες)

Στηρίζεται στα παρακάτω κριτήρια:

1) ΘΙΑ (Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών)

Αν $\left.\begin{array}{l}\forall \nu > k,\ \alpha_\nu \leq b_\nu \leq \gamma_\nu \\ \text{και } \lim\alpha_\nu = \lim\gamma_\nu = \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \lim b_\nu = \ell$ • $\lim\sqrt[\nu]{\nu} = \lim\sqrt[\nu]{\alpha} = 1$

2) Αν $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu > 0,\ \forall \nu \in \mathbb{N} \\ \lim\alpha_\nu = \alpha > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$

(M3) Σε ακολουθίες της μορφής $\boxed{\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{f(\nu)}}$

•1 Αν $f(\nu)$ πολυώνυμο

1) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2 + \nu + 1}$

α' τρόπος: Με το ΘΙΑ, κάνω αυθαίρετες αυξομειώσεις και ύστερα την ν-οστή ρίζα έτσι ώστε να έχω αριστερά και δεξιά ακολουθίες των οποίων το όριο να ανάγεται στις $\lim\sqrt[\nu]{\nu} = 1$ και $\lim\sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.

Είναι $1 < \nu^2+\nu+1 < \nu^2+\nu^2+\nu^2 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{1} < \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu+1} < \sqrt[\nu]{3\nu^2} \Leftrightarrow 1 < \alpha_\nu < \sqrt[\nu]{3}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^2$

Αλλα $\lim 1 = 1$

$$\lim\left[\sqrt[\nu]{3}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^2\right] = \lim\sqrt[\nu]{3}\cdot\left(\lim\sqrt[\nu]{\nu}\right)^2 = 1\cdot 1^2 = 1.$$

β' τρόπος : Βγάζω κοινό παράγοντα το ν^k και χρησιμοποιώ το 2ο κριτήριο

Έτσι έχω: $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^2+\nu+1} = \sqrt[\nu]{\nu^2\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right)} = \left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^2\sqrt[\nu]{1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} \longrightarrow 1\cdot 1 = 1$

διότι $\lim\left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^2 = \left(\lim\sqrt[\nu]{\nu}\right)^2 = 1\cdot 1 = 1$

και $\lim\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow \lim\sqrt[\nu]{1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} = 1$

● Οι αυθαίρετες αυξομειώσεις θέλουν προσοχή.

π.χ. στο $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{2\nu^3-\nu+5}$

η $2\nu^3 \underset{*}{\leq} 2\nu^3-\nu+5 \leq 2\nu^3+\nu^3+5\nu^3$ δεν ισχύει για $\nu > 5$

άρα θέλει πολλή προσοχή η ενίσχυση όταν στο $f(\nu)$ υπάρχουν μείον, στα αριστερά.

σωστό : $5 \leq 2\nu^3-\nu+5 \leq 2\nu^3+\nu^3+5\nu^3$ κτλ.

~~Αριστερα~~ Στα δεξια, τα κάνω όλα + και ν^3.

●2 Αν $f(\nu) = \lambda_1 c_1^\nu + \lambda_2 c_2^\nu + \dots + \lambda_k c_k^\nu$

παράδειγμα: $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{2^\nu+4^\nu+9^\nu}$

α' τρόπος : Με ΘΙΑ , Είναι $9^\nu < 2^\nu+4^\nu+9^\nu < 9^\nu+9^\nu+9^\nu \Leftrightarrow 9 < \sqrt[\nu]{2^\nu+4^\nu+9^\nu} < 9\cdot\sqrt[\nu]{3}$

$\Leftrightarrow 9 < \alpha_\nu < 9\sqrt[\nu]{3}, \forall \nu\in\mathbb{N}^*$

$\lim 9 = 9$

$\lim 9\sqrt[\nu]{3} = 9\lim\sqrt[\nu]{3} = 9\cdot 1 = 9$ $\xrightarrow{\text{ΘΙΑ}}$ $\lim\alpha_\nu = 9$

β' τρόπος (~~δεν εφαρμόζεται πάντα σε αυτή την μορφή~~) Με το 2ο κριτήριο.

Βγάζω κοινό παράγοντα το $c = \max\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$.

$$\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{2^\nu+4^\nu+9^\nu} = \sqrt[\nu]{9^\nu\left[\left(\frac{2}{9}\right)^\nu+\left(\frac{4}{9}\right)^\nu+1\right]} = 9\cdot\sqrt[\nu]{\underbrace{\left(\frac{2}{9}\right)^\nu+\left(\frac{4}{9}\right)^\nu+1}_{b_\nu}}$$

$\lim b_\nu = \lim\left[\left(\frac{2}{9}\right)^\nu+\left(\frac{4}{9}\right)^\nu+1\right] = \dots = 1 > 0$, $b_\nu > 0, \forall\nu\in\mathbb{N}^*$ $\Longrightarrow \lim\alpha_\nu = 9\cdot\lim\sqrt[\nu]{b_\nu} = 9\cdot 1 = 9.$

Ο β' τρόπος όμως δεν εφαρμόζεται στο παρακάτω παράδειγμα

παράδειγμα $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\left(\frac{3}{5}\right)^\nu+\left(\frac{5}{6}\right)^\nu}$

•3 Αν $f(\nu)=b_\nu$ όπου b_ν ακολουθία ~~της~~ της οποίας το όριο ~~να~~ είναι γνωστό

τότε αν $\left.\begin{array}{l} b_\nu>0,\ \forall \nu\in\mathbb{N}^* \\ \lim b_\nu = b>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{b_\nu}=1.$

<u>παράδειγμα</u> $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{\dfrac{7^{\nu+1}+2}{7^\nu-3^\nu}}$

Είναι $b_\nu=\dfrac{7^{\nu+1}+2}{7^\nu-3^\nu}>0,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*$ ← (<u>απαραίτητη προϋπόθεση</u>)

$$b_\nu=\frac{7^{\nu+1}+2}{7^\nu-3^\nu}=\frac{7\cdot 7^\nu+2}{7^\nu-3^\nu}=\frac{7+\frac{2}{7^\nu}}{1-\frac{1}{3^\nu}}\Rightarrow \lim b_\nu=\ldots\overset{M2}{=}\ldots=\cancel{\frac{7+0}{1-0}}=\frac{7+2\cdot 0}{1-0}=7>0 \left.\right\} \Rightarrow$$

$b_\nu>0,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim \alpha_\nu=1$

↳ <u>Παραμετρική</u>

• $\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{x^\nu+x^{-\nu}}$, $\lim\alpha_\nu$;

<u>Λύση:</u>

i) Αν $0<x<1 \Rightarrow |x|<1\Rightarrow \lim x^\nu=0$ οπότε

$$\alpha_\nu=\sqrt[\nu]{x^\nu+x^{-\nu}}=\sqrt[\nu]{x^\nu+\frac{1}{x^\nu}}=\sqrt[\nu]{\frac{x^{2\nu}+1}{x^\nu}}=\frac{1}{x}\sqrt[\nu]{\underbrace{x^{2\nu}+1}_{b_\nu}}$$

$$\left.\begin{array}{l} b_\nu=x^{2\nu}+1=(x^\nu)^2+1\Rightarrow \lim b_\nu=0+1=1>0 \\ b_\nu>0,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^* \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\sqrt[\nu]{b_\nu}=1$$

Άρα $\lim\alpha_\nu=\frac{1}{x}\lim\sqrt[\nu]{b_\nu}=\frac{1}{x}$

ii) Αν $x=1\Rightarrow \alpha_\nu=\sqrt[\nu]{1^\nu+1^{-\nu}}=\sqrt[\nu]{2}\Rightarrow \lim\alpha_\nu=\lim\sqrt[\nu]{2}=1$

iii) Αν $x>1\Rightarrow 0<\frac{1}{x}<1 \overset{*}{\underset{i}{\Rightarrow}} \lim\sqrt[\nu]{\left(\frac{1}{x}\right)^\nu+\left(\frac{1}{x}\right)^{-\nu}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\alpha_\nu=\lim\sqrt[\nu]{x^\nu+x^{-\nu}}=x.$

(Μ6) Μορφή $\boxed{\alpha_\nu=f(1,\nu)+f(2,\nu)+f(3,\nu)+\cdots+f(k\nu,\nu)}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}^*$

(Μη πεπερασμένο πλήθος όρων).

Βρίσκω τον μικρότερο όρο μ και τον μεγαλύτερο M του αθροίσματος και έχω:

$$\left.\begin{array}{l} \mu\leq f(1,\nu)\leq M \\ \mu\leq f(2,\nu)\leq M \\ \text{-----------} \\ \mu\leq f(k\nu,\nu)\leq M \end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} \nu\mu<\alpha_\nu<\nu M$$

Μετά δείχνω ότι $\lim(\nu\mu)=\lim(\nu M)=\ell$ οπότε και $\lim\alpha_\nu=\ell$. (ΘΙ.Α.)

Παραδείγματα

1) Αριθμητης σταθερος, παρονομαστής μεταβλητης

$$a_\nu=\frac{\nu^3}{\nu^4+1}+\frac{\nu^3}{\nu^4+2}+\dots+\frac{\nu^3}{\nu^4+\nu}$$

Λύση: Είναι $\frac{\nu^3}{\nu^4+\nu}\leqslant\frac{\nu^3}{\nu^4+k}\leqslant\frac{\nu^3}{\nu^4+1}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $1\leqslant k\leqslant\nu$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{άρα για } k=1, & \frac{\nu^3}{\nu^4+\nu}\leqslant\frac{\nu^3}{\nu^4+1}\leqslant\frac{\nu^3}{\nu^4+1}\\ \text{για } k=2, & \frac{\nu^3}{\nu^4+\nu}\leqslant\frac{\nu^3}{\nu^4+2}\leqslant\frac{\nu^3}{\nu^4+1}\\ & -\ -\ -\ -\ -\ -\\ & \frac{\nu^3}{\nu^4+\nu}\leqslant\frac{\nu^3}{\nu^4+\nu}\leqslant\frac{\nu^3}{\nu^4+1}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\underbrace{\frac{\nu\cdot\nu^3}{\nu^4+\nu}}_{\downarrow\ 1}\leqslant a_\nu\leqslant\underbrace{\frac{\nu\cdot\nu^3}{\nu^4+1}}_{\downarrow\ 1}\right\}\overset{\text{ΘΙΑ}}{\Longrightarrow}\lim a_\nu=1$$

2) Αριθμητής μεταβλητός, παρονομαστής μεταβλητός ⟶ Αν είναι μηδενική ενισχύω και (δείχνω ότι φράσσεται άπο μηδενική

$$a_\nu=\frac{\eta\mu 1}{\nu^2+1}+\frac{\eta\mu 2}{\nu^2+2}+\dots+\frac{\eta\mu\nu}{\nu^2+\nu}$$

Λύση: $|a_\nu|=\left|\frac{\eta\mu 1}{\nu^2+1}+\frac{\eta\mu 2}{\nu^2+2}+\dots+\frac{\eta\mu\nu}{\nu^2+\nu}\right|\leqslant\frac{|\eta\mu 1|}{\nu^2+1}+\frac{|\eta\mu 2|}{\nu^2+1}+\dots+\frac{|\eta\mu\nu|}{\nu^2+\nu}\leqslant$

$\leqslant\frac{1}{\nu^2+1}+\frac{1}{\nu^2+2}+\dots+\frac{1}{\nu^2+\nu}=b_\nu.$

$$\text{Είναι}\ \left.\begin{array}{l}\frac{1}{\nu^2+\nu}\leqslant\frac{1}{\nu^2+1}\leqslant\frac{1}{\nu^2+1}\\ \frac{1}{\nu^2+\nu}\leqslant\frac{1}{\nu^2+2}\leqslant\frac{1}{\nu^2+1}\\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\ \frac{1}{\nu^2+\nu}\leqslant\frac{1}{\nu^2+\nu}\leqslant\frac{1}{\nu^2+1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\underbrace{\frac{\nu}{\nu^2+\nu}}_{\downarrow\ 0}\leqslant b_\nu\leqslant\underbrace{\frac{\nu}{\nu^2+1}}_{\downarrow\ 0}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lim b_\nu=0\\ |a_\nu|<b_\nu,\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\}\Rightarrow\lim a_\nu=0$$

3) Αν όμως δεν είναι μηδενική, τότε βάζω πρώτα τους παρονομαστές, ύστερα πολλαπλασιάζω κατάμελη με τους αριθμητές και προσθέτω κάτα μέλη.

$$a_\nu=\frac{\nu^2+1^2}{\nu^3+1^2}+\frac{\nu^2+2^2}{\nu^3+2^2}+\frac{\nu^2+3^2}{\nu^3+3^2}+\dots+\frac{\nu^2+\nu^2}{\nu^3+\nu^2}$$

$$\text{Λύση}\quad\text{Είναι}\ \left.\begin{array}{l}\frac{1}{\nu^3+\nu^2}\leqslant\frac{1}{\nu^3+1^2}\leqslant\frac{1}{\nu^3+1^2}\Rightarrow\frac{\nu^2+1^2}{\nu^3+\nu^2}\leqslant\frac{\nu^2+1^2}{\nu^2+1^2}\leqslant\frac{\nu^2+1}{\nu^3+1^2}\\ \frac{1}{\nu^3+\nu^2}\leqslant\frac{1}{\nu^3+2^2}\leqslant\frac{1}{\nu^3+1^2}\Rightarrow\frac{\nu^2+2^2}{\nu^3+\nu^2}\leqslant\frac{\nu^2+2^2}{\nu^3+2^2}\leqslant\frac{\nu^2+2^2}{\nu^3+1^2}\\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\ \frac{1}{\nu^3+\nu^2}\leqslant\frac{1}{\nu^3+\nu^2}\leqslant\frac{1}{\nu^3+1^2}\Rightarrow\frac{\nu^2+\nu^2}{\nu^3+\nu^2}\leqslant\frac{\nu^2+\nu^2}{\nu^3+\nu^2}\leqslant\frac{\nu^2+\nu^2}{\nu^3+1^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\nu\cdot\nu^2+(1^2+2^2+\dots+\nu^2)}{\nu^3+\nu^2}\leq \alpha_\nu \leq \frac{\nu\cdot\nu^2+(1^2+2^2+\dots+\nu^2)}{\nu^3+\nu\cdot 1^2} \Rightarrow \frac{\nu^3+\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu^3+\nu^2}\leq\alpha_\nu\leq\frac{\nu^3+\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{\nu^3+\nu^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\dots\Rightarrow \underbrace{\frac{8\nu^3+3\nu^2+\nu}{6\nu^3+6\nu^2}}_{\downarrow\ 4/3}\leq\alpha_\nu\leq\underbrace{\frac{8\nu^3+3\nu^2+\nu}{6\nu^3+6}}_{\downarrow\ 4/3},\ \forall\nu\in\mathbb{N}^*\Bigg)\Rightarrow \lim\alpha_\nu=\frac{4}{3}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν } (\alpha_\nu)\uparrow \wedge (\alpha_\nu) \text{ άνω φραγμένη} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ συγκλίνουσα με } \lim\alpha_\nu=\sup(\alpha_\nu)\\ \text{Αν } (\alpha_\nu)\downarrow \wedge (\alpha_\nu) \text{ κάτω φραγμένη} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ συγκλίνουσα με } \lim\alpha_\nu=\inf(\alpha_\nu)\end{array}}$

Απόδειξη

Έστω (α_ν) άνω φραγμένη και $(\alpha_\nu)\uparrow$

(α_ν) άνω φραγμένη $\Rightarrow$ έχει $\sup(\alpha_\nu)$ έστω $\sup(\alpha_\nu)=\ell$.

οπότε $\ell=\sup(\alpha_\nu)\Rightarrow\begin{cases}\forall\varepsilon>0,\exists\nu_0\in\mathbb{N}^*: \ell-\varepsilon<\alpha_{\nu_0}\leq\ell \xRightarrow{(\alpha_\nu)\uparrow}\forall\nu>\nu_0,\ \ell-\varepsilon<\alpha_\nu\leq\ell\\ \forall\varepsilon>0,\ \forall\nu>\nu_0\in\mathbb{N}^*\quad \alpha_\nu\leq\ell<\ell+\varepsilon\end{cases}\Bigg)\Rightarrow$

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\nu_0\in\mathbb{N}^*:\forall\nu>\nu_0,\nu\in\mathbb{N}^*: \ell-\varepsilon<\alpha_\nu\leq\ell<\ell+\varepsilon\Rightarrow \ell-\varepsilon<\alpha_\nu<\ell+\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<\alpha_\nu-\ell<\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow|\alpha_\nu-\ell|<\varepsilon$, άρα $\lim\alpha_\nu=\ell=\sup(\alpha_\nu)$

Όμοια αν (α_ν) κάτω φραγμένη και $(\alpha_\nu)\downarrow$

ΜΕΘΟΔΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ (που λύνονται με το κριτήριο μονοτονίας)

Η μέθοδος χρησιμοποιείται σε αναδρομικές συνήθως ακολουθίες πρώτης τάξης, όταν ζητείται να δείξουμε ότι συγκλίνουν.

Το κριτήριο αυτό μας βεβαιώνει μόνο για την σύγκλιση της ακολουθίας.

Για να βρούμε και το όριο εφαρμόζουμε το εξής

ΤΕΧΝΑΣΜΑ : για την ακολουθία $(\alpha_\nu):\begin{cases}\alpha_1=\alpha\\ \alpha_{\nu+1}=f(\alpha_\nu)\end{cases}$

i) Μελετώ την μονοτονία

ii) Μελετώ τα φράγματα

iii) Συμπεραίνω ότι συγκλίνει (κρ. Μονοτονίας)

iv) Παίρνω τα όρια του αναδρομικού τύπου $\alpha_{\nu+1}=f(\alpha_\nu)$ και θέτω $\lim\alpha_\nu=\ell$ οπότε και $\lim\alpha_{\nu+1}=\ell$, οπότε έχω την χαρακτηριστική εξίσωση $x=f(x)$

Από τις ρίζες αυτής, το όριο είναι η ρίζα που είναι ανάμεσα στα φράγματα.

- Αν μεταξύ των φραγμάτων βρίσκονται περισσότερες ρίζες, συμπτύσσουμε το μεταξύ των διάστημα ώστε το όριο να ορίζεται μονότιμα

Παραδείγματα

1) 21.Β $\longleftrightarrow$ Φυλ. 14

2) $(\alpha_\nu):\begin{cases}\alpha_1=3\\ \alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(\alpha_\nu+\frac{2^2}{\alpha_\nu}\right),\forall\nu\in\mathbb{N}^*\end{cases}\Bigg)\Rightarrow \alpha_\nu>0,\forall\nu\in\mathbb{N}^*$ (επαγωγικά...) (1)

i) Μονοτονία - Φράγματα

Είναι $\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(3+\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{6} < 3 = \alpha_1$, ένδειξη ότι $(\alpha_\nu)\downarrow$.

Θα δείξω ότι $(\alpha_\nu)\downarrow \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{2^2}{\alpha_\nu}\right) < \alpha_\nu \Leftrightarrow \alpha_\nu^2 + 4 < 2\alpha_\nu^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_\nu^2 \geq 4 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha_\nu \geq 2$ άρα αρκεί <u>το 2 κάτω φράγμα</u>

<u>α' τρόπος</u>: Επαγωγικά. Για $\nu=1$, $\alpha_1 = 3 > 2$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $\nu = k$, $\alpha_k \geq 2$.

Θα δείξω ότι και $\alpha_{k+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\alpha_k + \frac{4}{\alpha_k}\right) \geq 2 \Leftrightarrow \alpha_k^2 + 4 \geq 4\alpha_k \Leftrightarrow \alpha_k^2 - 4\alpha_k + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha_k - 2)^2 \geq 0$ ισχύει ως τέλειο τετράγωνο, άρα και αντιστρόφως $\alpha_{k+1} \geq 2$ άρα $\alpha_\nu \geq 2, \forall \nu \in \mathbb{N}$

άρα αντιστρόφως $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (\alpha_\nu)\downarrow$.

(α_ν) κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα το 2 $\Rightarrow$ (α_ν) συγκλίνουσα

ii) Εύρεση του ορίου: Έστω $\lim \alpha_\nu = \ell \Leftrightarrow \lim \alpha_{\nu+1} = \ell$ $\quad (2 \leq \ell \leq 3)$ (2: κ. φράγμα, 3: α. φράγμα)

Είναι $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{2^2}{\alpha_\nu}\right) \Leftrightarrow \lim \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\lim \alpha_\nu + \frac{2^2}{\lim \alpha_\nu}\right) \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{4}{\ell}\right) \Leftrightarrow$

$\forall \nu \in \mathbb{N}, \alpha_\nu > 2 \Rightarrow \lim \alpha_\nu \neq 0$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 2 \leftarrow \text{δεκτή (διότι } 2 \leq 2 \leq 3) \\ \ell = -2 \leftarrow \text{απορρίπτεται} \end{cases}$ οπότε $\lim \alpha_\nu = 2$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ D'ALEMBERT

$$\boxed{\text{Αν } \left.\begin{array}{l} \lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda < 1 \\ \alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0}$$

<u>Απόδειξη</u>

$\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1 \Leftrightarrow \lim\left(\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - 1\right) < 0 \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0, \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - 1 < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1 \\ \alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu \Rightarrow (\alpha_\nu)\downarrow \\ (\alpha_\nu) \text{ κάτω φραγμένη} \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha_\nu)$ συγκλίνουσα με $\lim \alpha_\nu = \ell \geq 0$ (διότι έχει όρους θετικούς). Θα δείξω ότι $\ell = 0$

με "ένα" κ.φ το 0

- Έστω $\left.\begin{array}{l}\ell > 0 \Rightarrow \lim \alpha_\nu \neq 0 \\ \alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \alpha_\nu \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\lim \alpha_{\nu+1}}{\lim \alpha_\nu} = \frac{\ell}{\ell} = 1 \leftarrow$ Άτοπο διότι εξ' υποθέσεως $\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1$.

Άρα $\ell = 0 \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0$.

Παραδείγματα

1) $\lim \frac{2^\nu}{\nu!} = 0$

<u>Λύση</u> : Είναι $\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda = \frac{\frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)!}}{\frac{2^\nu}{\nu!}} = \frac{2^{\nu+1}\cdot\nu!}{2^\nu\cdot(\nu+1)!} = \frac{2^{\nu+1}\cdot\nu!}{2^\nu\cdot\nu!\cdot(\nu+1)} = \frac{2}{\nu+1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lim\frac{2}{\nu+1} = 0<1 \\ \alpha_\nu>0, \forall \nu\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{D'Al}]{\text{κρ}} \lim \alpha_\nu = 0.$$

2) Δείξτε ότι $\lim \frac{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\nu+1)}{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3\nu-1)} = 0$

<u>Λύση</u>

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\nu+1)(2\nu+3)}{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3\nu-1)(3\nu+2)}}{\frac{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\nu+1)}{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3\nu-1)}} = \frac{2\nu+3}{3\nu+2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lim\frac{2\nu+3}{3\nu+2} = \frac{2}{3}<1 \\ \alpha_\nu>0, \forall\nu\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\alpha_\nu = 0$$

- <u>Χρήση της βασικής ακολουθίας</u> $\longrightarrow$ $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$

Θ1. Η $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη άρα συγκλίνουσα με όριο τον άρρητο αριθμό $e \simeq 2,718281$

Θ2. $\boxed{\lim\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu = e^\alpha}$ $\longrightarrow$ θα αποδειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Παραδείγματα

1) $\lim\left(1+\frac{2}{\nu}\right)^\nu = e^2$

<u>Λύση</u> :

$$\alpha_\nu = \left(1+\frac{2}{\nu}\right)^\nu = \left(\frac{\nu+2}{\nu}\right)^\nu = \left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu = \left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\right)^\nu\cdot\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu = \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1-1}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \frac{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{1+\frac{1}{\nu+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \Rightarrow \lim\alpha_\nu = \frac{\lim\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu =$$

$$= \frac{e}{1}\cdot e = e^2.$$

2) $\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} = ;$

Λυση : $\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right] = \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right) = e\cdot 1 = e$

3) $\lim\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{\nu} = \lim\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu/2} = \lim\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu}}\right) = \sqrt{\lim\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu}} \overset{*}{=} \sqrt{e}$

$*$ $\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)=e \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \nu_0\in\mathbb{N}^*: \forall \nu>\nu_0, \left|\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}-e\right|<\varepsilon \Rightarrow$ ισχύει και για $2\nu=\nu>\nu_0$ δηλ

$\left|\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu}-e\right|<\varepsilon$ άρα $\lim\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu}=e$.

Πιο σύντομα:

- β' τρόπος : θέτω $2\nu=k$, $\lim a_\nu = \lim\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k/2} = \lim\sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} = \sqrt{\lim\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} = \sqrt{e}$

- Συνδυασμός D'Alembert και βασικής ακολουθίας:

4) $a_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu}$

Λύση : Είναι $a_\nu>0, \forall \nu\in\mathbb{N}^*$

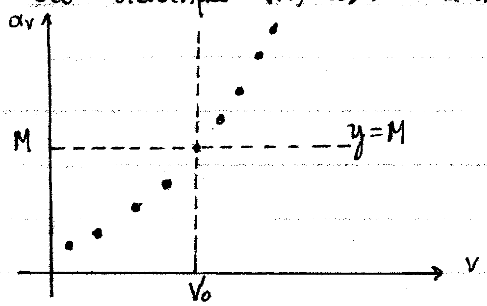
$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}}}{\frac{\nu!}{\nu^\nu}} = \frac{\nu^\nu\cdot\nu!\,(\nu+1)}{\nu!\,(\nu+1)^{\nu+1}} = \frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^\nu} = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu = \frac{1}{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = \frac{1}{\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = \frac{1}{e} < 1, \quad a_\nu>0, \forall\nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim a_\nu = 0$$

ΜΗ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

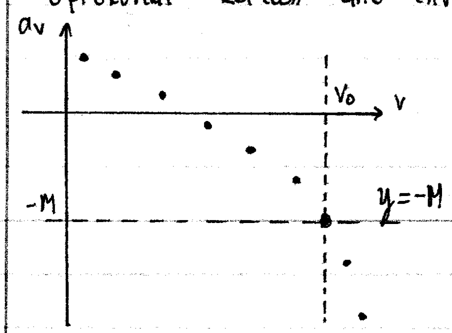
• Ορισμος : $\boxed{\lim \alpha_\nu = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0 ,\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \in \mathbb{N} ,\ \nu>\nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu > M}$

Έτσι, για κάθε $M>0$, οσοδήποτε μεγάλο, όλοι οι όροι, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα $(M,+\infty)$. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται "πάνω" από την ευθεία $y=M$



Ορισμος : $\boxed{\lim \alpha_\nu = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0 ,\ \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \in \mathbb{N} ,\ \nu>\nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu < -M}$

Έτσι, για κάθε $M>0$, οσοδήποτε μεγάλο, όλοι οι όροι, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, βρίσκονται στο διάστημα $(-\infty,-M)$. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται "κάτω" από την ευθεία. $y=-M$.



Παρατηρήσεις

1) $\forall \kappa \in \mathbb{N}^*$, $\lim \alpha_\nu = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \lim \alpha_{\nu+\kappa} = +\infty\ (-\infty)$
2) $\lim \alpha_\nu = +\infty \Leftrightarrow \lim(-\alpha_\nu) = -\infty$
3) $\lim \alpha_\nu = +\infty\ (-\infty) \Rightarrow \lim |\alpha_\nu| = +\infty$ (Δεν ισχύει το αντίστροφο)
4) $\lim \alpha_\nu = +\infty\ (-\infty) \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0 ,\ \alpha_\nu > 0 \quad (\alpha_\nu < 0)$
5) Έστω ότι $\exists \kappa \in \mathbb{N}: \alpha_\nu \leq \beta_\nu ,\ \forall \nu > \kappa$. Τότε
   i) $\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \lim \beta_\nu = +\infty$ (Απόδειξη εκτός ύλης).
   ii) $\lim \beta_\nu = -\infty \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \cancel{+\infty} -\infty$

V

▼ Ακολουθίες που δεν έχουν όριο

Μια ακολουθία <u>μη συγκλίνουσα</u>, δηλαδή που δεν έχει πεπερασμένο όριο $\ell \in \mathbb{R}$ είναι δυνατον:

1) να έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$
2) να μην έχει όριο στο $\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}}$ ⟶ <u>Αποκλίνουσα ακολουθία</u> (π.χ. η $\alpha_\nu = (-2)^\nu$)

▼ Όριο της $\frac{1}{\alpha_\nu}$

Θ1. $\boxed{\left.\begin{matrix} \lim \alpha_\nu = 0,\ \alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \\ \exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall \nu > \kappa \Rightarrow \alpha_\nu > 0\ (\acute{\eta}\ \alpha_\nu < 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \frac{1}{\alpha_\nu} = +\infty \ (\acute{\eta}\ -\infty)}$

(απόδειξη εκτός ύλης).

Θ2. $\boxed{\left.\begin{matrix} \lim \alpha_\nu \in \{-\infty, +\infty\} \\ \forall \nu \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_\nu \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \frac{1}{\alpha_\nu} = 0}$

<u>Απόδειξη</u>: Εστω $\lim \alpha_\nu = -\infty \Rightarrow \forall M > 0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0,\ \alpha_\nu < -M \quad (1)$

Εστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow$ για $M = \frac{1}{\varepsilon}$, $M > 0 \xrightarrow{(1)} \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0,\ \alpha_\nu < -M = \frac{-1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\alpha_\nu| > \frac{1}{\varepsilon} \overset{\alpha_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*}{\Rightarrow} \frac{1}{|\alpha_\nu|} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right| < \varepsilon$, άρα $\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = 0$.

Ομοια, αν $\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{\alpha_\nu} = 0$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Στο Θ2, αν η συνθήκη $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει $\forall \nu > \kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$ (και όχι $\forall \nu \in \mathbb{N}$), τότε $\lim \frac{1}{\alpha_{\nu+\kappa}} = 0$.

2) Στο Θ1, αν οι οροι της α_ν δεν διατηρουν πρόσημο, τοτε $\left(\frac{1}{\alpha_\nu}\right)$ αποκλίνουσα.

↳ $\forall \rho \in \mathbb{Q}^*$, $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^\rho} \to 0 \overset{\Theta 1}{\Rightarrow} \boxed{\forall \rho \in \mathbb{Q}^*, \lim \nu^\rho = +\infty}$

$\Downarrow$

$\boxed{\forall \rho \in \mathbb{Q}^*, \lim(-\nu^\rho) = -\infty}$

• <u>Όριο μονωνύμου</u> ⟶ $\boxed{\lim \nu^\kappa = +\infty,\ \forall \kappa \in \mathbb{N}^*}$

Εφαρμογές – θεωρία

1) $\boxed{\lim \vartheta\nu = +\infty,\ \forall \vartheta \in \mathbb{R}^*_+}$ $\Rightarrow$ • $\lim \alpha\cdot\nu = -\infty,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*_-$

Απόδειξη

Έστω $M>0$. Αρκεί $\alpha_\nu > M \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\vartheta\cdot\nu > M \\ \vartheta \in \mathbb{R}^*_+\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \nu > \frac{M}{\vartheta} \ ^{(1)}$. Παίρνω "έναν" $\nu_0 \geq \left[\frac{M}{\vartheta}\right] \Rightarrow$

Μετ. $\Rightarrow \forall \nu > \nu_0,\ \nu > \frac{M}{\vartheta} \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha_\nu > M$ άρα $\forall M>0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0,\ \alpha_\nu > M \Rightarrow \lim \vartheta\cdot\nu = +\infty$.

2) $\boxed{\left.\begin{matrix}\lim \alpha_\nu = +\infty \\ \alpha_\nu \geq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = +\infty.}$ • → $\lim \sqrt[\kappa]{\nu} = +\infty,\ \forall \kappa \in \mathbb{N}^*$

Απόδειξη

Έστω $M>0 \Leftrightarrow M^\kappa > 0$, οπότε $\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0,\ \alpha_\nu > M^\kappa \Rightarrow \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} > |M| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} > M$ άρα $\lim \sqrt[\kappa]{\alpha_\nu} = +\infty$.

3) $\boxed{\text{Αν } \alpha > 1 \Rightarrow \lim \alpha^\nu = +\infty}$

Απόδειξη

Θέτω $\vartheta = \alpha - 1 > 0 \Rightarrow \alpha = 1+\vartheta$, οπότε $\left.\begin{matrix}\alpha^\nu = (1+\vartheta)^\nu \overset{(B)}{\geq} 1 + \nu\cdot\vartheta \geq \nu\vartheta, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \\ \lim \nu\vartheta = +\infty\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \alpha^\nu = +\infty$.

→ Γενικά, ~~δείξα~~ είναι

$$\lim \alpha^\nu = \begin{cases} 0 & , |\alpha| < 0 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1 \\ +\infty & , \alpha > 1 \\ 1 & , \alpha = 1 \end{cases}$$

• Για $\alpha \leq -1$, $\lim \alpha_\nu \notin \overline{\mathbb{R}}$

4) Κριτήριο D'Alembert

Δείξαμε ότι αν $\left.\begin{matrix}\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda < 1 \\ \alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0$

Θα δείξουμε ότι $\boxed{\left.\begin{matrix}\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda > 1 \\ \alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty}$

Απόδειξη

$\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda > 1 \Rightarrow \lim \frac{1}{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}} = \frac{1}{\lim \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}} = \frac{1}{\lambda} < 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\lim \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{1}{\lambda} < 1 \\ \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \alpha_\nu > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_\nu} > 0\end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{D'Al}]{\text{κρ}}$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \\ \lim \frac{1}{\alpha_\nu} = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$.

Μη πεπερασμένα όρια και πράξεις.

Θ1. Έστω (α_ν) με $\lim \alpha_\nu = +\infty$.

I) (b_ν) φραγμένη κάτω $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu + b_\nu) = +\infty$

II) (b_ν) κάτω φραγμ. με κ. φράγμα θετικό $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu b_\nu) = +\infty$

III) (b_ν) άνω φραγμ. με α. φράγμα αρνητικό $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu b_\nu) = -\infty$

Απόδειξη

I) (b_ν) φραγμένη κάτω $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu + b_\nu) = +\infty$.

(b_ν) φραγμένη κάτω $\Rightarrow \exists\, \varphi \in \mathbb{R} : b_\nu \geq \varphi,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ (1)

Έστω $M>0$. Παίρνω έναν τυχαίο θετικό $\vartheta > M - \varphi$ (2)

$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty \\ \vartheta > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} ; \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \nu > \nu_0 : \left.\begin{array}{l}\alpha_\nu > \vartheta \\ \overset{(2)}{\Rightarrow} \vartheta > M - \varphi\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha_\nu > M - \varphi,\ \forall \nu > \nu_0 \\ \text{Είναι και } b_\nu \underset{(1)}{>} \varphi,\ \forall \nu > \nu_0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_\nu + b_\nu > (M-\varphi) + \varphi \Rightarrow \alpha_\nu + b_\nu > M,\ \forall \nu > \nu_0$. Άρα $\lim(\alpha_\nu + b_\nu) = +\infty$.

II) (b_ν) κάτω φραγμένη με κάτω φρ. θετικό $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu b_\nu) = +\infty$.

(b_ν) κατω φραγμένη με κάτω φράγμα θετικο $\Rightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}^*_+ : b_\nu \geq \vartheta,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ (1)

Έστω $M>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{M}{\vartheta} > 0 \\ \lim \alpha_\nu = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \nu > \nu_0 : \alpha_\nu > \frac{M}{\vartheta}$

$\Rightarrow \alpha_\nu b_\nu \geq \vartheta \cdot \frac{M}{\vartheta} \Rightarrow \alpha_\nu b_\nu \geq M,\ \forall \nu > \nu_0$ Άρα $\lim(\alpha_\nu b_\nu) = +\infty$.

III) (b_ν) άνω φραγμένη με άνω φράγμα αρνητικό $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu b_\nu) = -\infty$.

(b_ν) ανω φραγμένη με ανω φράγμα αρνητικο $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^*_- : b_\nu \leq \alpha,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow -b_\nu \geq -\alpha,\ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (-b_\nu)$ κάτω φραγμένη απο θετικό $\vartheta = -\alpha \in \mathbb{R}^*_+ \xrightarrow{(II)}$

$\Rightarrow \lim(\alpha_\nu(-b_\nu)) = +\infty \Rightarrow \lim(-\alpha_\nu b_\nu) = +\infty \Rightarrow \lim(\alpha_\nu b_\nu) = -\infty$.

Θ2. Έστω (α_ν) με $\lim \alpha_\nu = -\infty$

I) (b_ν) φραγμένη άνω $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu + b_\nu) = -\infty$

II) (b_ν) ανω φραγμένη με άνω φράγμα αρνητικό $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu b_\nu) = +\infty$

III) (b_ν) κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα θετικό $\Rightarrow \lim(\alpha_\nu b_\nu) = -\infty$

Οι απόδειξη είναι άμεση αν εφαρμόσουμε τις $(-\alpha_\nu), (-b_\nu)$ στο Θ1

↳ Απο τα παραπάνω έχουμε τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες έχουν και εφαρμογή στις ασκήσεις:

1) $\left.\begin{array}{l}\lim a_\nu = +\infty \\ \lim b_\nu = +\infty \vee \lim b_\nu = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_\nu + b_\nu) = +\infty$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim a_\nu = +\infty \\ \lim b_\nu = +\infty \vee \lim b_\nu = \ell > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_\nu b_\nu) = +\infty$

3) $\left.\begin{array}{l}\lim a_\nu = +\infty \\ \lim b_\nu = -\infty \vee \lim b_\nu = \ell < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_\nu b_\nu) = -\infty$

4) $\left.\begin{array}{l}\lim a_\nu = -\infty \\ \lim b_\nu = -\infty \vee \lim b_\nu = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_\nu + b_\nu) = -\infty$

5) $\left.\begin{array}{l}\lim a_\nu = -\infty \\ \lim b_\nu = +\infty \vee \lim b_\nu = \ell > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_\nu b_\nu) = -\infty$

6) $\left.\begin{array}{l}\lim a_\nu = -\infty \\ \lim b_\nu = -\infty \vee \lim b_\nu = \ell < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(a_\nu b_\nu) = +\infty$

▼ **Πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}$** ▼

$(+\infty)+(+\infty) = +\infty$
$(+\infty)+\ell = +\infty$

$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$
$(+\infty)\cdot\vartheta = +\infty$

$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$
$(+\infty)\cdot\alpha = -\infty$

$(-\infty)+(-\infty) = -\infty$
$(-\infty)+\ell = -\infty$

$(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$
$(-\infty)\cdot\vartheta = -\infty$

$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
$(-\infty)\cdot\alpha = +\infty$

(βλ. όριο της $1/a_\nu$) $\dfrac{\ell}{+\infty} = 0$, $\dfrac{\ell}{-\infty} = 0$

▼ Απροσδιόριστες μορφές

1) $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$
2) $0\cdot(+\infty)$, $0\cdot(-\infty)$, $(+\infty)\cdot 0$, $(-\infty)\cdot 0$
3) $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$, $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\dfrac{-\infty}{+\infty}$
4) $\dfrac{+\infty}{0}$, $\dfrac{-\infty}{0}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\ell}{0}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

Απο αυτά φαίνεται ότι οι βασικές απροσδιόριστες μορφές είναι οι

$$\boxed{\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0}}$$

(Υπάρχουν κι άλλες που θα δούμε στο κεφάλαιο των παραγώγων)
Απο αυτές, άλλες δεν έχουν όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$ (αποκλίνουσες) και άλλες έχουν όριο πεπερασμένο (συγκλίνουσες) ή μη πεπερασμένο (απειριζόμενες).

Άρση απροσδιοριστίας

1) **Σε πολυωνυμική ακολουθία** $\to b_\nu = \alpha_\kappa \nu^\kappa + \alpha_{\kappa-1}\nu^{\kappa-1} + \dots + \alpha_1 \nu + \alpha_0$. Αν υπάρχουν $(\alpha_\kappa \neq 0)$.
α_i, α_j όχι ομόσημοι τότε η μορφή είναι απροσδιόριστη.

• Ισχύει $\begin{cases} \lim b_\nu = +\infty, & \text{αν } \alpha_\kappa > 0 \\ \lim b_\nu = -\infty, & \text{αν } \alpha_\kappa < 0 \end{cases}$

<u>Απόδειξη</u>

$$b_\nu = \alpha_\kappa \nu^\kappa + \alpha_{\kappa-1}\nu^{\kappa-1} + \dots + \alpha_1\nu + \alpha_0 = \nu^\kappa\left(\alpha_\kappa + \frac{\alpha_{\kappa-1}}{\nu} + \dots + \frac{\alpha_1}{\nu^{\kappa-1}} + \frac{\alpha_0}{\nu^\kappa}\right)$$

$$\lim \nu^\kappa = +\infty$$

$$\lim\left(\alpha_\kappa + \underbrace{\frac{\alpha_{\kappa-1}}{\nu}}_{0} + \dots + \underbrace{\frac{\alpha_1}{\nu^{\kappa-1}}}_{0} + \underbrace{\frac{\alpha_0}{\nu^\kappa}}_{0}\right) = \dots = \alpha_\kappa$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim b_\nu = +\infty, & \alpha_\kappa > 0 \\ \lim b_\nu = -\infty, & \alpha_\kappa < 0 \end{cases}$$

2) **Σε Ρητή Ακολουθία** $\to \alpha_\nu = \dfrac{b_\kappa \nu^\kappa + \dots + b_1\nu + b_0}{\gamma_\lambda \nu^\lambda + \dots + \gamma_1\nu + \gamma_0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$

• Ισχύει $\underline{\lim \alpha_\nu = \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda} \lim \nu^{\kappa-\lambda}}$ (εφαρμόζω Μ1 στις συγκλίνουσες).

Έτσι, 1) Αν $\kappa > \lambda \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \infty \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda} > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda} < 0 \end{cases}$

2) Αν $\kappa = \lambda \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda}$

3) Αν $\kappa < \lambda \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 0$

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $\alpha_\nu = \dfrac{b_\kappa \nu^\kappa + \dots + b_1\nu + b_0}{\gamma_\lambda \nu^\lambda + \dots + \gamma_1\nu + \gamma_0} = \dfrac{\nu^\kappa\left(b_\kappa + \dots + \frac{b_1}{\nu^{\kappa-1}} + \frac{b_0}{\nu^\kappa}\right)}{\nu^\lambda\left(\gamma_\lambda + \dots + \frac{\gamma_1}{\nu^{\kappa-1}} + \frac{\gamma_0}{\nu^\kappa}\right)} = \nu^{\kappa-\lambda} \dfrac{b_\kappa + \dots + \frac{b_1}{\nu^{\kappa-1}} + \frac{b_0}{\nu^\kappa}}{\gamma_\lambda + \dots + \frac{\gamma_1}{\nu^{\kappa-1}} + \frac{\gamma_0}{\nu^\kappa}}$

Αλλά $\lim \dfrac{b_\kappa + \dots + \frac{b_1}{\nu^{\kappa-1}} + \frac{b_0}{\nu^\kappa}}{\gamma_\lambda + \dots + \frac{\gamma_1}{\nu^{\kappa-1}} + \frac{\gamma_0}{\nu^\kappa}} = \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda}$ (1)

i) Αν $\kappa > \lambda \to \kappa - \lambda > 0 \Rightarrow \lim \nu^{\kappa-\lambda} = +\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} \lim \alpha_\nu = -\infty, & \text{αν } \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda} < 0 \\ \lim \alpha_\nu = +\infty, & \text{αν } \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda} > 0 \end{cases}$

ii) Αν $\kappa = \lambda \Rightarrow \kappa - \lambda = 0 \Rightarrow \lim \nu^{\kappa-\lambda} = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim \alpha_\nu = 1 \cdot \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda} = \dfrac{b_\kappa}{\gamma_\lambda}$

iii) Αν $\kappa < \lambda \Rightarrow \cancel{\kappa - \lambda < 0} \Rightarrow \lambda - \kappa > 0 \Rightarrow \lim \nu^{\kappa-\lambda} = \lim \dfrac{1}{\nu^{\lambda-\kappa}} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim \alpha_\nu = 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Αν η (α_ν) δεν είναι φραγμένη άνω, τότε δεν συμπεραίνουμε αναγκαστικά ότι $\lim \alpha_\nu = +\infty$ διότι μπορεί να είναι αποκλίνουσα, π.χ. η $\alpha_\nu = (-2)^\nu$.

$\boxed{30.B}$ ⟷ Βασική πρόταση

Π. $\boxed{\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ όχι φραγμένη άνω}}$

Απόδειξη : Άτοπο.

~~Αν (α_ν) άνω φραγμένη $\Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}_+ : \alpha_\nu \leq \vartheta \Rightarrow \exists \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \alpha_\nu \leq \vartheta$~~

Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$, έστω

(α_ν) φραγμένη άνω $\Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} : \alpha_\nu \leq \varphi, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{\exists \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \alpha_\nu \leq \vartheta, \forall \nu \in \mathbb{N}^*}$ (π.χ. κάθε $\vartheta \geq \max(\varphi, -\varphi)$ διότι αν $\max(\varphi,-\varphi) = \varphi \Rightarrow \varphi > -\varphi \Rightarrow 2\varphi > 0 \Rightarrow \varphi > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \vartheta \geq \varphi > 0 \Rightarrow \vartheta \in \mathbb{R}_+$ οπότε ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}^* : \alpha_\nu \leq \varphi \leq \vartheta$
ενώ αν $\max(\varphi,-\varphi) = -\varphi$ όμοια ισχύει $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$: $\varphi < 0 \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}^* : \alpha_\nu \leq \varphi < 0 < -\varphi \leq \vartheta$)

~~Έστω $M > 0$, $\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N}^*, \alpha_\nu > M, \forall \nu \in \mathbb{N}^*$~~

$\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \forall M > 0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \alpha_\nu > M, \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \nu > \nu_0$ $\Rightarrow$ ~~$\forall M > 0$~~ $\exists \vartheta \in \mathbb{R}_+, \forall M > 0 ; M \leq \vartheta$ ← Άτοπο

$(1) \Rightarrow \exists \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \alpha_\nu \leq \vartheta, \forall \nu \in \mathbb{N}^*, \nu > \nu_0$

Άρα (α_ν) όχι φραγμένη άνω.

Π_1 $\boxed{\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ όχι φραγμένη άνω}}$

Απόδειξη

Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$, έστω (α_ν) ~~όχι~~ φραγμένη άνω.

(α_ν) φραγμένη άνω $\Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} : \alpha_\nu \leq \varphi, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \alpha_\nu \leq \vartheta, \forall \nu \in \mathbb{N}^*$ (1) (~~π.χ.~~ διότι αν φ θετικός, ισχύει και αν φ αρνητικός, θα είναι για κάθε ϑ $\alpha_\nu \leq \varphi < 0 < \vartheta$)

$\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \forall M > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}^* : \alpha_\nu > M$
$(1) \Rightarrow$ για το συγκεκριμένο ν, $\alpha_\nu \leq \vartheta$
$\Rightarrow \forall M > 0, M \leq \vartheta$ ← Άτοπο διότι για $M = \vartheta + 1 \geq \vartheta > 0$ δεν ισχύει.

Άρα (α_ν) όχι φραγμένη άνω.

Π_2 $\boxed{\lim (-\alpha_\nu) = -\infty \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ όχι φραγμένη κάτω}}$

Απόδειξη

$\lim \alpha_\nu = -\infty \Rightarrow \lim(-\alpha_\nu) = +\infty \Rightarrow (-\alpha_\nu)$ όχι φραγμένη άνω ~~κάτω~~ $\Rightarrow \nexists\, \varphi \in \mathbb{R} : -\alpha_\nu \leq \varphi, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists\, \varphi \in \mathbb{R} : \alpha_\nu \geq -\varphi, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \nexists\, \varphi \in \mathbb{R} : \alpha_\nu \geq \varphi, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (\alpha_\nu)$ όχι φραγμένη κάτω.

• Το αντίστροφο δεν ισχύει διότι ενδέχεται η ακολουθία να είναι αποκλίνουσα., π.χ. η $\alpha_\nu=(-2)^\nu$. Ισχύουν όμως

Π3. $\boxed{\left.\begin{array}{l}(\alpha_\nu)\uparrow \\ (\alpha_\nu) \text{ όχι φραγμένη άνω}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty}$

Απόδειξη

Εστω $M>0$. Αν $\left.\begin{array}{l}(\alpha_\nu) \text{ όχι φραγμένη άνω} \Rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \alpha_{\nu_0} > M \\ (\alpha_\nu)\uparrow \Rightarrow \forall \nu>\nu_0,\ \alpha_\nu > \alpha_{\nu_0}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \nu_0\in\mathbb{N} : \forall \nu>\nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu > M$ (λόγω μεταβατικής)

$\Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty$.

Π4 $\boxed{\left.\begin{array}{l}(\alpha_\nu)\downarrow \\ (\alpha_\nu) \text{ όχι φραγμένη κάτω}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty}$ όμοια...

• Αν $\lim \alpha_\nu = +\infty$, δεν ισχύει αναγκαστικά ότι $(\alpha_\nu)\uparrow$. π.χ. η $(\alpha_\nu): \begin{cases}\alpha_\nu = 3\nu, & \nu \text{ άρτιος} \\ \alpha_\nu = 3\nu-5, & \nu \text{ περιττός}\end{cases}$

Είναι $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \geq 3\nu-5 \\ \lim(3\nu-5)=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$, ωστόσο αν και $2<3$

$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 = 3\cdot 2 = 6 \\ \alpha_3 = 3\cdot 3 - 5 = 9-5 = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_2 > \alpha_3 \Rightarrow (\alpha_\nu)$ όχι $\uparrow$.

↳ Οι παραπάνω προτάσεις δεν είναι ~~παραδείγματα~~ θεωρία.

Παραδείγματα

1) Μέθοδος ορισμών

Προσδιορίζω δείκτη $\nu_0 = \nu_0(M)$, $\forall M>0$ έτσι ώστε

$\forall \nu > \nu_0 \begin{cases}\alpha_\nu > M, & \text{οπότε } \lim \alpha_\nu = +\infty \\ \alpha_\nu < -M, & \text{οπότε } \lim \alpha_\nu = -\infty\end{cases}$

~~a) $\alpha_\nu = \nu^4+2\nu^3+1$.~~

~~Είναι $\alpha_\nu = \nu^4+2\nu^3+1 > \nu^4$~~

α) $\alpha_\nu = \ln(\nu^2+1)$ ⟶ Σε λογαριθμικές εφαρμόζω τον ορισμό

Εστω $M>0$. Αρκεί $\alpha_\nu > M$, $\Leftrightarrow \ln(\nu^2+1) > M \Leftrightarrow \ln(\nu^2+1) > \ln e^M \overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow} \nu^2+1 > e^M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nu^2 > e^M - 1$. (1)

Αν $e^M - 1 < 0 \Rightarrow$ Η (1) ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ οπότε διαλέγω ένα ν_0.

Αν $e^M - 1 > 0 \Rightarrow \nu > \sqrt{e^M - 1}$, οπότε παιρνω $\nu_0 \geq [\sqrt{e^M-1}]$

Και στις δύο περιπτώσεις $\forall \nu \in \mathbb{N}^* : \nu > \nu_0$, $\alpha_\nu > M \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$.

2) <u>Μέθοδος της συγκρίσεως</u> : Στηρίζεται στις προτάσεις

I) $\alpha_\nu \leqslant \beta_\nu, \forall \nu > \kappa \in \mathbb{N}$ και $\alpha_\nu \to +\infty \Rightarrow \beta_\nu \to +\infty$ ← οπωσδήποτε σε τριγωνομετρικές.

II) » » » $\beta_\nu \to -\infty \Rightarrow \alpha_\nu \to -\infty$

• α) $\alpha_\nu = \eta\mu 5\nu - 3\nu$.

<u>Σκέψη:</u> Φαίνεται να τείνει στο $-\infty$ οπότε ενισχύω με $<$ (II)

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu = \eta\mu 5\nu - 3\nu \leqslant 1 - 3\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \\ \lim(1-3\nu) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty.$$

III) $\alpha_\nu \to 0$ και $\exists \kappa \in \mathbb{N} : \forall \nu > \kappa \begin{cases} \alpha_\nu > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_\nu} \to +\infty \\ \alpha_\nu < 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_\nu} \to -\infty \end{cases}$

IV) $\alpha_\nu \to +\infty$ και $\alpha_\nu \geqslant 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[k]{\alpha_\nu} \to +\infty$

V) $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^\nu \to +\infty$

• $\nu^k \to +\infty$ • $-\nu^k \to -\infty$. , $k \in \mathbb{Q}_+^*$

και στις πράξεις των ορίων.

β) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+\nu+1}$ ← Για να μπεί το όριο μέσα στο ριζικό, πρέπει το μέσα να συγκλίνει

<u>α' τρόπος</u>

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+\nu+1} = \sqrt{\nu^2\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right)} = \nu\sqrt{1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\sqrt{1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}} = \sqrt{\lim\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right)} = \sqrt{1+0+0} = 1 \\ \lim \nu = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty.$$

<u>β τρόπος.</u> (IV)

$$\left.\begin{array}{l}\lim(\nu^2+\nu+1) = +\infty \\ \nu^2+\nu+1 \geqslant 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \sqrt{\alpha_\nu} = \lim\sqrt{\nu^2+\nu+1} = +\infty.$$

γ) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+5} - \sqrt{\nu} =$ ← Μορφή $\infty - \infty$. Πολ/ζω και διαιρώ με συζυγή παράσταση.

$$= \frac{(\nu^2+5)-\nu}{\sqrt{\nu^2+5}+\sqrt{\nu}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \frac{\nu^2\left(1+\frac{5}{\nu^2}-\frac{1}{\nu}\right)}{\nu\sqrt{1+\frac{5}{\nu^2}}+\nu^{1/2}} = \frac{\nu^2\left(1+\frac{5}{\nu^2}-\frac{1}{\nu}\right)}{\nu\left(\sqrt{1+\frac{5}{\nu^2}}+\frac{1}{\nu^{1/2}}\right)} =$$

$$= \underbrace{\nu}_{+\infty} \cdot \frac{1+\frac{5}{\nu^2}-\frac{1}{\nu}}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{5}{\nu^2}}+\frac{1}{\nu^{1/2}}}_{1}} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty$$

• $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+\nu} + \sqrt{\nu}$ $\to +\infty+\infty$, όχι απροσδιόριστη. Γι' αυτό στηρίζομαι στο IV

$\lim(\nu^2+\nu) = +\infty \Rightarrow \lim\sqrt{\nu^2+\nu} = +\infty$, $\lim\sqrt{\nu} = +\infty$ $\Rightarrow \lim\alpha_\nu = \lim(\sqrt{\nu^2+\nu}+\sqrt{\nu}) = +\infty$.

δ) $\alpha_\nu = \dfrac{8^\nu+6^\nu-2^\nu}{5^\nu+3^\nu} =$ → Δουλεύω όπως και στις συγκλίνουσες μόνο που τώρα καταλήγω σε μορφή $+\infty\cdot\lambda$.

$= \dfrac{8^\nu\left(1+\left(\frac{6}{8}\right)^\nu - \left(\frac{2}{8}\right)^\nu\right)}{5^\nu\left[\left(\frac{3}{5}\right)^\nu+1\right]} = \underbrace{\dfrac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^\nu - \left(\frac{1}{4}\right)^\nu}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^\nu}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{8}{5}\right)^\nu}_{\to +\infty} \Rightarrow \lim\alpha_\nu = +\infty$.

ε) $\alpha_\nu = 2^\nu+4^\nu-7^\nu$. → Μορφή $\infty-\infty$

~~Σκέψη: Φαίνεται να έχει όριο το $-\infty$, άρα ενισχύω με <.~~

~~$\alpha_\nu = 2^\nu+4^\nu-7^\nu < 4$~~

$\alpha_\nu = 2^\nu+4^\nu-7^\nu = \underbrace{7^\nu}_{\to +\infty}\underbrace{\left[\left(\frac{2}{7}\right)^\nu+\left(\frac{4}{7}\right)^\nu-1\right]}_{\to -1} \Rightarrow \lim\alpha_\nu = -\infty$.

→ Μονοπαραμετρικά

$\alpha_\nu = \alpha^\nu\cdot\nu^k$, $\alpha\in[1,+\infty)$

• Κάνω διάκριση περιπτώσεων.

Αν $\alpha=1 \Rightarrow \lim\alpha^\nu = 1$, $\lim\nu^k = +\infty$ $\Rightarrow \lim\alpha^\nu\cdot\nu^k = +\infty$

Αν $\alpha>1 \Rightarrow \lim\alpha^\nu = +\infty$, $\lim\nu^k = +\infty$ $\Rightarrow \lim\alpha^\nu\cdot\nu^k = +\infty$.

$\Rightarrow \forall\alpha\in[1,+\infty)$, $\lim\alpha^\nu\cdot\nu^k = +\infty$.

▼ Κριτήρια μη σύγκλισης

Ειδικά:

1) $\boxed{(\exists\,\varepsilon>0 : \forall\nu>\nu_0\in\mathbb{N} : |\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu| \geq \varepsilon) \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ μη συγκλίνουσα}}$ (έχει ήδη εξεταστεί γενικότερη μορφή)

2) $\boxed{(\alpha_\nu) \text{ μη φραγμένη} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ μη συγκλίνουσα}}$

3) $\boxed{(|\alpha_\nu|) \text{ μη συγκλίνουσα} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ μή συγκλίνουσα}}$

4) $\boxed{\lim\alpha_\nu \in \{+\infty,-\infty\} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ μη συγκλίνουσα}}$

Γενικά $\boxed{(\exists\,\varepsilon>0 ; \forall\nu_0\in\mathbb{N}, \exists\,\nu_1>\nu_0 \wedge \nu_2>\nu_0 : |\alpha_{\nu_1}-\alpha_{\nu_2}| \geq \varepsilon) \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ μη συγκλίνουσα}}$

▼ <u>Αποκλίνουσες ακολουθίες</u> ⟶ είναι οι ακολουθίες που δεν έχουν όριο , δηλ. $\lim \alpha_\nu \notin \overline{\mathbb{R}}$.

<u>α' τρόπος</u> •₁ Δείχνω ότι είναι μη συγκλίνουσα $\Rightarrow \lim \alpha_\nu \notin \mathbb{R}$.

•₂ Δείχνω με άτοπο (με τον ορισμό) ότι $\lim \alpha_\nu \notin \{+\infty, -\infty\}$. (Δείχνω ότι δεν υπολογίζεται το ν_0)

α) $\alpha_\nu = (-1)^\nu(2\nu+3)$

•₁ Θα δείξω ότι $\lim \alpha_\nu \notin \mathbb{R}$.

Είναι $|\alpha_\nu| = |(-1)^\nu(2\nu+3)| = 2\nu+3 \Rightarrow \lim|\alpha_\nu| = \lim(2\nu+3) = +\infty \Rightarrow (|\alpha_\nu|)$ μη συγκλίνουσα $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha_\nu)$ μή συγκλίνουσα.

•₂ Εστω $\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \forall M>0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0,\ \alpha_\nu > M$

Αν $\nu_0 = 2k \Rightarrow \alpha_{\nu_0+1} = \alpha_{2k+1} = \underset{-}{(-1)^{2k+1}}\underset{+}{(2(2k+1)+3)} < 0 < M \leftarrow$ Ατοπο

Αν $\nu_0 = 2k+1 \Rightarrow \alpha_{\nu_0} < 0 < M \leftarrow$ Ατοπο

άρα $\lim \alpha_\nu \neq +\infty$.

Εστω $\lim \alpha_\nu = -\infty \Rightarrow \forall M>0, \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > \nu_0,\ \alpha_\nu < -M$

Αν $\nu_0 = 2k \Rightarrow \alpha_{\nu_0} = (-1)^{2k}(2\cdot 2k+1) > 0 > -M \leftarrow$ Ατοπο.

Αν $\nu_0 = 2k+1 \Rightarrow \alpha_{\nu_0+1} = (-1)^{2k+2}(2\cdot(2k+2)+1) > 0 > -M \leftarrow$ Ατοπο

άρα
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu \neq -\infty \\ \lim \alpha_\nu \neq +\infty \\ \lim \alpha_\nu \notin \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \notin \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ αποκλίνουσα.}$$

<u>β τρόπος</u> Στηρίζεται στην πρόταση (βλ. όριο της $\frac{1}{\alpha_\nu}$ - πορίσματα)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim \frac{1}{\alpha_\nu} = 0 \\ \nexists k \in \mathbb{N} : \forall \nu > k,\ (\alpha_\nu) \text{ διατηρεί πρόσημο}\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ αποκλίνουσα}}$$

α) $\alpha_\nu = (-1)^\nu(2\nu+3)$

Είναι $\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right| = \frac{1}{|(-1)^\nu(2\nu+3)|} = \frac{1}{2\nu+3} \Rightarrow \lim\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right| = \lim\frac{1}{2\nu+3} = 0 \Rightarrow \lim\frac{1}{\alpha_\nu} = 0$

$\nexists k \in \mathbb{N} : \forall \nu > k,\ (\alpha_\nu)$ διατηρεί πρόσημο (διότι τα πρόσημα είναι εναλλάξ +, -) $\Rightarrow$

~~Εστω ότι $\exists k \in \mathbb{N} : \forall \nu > k$ (α_ν) διατηρεί πρόσημο~~

$\Rightarrow (\alpha_\nu)$ αποκλίνουσα.

<u>γ τρόπος</u> Στηρίζεται στην έννοια της υπακολουθίας (εκτός βιβλίου αλλά Πιστοφίδεια)

• $\boxed{\lim \alpha_{2\nu} \neq \lim \alpha_{2\nu+1} \Rightarrow (\alpha_\nu) \text{ αποκλίνουσα}}$ (Θα αποδειχτεί στο κεφ. 3)

Αν
$$\left.\begin{array}{l}\nu = 2k \Rightarrow \alpha_\nu = 2\nu+3 \Rightarrow \lim \alpha_\nu = +\infty \\ \nu = 2k+1 \Rightarrow \alpha_\nu = -2\nu-3 \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim \alpha_\nu \rightarrow (\alpha_\nu) \text{ αποκλίνουσα}$$

(διότι το όριο ορίζεται μονότιμα)

Διπαραμετρική ακολουθία - Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \dfrac{a^\nu + b^{\nu+1}}{2a^\nu - 3b^{\nu-1}}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση

1) Αν $a=b=0$ η ακολουθία δεν έχει νόημα

2) i) Αν $a=0 \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{b^{\nu+1}}{-3b^{\nu-1}} = -\dfrac{b^2}{3} = c^{te} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\dfrac{b^2}{3}$

ii) Αν $b=0 \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{a^\nu}{2a^\nu} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \dfrac{1}{2}$

Έστω $a, b \in \mathbb{R}^*$

3) Αν $\underline{|a|<|b|} \Rightarrow \left|\dfrac{a}{b}\right| < 1 \Rightarrow \lim\left(\dfrac{a}{b}\right)^\nu = 0$, οπότε

$$\alpha_\nu = \frac{a^\nu + b\cdot b^\nu}{2a^\nu - \left(\frac{3}{b}\right)b^\nu} = \frac{b^\nu\left[\left(\frac{a}{b}\right)^\nu + b\right]}{b^\nu\left[2\left(\frac{a}{b}\right)^\nu - \frac{3}{b}\right]} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^\nu + b}{2\left(\frac{a}{b}\right)^\nu - \frac{3}{b}} \Rightarrow \underline{\underline{\lim \alpha_\nu}} = \frac{0+b}{0-\frac{3}{b}} = \underline{\underline{-\frac{b^2}{3}}}$$

4) Αν $\underline{|a|>|b|} \Rightarrow \left|\dfrac{b}{a}\right| < 1 \Rightarrow \lim\left(\dfrac{b}{a}\right)^\nu = 0$, οπότε

$$\alpha_\nu = \frac{a^\nu + b\cdot b^\nu}{2a^\nu - \left(\frac{3}{b}\right)b^\nu} = \frac{a^\nu\left[1 + b\left(\frac{b}{a}\right)^\nu\right]}{a^\nu\left[2 - \frac{3}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^\nu\right]} = \frac{1 + b\left(\frac{b}{a}\right)^\nu}{2 - \frac{3}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^\nu} \Rightarrow \underline{\underline{\lim \alpha_\nu}} = \frac{1 + b\cdot 0}{2 - \frac{3}{b}\cdot 0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(• Το όριο δεν εξαρτάται από το ν. Αλλάζει επειδή αλλάζουν τα a, b).

5) Αν $\underline{|a|=|b|} \Leftrightarrow a = \pm b$.

i) Αν $a=b \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{a^\nu + a\cdot a^\nu}{2a^\nu - \frac{3}{a}a^\nu} = \dfrac{a^\nu(1+a)}{a^\nu\left(2-\frac{3}{a}\right)} = \dfrac{1+a}{2-\frac{3}{a}} = \dfrac{a(1+a)}{2a-3} = c^{te} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \dfrac{a(1+a)}{2a-3}$

ii) Αν $a=-b \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{a^\nu - a\cdot(-a)^\nu}{2a^\nu + \frac{3}{a}(-a)^\nu}$

• → Προσοχή στον παράγοντα $(-a)^\nu$. Είναι επικίνδυνος. Σε τέτοιες περιπτώσεις καταφεύγουμε στον γ τρόπο των αποκλινουσών ακολουθιών.

Αν $\nu = 2k \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{a^\nu - a\cdot a^\nu}{2a^\nu + \frac{3}{a}a^\nu} = \dfrac{a^\nu(1-a)}{a^\nu\left(2+\frac{3}{a}\right)} = \dfrac{a(1-a)}{2a+3} \Rightarrow \lim \alpha_{2\nu} = \dfrac{a(1-a)}{2a+3}$

Αν $\nu = 2k+1 \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{a^\nu + a\cdot a^\nu}{2a^\nu - \frac{3}{a}a^\nu} = \dfrac{a^\nu(1+a)}{a^\nu\left(2-\frac{3}{a}\right)} = \dfrac{a(1+a)}{2a-3} \Rightarrow \lim a_{2\nu+1} = \dfrac{a(1+a)}{2a-3}$

Επειδή το lim ορίζεται μονοσήμαντα, πρέπει

$$\frac{\cancel{a}(1-a)}{2a+3} = \frac{\cancel{a}(1+a)}{2a-3} \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} (1-a)(2a-3) = (1+a)(2a+3) \Leftrightarrow \cancel{2a} - 3 - 2a^2 + \cancel{3a} = \cancel{2a} + 3 + 2a^2 + \cancel{3a} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 6 = 0$ ← Αδύνατη διότι $4a^2+6>0, \forall a \in \mathbb{R}$ ως άθροισμα τετραγώνου και θετικού.

Αρα $\nexists \lim a_\nu$ όταν $a=-b \Rightarrow a_\nu$ αποκλίνουσα.

Στα ακέραια μέρη

χρησιμοποιώ την ανισότητα $x-1<[x]\leqslant x<[x]+1$
σε συνδυασμό με ΘΙΑ.

<u>παράδειγμα</u> $a_\nu=\frac{[\nu a]}{\nu}$, $a\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Αν $a=0 \Rightarrow a_\nu=\frac{[\nu\cdot 0]}{\nu}=0$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim a_\nu=0$

Αν $a\neq 0$ τότε είναι $\forall x\in\mathbb{R}$: $x-1<[x]\leqslant x$.

Για $x=\nu a$, $\nu a-1<[\nu a]\leqslant \nu a \Rightarrow \frac{\nu a-1}{\nu}<\frac{[\nu a]}{\nu}\leqslant\frac{\nu a}{\nu}\Rightarrow \frac{\nu a-1}{\nu}<a_\nu\leqslant a$. (1)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\frac{\nu a-1}{\nu}=a\\ \lim a=a\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{ΘΙΑ}]{(1)} \lim a_\nu=a$$

<u>παράδειγμα</u> $a_\nu=\nu^2\left[\frac{4}{\nu}\right]$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

Είναι $\forall\nu\in\mathbb{N}^*: \nu\geqslant 4 \Rightarrow 0<\frac{4}{\nu}<1\Rightarrow\left[\frac{4}{\nu}\right]=0\Rightarrow a_{\nu+4}=0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^*$

αρα $\lim a_{\nu+4}=0\Rightarrow\lim a_\nu=0$.

•Άλλα γενικά θέματα•

1) $a_\nu=\sqrt{\nu+1}-a\nu$, $a\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

$$\text{Αν } a=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_\nu=\sqrt{\nu+1}\\ \lim(\nu+1)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim a_\nu=+\infty.$$

$$\text{Αν } a<0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim(-a\nu)=+\infty \ (\text{διότι } -a>0)\\ \lim(\nu+1)=+\infty\Rightarrow\lim\sqrt{\nu+1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim a_\nu=\lim(\sqrt{\nu+1}-a\nu)=+\infty$$

Αν $a>0$ → <u>Μορφή $\infty-\infty$.</u>

$$a_\nu=\sqrt{\nu+1}-a\nu=\frac{\nu+1-a^2\nu^2}{\sqrt{\nu+1}+a\nu}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{\nu^2\left(-a^2+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}\right)}{\nu\left(\frac{1}{\nu^{1/2}}\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}+a\right)}=\nu\cdot\frac{-a^2+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\nu^{1/2}}\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}+a} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\frac{-a^2+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\nu^{1/2}}\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}+a}=\frac{-a^2+0+0}{0\cdot\sqrt{1+0}+a}=\frac{-a^2}{a}=-a<0\\ \lim\nu=+\infty\end{array}\right\}\xrightarrow{(1)}\lim a_\nu=-\infty.$$

2) $\alpha_\nu = \dfrac{a\nu^3+\nu^2+1}{b\nu^3+\nu+5}$

<u>Λύση</u> : Αν $b \neq 0$, $\lim \alpha_\nu = \lim \dfrac{a\nu^3+\nu^2+1}{b\nu^3+\nu+5} = \dfrac{a}{b}$

Αν $b=0$, τότε αν $a\neq 0 \Rightarrow \lim \alpha_\nu = \lim \dfrac{a\nu^3+\nu^2+1}{\nu+5} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a>0 \\ -\infty, & \text{αν } a<0 \end{cases}$

Αν $a=b=0$, τότε $\lim \alpha_\nu = \lim \dfrac{\nu^2+1}{\nu+5} = +\infty$.

→ <u>Σε πολλαπλού τύπου</u>

1) $\alpha_\nu = \begin{cases} \dfrac{\nu-1}{\nu}\sqrt[\nu]{\nu}, & \nu = 2k-1, \ k\in\mathbb{N}^* \\ \dfrac{\nu+2}{\nu}, & \nu=2k, \ k\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

Αν $\nu=2k-1$, $k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}\sqrt[\nu]{\nu}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} \lim \dfrac{\nu-1}{\nu} = 1 \\ \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1 \end{array}\right\} \xRightarrow{(1)} \lim \alpha_\nu = 1$

Αν $\nu=2k$, $k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \alpha_\nu = \dfrac{\nu+2}{\nu} \rightarrow \lim \alpha_\nu = \lim \dfrac{\nu+2}{\nu} = 1$

$\Rightarrow \lim \alpha_\nu = 1$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$.

→ <u>Σε μορφή $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{f(\nu)}$</u>

για να εφαρμόσω το κριτήριο

$\left.\begin{array}{l} \lim \alpha_\nu = a > 0 \\ \alpha_\nu > 0, \ \forall \nu\in\mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = 1$

πρέπει να δείχνω ότι το υπόρριζο είναι θετικό.

1) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\left(\dfrac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu + \dfrac{\eta\mu 2\nu}{\nu+2}}$

Πρέπει

$b_\nu = \left(\dfrac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu + \dfrac{\eta\mu 2\nu}{\nu+2} > 0 \overset{\text{Πρέπει}}{\Leftarrow} \left(\dfrac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu - \dfrac{1}{\nu+2} > 0 \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu > \dfrac{1}{\nu+2} \overset{(B)}{\Leftarrow}$

$\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu \geq 1+\dfrac{1}{\nu}\cdot\nu > \dfrac{1}{\nu+2} \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu \geq 2 > \dfrac{1}{\nu+2}$.

Άλλα είναι $\nu+2>1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\nu+2} < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\nu+2} < 2 \overset{(B)}{\leq} \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu \Rightarrow \left(\dfrac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu - \dfrac{1}{\nu+2} > 0$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu + \dfrac{\eta\mu 2\nu}{\nu+2} > 0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$ <u>$b_\nu > 0$, $\forall \nu\in\mathbb{N}^*$</u>

$$\lim b_\nu = \lim\left[\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu + \frac{\eta\mu 2\nu}{\nu+2}\right]$$ και επειδή

$\forall \nu \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\eta\mu 2\nu}{\nu+2}\right| \leq \frac{1}{\nu+2}$, $\lim \frac{1}{\nu+2} = 0$ $\Longrightarrow$ $\lim \frac{\eta\mu 2\nu}{\nu+2} = 0$, $\lim\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu = \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = e$ $\Longrightarrow$ $\lim b_\nu = \lim\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu + \lim \frac{\eta\mu 2\nu}{\nu+2} = e + 0 > 0$, $b_\nu > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^*$

$$\Longrightarrow \lim \alpha_\nu = \lim \sqrt[\nu]{b_\nu} = 1.$$

2) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{1+\left(\frac{2}{\nu}\right)^\nu + \left(\frac{3}{\nu}\right)^\nu + \cdots + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\nu}$