ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

▼ Ορισμός εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{R}$.

Ως γνωστόν, αν $x=\frac{\kappa}{n}\in\mathbb{Q}$ με $\kappa\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$ και $\alpha\in(0,+\infty)$, τότε ορίζεται η δύναμη α^x σύμφωνα με την σχέση

$$\alpha^x=\sqrt[n]{\alpha^\kappa}.$$

Επειδή $x_1=x_2\in\mathbb{Q}\Rightarrow\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}, \forall x_1,x_2\in\mathbb{Q}$, ορίζεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha^x$ η οποία ονομάζεται εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{Q}$.

Απο την άλγεβρα γνωρίζουμε ότι γι'αυτην την συνάρτηση ισχύουν οι ιδιότητες:

1) $\alpha^x>0, \forall x\in\mathbb{Q}$

2) $\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1+x_2}, \forall x_1,x_2\in\mathbb{Q}$.

3) $(\alpha\beta)^x=\alpha^x\beta^x, \forall x\in\mathbb{Q}$

4) $(\alpha^{x_1})^{x_2}=(\alpha^{x_2})^{x_1}=\alpha^{x_1 x_2}, \forall x_1,x_2\in\mathbb{Q}$.

5) $\alpha>1\Rightarrow\begin{cases}\alpha^x>1, & \forall x\in\mathbb{Q}^*_+\\ \alpha^x=1, & \text{για } x=0\\ 0<\alpha^x<1, & \forall x\in\mathbb{Q}^*_-\end{cases}$

6) $0<\alpha<1\Rightarrow\begin{cases}0<\alpha^x<1, & \forall x\in\mathbb{Q}^*_+\\ \alpha^x=1, & \text{για } x=0.\\ \alpha^x>1, & \forall x\in\mathbb{Q}^*_-\end{cases}$

7) $\alpha>\beta>0 \wedge x>0\Rightarrow\alpha^x>\beta^x, x\in\mathbb{Q}$.
$\alpha>\beta>0 \wedge x<0\Rightarrow\alpha^x<\beta^x, x\in\mathbb{Q}$.

8) $\alpha>1\Rightarrow f(x)=\alpha^x, \forall x\in\mathbb{Q}$ γν. αύξουσα στο $\mathbb{Q}$.
$0<\alpha<1\Rightarrow f(x)=\alpha^x, \forall x\in\mathbb{Q}$ γν. φθίνουσα στο $\mathbb{Q}$.
$\alpha=1\Rightarrow f(x)=\alpha^x, \forall x\in\mathbb{Q}$ σταθερή στο $\mathbb{Q}$.

Θα γενικεύσουμε τώρα την συναρτηση f έτσι ώστε να έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και θα δείξουμε ότι οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για την επέκταση της f στο $\mathbb{R}$. Η γενικευση αυτή στηρίζεται στα παρακάτω λήμματα:

Λήμμα 1: $\boxed{\begin{matrix}([\alpha_n,\beta_n]) \text{ κιβωτισμένη} \\ \alpha_n,\beta_n\in\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{N}^*\end{matrix}\Rightarrow([\alpha^{\alpha_n},\alpha^{\beta_n}]) \text{ κιβωτισμένη}, \forall\alpha\in(0,+\infty)}$

Απόδειξη

Εστω ένα $\alpha\in(0,+\infty)$.

$([\alpha_n,\beta_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*: [\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]\subseteq[\alpha_n,\beta_n]\\ \lim(\beta_n-\alpha_n)=0.\end{cases}$

• 1 Θα δείξω ότι $\forall n\in\mathbb{N}^*: [a^{a_{n+1}}, a^{b_{n+1}}] \subseteq [a^{a_n}, a^{b_n}]$.

$\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*}: [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$

εξ' υποθ: $a_n, a_{n+1}, b_{n+1}, b_n \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a^{a_n} \leq a^{a_{n+1}} \leq a^{b_{n+1}} \leq a^{b_n} \Rightarrow \underline{[a^{a_{n+1}}, a^{b_{n+1}}] \subseteq [a^{a_n}, a^{b_n}]}$, άρα ισχύει.

• 2 Θα δείξω ότι $\lim(a^{b_n} - a^{a_n}) = 0$.

Αρκεί να υπολογίσω τα όρια $\lim a^{a_n}$, $\lim(a^{b_n-a_n} - 1)$.

~~$\forall n\in\mathbb{N}^*: [a_n, b_n] \subseteq [a_1, b_1] \Rightarrow a_n \leq a_1 \Rightarrow$~~

i) $\underline{\text{Αν } a>1}$, τότε

$\forall n\in\mathbb{N}^*: [a_n, b_n] \subseteq [a_1, b_1] \Rightarrow a_n \leq b_1 \Rightarrow a^{a_n} \leq a^{b_1}, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a^{a_n}$ άνω φραγμένη

$\forall n\in\mathbb{N}^*: [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow a^{a_n} \leq a^{a_{n+1}}, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a^{a_n}$ γν. αύξουσα

$\Rightarrow a^{a_n}$ συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists \ell\in\mathbb{R}: \lim a^{a_n} = \ell$.

Όμοια, $\underline{\text{αν } 0<a<1}$, $\exists \ell\in\mathbb{R}: \lim a^{a_n} = \ell$.

$\underline{\text{Αν } a=1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*: a^{a_n} = 1 \Rightarrow \lim a^{a_n} = 1$.

Άρα: $\lim a^{a_n} = \ell \in \mathbb{R}$.

ii) $\underline{\text{Αν } a>1}$, θα δείξω ότι $\lim(a^{b_n-a_n} - 1) = 0$.

Έστω $\underline{\varepsilon>0}$.

$a>0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1 \Rightarrow \lim(a^{1/n} - 1) = 0 \Rightarrow \exists n_1\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_1: |a^{1/n} - 1| < \varepsilon$.

Αν $n = n_1+1 \Rightarrow |a^{\frac{1}{n_1+1}} - 1| < \varepsilon$, $a>1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n_1+1}} > 1$ $\Rightarrow a^{\frac{1}{n_1+1}} - 1 < \varepsilon$ (1).

$\lim(b_n - a_n) = 0$, $\frac{1}{n_1+1} > 0$ $\Rightarrow \underline{\exists n_0\in\mathbb{N}^*}: \underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0}: |b_n - a_n| < \frac{1}{n_1+1}$, $b_n - a_n > 0$ $\Rightarrow b_n - a_n < \frac{1}{n_1+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{b_n-a_n} < a^{\frac{1}{n_1+1}} \Rightarrow a^{b_n-a_n} - 1 < a^{\frac{1}{n_1+1}} - 1 \overset{(1)}{<} \varepsilon$, $a>1 \Rightarrow a^{b_n-a_n} - 1 > 0 \Rightarrow |a^{b_n-a_n} - 1| \overset{(i)}{=} a^{b_n-a_n} - 1$ $\Rightarrow \underline{|a^{a_n-b_n} - 1| < \varepsilon}$.

Άρα: $\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a^{b_n-a_n} - 1| < \varepsilon \Rightarrow \lim(a^{b_n-a_n} - 1) = 0$.

$\underline{\text{Αν } 0<a<1}$ $\Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{b_n-a_n} - 1\right] = 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{a}\right)^{b_n-a_n} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim a^{b_n-a_n} = \lim \frac{1}{\frac{1}{a^{b_n-a_n}}} = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{b_n-a_n}} = \frac{1}{\lim\left(\frac{1}{a}\right)^{b_n-a_n}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim(a^{b_n-a_n} - 1) = 0$.

$\underline{\text{Αν } a=1.}$ $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a^{b_n-a_n} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \lim(a^{b_n-a_n} - 1) = 0$.

ΑΡΑ: $\lim(a^{b_n}-a^{a_n}) = \lim[a^{a_n}(a^{b_n-a_n}-1)] = \lim a^{a_n} \cdot \lim(a^{b_n-a_n}-1) = \ell \cdot 0 = 0$

είναι και $\forall n \in \mathbb{N}^*: [a^{a_{n+1}}, a^{b_{n+1}}] \subseteq [a^{a_n}, a^{b_n}]$

$\Rightarrow ([a^{a_n}, a^{b_n}])$ κιβωτισμένη., $\forall a \in (0,+\infty)$.

Λήμμα 2:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} ([a_n,b_n]),([\gamma_n,\delta_n]) \text{ κιβωτισμένες} \\ x = \bigcap([a_n,b_n]) = \bigcap([\gamma_n,\delta_n]). \\ a_n, b_n, \gamma_n, \delta_n \in \mathbb{Q}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ([a^{a_n},a^{b_n}]),([a^{\gamma_n},a^{\delta_n}]) \text{ κιβωτισμένες} \\ \ell = \bigcap([a^{a_n},a^{b_n}]) = \bigcap([a^{\gamma_n},a^{\delta_n}]), \forall a>0 \end{cases}}$$

Απόδειξη

$x = \bigcap([a_n,b_n]) = \bigcap([\gamma_n,\delta_n]) \Rightarrow \begin{cases} a_n \leq x \leq b_n \\ \gamma_n \leq x \leq \delta_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \leq x \leq \delta_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [a_n, \delta_n], \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1)

$\left.\begin{array}{l} ([a_n,b_n]) \text{ κιβωτισμένη} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} \geq a_n \\ ([\gamma_n,\delta_n]) \text{ κιβωτισμένη} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: [\gamma_{n+1}, \delta_{n+1}] \subseteq [\gamma_n, \delta_n] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: \delta_n \geq \delta_{n+1} \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n \leq a_{n+1} \leq x \leq \delta_{n+1} \leq \delta_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: [a_{n+1}, \delta_{n+1}] \subseteq [a_n, \delta_n]$ (2).

$x = \bigcap([a_n,b_n]) = \bigcap([\gamma_n,\delta_n]) \Rightarrow \lim a_n = \lim \delta_n = x \Rightarrow \lim(\delta_n - a_n) = \lim \delta_n - \lim a_n =$
$= x - x = 0 \Rightarrow \lim(\delta_n - a_n) = 0$ (3).

(2),(3) $\Rightarrow ([a_n,\delta_n])$ κιβωτισμένη $\overset{\Lambda 1}{\Rightarrow} ([a^{a_n}, a^{\delta_n}])$ κιβωτισμένη (4).

$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow ([a^{a_n},a^{b_n}])$ κιβωτισμένη με $\bigcap([a^{a_n},a^{b_n}]) = \ell_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim a^{a_n} = \ell_1$.

$([\gamma_n,\delta_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow ([a^{\gamma_n},a^{\delta_n}])$ κιβωτισμένη με $\bigcap([a^{\gamma_n},a^{\delta_n}]) = \ell_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim a^{\delta_n} = \ell_2$.

(4) $\Rightarrow \lim(a^{\delta_n} - a^{a_n}) = 0 \Rightarrow \lim a^{\delta_n} - \lim a^{a_n} = 0 \Rightarrow \ell_2 - \ell_1 = 0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcap([a^{a_n},a^{b_n}]) = \underbrace{\bigcap([a^{\gamma_n},a^{\delta_n}])}_{=\ell}, \forall a>0$

↳ Θα ορίσουμε τώρα την εκθετική συνάρτηση $\exp_a$, για κάθε $a \in (0,+\infty)$. Έστω ένα $a \in (0,+\infty)$. Ορίζουμε τότε την διμελή σχέση "$\overset{a}{\sim}$" ως εξής:

$$x \overset{a}{\sim} y \Leftrightarrow \exists \, ([a_n,b_n]) \text{ κιβωτισμένη}: \begin{cases} x = \bigcap([a_n,b_n]) \\ y = \bigcap([a^{a_n},a^{b_n}]) \\ a_n, b_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Θεωρούμε το σύνολο $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \overset{a}{\sim} y\}$. Από το Λήμμα 2 έχουμε την πρόταση: $\left.\begin{array}{l} x \overset{a}{\sim} y_1 \\ x \overset{a}{\sim} y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = y_2$ η οποία σημαίνει ότι το σύνολο E_a είναι *γράφημα* κάποιας συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή ~~στου~~ συμβολίζεται

exp_a και λέγεται <u>εκθετική συνάρτηση με βάση $a>0$</u> με Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι ισχύει η πρόταση:

- $\boxed{exp_a(x)=a^x \ ,\forall x\in\mathbb{Q}}$

δηλαδή η συνάρτηση exp_a, όταν περιοριστεί στο $\mathbb{Q}$, συμπίπτει με την αντίστοιχη δύναμη a^x.

<u>Απόδειξη.</u>

Εστω $x\in\mathbb{Q}$.

Παίρνω $([a_n,b_n])=([x,x+\frac{1}{n}])$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*: x<x+\frac{1}{n+1}<x+\frac{1}{n} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*:[x,x+\frac{1}{n+1}]\subseteq[x,x+\frac{1}{n}]$
$\lim(b_n-a_n)=\lim(x+\frac{1}{n}-x)=\lim\frac{1}{n}=0$

$\Rightarrow ([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη
$\forall n\in\mathbb{N}^*: x\in[a_n,b_n]=[x;x+\frac{1}{n}]$ $\Rightarrow$ $\underline{x=\cap([a_n,b_n])}$. (1)

$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow ([a^{a_n},a^{b_n}])$ κιβωτισμένη
$\forall n\in\mathbb{N}^*: a^x=a^{a_n}\in[a^{a_n},a^{b_n}]$ $\Rightarrow$ $\underline{a^x=\cap([a^{a_n},a^{b_n}])}$. (2)

Είναι και $\underline{a_n,b_n\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}^*}$ (3).

$(1),(2),(3)\Rightarrow \exists([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη: $\begin{cases} x=\cap([a_n,b_n]). \\ a^x=\cap([a^{a_n},a^{b_n}]). \\ a_n,b_n\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow x\sim a^x \Rightarrow (x,a^x)\in E_a$

$\Rightarrow exp_a(x)=a^x,\forall x\in\mathbb{Q}.$ QED.

Μπορούμε λοιπόν να γενικεύσουμε την έννοια της δύναμης και για πραγματικούς εκθέτες σύμφωνα με τον ορισμό:

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> $\boxed{\text{Αν } a\in(0,+\infty)\Rightarrow a^x=exp_a(x),\forall x\in\mathbb{R}.}$

▼ <u>Ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης ως προς τις πράξεις.</u>

1) $\boxed{a^x>0 \ ,\forall x\in\mathbb{R}}$ όπου $a>0$.

<u>Απόδειξη</u>

Εστω $x\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη με $a_n,b_n\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}^*: x=\cap([a_n,b_n])\Rightarrow$
$\Rightarrow a^x=\cap([a^{a_n},a^{b_n}])\Rightarrow a^x=\lim a^{a_n}=\lim a^{b_n}$.

i) Αν $a>1$.

$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*:[a_n,b_n]\subseteq[a_1,b_1]\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n\geq a_1$ $\Big\}\Rightarrow$
$a>1$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a^{a_n} \geq a^{a_1}$ $\left.\right\}\Rightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}^*: a^{a_n}\geq a^{a_1}>0 \Rightarrow a^x=\lim a^{a_n}\geq a^{a_1}>0 \Rightarrow$

$a_1\in\mathbb{Q}\Rightarrow a^{a_1}>0$

$\Rightarrow a^x>0.$

ii) Αν $a<1$

$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: [a_n,b_n]\subseteq[a_1,b_1] \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: b_n\leq b_1$ $\left.\right\}\Rightarrow$

$0<a<1$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a^{b_n}\geq a^{b_1}$ $\left.\right\}\Rightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}^*: a^{b_n}\geq a^{b_1}>0 \Rightarrow a^x=\lim a^{b_n}\geq a^{b_1}>0\Rightarrow a^x>0.$

$b_1\in\mathbb{Q}\Rightarrow a^{b_1}>0$

iii) Αν $a=1$, $a^x=1^x=1>0.$

Άρα: $\forall x\in\mathbb{R}: a^x>0.$

2) $\boxed{(ab)^x=a^xb^x\ ,\forall x\in\mathbb{R}}$ $\bullet\rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x=\frac{1}{a^x}$ $,\forall x\in\mathbb{R}.$

Απόδειξη

Έστω $x\in\mathbb{R}\Rightarrow \exists([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη με $a_n,b_n\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}^*: x=\bigcap([a_n,b_n])\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma^x=\bigcap([\gamma^{a_n},\gamma^{b_n}])\ ,\forall\gamma\in(0,+\infty)\Rightarrow \gamma^x=\lim\gamma^{a_n}=\lim\gamma^{b_n}\ ,\forall\gamma\in(0,+\infty).$ οπότε

$a>0\Rightarrow a^x=\lim a^{a_n}.$

$b>0\Rightarrow b^x=\lim b^{a_n}$

$ab>0\Rightarrow (ab)^x=\lim(ab)^{a_n}=\lim[a^{a_n}b^{a_n}]=\lim a^{a_n}\cdot\lim a^{b_n}=a^xb^x.$

Άρα $\forall x\in\mathbb{R}: (ab)^x=a^xb^x.$

• Λήμμα : $\boxed{([a_n,b_n]),([\gamma_n,\delta_n])\text{ κιβωτισμένες} \atop x_1=\bigcap([a_n,b_n])\wedge x_2=\bigcap([\gamma_n,\delta_n])}\Rightarrow ([a_n+\gamma_n,b_n+\delta_n])$ κιβωτισμένη με $\bigcap([a_n+\gamma_n,b_n+\delta_n])=x_1+x_2.$

Απόδειξη

$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*: [a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n\leq a_{n+1}<b_{n+1}\leq b_n$ $\left.\right\}\Rightarrow$

$([\gamma_n,\delta_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*: [\gamma_{n+1},\delta_{n+1}]\subseteq[\gamma_n,\delta_n]\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*: \gamma_n\leq\gamma_{n+1}<\delta_{n+1}\leq\delta_n$

$\Rightarrow a_n+\gamma_n\leq a_{n+1}+\gamma_{n+1}<b_{n+1}+\delta_{n+1}\leq b_n+\delta_n\ ,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: [a_{n+1}+\gamma_{n+1},b_{n+1}+\delta_{n+1}]\subseteq[a_n+\gamma_n,b_n+\delta_n].$ (1).

$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow \lim(b_n-a_n)=0$ $\left.\right\}\Rightarrow \lim[(b_n+\delta_n)-(a_n+\gamma_n)]=$

$([\gamma_n,\delta_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow \lim(\delta_n-\gamma_n)=0$

$=\lim[(b_n-a_n)+(\delta_n-\gamma_n)]=\lim(b_n-a_n)+\lim(\delta_n-\gamma_n)=0+0=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim[(b_n+\delta_n)-(a_n+\gamma_n)]=0.$ (2).

$(1),(2)\Rightarrow ([a_n+\gamma_n,b_n+\delta_n])$ κιβωτισμένη.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \cap([a_n, b_n]) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \leq x_1 \leq b_n \\ x_2 = \cap([\gamma_n, \delta_n]) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \gamma_n \leq x_2 \leq \delta_n \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n + \gamma_n \leq x_1 + x_2 \leq b_n + \delta_n \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (x_1 + x_2) \in [a_n + \gamma_n, b_n + \delta_n], \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ ([a_n + \gamma_n, b_n + \delta_n]) \text{ κιβωτισμένη} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = \cap([a_n + \gamma_n, b_n + \delta_n]).$$

3) $\boxed{a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.}$ $\Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$\exists ([a_n, b_n])$ κιβωτισμένη με $a_n, b_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$: $x_1 = \cap([a_n, b_n]) \Rightarrow a^{x_1} = \cap([a^{a_n}, a^{b_n}]) \Rightarrow$
$\Rightarrow a^{x_1} = \lim a^{a_n}$.

$\exists ([\gamma_n, \delta_n])$ κιβωτισμένη με $\gamma_n, \delta_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$: $x_2 = \cap([\gamma_n, \delta_n]) \Rightarrow a^{x_2} = \cap([a^{\gamma_n}, a^{\delta_n}]) \Rightarrow$
$\Rightarrow a^{x_2} = \lim a^{\gamma_n}$.

Από το λήμμα: $\left.\begin{array}{l} x_1 = \cap([a_n, b_n]) \\ x_2 = \cap([\gamma_n, \delta_n]) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = \cap([a_n + \gamma_n, b_n + \delta_n]) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{x_1 + x_2} = \cap([a^{a_n + \gamma_n}, a^{b_n + \delta_n}]) \Rightarrow a^{x_1 + x_2} = \lim a^{a_n + \gamma_n} = \lim [a^{a_n} \cdot a^{\gamma_n}] =$
$= \lim a^{a_n} \cdot \lim a^{\gamma_n} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$.

Άρα: $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

▼<u>Εκθετική συνάρτηση και διάταξη</u>

1) $$\boxed{a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a^x > 1, & \forall x \in (0, +\infty). \\ a^x = 1, & \text{για } x = 0 \\ a^x < 1, & \forall x \in (-\infty, 0). \end{cases}}$$

<u>Απόδειξη</u>

Για $x = 0$, $a^x = a^0 = 1$.

i) <u>Έστω $x \in (0, +\infty)$</u> $\Rightarrow \exists ([a_n, b_n])$ κιβωτισμένη με $a_n, b_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$: $x = \cap([a_n, b_n])$
$\Rightarrow a^x = \cap([a^{a_n}, a^{b_n}]) \Rightarrow a^x = \lim a^{a_n} = \lim a^{b_n}$.

$x = \cap([a_n, b_n]) \Rightarrow \lim a_n = x > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n > 0$ (1).

$([a_n, b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$

$\left.\Rightarrow (a_n) \text{ ~~γνησίως~~ αύξουσα} \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 + 2 : a_n \geq a_{n_0+1} > 0 \right\} \Rightarrow$
$a > 1$

$\Rightarrow a^{a_n} \geq a^{a_{n_0+1}} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 + 2 \Rightarrow a^x = \lim a^{a_n} \geq a^{a_{n_0+1}} > 1 \Rightarrow a^x > 1$.

ii) <u>Έστω $x \in (-\infty, 0)$</u> $\Rightarrow -x \in (0, +\infty) \Rightarrow a^{-x} > 1 \ (\cancel{\text{από}}\ \tfrac{1}{a^x}) \Rightarrow \frac{1}{a^x} > 1 \Rightarrow a^x < 1$.

2) $\boxed{0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} 0<a^x<1 & ,\ \forall x\in(0,+\infty) \\ a^x=1 & ,\ \text{για } x=0 \\ a^x>1 & ,\ \forall x\in(-\infty,0). \end{cases}}$

<u>Απόδειξη</u>

Για $x=0$, $a^x=a^0=1$

i) <u>Έστω $x\in(0,+\infty)$</u>, $0<a<1 \Rightarrow \frac{1}{a}>1$ $\Bigg\} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x>1 \Rightarrow \frac{1}{a^x}>1 \Rightarrow a^x<1$, είναι και $a^x>0$ $\Bigg\} \Rightarrow 0<a^x<1$.

ii) Έστω $x\in(-\infty,0)$, $0<a<1 \Rightarrow \frac{1}{a}>1$ $\Bigg\} \Rightarrow 0<\left(\frac{1}{a}\right)^x<1 \Rightarrow 0<\frac{1}{a^x}<1 \Rightarrow a^x>1$.

3) $\boxed{\begin{array}{l} a>b>0 \wedge x>0 \Rightarrow a^x>b^x \\ a>b>0 \wedge x<0 \Rightarrow a^x<b^x \end{array}}$

<u>Απόδειξη</u>

i) $a>b>0 \Rightarrow \frac{a}{b}>1$, $x>0$ $\Bigg\} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x>1 \Rightarrow a^x\cdot\left(\frac{1}{b}\right)^x>1 \Rightarrow \frac{a^x}{b^x}>1$, είναι και $b^x>0$ $\Bigg\} \Rightarrow a^x>b^x$.

ii) $a>b>0$, $x<0 \Rightarrow -x>0$ $\Bigg\} \Rightarrow a^{-x}>b^{-x} \Rightarrow \frac{1}{a^x}>\frac{1}{b^x}>0$. (Διότι $a^x>0, b^x>0$) $\Rightarrow a^x<b^x$.

4) $\boxed{\begin{array}{l} a>1 \Rightarrow f(x)=a^x, \forall x\in\mathbb{R} \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}. \\ 0<a<1 \Rightarrow f(x)=a^x, \forall x\in\mathbb{R} \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}. \end{array}}$

<u>Απόδειξη</u>

i) <u>Αν $a>1$:</u> Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1>x_2 \Rightarrow x_1-x_2>0$, $a>1$ $\Bigg\} \Rightarrow a^{x_1-x_2}>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}>1 \Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$ (Διότι $a^{x_2}>0$) $\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1>x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) <u>Αν $0<a<1$:</u> Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1>x_2$, $0<a<1 \Rightarrow \frac{1}{a}>1$ $\Bigg\} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2} \Rightarrow \frac{1}{a^{x_1}}>\frac{1}{a^{x_2}}>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1>x_2 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

↳ Απο το θεώρημα: <u>f γνησίως μονότονη $\Rightarrow f$ "1-1"</u>, προκύπτει ότι

- $\boxed{a\neq 1 \wedge a>0 \Rightarrow f(x)=a^x, \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{"1-1"}}$

Συνέχεια εκθετικής συνάρτησης.

Θ. $\boxed{\text{Η } f(x)=a^x, \forall x\in\mathbb{R} \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}}$

Απόδειξη

• Θα δείξω ότι η f είναι συνεχής στο 0, δηλαδή ότι $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Εστω $\varepsilon>0$.

i) Αν $a>1 \Rightarrow a>0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1 \Rightarrow \lim(a^{1/n}-1)=0 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}^* : \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : |a^{1/n}-1|<\varepsilon$

$a>1 \Rightarrow a^{1/n}>1 \Rightarrow a^{1/n}-1$

$\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : a^{1/n}-1<\varepsilon \Rightarrow a^{\frac{1}{n_0+1}}-1<\varepsilon$.

Παίρνω $\delta=\frac{1}{n_0+1} \Rightarrow \forall x\in(0,\delta) : 0<x<\delta \overset{a>1}{\Rightarrow} a^x<a^\delta \Rightarrow a^x-1<a^{\frac{1}{n_0+1}}-1<\varepsilon$

είναι και $a^x-1>0$, διότι $a>1$ και $x>0$.

$\Rightarrow 0<a^x-1<\varepsilon \Rightarrow |a^x-1|<\varepsilon$.

Αρα $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : \forall x\in(0,\delta) : |a^x-1|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$.

Ομοια, $\lim\limits_{x\to 0^-} a^x = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

ii) Αν $0<a<1 \Rightarrow \frac{1}{a}>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} a^x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{a^x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} =$

$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{1} = 1$

iii) Αν $a=1 \Rightarrow f(x)=1^x=1, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} 1^x = 1$.

• Εστω $x_0\in\mathbb{R}$. Αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

~~Είναι~~ $\cancel{\lim\limits_{x\to x_0} a^x = \lim\limits_{h\to 0} a}$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = \lim\limits_{h\to 0} a^{x_0+h} = \lim\limits_{h\to 0}(a^{x_0}\cdot a^h) = a^{x_0}\cdot\lim\limits_{h\to 0} a^h = a^{x_0}\cdot 1 = a^{x_0}, \forall x_0\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$\boxed{\lim x_n = x \Rightarrow a^x = \lim a^{x_n}}$

Απο το παραπάνω πόρισμα αποδεικνύεται η τελευταία ιδιότητα των εκθετικών συναρτήσεων ως προς τις πράξεις.

Θ. $\boxed{(a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1} = a^{x_1\cdot x_2} \quad, \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}.}$

Απόδειξη

Έστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$.

$\exists ([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη με $a_n,b_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*: x_1 = \cap([a_n,b_n])$.

$\exists ([\gamma_n,\delta_n])$ κιβωτισμένη με $\gamma_n,\delta_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*: x_2 = \cap([\gamma_n,\delta_n])$.

i) Ειδικά όταν $x_1 \in \mathbb{Q}$ και $x_2 \in \mathbb{R}$.

$x_2 = \cap([\gamma_n,\delta_n]) \Rightarrow \lim \gamma_n = x_2 \Rightarrow (a^{x_1})^{x_2} = \lim (a^{x_1})^{\gamma_n} = \lim (a^{\gamma_n})^{x_1}$ (διότι $\gamma_n, x_1 \in \mathbb{Q}$)

$= (\lim a^{\gamma_n})^{x_1}$ (διότι $x_1 \in \mathbb{Q}$) $= (a^{x_2})^{x_1}$.

$\lim(x_1\gamma_n) = x_1 \lim \gamma_n = x_1x_2 \Rightarrow a^{x_1x_2} = \lim a^{x_1\gamma_n} = \lim (a^{\gamma_n})^{x_1}$ (διότι $x_1,\gamma_n \in \mathbb{Q}$) $=$

$= (\lim a^{\gamma_n})^{x_1}$ (διότι $x_1 \in \mathbb{Q}$) $= (a^{x_2})^{x_1}$

Άρα $\forall x_1 \in \mathbb{Q}, \forall x_2 \in \mathbb{R}: (a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1} = a^{x_1x_2}$.

ii) Αν $x_1 \in \mathbb{R}$ και $x_2 \in \mathbb{R}$.

$\lim(x_1\gamma_n) = x_1 \lim \gamma_n = x_1x_2 \Rightarrow a^{x_1x_2} = \lim a^{x_1\gamma_n} = \lim (a^{x_1})^{\gamma_n}$ (διότι $x_1 \in \mathbb{R}, \gamma_n \in \mathbb{Q}$) $=$

$= (a^{x_1})^{x_2}$

Είναι και $(a^{x_2})^{x_1} = a^{x_2x_1} = a^{x_1x_2} = (a^{x_1})^{x_2}$.

Άρα $\forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}: (a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1} = a^{x_1x_2}$.

- Παραδείγματα

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ae^{x^2-1} + \cos(\pi x) & , x \in (-\infty,-1] \\ (2a+b)x^2 + x + 1 & , x \in (-1,1) \\ a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x) & , x \in [1,+\infty). \end{cases}$

Να βρεθούν οι $a,b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση

- Στο $(-\infty,-1)$: $f = ag_1 \circ g_2 + g_3$ όπου $g_1(x) = e^x, g_2(x) = x^2-1, g_3(x) = \cos(\pi x)$.

$\left.\begin{array}{l} g_1 \text{ συνεχής ως εκθετική} \\ g_2 \text{ συνεχής ως πολυωνυμική} \end{array}\right\} \Rightarrow ag_1 \circ g_2$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών $\left.\begin{array}{l} \\ g_3 \text{ συνεχής ως τριγωνομετρική} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f = ag_1 \circ g_2 + g_3$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

- Στο $(-1,1)$ f συνεχής ως πολυωνυμική.
- Στο $(1,+\infty)$ f συνεχής ως άθροισμα συνεχών (τριγωνομετρικών).

Άρα f συνεχής στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής στο } -1 \\ f \text{ συνεχής στο } 1. \end{cases}$

- Στο -1, $f(-1) = ae^{1-1} + \cos(-\pi) = a\cdot 1 + \cos\pi = a-1$

$\forall x \in (-\infty,-1): f(x) = ae^{x^2-1} + \cos(\pi x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} [ae^{x^2-1} + \cos(\pi x)] =$

$= a\lim\limits_{x\to -1^-} e^{x^2-1} + \lim\limits_{x\to -1^-} \cos(\pi x) = a e^{\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2-1)} + \cos(\lim\limits_{x\to -1^-}(\pi x)) = a e^{1-1} + \cos(-\pi) = a + \cos\pi =$
$= a-1.$

$\forall x\in(-1,1): f(x) = (2a+b)x^2+x+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} [(2a+b)x^2+x+1] = (2a+b)(-1)^2-1+1 = 2a+b.$

f συνεχής στο $-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a-1 = 2a+b \Leftrightarrow \underline{a+b=-1.}$

- Στο 1, $f(1) = a\cos\pi + b\sin\pi = a\cdot(-1)+b\cdot 0 = -a.$

$\forall x\in(-1,1): f(x) = (2a+b)x^2+x+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} [(2a+b)x^2+x+1] = (2a+b)\cdot 1^2+1+1 =$
$= 2a+b+2.$

$\forall x\in(1,+\infty): f(x) = a\cos(\pi x)+b\sin(\pi x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} [a\cos(\pi x)+b\sin(\pi x)] =$
$= a\lim\limits_{x\to 1^+}\cos(\pi x) + b\lim\limits_{x\to 1^+}\sin(\pi x) = a\cos\pi + b\sin\pi = a\cdot(-1)+b\cdot 0 = -a.$

f συνεχής στο $1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -a = 2a+b+2 \Leftrightarrow \underline{3a+b=-2}$

Άρα f συνεχής στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a-1 = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2} \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$

2) Δείξτε ότι η εξίσωση $e^{x+1}+2\cos(\pi x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$.

Λύση

Θέτω $f(x) = e^{x+1}+2\cos(\pi x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών (εκθετικής και τριγωνομετρικής) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ συνεχής στο $[-1,0]$ (1).

$f(-1) = e^{-1+1}+2\cos(-\pi) = e^0+2\cos\pi = 1+2(-1) = -1.$
$f(0) = e^{0+1}+2\cos 0 = e+2\cdot 1 = e+2$
$\Rightarrow f(-1)\cdot f(0) = -(e+2)<0$

$\Rightarrow$ ισχύει το Θ.Bolzano στο $[-1,0] \Rightarrow \exists x_0\in(-1,0): f(x_0)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Η εξίσωση $e^{x+1}+2\cos(\pi x)=0$ έχει λύση στο $(-1,0)$.

3) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^{2x+1} + \text{Arctan}x$ με πεδίο ορισμού το $A=(-1,1)$.

Λύση

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1>x_2 \Rightarrow 2x_1>2x_2 \Rightarrow 2x_1+1>2x_2+1 \Rightarrow e^{2x_1+1}>e^{2x_2+1}$
$x_1>x_2 \Rightarrow Arctan\,x_1 > Arctan\,x_2$

$\Rightarrow e^{2x_1+1}+Arctan x_1 > e^{2x_2+1}+Arctan x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2), \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1>x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $(-1,1)$. (1)
f συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα εκθετικής και αντίστροφη τριγωνομετρική) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ συνεχής στο $(-1,1)$. (2).
$(1),(2) \Rightarrow f(A)=(\lim_{x\to-1}f(x), \lim_{x\to1}f(x))$.

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\left[e^{2x+1}+Arctan x\right]=\lim_{x\to-1}e^{2x+1}+\lim_{x\to-1}Arctan x = e^{\lim_{x\to-1}(2x+1)}+\lim_{x\to-1}Arctan\,x =$$

$$=e^{-2+1}+Arctan(-1)=\frac{1}{e}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4-\pi}{4e}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[e^{2x+1}+Arctan x\right]=\lim_{x\to1}e^{2x+1}+\lim_{x\to1}Arctan x = e^{\lim_{x\to1}(2x+1)}+\lim_{x\to1}Arctan x =$$

$$=e^3+Arctan 1 = e^3+\frac{\pi}{4}=\frac{4e^3+\pi}{4}.$$

Άρα $f(A)=\left(\frac{4-\pi}{4e}, \frac{4e^3+\pi}{4}\right)$.

4) Να λυθεί η εξίσωση: $(2+\pi)^{x^2+3x+1}-(2x+1)=(2+\pi)^{2x+1}-(x^2+3x+1)$.

<u>Λύση</u>

Θέτω $f(x)=(2+\pi)^x+x, \forall x\in\mathbb{R}$.
Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $\left.\begin{matrix}x_1>x_2\\ 2+\pi>1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(2+\pi)^{x_1}>(2+\pi)^{x_2}\\ x_1>x_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow (2+\pi)^{x_1}+x_1>(2+\pi)^{x_2}+x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2), \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1>x_2 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ "1-1".
Άρα $(2+\pi)^{x^2+3x+1}-(2x+1)=(2+\pi)^{2x+1}-(x^2+3x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2+\pi)^{x^2+3x+1}+(x^2+3x+1)=(2+\pi)^{2x+1}+(2x+1) \Leftrightarrow f(x^2+3x+1)=f(2x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+3x+1=2x+1$ (διότι f "1-1") $\Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$.

<u>Εκθετικές εξισώσεις</u>: Είναι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται δύναμη με εκθέτη παράσταση που περιέχει τον άγνωστο

<u>1η μορφή</u> $\bullet\!\!\rightarrow a^{f(x)}=a^{\kappa} \Leftrightarrow f(x)=\kappa \Leftrightarrow \ldots$

• <u>παράδειγμα</u>: Να λυθεί η εξίσωση $(2-\sqrt{3})^{2\cos x-1}=1$.

<u>Λύση</u>

$(2-\sqrt{3})^{2\cos x-1} = 1 = (2-\sqrt{3})^0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

2) Να λυθεί η εξίσωση $8^{4x-1} = (16\sqrt{2})^{2x-1}$.

<u>Λύση</u>

$8^{4x-1} = (16\sqrt{2})^{2x-1} \Leftrightarrow (2^3)^{4x-1} = (2^{4+\frac{1}{2}})^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{3(4x-1)} = 2^{\frac{9}{2}(2x-1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(4x-1) = \frac{9}{2}(2x-1) \Leftrightarrow 4x-1 = \frac{3}{2}(2x-1) \Leftrightarrow 8x-2 = 6x-3 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

<u>2η μορφή</u> $\bullet\!\!\rightarrow$ <u>$f(a^x) = g(a^x)$</u>. Θέτω $y = a^x$ οπότε καταλήγω στην 1η μορφή.

• <u>Παράδειγμα</u> : Να λυθεί η εξίσωση $2^{2x+1} + 1 = 3\cdot 2^x$.

<u>Λύση</u>

$2^{2x+1} + 1 = 3\cdot 2^x \Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x} + 1 = 3\cdot 2^x$. Θέτω $y = 2^x$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$2y^2 + 1 = 3y \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{3\pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$y = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$.

<u>3η μορφή</u> $\bullet\!\!\rightarrow$ <u>$f(a^x) = g(b^x)$</u>. Διακρίνεται στις περιπτώσεις

i) <u>$A a^x = B b^x$</u> $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{B}{A} \longleftarrow$ 1η μορφή.

ii) <u>$A\cdot a^{2x} + B a^x\cdot b^x + \Gamma\cdot b^{2x} = 0$</u> $\longleftarrow$ Ομογενής. Διαιρώ με b^{2x}.

Κι έχω : $A\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^x + \Gamma = 0$. Θέτω $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \longleftarrow$ 2η μορφή.

• <u>Παραδείγματα</u>: Να λυθούν οι εξισώσεις

~~1) $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3} \Leftrightarrow 3\cdot 3^x - 2^x = \frac{1}{3}3^x + 2^3\cdot 2^x \Leftrightarrow 9\cdot 3^x - 3\cdot 2^x = 3^x + 24\cdot 2^x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 8\cdot 3^x =$~~

1) $3^{x+2} - 2^{x+4} = 11\cdot 2^x - 3^x \Leftrightarrow 9\cdot 3^x - 16\cdot 2^x = 11\cdot 2^x - 3^x \Leftrightarrow 8\cdot 3^x = 27\cdot 2^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{8}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$.

2) $3^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 2\cdot 4^x = 0 \Leftrightarrow 3^{2x}\cdot 3 - 5\cdot 3^x\cdot 2^x + 2\cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0$. Θέτω $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$3y^2-5y+2=0,\quad \Delta=25-24=1 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{5\pm 1}{6}=\begin{cases}1\\ \frac{2}{3}\end{cases}$$

Άρα $y=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=1=\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x=0.$

$y=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=1.$

→ <u>Εκθετικά συστήματα</u> : Επιδιώκω να τα καταστήσω αλγεβρικά, δουλεύοντας συνήθως ως εξής:

- 1 Αναλύω σε πρώτους παράγοντες τις αριθμητικές βάσεις ώστε να γίνουν ίδιες και εξισώνω τους εκθέτες.
- 2 Κάνω κατάλληλη βοηθητική αντικατάσταση, συνήθως $a^x=\omega$, $\beta^y=\varphi$.
- 3 Διαιρώ κατά μέλη.
- 4 Συνδυάζω τα προηγούμενα.

- <u>Παραδείγματα</u> : Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases}4^x\cdot 2^{y-2}=32\\ 3^{x+2}\cdot 3^{y-4}=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^{2x}\cdot 2^{y-2}=2^5\\ 3^{x+2}\cdot 3^{y-4}=3^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^{2x+y-2}=2^5\\ 3^{x+y-2}=3^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y-2=5\\ x+y-2=3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=7\\ x+y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+(x+y)=7\\ x+y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+5=7\\ x+y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ 2+y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=3.\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(2,3).$

2) $\begin{cases}3^{x-y}+2^{x+y}=11\\ 2\cdot 3^{x-y}-3\cdot 2^{x+y}=-18\end{cases}$. Θέτω $\varphi=3^{x-y}$, $\omega=2^{x+y}$. οπότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases}\varphi+\omega=11\\ 2\varphi-3\omega=-18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=11-\varphi\\ 2\varphi-3(11-\varphi)=-18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=11-\varphi\\ 2\varphi-33+3\varphi=-18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=11-\varphi\\ 5\varphi=33-18=15\end{cases} \Leftrightarrow$

$\left(\Leftrightarrow \begin{cases}\cancel{\omega=11+15=26}\\ \varphi=-15\end{cases}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=11-3=8\\ \varphi=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^{x+y}=8\\ 3^{x-y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^{x+y}=2^3\\ 3^{x-y}=3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3\\ x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=3-x=3-2=1\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(2,1).$

$2x=4$

3) $\begin{cases}2^x=5y\\ 5^x=2y.\end{cases}$ Αν $y=0$, τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases}2^x=0\\ 5^x=0\end{cases}$ ← Αδύνατο, διότι $2^x>0$ και $5^x>0$.

Έστω $y\neq 0$.

$\begin{cases}2^x=5y\\ 5^x=2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2^x}{5^x}=\frac{5y}{2y}\\ 2^x=5y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\\ 2^x=5y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ 5y=2^{-1}=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=\frac{1}{10}\end{cases}$

• <u>Εφαρμογή</u> : $\boxed{\begin{array}{l} a>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \wedge \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0. \\ 0<a<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \wedge \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty \end{array}}$

<u>Απόδειξη</u>

i) Αν $a>1 \Rightarrow \exists \vartheta>0 : a = 1+\vartheta.$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x\in(0,+\infty): a^x \geq a^{[x]} = (1+\vartheta)^{[x]} \geq 1+[x]\vartheta > [x]\vartheta \geq (x-1)\vartheta \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \vartheta(x-1) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x} = 0.$$

ii) Αν $0<a<1 \Rightarrow \underline{\frac{1}{a}>1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{a^x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 0.$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^x = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^x = +\infty.$$

$\hookrightarrow$ Θα δείξουμε ότι $\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) = a^x, \forall x\in\mathbb{R} \\ a>0 \wedge a\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)}$

<u>Απόδειξη</u>

i) $\left.\begin{array}{l}\text{Αν } a>1 \Rightarrow f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R} = (-\infty,+\infty). \\ f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}, \text{ ως εκθετική}\end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right).$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 \wedge \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \Rightarrow f(\mathbb{R}) = (0,+\infty).$

ii) $\left.\begin{array}{l}\text{Αν } 0<a<1 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R} = (-\infty,+\infty) \\ f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}, \text{ ως εκθετική}\end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right).$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \wedge \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty \Rightarrow f(\mathbb{R}) = (0,+\infty).$

▼ <u>Λογαριθμική συνάρτηση</u>

• Έστω η συνάρτηση $f_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ με $f_a(x) = a^x$ όπου $a>0$.

Αν $a\neq 1 \Rightarrow \begin{cases} f_a \text{ "1-1"} \\ f_a(\mathbb{R}) = (0,+\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_a \text{ "1-1"} \\ f_a \text{ "επί"} \end{cases} \Rightarrow f_a$ αντιστρέψιμη.

Η αντίστροφη συνάρτηση $f_a^{-1} : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται <u>λογαριθμική συνάρτηση με βάση a</u> και συμβολίζεται $\log_a$. Ο τύπος της προκύπτει από την συνεπαγωγή:

$$\boxed{y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.}$$

• <u>Άμεσες συνέπειες του ορισμού</u>: 1. $\log_a 1 = 0$, $\forall a \in (0,+\infty)-\{1\}$.
2. $\log_a a = 1$, $\forall a \in (0,+\infty)-\{1\}$.
3. $a^{\log_a x} = x$, $\forall a \in (0,+\infty)-\{1\}$.

• <u>Μονοτονία της $\log_a$</u> ⟶ Επειδή η $\log_a$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f_a, ως αντίστροφη της f_a, θα ισχύουν:

1) $\boxed{a>1 \Leftrightarrow \log_a \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0,+\infty).}$

2) $\boxed{0<a<1 \Leftrightarrow \log_a \text{ γνησίως φθίνουσα στο } (0,+\infty).}$

Επίσης, είναι $\log_a = f_a^{-1} \Rightarrow \log_a$ αντιστρέψιμη με $\log_a^{-1} = f_a \Rightarrow \log_a$ "1-1", $\forall a \in (0,+\infty)-\{1\}$.

Άρα: $\boxed{\forall a \in (0,+\infty): \log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2}$

• <u>Συνέχεια της $\log_a$</u>

Αν $a \in (0,+\infty)-\{1\} \Rightarrow f_a$ γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
f_a συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως εκθετική
$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ανοιχτό διάστημα
$\Rightarrow \log_a = f_a^{-1}$ συνεχής στο $f_a(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$.

Άρα, • $\boxed{\log_a \text{ συνεχής στο } (0,+\infty), \forall a \in (0,+\infty)-\{1\}}$

↳ <u>Ειδικά</u>, i) Όταν $a=10$, η λογαριθμική συνάρτηση γράφεται $\log = \log_{10}$.
ii) Όταν $a=e$, η λογαριθμική συνάρτηση γράφεται $\ln = \log_e$.

•₁ Οι συναρτήσεις $\log$ και $\ln$ είναι <u>γνησίως αύξουσες</u> και συνεχείς στο $(0,+\infty)$.
•₂ Φυσικά: $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2, \ldots, \log 10^n = n$.
$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$, $\ldots$, $\ln e^n = n$.

▼ <u>Ιδιότητες λογαριθμικής συνάρτησης.</u>

1) $\boxed{\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}}$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ και $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

$$a^{\log_a(x_1x_2)} = x_1x_2 = a^{\log_a x_1} \cdot a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2} \Rightarrow$$

$a>0 \wedge a\neq 1 \rightarrow f_a(x)=a^x, \forall x\in\mathbb{R}$ "1-1"

$\rightarrow \log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}^*_+, \forall a\in\mathbb{R}^*_+ - \{1\}.$

2) $\boxed{\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^*_+, \forall a\in\mathbb{R}^*_+ - \{1\}}$

Απόδειξη

Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*_+$ και $a\in\mathbb{R}^*_+ - \{1\}$.

$$a^{\log_a \frac{x_1}{x_2}} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{\log_a x_1}}{a^{\log_a x_2}} = a^{\log_a x_1 - \log_a x_2} \xRightarrow{f_a \text{ "1-1"}} \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

$\rightarrow \boxed{\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x, \forall x\in(0,+\infty), \forall a\in(0,+\infty) - \{1\}.}$

3) $\boxed{\log_a x^\kappa = \kappa \log_a x, \forall x\in\mathbb{R}^*_+, \forall a\in\mathbb{R}^*_+ - \{1\}, \forall \kappa\in\mathbb{R}}$

Λύση.

Εστω $a\in\mathbb{R}^*_+ - \{1\}, \kappa\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^*_+$

$$a^{\log_a x^\kappa} = x^\kappa = (a^{\log_a x})^\kappa = a^{\kappa\log_a x} \xRightarrow{f_a \text{ "1-1"}} \log_a x^\kappa = \kappa\log_a x.$$

$\rightarrow \boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x, \forall x\in\mathbb{R}^*_+, \forall a\in\mathbb{R}^*_+ - \{1\}, \forall n\in\mathbb{N}^*}$

- Απο την μονοτονία της συνάρτησης $\log_a$, έχουμε ότι:

4) $a>1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x>0, & \text{αν } x>1 \\ \log_a x<0, & \text{αν } 0<x<1. \end{cases}$

5) $0<a<1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x<0, & \text{αν } x>1 \\ \log_a x>0, & \text{αν } 0<x<1. \end{cases}$

- Τυπος αλλαγής βάσης. $\rightarrow$ $\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \forall x\in\mathbb{R}^*_+, \forall a,b\in\mathbb{R}^*_+ - \{1\}}$

Απόδειξη

Έστω $a, b \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\}$ και $x \in \mathbb{R}^*_+$.

$$\left.\begin{aligned} a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} \\ b = a^{\log_a b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^{\log_a x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = a^{\log_a b \cdot \log_b x} \overset{f_a\ \text{"1-1"}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \Rightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

- ~~Τύπος αλλ~~

- $\boxed{a^x = e^{x \ln a}, \forall a \in (0, +\infty), \forall x \in \mathbb{R}}$

Απόδειξη

Έστω $a \in \mathbb{R}^*_+$, $x \in \mathbb{R}$.

$$a = e^{\ln a} \Rightarrow a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}, \forall a \in (0, +\infty), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\hookrightarrow \boxed{a^{\log_\gamma b} = b^{\log_\gamma a}, \forall a \in \mathbb{R}^*_+, b \in \mathbb{R}^*_+, \gamma \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\}}.$$

Απόδειξη

Έστω $a, b \in \mathbb{R}^*_+$ και $\gamma \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\}$.

$$a^{\log_\gamma b} = e^{\log_\gamma b \cdot \ln a} = e^{\log_\gamma b \cdot \frac{\log_\gamma a}{\log_\gamma e}} = e^{\log_\gamma a \cdot \frac{\log_\gamma b}{\log_\gamma e}} = e^{\log_\gamma a \cdot \ln b} = b^{\log_\gamma a}.$$

- Παραδείγματα

1) Αν $a > 1$ και $b > 1$, δείξτε ότι $\log(a^2-1) + \log(b^2-1) - \log[(ab+1)^2 - (a+b)^2] = 0$.

Λύση

$$A = \log(a^2-1) + \log(b^2-1) - \log[(ab+1)^2 - (a+b)^2] = \log \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{(ab+1)^2 - (a+b)^2} =$$

$$= \log \frac{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1}{a^2b^2 + 2ab + 1 - a^2 - 2ab - b^2} = \log \frac{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1}{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1} = \log 1 = 0 = B.$$

2) Αν $a, b \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\}$, δείξτε ότι: $\log_a\left(\frac{1}{b^5}\right) \cdot \log_b a^2 = -10$.

Λύση

$$A = \log_a\left(\frac{1}{b^5}\right) \log_b a^2 = \frac{\ln \frac{1}{b^5}}{\ln a} \cdot \frac{\ln a^2}{\ln b} = \frac{-5 \ln b}{\ln a} \cdot \frac{2 \ln a}{\ln b} = -10 = B.$$

3) Αν $a>1$, δείξτε ότι: $\log(a+1)-\log a<\log a-\log(a-1)$.

Λύση

Είναι $\log(a+1)-\log a<\log a-\log(a-1) \Leftrightarrow \log(a+1)+\log(a-1)<2\log a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log(a+1)(a-1)<\log a^2 \Leftrightarrow (a+1)(a-1)<a^2$ (διότι log γνησίως αύξουσα) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2-1<a^2 \Leftrightarrow -1<0$, ισχύει.

Άρα αντιστρόφως ισχύει ότι $\log(a+1)-\log a<\log a-\log(a-1)$.

4) Αν $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*_+$ και $a\neq\beta\neq\gamma\neq a$ και $\frac{\log a}{\beta-\gamma}=\frac{\log\beta}{\gamma-a}=\frac{\log\gamma}{a-\beta}$, δείξτε ότι: $a^a\beta^\beta\gamma^\gamma=1$.

Λύση

Θέτω $\lambda=\frac{\log a}{\beta-\gamma}=\frac{\log\beta}{\gamma-a}=\frac{\log\gamma}{a-\beta} \Rightarrow \begin{cases}\log a=(\beta-\gamma)\lambda.\\ \log\beta=(\gamma-a)\lambda.\\ \log\gamma=(a-\beta)\lambda.\end{cases}$ οπότε

$\log(a^a\beta^\beta\gamma^\gamma)=\log a^a+\log\beta^\beta+\log\gamma^\gamma=a\log a+\beta\log\beta+\gamma\log\gamma=$
$=a(\beta-\gamma)\lambda+\beta(\gamma-a)\lambda+\gamma(a-\beta)\lambda=\lambda(a\beta-a\gamma+\beta\gamma-a\beta+a\gamma-\beta\gamma)=\lambda\cdot 0=0=\log 1\Rightarrow$
$\Rightarrow a^a\beta^\beta\gamma^\gamma=1$, διότι log "1-1"

5) Αν $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*_+$, $\beta\neq1$, $a\beta\neq1$, δείξτε ότι: $\log_{a\beta}\gamma=\frac{\log_\beta\gamma}{1+\log_\beta a}$.

Λύση

$$B=\frac{\log_\beta\gamma}{1+\log_\beta a}=\frac{\frac{\log\gamma}{\log\beta}}{1+\frac{\log a}{\log\beta}}=\frac{\frac{\log\gamma}{\log\beta}}{\frac{\log a+\log\beta}{\log\beta}}=\frac{\log\gamma}{\log a+\log\beta}=\frac{\log\gamma}{\log a\beta}=$$
$=\log_{a\beta}\gamma=\lambda.$

▼ Λογαριθμικές εξισώσεις.

Είναι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται λογάριθμος του αγνώστου ή συναρτήσεως του αγνώστου.

Διακρίνονται στις μορφές.

1) $\log_x a=\beta \Leftrightarrow a=x^\beta \Leftrightarrow \cdots$ (Π.Ο. $x>0 \wedge x\neq1$).
2) $\log_a f(x)=\beta \Leftrightarrow f(x)=a^\beta \Leftrightarrow \cdots$ (Π.Ο. $f(x)>0 \Leftrightarrow \cdots$).
3) $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow \cdots$ ~~Π.Ο.~~ η

↳ Στην παραπάνω μορφή καταλήγουμε με τις ιδιότητες των λογαρίθμων. **Προσοχή** όμως, το Π.Ο. πρέπει να βρίσκεται από την αρχή, για κάθε λογαριθμική συνάρτηση που υπάρχει στην εξίσωση. Έτσι, για κάθε συνάρτηση της μορφής $y=\log_{\varphi(x)} f(x)$ το πεδίο ορισμού βρίσκεται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ \varphi(x)>0 \\ \varphi(x)\neq 1. \end{cases}$$

• **Παραδείγματα** : Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\log_{x+2} 3 = 2.$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x+2>0 \\ x+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2,-1)\cup(-1,+\infty) \Leftrightarrow A=(-2,-1)\cup(-1,+\infty).$

Είναι $\log_{x+2} 3=2 \Leftrightarrow (x+2)^2=3 \Leftrightarrow x^2+4x+4=3 \Leftrightarrow x^2+4x+1=0$

$\Delta=16-4=12=4\cdot 3$

$\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}=\begin{cases} -2-\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3}. \end{cases}$

2) $\log_{1/2}(x^3-3x)=-1.$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^3-3x>0 \Leftrightarrow x(x^2-3)>0 \Leftrightarrow x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty).$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Είναι $\log_{1/2}(x^3-3x)=-1 \Leftrightarrow x^3-3x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x^3-3x=2 \Leftrightarrow x^3-x-2x-2=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x+1)=0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)-2(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)[x(x-1)-2]=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1. \leftarrow \text{δεκτή.} \\ x^2-x-2=0. \end{cases}$

$\Delta=1+8=9$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} 2 \leftarrow \text{δεκτή.} \\ -1. \end{cases}$

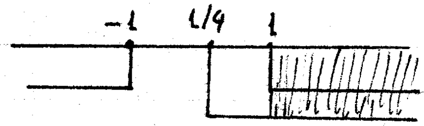
Άρα $x\in\{-1,2\}.$

3) $\log(4x-1)=2\log 2+\log(x^2-1).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} 4x-1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4} \\ x<-1 \lor x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow A=(1,+\infty)$.

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$



Είναι $\log(4x-1)=2\log 2+\log(x^2-1) \Leftrightarrow \log(4x-1)=\log 4(x^2-1) \Leftrightarrow 4x-1=4(x^2-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x-1=4x^2-4 \Leftrightarrow 4x^2-4x-3=0.$

$\Delta=16+48=64=8^2$ $\Bigg\} \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{4\pm 8}{8}=\dfrac{1\pm 2}{2}=\begin{cases} \frac{3}{2} \leftarrow \text{δεκτή} \\ -\frac{1}{2} \leftarrow \text{απορρίπτεται} \end{cases}$

4) $2(\log_x 8)^2+\log_x 64+\log_x 8=9.$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x>0 \land x\neq 1 \Leftrightarrow A=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Είναι $2(\log_x 8)^2+\log_x 64+\log_x 8=9 \Leftrightarrow 2(\log_x 8)^2+\log_x 8^2+\log_x 8=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\log_x 8)^2+2\log_x 8+\log_x 8=9 \Leftrightarrow 2(\log_x 8)^2+3\log_x 8-9=0.$

Θέτω $y=\log_x 8$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$2y^2+3y-9=0$
$\Delta=9+72=81=9^2$ $\Bigg\} \Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{-3\pm 9}{4}=\begin{cases} -3 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$ και άρα

$y=-3 \Leftrightarrow \log_x 8=-3 \Leftrightarrow x^{-3}=8 \Leftrightarrow x^3=\frac{1}{8} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$ ← δεκτή

$y=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_x 8=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^{3/2}=8 \Leftrightarrow x^3=64=2^6 \Leftrightarrow x=2^2=4$ ← δεκτή.

Άρα $x\in\{\frac{1}{2},4\}$.

5) $\log_x 2+\log_2 x=\frac{5}{2}.$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x>0 \land x\neq 1 \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \Leftrightarrow A=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Είναι $\log_x 2+\log_2 x=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\ln 2}{\ln x}+\dfrac{\ln x}{\ln 2}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\ln^2 2+\ln^2 x}{\ln 2\cdot\ln x}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln^2 2+2\ln^2 x=5\ln 2\cdot\ln x.$ Θέτω $y=\ln x$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$2\ln^2 2+2y^2=5\ln 2\cdot y \Leftrightarrow 2y^2-(5\ln 2)y+2\ln^2 2=0$
$\Delta=25\ln^2 2-16\ln^2 2=9\ln^2 2$ $\Bigg\} \Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{5\ln 2\pm 3\ln 2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=2\ln 2 \lor y=\dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \ln x=\ln 4 \lor \ln x=\ln\sqrt{2} \Leftrightarrow x=4 \lor x=\sqrt{2}$ ← δεκτός.

12
8
96

6) $\log[\log(2x^2+x-11)]=0.$

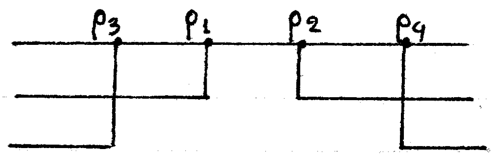
<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} 2x^2+x-11>0 \\ \log(2x^2+x-11)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-11>0 \\ 2x^2+x-11>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x-11>0 \\ 2x^2+x-12>0. \end{cases}$ (Σ).

$2x^2+x-11=0$, $\Delta=1+88=89$ $\rightarrow \rho_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{89}}{4}$ $\qquad$ $2x^2+x-12>0.$, $\Delta=1+96=97$ $\rightarrow \rho_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{97}}{4}$

x		ρ_1		ρ_2	
$2x^2+x-11$	+	0	−	0	+

x		ρ_3		ρ_4	
$2x^2+x-12$	+	0	−	0	+



Άρα $(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,\rho_1)\cup(\rho_2,+\infty) \\ x\in(-\infty,\rho_3)\cup(\rho_4,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,\rho_3)\cup(\rho_4,+\infty) \Leftrightarrow A=\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{97}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{97}}{4},+\infty\right).$

Είναι $\log[\log(2x^2+x-11)]=0 \Leftrightarrow \log[\log(2x^2+x-11)]=\log 1 \Leftrightarrow \log(2x^2+x-11)=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log(2x^2+x-11)=\log 10 \Leftrightarrow 2x^2+x-11=10 \Leftrightarrow 2x^2+x-21=0.$ $\rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{163}}{4}$
$\Delta=1+162=163$

δεκτές.

→ Σε εξισώσεις της μορφής $a^{f(x)}=b$, όταν ο b <u>δεν</u> μετατρέπεται σε δύναμη του a, οπότε λογαριθμίζω και τα δύο μέλη της εξίσωσης:

$$a^{f(x)}=b \Leftrightarrow \log a^{f(x)}=\log b \Leftrightarrow f(x)\cdot\log a=\log b \Leftrightarrow f(x)=\frac{\log b}{\log a} \Leftrightarrow \dots$$

7) $5^{3x-2}=7$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

Είναι $5^{3x-2}=7 \Leftrightarrow \log 5^{3x-2}=\log 7 \Leftrightarrow (3x-2)\log 5=\log 7 \Leftrightarrow (3\log 5)x-2\log 5=\log 7$
$\Leftrightarrow (3\log 5)x=2\log 5+\log 7 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\log 5+\log 7}{3\log 5}.$

8) $9^x+6^x=4^x.$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

Είναι $9^x+6^x=4^x \Leftrightarrow 3^{2x}+3^x\cdot 2^x=2^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$. Θέτω $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, οπότε
$y^2+y=1 \Leftrightarrow y^2+y-1=0$, $\Delta=1+4=5$ $\rightarrow y_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0 \leftarrow \text{απορρίπτεται} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \leftarrow \text{δεκτή.} \end{cases}$

$$y=\frac{-1+\sqrt5}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{-1+\sqrt5}{2}\Leftrightarrow\log\left(\frac{3}{2}\right)^x=\log\frac{\sqrt5-1}{2}\Leftrightarrow x\log\frac{3}{2}=\log\frac{\sqrt5-1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\log\frac{\sqrt5-1}{2}}{\log\frac{3}{2}}=\frac{\log(\sqrt5-1)-\log2}{\log3-\log2}.$$

▼ <u>Εκθετικολογαριθμικές εξισώσεις.</u>

• <u>Παραδείγματα</u> : Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $ex^{\ln x}=x^2\sqrt{x}$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x>0\Leftrightarrow A=(0,+\infty)$.

Είναι $ex^{\ln x}=x^2\sqrt{x}\Leftrightarrow \ln(ex^{\ln x})=\ln(x^2\sqrt{x})\Leftrightarrow \ln e+\ln x^{\ln x}=\ln x^2+\ln\sqrt{x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+(\ln x)(\ln x)=2\ln x+\frac{1}{2}\ln x\Leftrightarrow 2+2\ln^2x=4\ln x+\ln x\Leftrightarrow 2\ln^2x-5\ln x+2=0$.

Θέτω $y=\ln x$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$\left.\begin{array}{l}2y^2-5y+2=0.\\ \Delta=25-16=9=3^2\end{array}\right\}\to y_{1,2}=\frac{5\pm3}{4}=\begin{cases}2\\ \frac{1}{2}\end{cases}$ και άρα

$\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$

$\ln x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{1/2}=\sqrt{e}$.

2) $(x^2-3x+2)^{x^2-2x}=1$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\left.\begin{array}{l}x^2-3x+2>0\\ \Delta=9-8=1\end{array}\right\}\to \rho_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

x		1		2	
x^2-3x+2	+	0	−	0	+

Είναι $(x^2-3x+2)^{x^2-2x}=1\Leftrightarrow\log(x^2-3x+2)^{x^2-2x}=\log1\Leftrightarrow(x^2-2x)\log(x^2-3x+2)=0$

$\Leftrightarrow$ $x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0 \wedge x=2$

$\log(x^2-3x+2)=0=\log1\Leftrightarrow x^2-3x+2=1\Leftrightarrow x^2-3x+1=0.\Big\}\to x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt5}{2}$

$\Delta=9-4=5$

Δεκτές ρίζες είναι οι $x=0\vee x=\frac{3+\sqrt5}{2}\vee x=\frac{3-\sqrt5}{2}$.

3) $x^x = 4$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x>0 \Leftrightarrow A=(0,+\infty)$.

Θέτω $f(x)=x^x=e^{x\ln x}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1>x_2$.

$$\left.\begin{aligned} x_1>x_2 &\Rightarrow \ln x_1>\ln x_2 \\ x_1&>x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1\ln x_1 > x_2 \ln x_2 \Rightarrow e^{x_1\ln x_1} > e^{x_2 \ln x_2} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2), \forall x_{1,2}\in A \text{ με } x_1>x_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $A \Rightarrow f$ "1-1".

Είναι $x^x=4 \Leftrightarrow x^x=2^2 \Leftrightarrow f(x)=f(2) \Leftrightarrow x=2$.

4) $\ln x + x = 1$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x>0 \Leftrightarrow A=(0,+\infty)$.

Είναι $\ln x + x = 1 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = 0$ (1).

Η (1) έχει προφανή λύση την $x=1$, διότι $\ln 1 + 1 - 1 = 0+1-1=0$.

Θα δείξω ότι η λύση αυτή είναι μοναδική. Έστω $\rho\in A$ μία λύση της (1).

Θέτω $f(x)=\ln x + x - 1$, $\forall x\in A$ γνησίως αύξουσα, ως άθροισμα γνησίως αύξουσων $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow f \text{ "1-1"} \\ &f(\rho)=0=f(1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho=1.$$

Άρα (1) $\Leftrightarrow x=1$.

5) $\log(3^x+1)+\log(3^x+4)=\log(9\cdot 3^x+1)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} 3^x+1>0 \\ 3^x+4>0 \\ 9\cdot 3^x+1>0 \end{cases}$, ισχύουν $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}$.

Είναι $\log(3^x+1)+\log(3^x+4)=\log(9\cdot 3^x+1) \Leftrightarrow \log[(3^x+1)(3^x+4)]=\log(9\cdot 3^x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3^x+1)(3^x+4)=9\cdot 3^x+1 \Leftrightarrow 3^{2x}+4\cdot 3^x+3^x+4=9\cdot 3^x+1 \Leftrightarrow 3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0$.

Θέτω $y=3^x$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$\left.\begin{aligned} &y^2-4y+3=0 \\ &\Delta=16-12=4=2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$ και άρα

$y=3 \Leftrightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$.

$y=1 \Leftrightarrow 3^x=1=3^0 \Leftrightarrow x=0$.

6) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$

Λύση

Π.Ο. $\begin{cases} x+12>0 \\ x>0 \wedge x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-12 \\ x>0\wedge x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>0 \wedge x\neq 1 \Leftrightarrow A=(0,1)\cup(1,+\infty).$

Είναι $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1 \Leftrightarrow \frac{\log(x+12)}{\log 4}\cdot\frac{\log 2}{\log x}=1 \Leftrightarrow \frac{\log(x+12)}{2\log 2}\cdot\frac{\log 2}{\log x}=1$

$\Leftrightarrow \log(x+12)=2\log x \Leftrightarrow \log(x+12)=\log x^2 \Leftrightarrow x+12=x^2 \Leftrightarrow x^2-x-12=0.$
$\Delta=1+48=49=7^2$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}4\\-3\end{cases}$

Λογαριθμικά συστήματα

Οπως και στα εκθετικά, τα μετατρέπω σε αλγεβρικα...

• Παραδείγματα: Να λυθούν τα συστήματα:

1) $\begin{cases}\log x+\log y=\log 14\\ 3x-y=1.\end{cases}$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x>0 \wedge y>0.$

$\begin{cases}\log x+\log y=\log 14\\ 3x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log(xy)=\log 14\\ 3x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=14\\ 3x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(3x-1)=14\\ y=3x-1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-1\\ 3x^2-x-14=0\end{cases}$ $\Delta=1+168=169=13^2$ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 13}{6}=\begin{cases}\frac{7}{3}\\ -2<0 \leftarrow \text{απορρίπτεται}\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{7}{3}\\ y=3\cdot\frac{7}{3}-1=6\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{7}{3},6\right).$

2) $\begin{cases}xy=40\\ x^{\log y}=4.\end{cases}$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x>0$ και $y>0.$

$\begin{cases}xy=40\\ x^{\log y}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log(xy)=\log 40\\ \log x^{\log y}=\log 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log x+\log y=1+2\log 2.\\ \log x\cdot\log y=2\log 2.\end{cases}$ Θέτω $\varphi=\log x$, $\omega=\log y$ οπότε.

$\begin{cases}\varphi+\omega=1+2\log 2\\ \varphi\omega=2\log 2\end{cases} \Rightarrow z^2-(1+2\log 2)z+2\log 2=0 \Leftrightarrow z^2-z-(2\log 2)z+2\log 2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(z-1)-(2\log 2)(z-1)=0 \Leftrightarrow (z-2\log 2)(z-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $z_1 = 2\log 2$, $z_2 = 1$.

Άρα $\begin{cases} \varphi = 2\log 2 \\ \omega = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \varphi = 1 \\ \omega = 2\log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \log 4 \\ \log y = \log 10 \end{cases} \vee \begin{cases} \log x = \log 10 \\ \log y = \log 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases} \leftarrow$ δεκτές.

3) $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20. \\ \log\sqrt{xy} = 1. \end{cases}$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x > 0 \wedge y > 0$.

$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log y} + x^{\log y} = 20 \\ \frac{1}{2}\log(xy) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^{\log y} = 20 \\ \log(xy) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log y} = 10 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x^{\log y} = \log 10 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x \cdot \log y = 1 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$. Θέτω $\varphi = \log x$, $\omega = \log y$, οπότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} \varphi + \omega = 2 \\ \varphi\omega = 1 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$. άρα

$\begin{cases} \varphi = 1 \\ \omega = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 1 \\ \log y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \log 10 \\ \log y = \log 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10. \end{cases} \leftarrow$ δεκτές.

4) $\begin{cases} 5^{\frac{4x}{\log y}} = 25 \\ y^{\frac{\log y}{x+2}} = 10^4 \end{cases}$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} y > 0 \\ \log y \neq 0 \\ x + 2 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow y > 0 \wedge y \neq 1 \wedge x \neq -2.$

$\begin{cases} 5^{\frac{4x}{\log y}} = 25 = 5^2 \\ y^{\frac{\log y}{x+2}} = 10^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{\log y} = 2 \\ \log y^{\frac{\log y}{x+2}} = \log 10^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\log y \\ \frac{\log y}{x+2} \cdot \log y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \log y \\ \log^2 y = 4x + 8 \end{cases}$

Θέτω $\varphi = \log y$ οπότε

$\begin{cases} 2x = \varphi \\ \varphi^2 = 4x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 2x \\ 4x^2 = 4x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 2x \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \leftarrow \text{δεκτή} \\ -1 \leftarrow \text{δεκτή} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \varphi=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ \varphi=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \log y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ \log y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=10^4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=10^{-2} \end{cases}.$$

▼ Όρια εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης.

- Απο την συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης $f_a(x)=a^x, \forall x\in\mathbb{R}$ με $a>0$ προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}, \forall x_0\in\mathbb{R}, \forall a>0.}$$

Επίσης, δείξαμε ότι

$a>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty \wedge \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$
$0<a<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0 \wedge \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$

- Απο την συνέχεια της συνάρτησης $\log_a$, έχουμε:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0, \forall x_0\in\mathbb{R}, \forall a\in\mathbb{R}^*_+-\{1\}}$$

Θα δείξουμε ότι:

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty.}$ 2) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$

Απόδειξη

Θέτω $f(x)=\ln x, \forall x\in(0,+\infty)$.

1) Έστω $M>0$. $f(x)<-M \Leftrightarrow \ln x<-M \Leftrightarrow \ln x<\ln e^{-M} \Leftrightarrow x<e^{-M}$ •(1).

Παίρνω $\delta=e^{-M}$ οπότε $\forall x\in(0,\delta): x<e^{-M} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)<-M$.

Άρα $\forall M>0, \exists\delta>0: \forall x\in(0,\delta): f(x)<-M \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$.

2) Έστω $M>0$. Είναι $f(x)>M \Leftrightarrow \ln x>M \Leftrightarrow \ln x>\ln e^M \Leftrightarrow x>e^M$ (2).

~~Παίρνω $\delta=e^M$ οπότε $\forall x\in(0,\delta)$:~~

Παίρνω $x_0=e^M$ οπότε $\forall x\in(x_0,+\infty): x>e^M \overset{(2)}{\Rightarrow} f(x)>M$.

Άρα $\forall M>0, \exists x_0>0: \forall x\in(x_0,+\infty): f(x)>M \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

→ Για να βρούμε τα αντίστοιχα όρια (στο $0^{(+)}$ και στο $+\infty$) της συνάρτησης $\log_a$, κάνουμε αλλαγή βάσης σύμφωνα με τον τύπο $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ οπότε το όριο θα εξαρτηθεί και άπο το πρόσημο του $\ln a$.

• <u>Παραδείγματα</u> : Να βρεθούν τα όρια:

1) $f(x)=\dfrac{\sin x+\operatorname{Arctan}(\cos x)}{\log_3 x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=(0,+\infty)$.

$\forall x\in A: |f(x)|=\left|\dfrac{\sin x+\operatorname{Arctan}(\cos x)}{\log_3 x}\right| = \dfrac{|\sin x+\operatorname{Arctan}(\cos x)|}{|\log_3 x|} \leqslant \dfrac{|\sin x|+|\operatorname{Arctan}(\cos x)|}{|\log_3 x|}$

$\leqslant \dfrac{1+\frac{\pi}{2}}{|\log_3 x|}$ (1).

$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_3 x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln 3} = \dfrac{1}{\ln 3}\cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = +\infty$ (διότι $\frac{1}{\ln 3}>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=+\infty$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} |\log_3 x| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{|\log_3 x|} = \cancel{\infty}\, 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\frac{\pi}{2}}{|\log_3 x|} = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

2) $f(x)=\log_{1/2} x - e^x \longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=(0,+\infty)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \\ \frac{1}{2}<1 \Rightarrow \ln\frac{1}{2}<0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \log_{1/2} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\ln\frac{1}{2}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-e^x)=-\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\log_{1/2} x - e^x) = -\infty$.

$\boxed{f(x)=x^a \text{ συνεχής στο } \begin{cases}(0,+\infty), & \text{αν } a<0 \\ [0,+\infty), & \text{αν } a>0\end{cases}}$, όπου $a\in\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u> : Π.Ο. $A=(0,+\infty)$. ή $A=[0,+\infty)$

▸ Θα δείξω ότι η f είναι συνεχής στο 1.

Αρκεί $\lim\limits_{x\to 1}(x^a-1)=0$. Έστω $k_0=[a] \Rightarrow k_0\leqslant a<k_0+1$ (1).

$(1)\Rightarrow \forall x\in(1,+\infty): x^{k_0}\leqslant x^a<x^{k_0+1} \Rightarrow x^{k_0}-1\leqslant x^a-1<x^{k_0+1}-1 \Rightarrow x^{k_0}-1\leqslant g(x)<x^{k_0+1}-1$ (2).

$\left.\begin{array}{l}k_0\in\mathbb{Z} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(x^{k_0}-1)=[\lim\limits_{x\to1} x]^{k_0}-1=1^{k_0}-1=0. \\ (k_0+1)\in\mathbb{Z} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(x^{k_0+1}-1)=[\lim\limits_{x\to1} x]^{k_0+1}-1=1^{k_0+1}-1=0\end{array}\right\} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to1} g(x)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(x^a-1)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1} x^a=1 \Rightarrow f$ συνεχής στο 1.

→ Σε μορφή $f(x)=\varphi(x)^{g(x)}$, χρησιμοποιώ τον τύπο $a^x=e^{x\ln a}$.
↓ Σε μορφή $f(x)=\log_{\varphi(x)} g(x)$, χρησιμοποιώ τους τύπους $\log_\beta a=\frac{\log a}{\log \beta}=\frac{\ln a}{\ln \beta}$.

3) $f(x)=[\mathrm{Arctan}x]^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases}\mathrm{Arctan}x>0\\ x\geq 0 \wedge x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0\\ x\geq 0\wedge x\geq -1\end{cases} \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow A=(0,+\infty)$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[\mathrm{Arctan}x]^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\ln(\mathrm{Arctan}x)}=e^{\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\ln(\mathrm{Arctan}x)}=$

$=e^{\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{Arctan}x)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]\cdot\ln(\lim_{x\to+\infty}\mathrm{Arctan}x)}=$

$=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)\cdot\ln\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}+1}}=$

$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{0}=1.$

4) $f(x)=(x+1)^{x^2+3x-1}\longrightarrow \lim_{x\to1} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x+1>0\Leftrightarrow x>-1\Leftrightarrow A=(-1,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)^{x^2+3x-1}=\lim_{x\to1} e^{(x^2+3x-1)\ln(x+1)}=e^{\lim_{x\to1}(x^2+3x-1)\ln(x+1)}=$

$=e^{\lim_{x\to1}(x^2+3x-1)\cdot\ln[\lim_{x\to1}(x+1)]}=e^{(1+3-1)\cdot\ln(1+1)}=e^{3\ln 2}=2^3=8.$

5) $f(x)=\log_{(x+1)}(2x^2+1)\longrightarrow\lim_{x\to2} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases}2x^2+1>0, \text{ισχύει}\\ x+1>0\\ x+1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)\Leftrightarrow A=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

Είναι $\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\log_{(x+1)}(2x^2+1)=\lim_{x\to2}\frac{\ln(2x^2+1)}{\ln(x+1)}=\frac{\lim_{x\to2}\ln(2x^2+1)}{\lim_{x\to2}\ln(x+1)}=\frac{\ln[\lim_{x\to2}(2x^2+1)]}{\ln[\lim_{x\to2}(x+1)]}=$

$=\frac{\ln(8+1)}{\ln(2+1)}=\frac{\ln 9}{\ln 3}=\log_3 9=\log_3 3^2=2.$

$\boxed{\text{Η } f(x)=x^a \text{ είναι συνεχής στο } \begin{cases}(0,+\infty), & \text{αν } a\leq 0\\ [0,+\infty), & \text{αν } a>0.\end{cases}}$

Απόδειξη

Π.Ο. $A=\begin{cases}(0,+\infty) & ,\text{αν } a\leq 0\\ [0,+\infty) & ,\text{αν } a>0.\end{cases}$

$\forall x_0\in(0,+\infty): \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} x^a=\lim\limits_{x\to x_0} e^{a\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(a\ln x)}=e^{a\ln x_0}=x_0^a=f(x_0)\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο $x_0, \forall x_0\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ συνεχής στο $(0,+\infty)$.

- Ειδικά αν $a>0$, τότε $f(0)=0^a=0$.

$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\\ a>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}(a\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^a=\lim\limits_{x\to 0}e^{a\ln x}=0=f(0)\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow f \text{ συνεχής στο } 0\\ \text{είναι και } f \text{ συνεχής στο } (0,+\infty)\end{matrix}\right\}\Rightarrow f$ συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Άρα, αν $a\leq 0\Rightarrow f$ συνεχής στο $(0,+\infty)$

αν $a>0\Rightarrow f$ συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Απροσδιόριστες μορφές στα εκθετικά-λογαριθμικά όρια.

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.}$

Απόδειξη

$\forall x\in(1,+\infty): [x]\leq x<[x]+1\Rightarrow \frac{1}{[x]+1}<\frac{1}{x}\leq\frac{1}{[x]}\Rightarrow 1+\frac{1}{[x]+1}<1+\frac{1}{x}\leq 1+\frac{1}{[x]}$ (1).

$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\forall x\in(1,+\infty): 1+\frac{1}{x}>1\\ [x]\leq x<[x]+1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]+1}\\ (1)\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]}\wedge\left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]+1}\leq\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}, \forall x\in(1,+\infty)$ (2).

$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\lim\frac{1}{n+1}}=$

$$= \frac{e}{1+0} = e \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = e \qquad (3).$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= e\cdot\left(1+\lim\frac{1}{n}\right) = e(1+0) = e \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e. \quad (4)$$

$$(2),(3),(4) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

2) $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.}$

Απόδειξη

Θέτω $x = -(y+1) \Leftrightarrow x = -y-1 \Leftrightarrow y = -x-1$, $x\to-\infty$ $\Rightarrow y\to+\infty$ οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1-1}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y+1}\right)^{-(y+1)} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)\right] = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\left(1+\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\right) = e(1+0) = e.$$

3) $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a},\ \forall a\in\mathbb{R}.}$

Απόδειξη

i) Αν $a=0$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\pm\infty}1^{x} = 1 = e^{0} = e^{a}$, ισχύει.

ii) Αν $a>0$, θέτω $g_1(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, $\forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και $g_2(x) = \frac{x}{a}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} g_2(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x/a} = e \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x/a}\right]^{a} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x/a}\right]^{a} = e^{a}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} g_2(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{a} = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} g_1(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x/a} = e \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x/a}\right]^{a} =$$

$= \left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x/a}\right]^{a} = e^{a}.$

iii) Αν $a<0$, όμοια προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}.$

Άρα $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}, \forall a\in\mathbb{R}.$

↳ Απο το παραπάνω όριο, ευκολα προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}, \forall x\in\mathbb{R}.}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι,

●₁ $\boxed{e^{x} \geq 1+x \quad , \forall x\in\mathbb{R}.}$

Απόδειξη

Έστω $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}^* : n_0 > -x \Leftrightarrow n+x>0 \Leftrightarrow 1+\frac{x}{n_0}>0$ οπότε.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 :\ n>n_0>-x \Rightarrow 1+\frac{x}{n}>0 \Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \geq 1+\frac{x}{n}\cdot n = 1+x$, άρα

$e^{x} = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \geq 1+x \Rightarrow e^{x}\geq 1+x, \forall x\in\mathbb{R}.$

●₂ $\boxed{\ln x \leq x-1 \quad , \forall x\in(0,+\infty)}$

Απόδειξη

Είναι $\forall x\in\mathbb{R}: e^{x}\geq 1+x \Rightarrow \forall x\in(0,+\infty): e^{x-1}\geq 1+x-1 = x$ $\Big\}\Rightarrow \forall x\in(0,+\infty): \ln e^{x-1}\geq \ln x$

ln γνησίως αύξουσα

$\Rightarrow \forall x\in(0,+\infty): \ln x\leq x-1.$

4) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1}$

Απόδειξη

$$e^{x}\geq 1+x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}\geq 1-x, \forall x\in(-1,1) \Rightarrow e^{x}\leq \frac{1}{1-x}, \forall x\in(-1,1) \\ e^{x}\geq 1+x, \forall x\in(-1,1) \end{cases} \Bigg\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+x\leq e^{x}\leq\frac{1}{1-x} \Rightarrow x\leq e^{x}-1\leq\frac{1}{1-x}-1 \Rightarrow x\leq e^{x}-1\leq\frac{1-1+x}{1-x} \Rightarrow x\leq e^{x}-1\leq\frac{x}{1-x}, \forall x\in(-1,1) \quad (1).$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \forall x \in (0,1):\ 1 \leq \dfrac{e^x-1}{x} \leq \dfrac{1}{1-x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \forall x \in (-1,0):\ 1 \geq \dfrac{e^x-1}{x} \geq \dfrac{1}{1-x} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-0} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

5) $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1}$

Απόδειξη

Είναι $\ln x \leq x-1,\ \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \ln\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}-1,\ \forall x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \Rightarrow -\ln x \leq \frac{1-x}{x},\ \forall x\in(0,1)\cup(1,$

$\Rightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{x},\ \forall x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \Rightarrow \frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1,\ \forall x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ (1).

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \forall x \in (0,1):\ \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\ln x}{x-1} \leq 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \forall x \in (1,+\infty):\ \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{\ln x}{x-1} \geq 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

6) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a-1}{x} = a\ ,\ \forall a\in\mathbb{R}^*}$

Απόδειξη

Θέτω $\forall x\in(-1,0)\cup(0,+\infty): f(x) = \dfrac{(1+x)^a-1}{x} = \dfrac{[e^{\ln(1+x)}]^a-1}{(1+x)-1} = \dfrac{e^{a\ln(1+x)}-1}{e^{\ln(1+x)}-1} = g_1(g_2(x))$

όπου $g_1(x) = \dfrac{e^{ax}-1}{e^x-1}$ και $g_2(x) = \ln(1+x)$.

$\lim\limits_{x\to 0} g_2(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0.$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\dfrac{ax}{e^x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\right]\cdot a\cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)\cdot a\cdot \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)} = 1\cdot a\cdot\dfrac{1}{1} = a$ (2)

$(1)\wedge(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g_1(g_2(x)) = a.$

● <u>Παραδείγματα</u> : Να βρεθούν τα όρια :

1) $f(x) = x[\ln(x+2) - \ln x] \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow A=(0,+\infty)$.

$\forall x\in A: f(x) = x[\ln(x+2) - \ln x] = x\ln\dfrac{x+2}{x} = \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x = \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = \ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x\right] = \ln e^2 = 2.$

2) $f(x) = \dfrac{3^x+4^x-2}{x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x+4^x-2}{x} = \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{3^x-1}{x} + \dfrac{4^x-1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^{x\ln3}-1}{x} + \dfrac{e^{x\ln4}-1}{x}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{e^{x\ln3}-1}{x\ln3}\cdot\ln3 + \dfrac{e^{x\ln4}-1}{x\ln4}\cdot\ln4\right] = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{x\ln3}-1}{x\ln3}\right)\cdot\ln3 + \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{x\ln4}-1}{x\ln4}\right)\cdot\ln4 =$

$= \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)\cdot\ln3 + \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)\ln4 = \ln3+\ln4 = \ln12.$

3) $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\sin x\neq0$ οπότε παίρνω $A=\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια και το εξετάζω.

$\forall x\in A: f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \dfrac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{\sin x} = e^{-x}\,\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{2x}{\sin x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\left[e^{-x}\,\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{2x}{\sin x}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to0} e^{-x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin x} = 2\lim\limits_{x\to0} e^{-x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}} = 2e^0\cdot1\cdot\dfrac{1}{1} = 2.$

4) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-e^x}{\tan x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\tan x\neq0$ οπότε παίρνω $A=\left(-\frac{\pi}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$\forall x\in A: f(x) = \dfrac{e^{2x}-e^x}{\tan x} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{x}\cdot\dfrac{x}{\tan x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\left[e^x\cdot\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{x}{\tan x}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to0} e^x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to0} e^x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}} = 1\cdot1\cdot\dfrac{1}{1} = 1.$

5) $f(x)=\dfrac{e^x-e}{x-1} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}=e\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=e\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=e\cdot 1=e.$$

6) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x>0 \Leftrightarrow A=(0,+\infty)$.

$$\forall x\in A: f(x)=\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln (x^{1/2})^2}{x}=\frac{2\ln\sqrt{x}}{x}\leqslant\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x}<\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

7) $f(x)=\ln(\sin(x-1))+\ln(\ln x)-2\ln(x-1) \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases}\sin(x-1)>0\\ \ln x>0\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\pi>x-1>0\\ x>1\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\pi+1>x>1\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1,\pi+1).$

$\Leftrightarrow A=(1,\pi+1)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[\ln(\sin(x-1))+\ln(\ln x)-2\ln(x-1)\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\ln(\sin(x-1)\cdot\ln x)-\ln(x-1)^2\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\ln\left[\frac{\sin(x-1)\cdot\ln x}{(x-1)^2}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)\cdot\ln x}{(x-1)^2}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\right]=\ln(1\cdot 1)=0.$$

Γενικά παραδείγματα

1) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\log_x 2x^3$ με $A=(2,+\infty)$.

Λύση

$$\forall x\in A: f(x)=\log_x 2x^3=\frac{\ln(2x^3)}{\ln x}=\frac{\ln 2+3\ln x}{\ln x}=\frac{\ln 2}{\ln x}+3 \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } A=(2,+\infty)$$

ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. (1).

Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1>x_2 \Rightarrow \ln x_1>\ln x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{\ln x_1}<\dfrac{1}{\ln x_2} \Rightarrow \dfrac{\ln 2}{\ln x_1}<\dfrac{\ln 2}{\ln x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\ln 2}{\ln x_1}+3<\dfrac{\ln 2}{\ln x_2}+3 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in A$ με $x_1>x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$
f συνεχής στο $(2,+\infty)$ $\Big\} \Rightarrow f(A)=(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 2} f(x))$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln 2}{\ln x}+3\right]=(\ln 2)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}+3=(\ln 2)\cdot 0+3=3$, διότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{\ln 2}{\ln x}+3\right]=\dfrac{\ln 2}{\lim\limits_{x\to 2}\ln x}+3=\dfrac{\ln 2}{\ln 2}+3=1+3=4$.

οπότε $f(A)=(3,4)$.

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x[\ln(x+2a+b)-\ln x], & x\in(1,+\infty) \\ e^{x-1}\ln(ax^2+2), & x\in(0,1]. \end{cases}$

όπου $a>0$ και $b\in[-1,+\infty)$ ~~$a,b\in(0,+\infty)$~~. Να βρεθούν οι a,b έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.

Λύση

•₁ Στο $(1,+\infty)$ f συνεχής ως γινόμενο συνεχών (πολυωνυμικής και λογαριθμικής).
Στο $(0,1)$ f συνεχής ως γινόμενο συνεχών (εκθετικής και λογαριθμικής).
Στο 1, $f(1)=e^{1-1}\ln(a\cdot 1^2+2)=e^0\ln(a+2)=\ln(a+2)$.
$\forall x\in(1,+\infty): f(x)=x[\ln(x+2a+b)-\ln x] \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\{x[\ln(x+2a+b)-\ln x]\}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^+} x\cdot\left[\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x+2a+b)-\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x\right]=1\cdot[\ln(1+2a+b)-\underbrace{\cancel{\ln 1}}_{0}]=\ln(2a+b+1)$

$\forall x\in(0,1): f(x)=e^{x-1}\ln(ax^2+2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}[e^{x-1}\ln(ax^2+2)]=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(ax^2+2)=e^{1-1}\cdot\ln(a\cdot 1^2+2)=1\cdot\ln(a+2)=\ln(a+2)$.

Άρα: f συνεχής στο $(0,+\infty) \Leftrightarrow$ f συνεχής στο $1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln(2a+b+1)=\ln(a+2) \Leftrightarrow 2a+b+1=a+2 \Leftrightarrow a+b=1$.

•₂ $\forall x\in(1,+\infty): f(x)=x[\ln(x+2a+b)-\ln x]=x\ln\left(\dfrac{x+2a+b}{x}\right)=\ln\left[\left(1+\dfrac{2a+b}{x}\right)^x\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\dfrac{2a+b}{x}\right)^x\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2a+b}{x}\right)^x\right]=\ln e^{2a+b}=2a+b$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3 \Leftrightarrow 2a+b=3$, οπότε.

$$\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } (0,+\infty) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+(a+b)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+2=1 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b)=(2,-1).$$

3) Δείξτε ότι η εξίσωση $\ln(x-1)+\frac{x}{1-x}=0$ έχει λύση στο $(3,+\infty)$.

<u>Λύση</u>

Θέτω $f(x)=\ln(x-1)+\frac{x}{1-x}$, $\forall x\in[3,+\infty)$. $\Rightarrow f$ συνεχής στο $[3,+\infty)$ (1)

(ως άθροισμα λογαριθμικής και ρητής).

$f(3)=\ln(3-1)+\frac{3}{1-3}=\ln 2-\frac{3}{2}<(2-1)-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}<0 \Rightarrow f(3)<0.$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{-x}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x-1)+\frac{x}{x-1}\right]=+\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, a\in(3,+\infty): f(a)>0.$ (3)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\Rightarrow f \text{ συνεχής στο } [3,a] \\ (2),(3)\Rightarrow f(3)\cdot f(a)<0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ισχύει το Θ. Bolzano στο } [3,a] \Rightarrow \exists\, x_0\in(3,a): f(x_0)=0$$

$\Rightarrow$ Η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x-1)+\frac{x}{1-x}=0$ έχει λύση στο $[3,a]\subseteq[3,+\infty)$.