ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

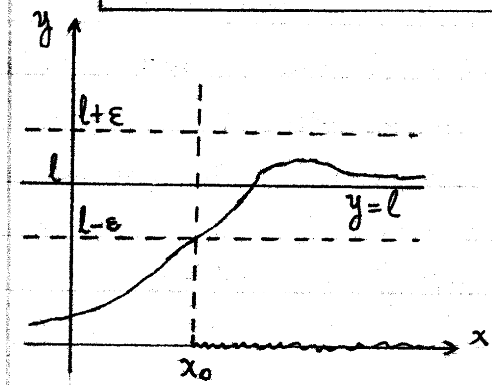
ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

▼ Όριο συνάρτησης στο άπειρο

• Βασική προϋπόθεση ώστε το όριο στο $+\infty$ ($-\infty$) να έχει έννοια είναι το πεδίο ορισμού της f να περιέχει διάστημα της μορφής $I=(a,+\infty)\subseteq A$ (ή $I=(-\infty,-a)\subseteq A$), δηλαδή το πεδίο ορισμού A να μην είναι φραγμένο άνω (ή κάτω)

• → Ορισμοί ορίου στο $+\infty$

1) $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists x_0>0:\forall x\in A,\ x>x_0:\ |f(x)-\ell|<\varepsilon}$$



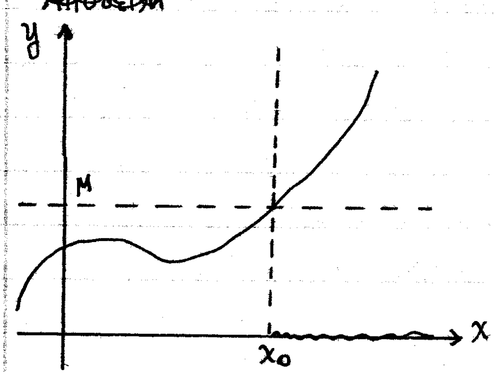
• Η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης στο $+\infty$.

• Όπως και στις ακολουθίες, έτσι και εδώ αποδεικνύεται ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell_1 \wedge \lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell_2 \Rightarrow \ell_1=\ell_2}$$

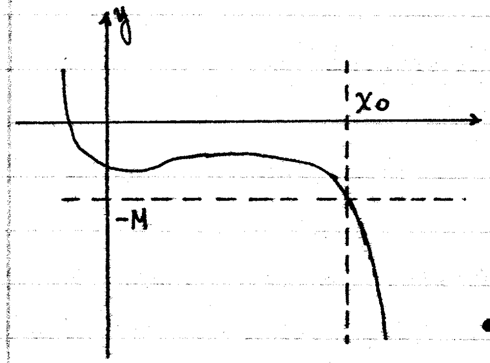
2) $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall M>0,\ \exists x_0>0:\forall x\in A,\ x>x_0:\ f(x)>M.}$$

~~Απόδειξη~~



• $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow f \text{ όχι φραγμένη άνω}}$$

3) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0\,,\ \exists\, x_0>0 : \forall x\in A,\ x>x_0 : f(x) < -M}$

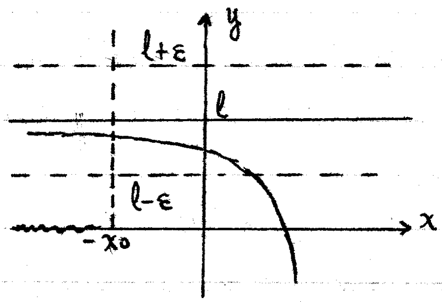


- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow f \text{ όχι φραγμένη κάτω.}}$

- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \vee \lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty \Rightarrow \forall \ell\in\mathbb{R} : \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq \ell}$

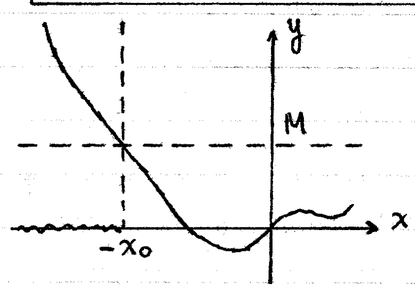
→ <u>Ορισμοί ορίου στο $-\infty$</u>

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\,,\ \exists\, x_0>0 : \forall x\in A,\ x<-x_0 : |f(x)-\ell|<\varepsilon}$



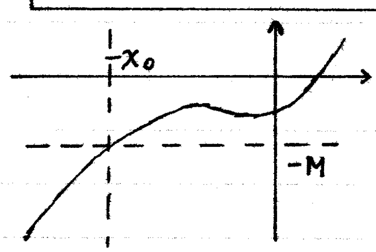
- Η ευθεία $y=\ell$, λέγεται οριζόντια ασύμπτωση της γραφικής παράστασης C_f στο $-\infty$
- Οι οριζόντιες ασύμπτωτες στα $+\infty$ και $-\infty$ δεν είναι εν' γένει ίδιες.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell_1 \wedge \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$.

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0\,,\ \exists\, x_0>0 : \forall x\in A,\ x<-x_0 : f(x)>M.}$



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ όχι φραγμένη άνω.

3) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0\,,\ \exists\, x_0>0 : \forall x\in A,\ x<-x_0 : f(x)<-M.}$



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow f$ όχι φραγμένη κάτω
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \vee \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \forall \ell\in\mathbb{R} : \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq \ell.$

↳ Επίσης, ισχύουν οι παρατηρήσεις:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\neq-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\neq+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\neq+\infty \wedge \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\neq-\infty$.

- <u>Παρατηρήσεις</u>

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ell]=0$.
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[-f(x)]=-\ell$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[-f(x)]=-\infty$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\ell]=0$.
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}[-f(x)]=-\ell$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}[-f(x)]=-\infty$.

- Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $A_1\subset A$. Η συνάρτηση $f_1: A_1\to\mathbb{R}$ με $f_1(x)=f(x), \forall x\in A_1$ ονομάζεται <u>περιορισμός της f στο A_1</u>. Αντίστοιχα, η f λέγεται <u>επέκταση της f_1 στο A</u>. Μία εξαιρετικά χρήσιμη παρατήρηση λέει ότι:

> Αν f_1 περιορισμός της f στο $(a,+\infty)\subset A$,
> τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=L$

> Αν f_1 περιορισμός της f στο $(-\infty,a)$,
> τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=L$.

Έτσι, μπορούμε (αν χρειάζεται) να περιορίζουμε τις τιμές του x σε διάστημα $I=(a,+\infty)$ ή $I=(-\infty,a)$ έτσι ώστε να μπορούμε να βρούμε το όριο. Αυτός ο περιορισμός είναι αναγκαίος όταν, π.χ. ο x βρίσκεται μέσα σε απόλυτα.

↳ <u>Βασικά όρια</u>

1) $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}: u(x)=c \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)=c}$

<u>Απόδειξη</u>

$|u(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon, \forall\varepsilon>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=c\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=c.\end{cases}$

2) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^{k}=+\infty \quad ,\forall k\in \mathbb{Z}_+^*}$

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $f(x)=x^{k}$

Π.Ο. $A=\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, I=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

Έστω $M>0$. Αρκεί $f(x)>M \Leftrightarrow x^{k}>M \Leftrightarrow \sqrt[k]{x^{k}}>\sqrt[k]{M} \Leftrightarrow |x|>\sqrt[k]{M} \overset{*}{\Leftrightarrow} x>\sqrt[k]{M}$ (1).

► Παίρνω $x_0\geqslant \sqrt[k]{M}$, οπότε $\forall x\in I, x>x_0 : x>\sqrt[k]{M} \underset{(1)}{\Rightarrow} f(x)>M$.

Άρα $\forall M>0, \exists\, x_0>0 : \forall x>x_0 : f(x)>M \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^{k}=+\infty$.

3) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k}=+\infty \quad ,\forall k\in \mathbb{N}^*}$

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $f(x)=x^{2k}$

Π.Ο. $A=\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, I=(-\infty,0)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

Έστω $M>0$: Αρκεί $f(x)>M \Leftrightarrow x^{2k}>M \Leftrightarrow \sqrt[2k]{x^{2k}}>\sqrt[2k]{M} \Leftrightarrow |x|>\sqrt[2k]{M} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x>\sqrt[2k]{M} \Leftrightarrow x<-\sqrt[2k]{M}$. (1).

► Παίρνω $x_0\geqslant \sqrt[2k]{M}$ οπότε $\forall x\in I, x<-x_0 \Rightarrow x<-\sqrt[2k]{M} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)>M$.

Άρα $\forall M>0, \exists\, x_0>0 : \forall x\in I, x<-x_0 : f(x)>M \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k}=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

4) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}=-\infty \quad ,\forall k\in \mathbb{N}^*}$

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $f(x)=x^{2k+1}$

Π.Ο. $A=\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, I=(-\infty,0)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

Έστω $M>0$. Αρκεί $f(x)<-M \Leftrightarrow x^{2k+1}<-M \Leftrightarrow -x^{2k+1}>M \Leftrightarrow \sqrt[2k+1]{-x^{2k+1}}>\sqrt[2k+1]{M}$
$\Leftrightarrow -x>\sqrt[2k+1]{M} \Leftrightarrow x<-\sqrt[2k+1]{M}$ (1).

► Παίρνω $x_0\geqslant \sqrt[2k+1]{M}$ οπότε $\forall x\in I, x<-x_0 : x<-\sqrt[2k+1]{M} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)<-M$

Άρα $\forall M>0, \exists\, x_0>0 : \forall x\in I, x<-x_0 : f(x)<-M \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

5) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{k}}=0 \quad ,\forall k\in \mathbb{N}^*}$

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $f(x)=\frac{1}{x^{k}}$

Π.Ο. $A=\mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow \exists\, I=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x^{k}}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^{k}}<\varepsilon \Leftrightarrow |x|^{k}>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ (1)

▸ Παίρνω $x_0 \geq \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}}$, οπότε $\forall x \in I, x > x_0 : x > \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in I, x > x_0 : |f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\kappa} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6) $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\kappa} = 0, \ \forall \kappa \in \mathbb{N}^*}$

Απόδειξη: Έστω $f(x) = \frac{1}{x^\kappa}$

Π.Ο. $A = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \exists I = (-\infty, 0) \subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί $|f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x^\kappa}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^\kappa} < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^\kappa > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x > \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}}$ (1).

▸ Παίρνω $x_0 \geq \frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}}$, οπότε $\forall x \in I, x < -x_0 : x < -\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon}} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in I, x < -x_0 : |f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\kappa} = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• Παραδείγματα: Δείξτε ότι

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 3x}{x} = 0$

Λύση: Π.Ο. $A = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \exists I = (0, +\infty) \subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί $|f(x)| = \left|\frac{\sin 3x}{x}\right| = \frac{|\sin 3x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$ (1)

Παίρνω $x_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ οπότε $\forall x \in I, x > x_0 : x > \frac{1}{\varepsilon} \overset{(1)}{\Rightarrow} |f(x)| < \varepsilon$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in A, x > x_0 : |f(x)| < \varepsilon \rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^2+2x+9} = 3$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2+2x+9 \neq 0$, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ (διότι $a = 1 > 0$, $\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \mathbb{R} \Rightarrow \exists I = (-\infty, -8) \subset A$ στο οποίο περιορίζω την f.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί $|f(x) - 3| = \left|\frac{3x^2+2x-1}{x^2+2x+9} - 3\right| = \left|\frac{3x^2+2x-1-3x^2-6x-27}{x^2+2x+9}\right| =$

$$=\left|\frac{-4x-28}{x^2+2x+9}\right| = \frac{|4x+28|}{|\underbrace{x^2+2x+9}_{+}|} = \frac{|4x+28|}{x^2+2x+9} \overset{x<-8}{=} \frac{-4x-28}{x^2+2x+9} < \frac{-4x}{x^2+2x+9} \leq$$

$$\leq \frac{-4x}{x^2+2x} = \frac{-x}{x+2} < \varepsilon \Leftrightarrow -x > \varepsilon(x+2) \Leftrightarrow -x > \varepsilon x + 2\varepsilon \Leftrightarrow (1+\varepsilon)x < -2\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (1).$$

Παίρνω $\underline{x_0 = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ οπότε $\underline{\forall x \in I, x < -x_0}$: $x < -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{|f(x)-3| < \varepsilon}$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in A, x < -x_0 : |f(x)-3| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^2+2x+9} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3.$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3+x-1) = -\infty.$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A = \mathbb{R}$. $\Rightarrow \exists\, I = (-\infty, 0)$ στο οποίο περιορίζω την f.

Έστω $\underline{M > 0.}$ Αρκεί $f(x) = 2x^3+x-1 \leq 2x^3+x \underset{x<0}{\leq} 2x^3 < -M \Leftrightarrow -2x^3 > M \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^3 > \frac{M}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{-x^3} > \sqrt[3]{\frac{M}{2}} \Leftrightarrow -x > \sqrt[3]{\frac{M}{2}} \Leftrightarrow x < -\sqrt[3]{\frac{M}{2}} \quad (1)$$

Παίρνω $\underline{x_0 = \sqrt[3]{\frac{M}{2}}}$ οπότε $\underline{\forall x \in I, x < -x_0}$: $x < -\sqrt[3]{\frac{M}{2}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{f(x) < -M}$

Άρα $\forall M > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in I, x < -x_0 : f(x) < -M \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3+x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$

▼ <u>Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$</u>

- <u>Βασική προϋπόθεση</u> ώστε το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ να έχει έννοια είναι να υπάρχει $I \subseteq A$ της μορφής

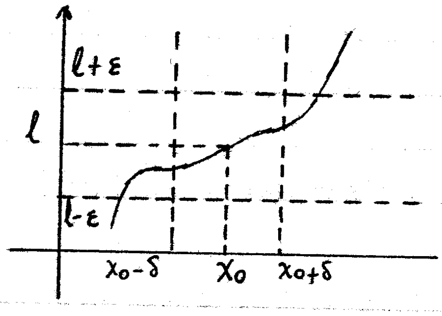
  1) $I = (a, x_0) \cup (x_0, b)$
  2) $I = (a, x_0)$ ή $I = (x_0, b)$.

  δηλαδή η συνάρτηση f να ορίζεται για γειτονικές τιμές του x_0.

<u>Ορισμός πεπερασμένου ορίου στο x_0</u>

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} : |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

• <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>



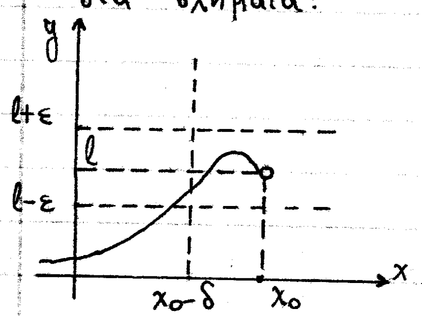
Οσοδήποτε και αν "στενεύουμε" την ταινία των ευθειών $y=\ell+\varepsilon$, $y=\ell-\varepsilon$, υπάρχει διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ τέτοιο ώστε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης με $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, εκτός ίσως απο το σημείο με $x=x_0$ να βρίσκονται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $y=\ell+\varepsilon$ και $y=\ell-\varepsilon$ και οι ευθείες $x=x_0-\delta$ και $x=x_0+\delta$.

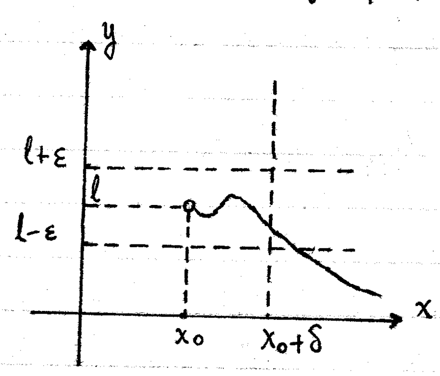
• $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_2 \Rightarrow \ell_1=\ell_2$

• $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-\ell]=0$ • $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}[-f(x)]=-\ell$.

• Αν f_1 περιορισμος της $f\in F_A$ στο $A_1\subset A$, τότε
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f_1(x)=\ell$$
όπου $A_1=A\cap[(a,x_0)\cup(x_0,b)]$ (*)

• Το όριο στο x_0 έχει έννοια ακόμη και όταν το A είναι της μορφής $A=(a,x_0)$ ή $A=(x_0,b)$ και η αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία δίνεται στα σχήματα:





▸ <u>Προσοχη</u>: Αν μία συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού της μορφής $A=(a,x_0)\cup(x_0,b)$ <u>δεν</u> μπορώ να το περιορίσω σε διάστημα $A_1=(a,x_0)$ ή $A_1=(x_0,b)$ γιατι δεν είναι της μορφής (*). Μπορώ όμως να περιοριστώ στο σύνολο $A_1=(a_1,x_0)\cup(x_0,b_1)\subseteq A$
Οταν $A=(a,x_0)$ ή $A=(x_0,b)$, τότε μόνο μπορώ να περιοριστώ σε διαστήματα $A_1=(a_1,x_0)$ ή $A_1=(x_0,b_1)$ αντίστοιχα.

• <u>Βασικά όρια</u>

1) $\boxed{u(x)=c, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} u(x)=c}$

<u>Απόδειξη</u> : Έστω <u>ε>0.</u> Αρκεί $|u(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}, \forall\varepsilon>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} u(x)=c$.

2) $\boxed{i(x)=x, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} i(x)=x_0}$

<u>Απόδειξη</u> : Έστω ε>0 . Αρκεί $|i(x)-x_0|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-x_0|<\varepsilon$. (1).
Παίρνω $\delta=\varepsilon>0$ οπότε $\forall x\in\mathbb{R}, x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\} \Rightarrow |x-x_0|<\varepsilon \overset{(1)}{\Rightarrow} |i(x)-x_0|<\varepsilon$.
Άρα $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : \forall x\in\mathbb{R}, x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\} : |i(x)-x_0|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} i(x)=x_0$.

• <u>Παραδείγματα</u> : Για να δείξω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$

•1 Παίρνω ένα τυχαίο ε>0
•2 Δείχνω ότι $|f(x)-\ell|=\cdots\leq\cdots\leq\vartheta|x-x_0|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{\vartheta}$, όπου $\vartheta>0$.
•3 Παίρνω $\delta\leq\frac{\varepsilon}{\vartheta}$ και αποδεικνύω τον ορισμό.

1) Δείξτε ότι $\lim_{x\to 2}(2x+1)=5$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$
Έστω <u>ε>0.</u> Αρκεί $|f(x)-5|=|2x+1-5|=|2x-4|=2|x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1).
Παίρνω $\delta\leq\frac{\varepsilon}{2}$ οπότε , $\underline{\forall x\in\mathbb{R}, x\in(2-\delta, 2+\delta)-\{2\}}$: $2-\delta<x<2+\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow -\delta<x-2<\delta \Rightarrow |x-2|<\delta \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{|f(x)-5|<\varepsilon}$.
Άρα $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : \forall x\in\mathbb{R}, x\in(2-\delta, 2+\delta)-\{2\} : |f(x)-5|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 2}(2x+1)=5$.

2) Δείξτε ότι $\lim_{x\to 1}(x^2+2x+3)=6$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=\mathbb{R} \Rightarrow \exists I=(0,1)\cup(1,2)$ στο οποίο περιορίζω την f.
Έστω <u>ε>0.</u> Αρκεί $|f(x)-6|=|x^2+2x+3-6|=|x^2+2x-3|=|x^2-x+3x-3|=$
$=|(x-1)(x+3)|=|x+3|\cdot|x-1| \underset{*}{<} 6|x-1|<\varepsilon$ (διότι $x<2$) $\Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{6}$ (1).

Παίρνω $\underline{\delta=\frac{\varepsilon}{6}}$, οπότε $\underline{\forall x\in I, x\in(1-\delta, 1+\delta)-\{1\}}$: $1-\delta<x<1+\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow -\delta < x-1 < \delta \Rightarrow |x-1| < \delta \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{|f(x)-6| < \varepsilon}.$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, x \in (1-\delta, 1+\delta) - \{1\} : |f(x)-6| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x^2+2x+3) = \lim_{x\to 1} f(x) = 6.$

3) Δείξτε ότι $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \Leftrightarrow A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Έστω $\underline{\varepsilon > 0}$. Αρκεί $|f(x)-4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = \left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4\right| = |x+2-4| = |x-2| < \varepsilon$ (1).

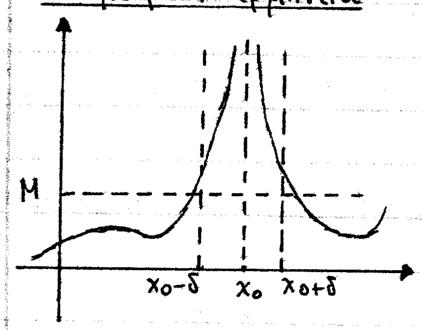
Παίρνω $\underline{\delta = \varepsilon}$ οπότε $\underline{\forall x \in A, x \in (2-\delta, 2+\delta) - \{2\}}$: $2-\delta < x < 2+\delta \Rightarrow -\delta < x-2 < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |x-2| < \delta \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{|f(x)-4| < \varepsilon}$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (2-\delta, 2+\delta) - \{2\} : |f(x)-4| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

→ <u>Ορισμοί μη πεπερασμένων ορίων στο x_0.</u>

- $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} : f(x) > M.}$

- <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>: Για οσοδήποτε μεγάλο M, υπάρχει μία ταινία των ευθειών $x = x_0 - \delta$, $x = x_0 + \delta$ τέτοια ώστε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης που βρίσκονται μέσα στην ταινία, να είναι "πάνω" από την ευθεία $y = M$.



- Η ευθεία $x = x_0$ ονομάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ όχι φραγμένη άνω στο A.

- $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} : f(x) < -M}$

- Η ευθεία $x = x_0$ ονομάζεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow f$ όχι φραγμένη κάτω στο A.

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \vee \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \forall \ell \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell.$

- $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\neq +\infty \wedge \lim_{x\to x_0} f(x)\neq -\infty$.

- $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\neq -\infty$ • $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Rightarrow \lim f(x)\neq +\infty$

- <u>Παρατηρήσεις</u>

1) $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} [-f(x)]=-\infty$.

2) Αν f_1 ο περιορισμός της $f\in F_A$ στο $A_1=A\cap[(a,x_0)\cup(x_0,b)]$

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f_1(x)=+\infty$

και

$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f_1(x)=-\infty$.

- <u>Παραδείγματα</u>

1) Δείξτε ότι $\lim_{x\to 4} \frac{-1}{(x-4)^2}=-\infty$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $(x-4)^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4 \Leftrightarrow A=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$.

Έστω $\underline{M>0}$. Αρκεί $f(x)<-M \Leftrightarrow \frac{-1}{(x-4)^2}<-M \Leftrightarrow \frac{1}{(x-4)^2}>M \Leftrightarrow (x-4)^2<\frac{1}{M} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-4|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ (1).

Παίρνω $\underline{\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}}$ οπότε $\underline{\forall x\in A,\ x\in(4-\delta,4+\delta)-\{x_0\}}$: $4-\delta<x<4+\delta \Rightarrow -\delta<x-4<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-4|<\delta \Rightarrow |x-4|<\frac{1}{\sqrt{M}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{f(x)<-M}$.

Άρα $\forall M>0, \exists\delta>0: \forall x\in A,\ x\in(4-\delta,4+\delta)-\{x_0\}: f(x)<-M \Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{-1}{(x-4)^2}=-\infty$.

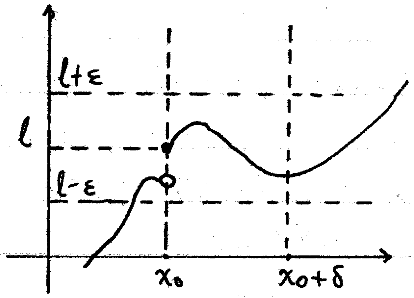
▼ <u>Πλευρικά όρια συνάρτησης</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ και $f\in F_A$.

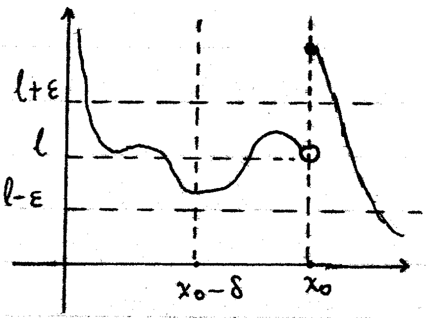
$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \exists I=(x_0,a)\subseteq A: (f_1 \text{ περιορισμός } f \text{ στο } I \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f_1(x)=L)$

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \exists I=(a,x_0)\subseteq A: (f_1 \text{ περιορισμός } f \text{ στο } I \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f_1(x)=L)$

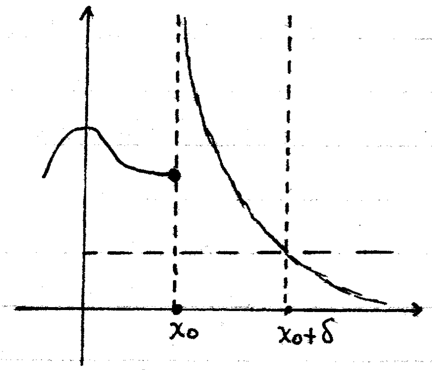
• <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>



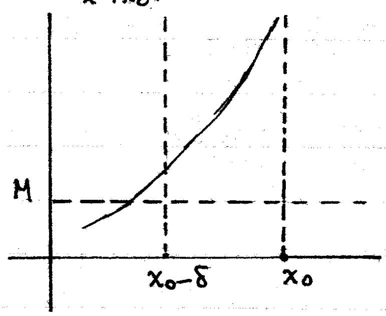
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$



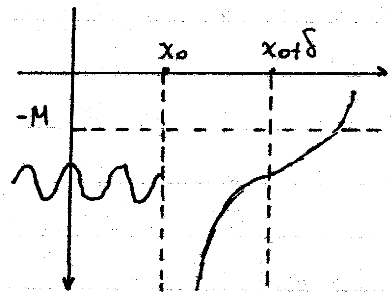
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$



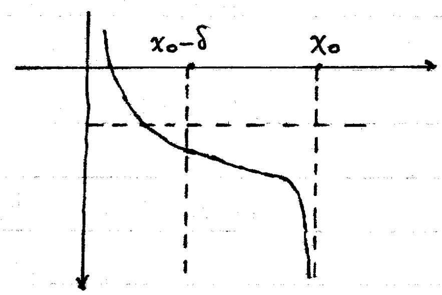
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty .$



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty .$

• ΑΡΑ: Οι επι μέρους ορισμοί των <u>πλευρικών</u> ορίων είναι οι εξής.

• $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0, x_0+\delta) : |f(x) - \ell| < \varepsilon$

• $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0-\delta, x_0) : |f(x) - \ell| < \varepsilon$

• $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0, x_0+\delta) : f(x) > M$

• $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0-\delta, x_0) : f(x) > M$

• $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0, x_0+\delta) : f(x) < -M$

• $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in A, x \in (x_0-\delta, x_0) : f(x) < -M.$

↳ <u>Αν</u> η f <u>δεν</u> ορίζεται αριστερά του x_0, δεν υπάρχει λόγος να μιλαμε για "οριο στο x_0^+" αφού ως έννοια συμπίπτει με το "οριο στο x_0". Ομοια, όταν η f δεν ορίζεται δεξιά του x_0, δεν υπάρχει λόγος να μιλάμε για "όριο στο x_0^-" αφού ως έννοια συμπίπτει με το "όριο στο x_0"

Παράδειγμα : Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x} = +\infty$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \Rightarrow \exists\, I=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

Εστω $M>0$.

Αρκεί $f(x)>M \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} > M \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x+1>Mx \Leftrightarrow Mx-x<1 \Leftrightarrow (M-1)x<1$ (1).

Αν $M<1 \Rightarrow M-1<0 \Rightarrow (M-1)x<1,\ \forall x\in\mathbb{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)>M,\ \forall x\in I$.

Αν $M>1$, $(1)\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{M-1}$ (2).

Παίρνω $\delta=\dfrac{1}{M-1}$ οπότε $\forall x\in I,\ x\in(0,\delta): x<\delta \Rightarrow x<\dfrac{1}{M-1} \overset{(2)}{\Rightarrow} f(x)>M$

Αρα $\forall M>0, \exists\delta>0: \forall x\in I,\ x\in(0,\delta): f(x)>M \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Θ1)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Εστω } f\in F_A \text{ με } A: \exists\,(a,x_0)\cup(x_0,b)\subseteq A \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L\end{array}}$$

Απόδειξη

Ευθύ: Είναι άμεση συνέπεια των ορισμών.

Αντίστροφο : i) Εστω $L\in\mathbb{R}$.

Εστω $\varepsilon>0$.

~~$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Rightarrow \exists\delta_1>0: \forall x\in(x_0, x_0+\delta_1)$.~~

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Rightarrow \exists\delta_1>0: \forall x\in A,\ x\in(x_0,x_0+\delta_1): |f(x)-L|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Rightarrow \exists\delta_2>0: \forall x\in A,\ x\in(x_0-\delta_2,x_0): |f(x)-L|<\varepsilon$.

Παίρνω $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ οπότε $\forall x\in A,\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}: x_0-\delta<x<x_0+\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0-\delta_2<x<x_0+\delta_1 \Rightarrow x\in(x_0,x_0+\delta_1) \vee x\in(x_0-\delta_2,x_0) \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

Αρα $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0: \forall x\in A,\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}: |f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

ii) Ομοια αν $L=\pm\infty$. QED.

Θ2)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Εστω } f\in F_A \text{ με } A: \exists\,(a,x_0)\cup(x_0,b)\subseteq A. \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \Rightarrow \nexists\, L\in\overline{\mathbb{R}} : \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L.\end{array}}$$

(Είναι το αντιθετοαντίστροφο του Θ1).

$\hookrightarrow$ Απο τα $Θ_1$ και $Θ_2$ προκύπτει ότι για να υπολογίσω το όριο της f στο x_0 μπορώ να βρώ τα πλευρικά όρια στα x_0^- και x_0^+ και να δείξω ότι είναι ίσα. Αύτη η μέθοδος εφαρμόζεται όταν δεν μπορώ να βρώ κατευθείαν το όριο στο x_0.

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3x & , x\in[1,+\infty) \\ -x+4 & , x\in(-\infty,1) \end{cases}$

Δείξτε ότι $\lim_{x\to 1} f(x)=3$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

$\exists\, I=(-\infty,1)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f. Θα δείξω ότι $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$.

Εστω $\varepsilon>0$.

Αρκεί $|f(x)-3|<\varepsilon \Leftrightarrow |-x+4-3|<\varepsilon \Leftrightarrow |-x+1|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\varepsilon$. (1)

Παίρνω $\delta=\varepsilon$, οπότε $\forall x\in I,\ x\in(1-\delta,1)$: $1-\delta<x<1<1+\delta \Rightarrow -\delta<x-1<\delta \Rightarrow |x-1|<\delta$

$\Rightarrow |x-1|<\varepsilon \overset{(1)}{\Rightarrow} |f(x)-3|<\varepsilon$.

Αρα $\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0: \forall x\in I,\ x\in(1-\delta,1): |f(x)-3|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=3$ (2).

Ομοια, θα δείξω ότι $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$.

$\exists\, I'=(1,+\infty)\subseteq$ στο οποίο περιορίζω την f.

Αρκει $|f(x)-3|<\varepsilon \Leftrightarrow |3x-3|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|x-1|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$ (3).

Παίρνω $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, οπότε $\forall x\in I',\ x\in(1,1+\delta)$: $1<x<1+\delta \Rightarrow 1-\delta<x<1+\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow -\delta<x-1<\delta \Rightarrow |x-1|<\delta \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \overset{(3)}{\Rightarrow} |f(x)-3|<\varepsilon$

Αρα $\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0: \forall x\in I',\ x\in(1,1+\delta): |f(x)-3|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=3$.

είναι και $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$ $\Big\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=3$.

2) Αν $f(x)=[x]$, δείξτε ότι δεν έχει όριο στο 4.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

$\exists\, I=(3,4)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$\forall x\in I: 3<x<4 \Rightarrow \forall x\in I: f(x)=[x]=3 \Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x)=3$. (βασικά όρια).

$\exists\, I'=(4,5)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$\forall x\in I: 4<x<5 \Rightarrow \forall x\in I: f(x)=4 \Rightarrow \lim_{x\to 4^+} f(x)=4$

Αρα $\lim_{x\to 4^-} f(x)\neq \lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 4} f(x)$.

▼ Γενικευμένος ορισμός του ορίου.

Εστω $σ \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. και μια συνάρτηση $f \in F_A$.

• Σε κάθε $σ$ θα αντιστοιχούμε ένα <u>σύνολο διαστημάτων</u>, το οποίο θα το συμβολίσουμε ως $I_σ$ και το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$I_σ = \begin{cases} \{(σ-\delta, σ+\delta) \mid \delta \in \mathbb{R}^*_+\} & , \text{αν } σ \in \mathbb{R} \\ \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} & , \text{αν } σ = +\infty \\ \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} & , \text{αν } σ = -\infty . \end{cases}$$

Τα στοιχεία του $I_σ$ και άρα και το ίδιο το $I_σ$ είναι <u>ανεξάρτητα</u> άπο το πεδίο ορισμου A της συνάρτησης f.

• Απο το $I_σ$ τώρα, για κάθε πιθανο $A \subseteq \mathbb{R}$ κατασκευάζουμε ένα άλλο σύνολο διαστημάτων, το οποίο θα συμβολίσουμε $N(σ, A)$, και το οποίο θα εξαρτάται <u>καί</u> άπο το A, σύμφωνα με τον ορισμό:

$$\boxed{N(σ, A) = \{ I \cap A - \{σ\} \mid I \in I_σ \}}$$

Τα στοιχεία του $N(σ, A)$ ονομάζονται <u>περιοχές του σ στο A</u>, είναι όλες τους υποσύνολα του A και έχουν την ιδιότητα να <u>μήν</u> περιέχουν το σημείο $σ$.

• Αν υπάρχει $I \in I_σ$ τετοιο ώστε $I \cap A - \{σ\} = \emptyset$, τότε για οποιοδήποτε $I_1 \subseteq I$ θα είναι $I_1 \cap A - \{σ\} = \emptyset$ και το $\emptyset$ θα είναι στοιχείο του $N(σ, A)$, δηλαδη $\emptyset \in N(σ, A)$. Οταν όμως $\emptyset \notin N(σ, A)$, τότε σε κάθε $I \in I_σ$ θα απεικονίζεται ένα $N = I \cap A - \{σ\} \neq \emptyset$. Τότε το $σ$ θα λέγεται <u>σημείο συσσώρευσης</u> ~~του σ~~ στο A.

ΑΡΑ:

$$\boxed{σ \text{ σημείο συσσώρευσης στο } A \Leftrightarrow \emptyset \notin N(σ, A)}$$

• <u>Βασική προϋπόθεση</u> για να μελετηθεί το όριο $\lim\limits_{σ} f$ μίας συνάρτησης $f \in F_A$ στο σημείο $σ \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι το $σ$ να είναι σημείο συσσώρευσης στο A.
<u>Τοπολογικά</u>, αυτό σημαίνει ότι πρέπει για οσοδήποτε "μικρά" διαστήματα $I \in I_σ$ οι αντίστοιχες ~~πε~~ περιοχές $N = I \cap A - \{σ\}$ να είναι μη κενες, με άλλα λόγια θα πρέπει να υπάρχουν στο A σημεία τα οποία να βρίσκονται όσο "κοντά" θέλουμε στο $σ$, <u>δίχως</u> να είναι απαραίτητο να ανήκει το ίδιο το $σ$ στο A.

ΟΡΙΣΜΟΣ :

> Έστω $f \in F_A$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης στο A.
> $\lim\limits_{\sigma} f = L \iff \forall I \in I_L , \exists N \in N(\sigma, A) : f(N) \subseteq I$

ή πιο αναλυτικά

$$\lim_{\sigma} f = L \iff \forall I \in I_L , \exists N \in N(\sigma, A) : \forall x \in N : f(x) \in I .$$

↳ <u>Τοπολογική ερμηνεία</u> : Για οσοδήποτε μικρό διάστημα $I \in I_L$, υπάρχει μία περιοχή του σ στο A τέτοια ώστε η συνάρτηση f να απεικονίζει όλα τα σημεία αυτής της περιοχής "μέσα" στο διάστημα I όσο στενό και αν είναι αυτό. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση f πλησιάζει το L όσο θέλουμε αρκεί να διαλέξω για το x ένα κατάλληλο σύνολο τιμών "γειτονικών" του σ.

- Ομοια, θα ορίσουμε τα <u>πλευρικά όρια</u> στα $x_0 \in \mathbb{R}$.

Θέτουμε $N(x_0^+, A) = \{ N \cap (x_0, +\infty) \mid N \in N(x_0, A) \}$

$N(x_0^-, A) = \{ N \cap (-\infty, x_0) \mid N \in N(x_0, A) \}$

όπου $N(x_0^+, A) \longrightarrow$ σύνολο των περιοχών του x_0^+ στο A

$N(x_0^-, A) \longrightarrow$ σύνολο των περιοχών του x_0^- στο A.

Επίσης x_0^+ σημείο συσσώρευσης στο $A \iff \emptyset \notin N(x_0^+, A)$

x_0^- σημείο συσσώρευσης στο $A \iff \emptyset \notin N(x_0^-, A)$.

ΟΡΙΣΜΟΙ :

> Έστω $f \in F_A$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.
>
> 1. Αν x_0^+ σημείο συσσώρευσης στο A, τότε
> $\lim\limits_{x_0^+} f = L \iff \forall I \in I_L , \exists N \in N(x_0^+, A) : f(N) \subseteq I$
>
> 2. Αν x_0^- σημείο συσσώρευσης στο A, τότε
> $\lim\limits_{x_0^-} f = L \iff \forall I \in I_L , \exists N \in N(x_0^-, A) : f(N) \subseteq I$

↳ <u>Παρατηρήσεις</u>

1. Αν f_1 ο περιορισμός της $f \in F_A$ στο $N \in N(\sigma, A)$, τότε
$$\lim_{\sigma} f = L \iff \lim_{\sigma} f_1 = L$$

2. Αν $I_1, I_2 \in I_\sigma \Rightarrow I = I_1 \cap I_2 \in I_\sigma$ και $I' = I_1 \cup I_2 \in I_\sigma$.
3. Αν $N_1, N_2 \in N(\sigma, A) \Rightarrow N = N_1 \cap N_2 \in N(\sigma, A)$ και $N' = N_1 \cup N_2 = N(\sigma, A)$.
4. Αν $A = (a, b) \Rightarrow \forall x \in [a, b]$: x σημείο συσσώρευσης του A.

▼ Γενικές ιδιότητες του ορίου

σε σημείο συσσώρευσης $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}$ του $A = \operatorname{dom} f$.

- **Κριτήρια σύγκλισης προς το 0**

Θ1) $\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\sigma} f = 0 \\ g \text{ φραγμένη στο } N \in N(\sigma, A) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(fg) = 0.}$

Απόδειξη

Αν g φραγμένη στο $N_1 \in N(\sigma, A) \Rightarrow \exists \vartheta \in \mathbb{R}^*_+ : \forall x \in N_1 : |g(x)| \leq \vartheta$ (1)

Έστω $\left.\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\vartheta} > 0 \\ \lim\limits_{\sigma} f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists N_2 \in N(\sigma, A) : \forall x \in N_2 : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{\vartheta}$ (2).

Παίρνω $N = N_1 \cap N_2 \in N(\sigma, A)$ οπότε

$\forall x \in N : \left\{\begin{array}{l} x \in N_1 \\ x \in N_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |g(x)| \leq \vartheta \\ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{\vartheta} \end{array}\right. \Rightarrow |(fg)(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{\vartheta} \cdot \vartheta = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |(fg)(x)| < \varepsilon.$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N(\sigma, A) : \forall x \in N : |(fg)(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(fg) = 0.$

Θ2) $\boxed{\left.\begin{array}{l} |g(x)| \leq |f(x)|, \forall x \in N \in N(\sigma, A) \\ \lim\limits_{\sigma} f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} g = 0.}$

Απόδειξη

Έστω $\left.\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \\ \lim\limits_{\sigma} f = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists N_1 \in N(\sigma, A) : \forall x \in N_1 : |f(x)| < \varepsilon.$

Παίρνω $N' = N_1 \cap N \in N(\sigma, A)$ οπότε $\forall x \in N', \left\{\begin{array}{l} x \in N_1 \\ x \in N \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |f(x)| < \varepsilon \\ |g(x)| \leq |f(x)| \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow |g(x)| < \varepsilon.$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in N(\sigma, A) : \forall x \in N' : |g(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} g = 0.$

- **Ιδιότητα του φραγμένου**

Θ3) $\boxed{\lim\limits_{\sigma} f = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists N \in N(\sigma, A) : f \text{ φραγμένη στο } N}$

Απόδειξη

Έστω $\left.\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{|\ell|}{2} + 1 > 0 \\ \lim\limits_{\sigma} f = \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists N \in N(\sigma, A) : \forall x \in N : |f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{|\ell|}{2}-1 < f(x)-\ell < \frac{|\ell|}{2}+1 \Rightarrow \ell-\frac{|\ell|}{2}-1 < f(x) < \ell+\frac{|\ell|}{2}+1,\ \forall x\in N \Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>f φραγμένη στο N.</u>

• <u>Όριο απολύτου της συνάρτησης</u>

Θ4)
$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{\sigma} f = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} |f(x)| = |\ell| \\ \lim\limits_{\sigma} f \in \{+\infty, -\infty\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} |f(x)| = +\infty. \end{array}}$$

<u>Απόδειξη</u>

i) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\sigma} f = \ell\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}[f(x)-\ell]=0 \\ \text{είναι και } \cancel{|f(x)-\ell| \leq} \ \big||f(x)|-|\ell|\big| \leq |f(x)-\ell|,\ \forall x\in A \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\overset{\Theta 2}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to\sigma}(|f(x)|-|\ell|)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)| = |\ell|.$

ii) $\left.\begin{array}{l} \text{Αν } \lim\limits_{\sigma} f = +\infty \\ \text{Έστω } \underline{M>0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\exists N\in N(\sigma,A)} : \underline{\forall x\in N} : f(x) > M \Rightarrow \underline{|f(x)| \geq f(x) > M}$

Άρα $\forall M>0, \exists N\in N(\sigma,A): \forall x\in N: |f(x)|>M \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)|=+\infty.$

~~Αν $\lim_\sigma(-f)$~~

Αν $\lim\limits_{\sigma} f = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(-f) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}|-f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)|=+\infty.$

• <u>Πρόσημο συνάρτησης και πρόσημο ορίου</u>

Θ5)
$$\boxed{\lim\limits_{\sigma} f = L \neq 0 \Rightarrow \exists N\in N(\sigma,A): \forall x\in N: f(x), \lim\limits_{\sigma} f \text{ ομόσημοι}}$$

<u>Απόδειξη</u>

1) $\left.\begin{array}{l} \text{Αν } L\in\mathbb{R}, \text{ έστω } \varepsilon = \frac{|L|}{2} \\ \lim\limits_{\sigma} f = L \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\exists N\in N(\sigma,A)} : \forall x\in N: |f(x)-L| < \frac{|L|}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{|L|}{2} < f(x)-L < \frac{|L|}{2} \Leftrightarrow L-\frac{|L|}{2} < f(x) < L+\frac{|L|}{2}$

i) Αν $L>0 \Rightarrow \underline{\forall x\in N},\ L-\frac{L}{2} < f(x) < L+\frac{L}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2} > 0 \Rightarrow$ <u>$f(x)$, L ομόσημοι</u>

ii) Αν $L<0 \Rightarrow \underline{\forall x\in N},\ L+\frac{L}{2} < f(x) < L-\frac{L}{2} \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0 \Rightarrow$ <u>$f(x)$, L ομόσημοι</u>

Άρα $\exists N\in N(\sigma,A): \forall x\in N: f(x), \lim\limits_{\sigma} f$ ομόσημοι.

2) Αν $\lim_{\sigma} f = +\infty \Rightarrow \underline{\exists N \in N(\sigma, A) : \forall x \in N}$: $f(x) > 1 > 0 \Rightarrow \underline{f(x), +\infty \text{ ομόσημοι}}$.

3) Αν $\lim_{\sigma} f = -\infty \Rightarrow \underline{\exists N \in N(\sigma, A) : \forall x \in N}$: $f(x) < -1 < 0 \Rightarrow \underline{f(x), -\infty \text{ ομόσημοι}}$

Παρατηρήσεις στις γενικές ιδιότητες.

1. $$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \exists N \in N(\sigma, A) : f(x) > 0, \forall x \in N \\ \lim_{\sigma} f \in \overline{\mathbb{R}}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\sigma} f \geq 0.}$$

2. $$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \exists N \in N(\sigma, A) : f(x) < 0, \forall x \in N \\ \lim_{\sigma} f \in \overline{\mathbb{R}}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\sigma} f \leq 0.}$$

~~3. Αν $\lim_{\sigma} f = \ell \neq 0 \Rightarrow$~~

~~3. Αν $\lim_{\sigma} f = \ell \neq 0 \Rightarrow \exists$~~

3. $$\boxed{\text{Αν } \lim_{\sigma} f = \ell \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \exists N \in N(\sigma, A) : \frac{1}{f} \text{ φραγμένη στο } N.}$$

Όρια και πράξεις

Θ1) Έστω $f, g \in F_A$ με $\lim_{\sigma} f, \lim_{\sigma} g \in \mathbb{R}$. Τότε

1. $\lim_{\sigma}(f+g) = \lim_{\sigma} f + \lim_{\sigma} g$
2. $\lim_{\sigma}(fg) = \lim_{\sigma} f \cdot \lim_{\sigma} g$.
3. $\lim_{\sigma}(\lambda f) = \lambda \cdot \lim_{\sigma} f, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\lim_{\sigma} g \neq 0 \Rightarrow \lim_{\sigma} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{\sigma} g}$
5. $\lim_{\sigma} g \neq 0 \Rightarrow \lim_{\sigma} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{\sigma} f}{\lim_{\sigma} g}$
6. $\exists N \in N(\sigma, A) : f(x) \geq 0, \forall x \in N \Rightarrow \lim_{x \to \sigma} \sqrt[\kappa]{f(x)} = \sqrt[\kappa]{\lim_{\sigma} f}$.

Απόδειξη

Έστω $\lim_{\sigma} f = \ell_1$ και $\lim_{\sigma} g = \ell_2$.

1) Έστω $\varepsilon>0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2}>0$.

$\lim_{\sigma} f=\ell_1 \Rightarrow \exists N_1\in N(\sigma,A): \forall x\in N_1: |f(x)-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{\sigma} g=\ell_2 \Rightarrow \exists N_2\in N(\sigma,A): \forall x\in N_2: |g(x)-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2}$

► Παίρνω $\underline{N=N_1\cap N_2\in N(\sigma,A)}$ οπότε

$\underline{\forall x\in N}: \begin{cases} x\in N_1 \\ x\in N_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f(x)-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2} \\ |g(x)-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |(f+g)(x)-(\ell_1+\ell_2)| = |(f(x)-\ell_1)+(g(x)-\ell_2)| \leq$

$\leq |f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \underline{|(f+g)(x)-(\ell_1+\ell_2)|<\varepsilon}$

Άρα $\forall \varepsilon>0, \exists N\in N(\sigma,A): \forall x\in N: |(f+g)(x)-(\ell_1+\ell_2)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{\sigma}(f+g)=\ell_1+\ell_2=\lim_{\sigma} f+\lim_{\sigma} g$

2) $\forall x\in A: (fg)(x)-\ell_1\ell_2 = f(x)g(x)-\ell_1 g(x)+\ell_1 g(x)-\ell_1\ell_2 = [f(x)-\ell_1]g(x)+\ell_1[g(x)-\ell_2]$ (1).

$\left.\begin{array}{l} \lim_{\sigma}[f(x)-\ell_1]=0, \text{ διότι } \lim_{\sigma} f=\ell_1 \\ \lim_{\sigma} g(x)=\ell_2 \Rightarrow \exists N\in N(\sigma,A): g \text{ φραγμένη στο } N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\sigma}[f(x)-\ell_1]g(x)=0.$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{\sigma} g=\ell_2 \Rightarrow \lim_{\sigma}[g(x)-\ell_2]=0 \\ u(x)=\ell_1, \forall x\in A \text{ φραγμένη στο } A \text{ (ως σταθερή)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\sigma} \ell_1[g(x)-\ell_2]=0.$

Άρα: $\lim_{x\to\sigma}((fg)(x)-\ell_1\ell_2) = \lim_{x\to\sigma}\left[[f(x)-\ell_1]g(x)+\ell_1[g(x)-\ell_2]\right] =$

$=\lim_{x\to\sigma}[f(x)-\ell_1]g(x) + \lim_{x\to\sigma}\ell_1[g(x)-\ell_2] = 0+0=0 \Rightarrow \lim_{\sigma}(fg)=\ell_1\ell_2.$

3) Άμεση συνέπεια του 2.

4) $\lim_{\sigma} g\neq 0 \Rightarrow \exists N_1\in N(\sigma,A): \forall x\in N_1: g(x)\neq 0.$

Έστω $h(x)=\frac{g(x)}{\ell_2}, \forall x\in A \Rightarrow \lim_{\sigma} h=\lim_{x\to\sigma}\frac{g(x)}{\ell_2}=\frac{1}{\ell_2}\lim_{x\to\sigma} g(x)=\frac{1}{\ell_2}\cdot\ell_2=1.$

~~Έστω~~ Αρκεί $\lim_{x\to\sigma}\frac{1}{h(x)}=1$

$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } \varepsilon>0. \\ \lim_{\sigma} h=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \exists N_2\in N(\sigma,A): \forall x\in N_2: |h(x)-1|<\frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_3\in N(\sigma,A): \forall x\in N_3: |h(x)-1|<\frac{1}{2}. \end{cases}$

Παίρνω $\underline{N=N_1\cap N_2\cap N_3\in N(\sigma,A)}$.

$\underline{\forall x\in N}: |h(x)-1|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<h(x)-1<\frac{1}{2} \Leftrightarrow h(x)>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{h(x)}<2 \Rightarrow \frac{1}{|h(x)|}<2$

είναι και $|h(x)-1|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{h(x)}-1\right| = \left|\frac{1-h(x)}{h(x)}\right| = \frac{|h(x)-1|}{|h(x)|} < \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2=\varepsilon \Rightarrow \underline{\left|\frac{1}{h(x)}-1\right|<\varepsilon}$

Αρα $\forall \varepsilon>0, \exists N\in N(\sigma,A): \forall x\in N: \left|\frac{1}{h(x)}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{h(x)}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma}\frac{l_2}{g(x)}=1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow l_2\cdot\lim\limits_{x\to\sigma}\frac{1}{g(x)}=1\\ l_2\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_\sigma\frac{1}{g}=\frac{1}{l_2}=\frac{1}{\lim\limits_\sigma g}.$$

5) $\lim\limits_\sigma g\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_\sigma\frac{1}{g}=\frac{1}{\lim\limits_\sigma g} \Rightarrow \lim\limits_\sigma\frac{f}{g}=\lim\limits_\sigma f\cdot\lim\limits_\sigma\frac{1}{g}=\frac{\lim\limits_\sigma f}{\lim\limits_\sigma g}$.

6) $\left.\begin{array}{l}\text{Εστω } l=\lim\limits_\sigma f\\ \forall x\in N\in N(\sigma,A): f(x)\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow l\geq 0.$

i) Αν $l>0$, αρκεί $\lim\limits_\sigma(\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[k]{l})=0$.

$\forall x\in N: |\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[k]{l}|=\dfrac{|f(x)-l|}{(\sqrt[k]{f(x)})^{k-1}+(\sqrt[k]{f(x)})^{k-1}\sqrt[k]{l}+\dots+(\sqrt[k]{l})^{k-1}}\leq$

$\leq\dfrac{1}{(\sqrt[k]{l})^{k-1}}\cdot|f(x)-l| \Rightarrow (1).$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_\sigma f=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to\sigma}(f(x)-l)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\sigma}\left[\frac{1}{(\sqrt[k]{l})^{k-1}}(f(x)-l)\right]=0.\\ \text{είναι και } (1)\Rightarrow|\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[k]{l}|\leq\left|\frac{1}{(\sqrt[k]{l})^{k-1}}(f(x)-l)\right|, \forall x\in N\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\sigma}[\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[k]{l}]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\sigma}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{l}=\sqrt[k]{\lim\limits_\sigma f}$.

ii) Αν $l=0$, έστω $\underline{\varepsilon>0}\Leftrightarrow\varepsilon^k>0$

$\lim\limits_\sigma f=0\Rightarrow\exists N_1\in N(\sigma,A): \forall x\in N_1: |f(x)|<\varepsilon^k$

είναι και $\forall x\in N: f(x)\geq 0$

Παίρνω $\underline{N'=N\cap N_1\in N(\sigma,A)}$ οπότε $\forall x\in N': \begin{cases}x\in N_1\\ x\in N\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|f(x)|<\varepsilon^k\\ f(x)\geq 0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\leq f(x)<\varepsilon^k\Rightarrow\underline{|\sqrt[k]{f(x)}|<\varepsilon}$

Αρα $\forall\varepsilon>0, \exists N'\in N(\sigma,A): \forall x\in N': |\sqrt[k]{f(x)}|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to\sigma}\sqrt[k]{f(x)}=0=\sqrt[k]{0}=\sqrt[k]{\lim\limits_\sigma f}$.

Θ2)

I. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_\sigma f=+\infty\\ g \text{ φραγμένη κάτω στο } N\in N(\sigma,A)\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_\sigma(f+g)=+\infty$

II. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_\sigma f=+\infty\\ g \text{ φραγμένη κάτω από θετικό στο } N\in N(\sigma,A)\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_\sigma(fg)=+\infty$

III. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_\sigma f=+\infty\\ g \text{ φραγμένη άνω από αρνητικό στο } N\in N(\sigma,A)\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_\sigma(fg)=+\infty$

Απόδειξη

I. g φραγμένη κάτω στο $N \in N(\sigma, A) \Rightarrow$ ~~$\exists \vartheta \in \mathbb{R}^*_+$~~ $\exists \varphi \in \mathbb{R} : g(x) \geq \varphi , \forall x \in N$ (1).
Έστω $M > 0$. Παίρνω ~~($\vartheta = \max\{\ldots\}$)~~ $\vartheta > \max\{0, M - \varphi\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma} f = +\infty \\ \vartheta > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \exists N_1 \in N(\sigma, A) : \forall x \in N_1 : f(x) > \vartheta > M - \varphi$$

▸ Παίρνω $N' = \underbrace{N_1 \cap N}_{\in N(\sigma,A)} \Rightarrow \forall x \in N' : \begin{cases} x \in N \\ x \in N_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) \geq \varphi \\ f(x) > M - \varphi \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) > \varphi + (M - \varphi)$

$\Rightarrow (f+g)(x) > M$

Άρα $\forall M > 0, \exists N' \in N(\sigma, A) : \forall x \in N' : (f+g)(x) > M \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(f+g) = +\infty$.

II. g κάτω φραγμένη από θετικό στο $N \in N(\sigma, A) \Rightarrow \exists \vartheta \in \mathbb{R}^*_+ : g(x) \geq \vartheta , \forall x \in N$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } M > 0 \Rightarrow \dfrac{M}{\vartheta} > 0 \\ \lim\limits_{\sigma} f = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \exists N_1 \in N(\sigma, A) : \forall x \in N_1 : f(x) > \frac{M}{\vartheta}$$

Παίρνω $N' = N_1 \cap N \in N(\sigma, A) \Rightarrow \forall x \in N' : \begin{cases} x \in N \\ x \in N_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x) \geq \vartheta \\ f(x) > \dfrac{M}{\vartheta} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (fg)(x) = f(x) g(x) > \dfrac{M}{\vartheta} \cdot \vartheta = M \Rightarrow (fg)(x) > M$.

Άρα $\forall M > 0, \exists N' \in N(\sigma, A) : \forall x \in N' : (fg)(x) > M \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(fg) = +\infty$.

III. g άνω φραγμένη με άνω φράγμα αρνητικό $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^*_- : g(x) \leq a , \forall x \in N \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -g(x) \geq -a , \forall x \in N \Rightarrow -g \text{ κάτω φραγμένη από θετικό} \\ \lim\limits_{\sigma} f = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}[f(-g)] = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(-fg) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} fg = -\infty$.

↳ Άμεση συνέπεια του Θ2 είναι το Θ3.

Θ3)

Έστω f με $\lim\limits_{\sigma} f = -\infty$
I. g φραγμένη άνω στο $N \in N(\sigma, A) \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(f+g) = -\infty$
II. g φραγμένη άνω από ~~θετικό~~ αρνητικό στο $N \in N(\sigma, A) \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(fg) = +\infty$
III. g φραγμένη κάτω από θετικό ~~$\Rightarrow \lim$~~ στο $N \in N(\sigma, A) \Rightarrow \lim\limits_{\sigma}(fg) = -\infty$

~~Θ4) $\boxed{\begin{array}{l}\forall x\in A: f(x)\geq 0 \\ \lim_{\sigma} f = +\infty\end{array} \Bigg\} \Rightarrow \lim_{x\to\sigma} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty}$~~

~~Απόδειξη.~~

~~Έστω $\left.\begin{array}{l}M>0 \Rightarrow M^k>0 \\ \lim_{\sigma} f = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, N\in N(\sigma,A): \forall x\in N: f(x)>M^k \Rightarrow \sqrt[k]{f(x)} > M$~~

~~Θ4) $\left.\begin{array}{l}\forall x\in N\in N(\sigma,A): f(x)\geq 0 \\ \lim_{\sigma} f = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sigma} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$~~

Θ4) $\boxed{\lim_{\sigma} f = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\sigma} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty}$

Απόδειξη

$\lim_{\sigma} f = +\infty \Rightarrow \exists\, N_1\in N(\sigma,A): \forall x\in N_1: f(x)>0$,

Έστω $\left.\begin{array}{l}\underline{M>0} \Rightarrow M^k>0 \\ \lim_{\sigma} f = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, N_2\in N(\sigma,A): \forall x\in N: f(x)>M^k$

Παίρνω $\underline{N = N_1\cap N_2 \in N(\sigma,A)}$ οπότε

$\underline{\forall x\in N}$: $x\in N_1 \wedge x\in N_2 \Rightarrow f(x)>0 \wedge f(x)>M^k \Rightarrow \underline{\sqrt[k]{f(x)} > M}$.

Άρα $\forall M>0, \exists\, N\in N(\sigma,A): \forall x\in N: \sqrt[k]{f(x)} > M \Rightarrow \lim_{x\to\sigma} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

Θ5) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim_{\sigma} f = 0 \\ \exists\, N\in N(\sigma,A): f(x)>0, \forall x\in N\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\sigma} \frac{1}{f} = +\infty}$

Απόδειξη

Έστω $\left.\begin{array}{l}\underline{M>0} \Rightarrow \frac{1}{M}>0 \\ \lim_{\sigma} f = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, N_1\in N(\sigma,A): \forall x\in N_1: |f(x)| < \frac{1}{M}$

Παίρνω $\underline{N' = N\cap N_1 \in N(\sigma,A)} \Rightarrow \underline{\forall x\in N'}$: $\begin{cases} x\in N \\ x\in N_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ |f(x)| < \frac{1}{M}\end{cases} \Rightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{M} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\frac{1}{f(x)} > M}$.

Άρα $\forall M>0, \exists\, N'\in N(\sigma,A): \forall x\in N': \frac{1}{f(x)} > M \Rightarrow \lim_{\sigma} \frac{1}{f} = +\infty$.

↳ Άμεση συνέπεια του Θ5 είναι το

Θ6) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\sigma} f = 0 \\ \exists N \in N(\sigma, A) : f(x) < 0 , \forall x \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} \dfrac{1}{f} = -\infty$

▼ Βασικά όρια

① $\left.\begin{array}{l} \text{Αν } P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ \text{όπου } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*, x_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$

Απόδειξη

$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < k \leq n : \lim\limits_{x \to x_0} (a_k x^k) = a_k \lim\limits_{x \to x_0} x^k = a_k \left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)^k = a_k x^k$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to x_0} a_n x^n + \lim_{x \to x_0} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \to x_0} a_1 x + a_0 =$$
$$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0).$$

② $\left.\begin{array}{l} \text{Αν } P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ \text{όπου } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

Απόδειξη

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to +\infty} \left[a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x^n}\right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \cdot (1 + 0 + \cdots + 0 + 0) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n.$$

Ομοια, $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$.

③ $\left.\begin{array}{l} \text{Αν } \quad Q(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \\ \text{οπου } a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, b_k \neq 0, n, k \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} Q(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_k x^k}$

Απόδειξη

Π.Ο. $A = \mathbb{R} - \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k\}$ όπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ οι ρίζες του παρονομαστή.
Παίρνω $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k\}$ και $I = (\rho, +\infty) \subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)}{b_k x^k\left(1 + \frac{b_{k-1}}{b_k}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_1}{b_k}\frac{1}{x^{k-1}} + \frac{b_0}{b_k}\frac{1}{x^k}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k} \cdot \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{k-1}}{b_k}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_1}{b_k}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{k-1}} + \frac{b_0}{b_k}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n}{b_k x^k} \cdot \frac{1+0+\cdots+0+0}{1+0+\cdots+0+0} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n}{b_k x^k}.$$

Ομοια, $\lim_{x\to-\infty} Q(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n}{b_k x^k}$.

• <u>Παραδείγματα</u> : Να βρεθουν τα όρια των

1) $f(x) = \dfrac{x^3+3x+\sqrt{x^2-4}}{x+1} \longrightarrow \lim_{x\to 5} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \\ x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

x	-2		2	
x^2-4	$+$	$-$		$+$

$\Leftrightarrow A = (-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \Rightarrow I = (2,5)\cup(5,+\infty) \subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\frac{x^3+3x+\sqrt{x^2-4}}{x+1} = \frac{\lim_{x\to5}(x^3+3x) + \sqrt{\lim_{x\to5}(x^2-4)}}{\lim_{x\to5}(x+1)} = \frac{125+15+\sqrt{25-4}}{5+1} =$$

$$= \frac{140+\sqrt{21}}{6}.$$

2) $f(x) = (x+1)^2 + 2x(x-1)(x^2+x+1) \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

<u>Λύση</u>

$\forall x\in\mathbb{R}: f(x) = (x+1)^2 + 2x(x-1)(x^2+x+1) = x^2+2x+1+2x(x^3-1) = x^2+2x+1+2x^4-2x =$
$= 2x^4+x^2+1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^4+x^2+1) = \lim_{x\to+\infty} 2x^4 = +\infty$.

3) $f(x) = x(2x^2+x-1)+2 \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)$

<u>Λύση</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[x(2x^2+x-1)+2] = \lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-x+2) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$$

4) $f(x) = \dfrac{2x^2-x}{x^3+3x^2+2x+4} \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

<u>Λύση</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x}{x^3+3x^2+2x+4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^3} = 2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 2\cdot 0 = 0.$$

5) $f(x) = \dfrac{2x(3x^2-2)(x+4)}{x^2(x+1)(x-2)} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$

Λύση

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x(3x^3+12x^2-2x-8)}{x^2(x^2-x-2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^4+24x^3-4x^2-16x}{x^4-x^3-2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^4}{x^4} = 6.$$

6) $f(x) = \dfrac{-2x^3+x+1}{x^2+1.} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x).$

Λύση

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty.$$

7) $f(x) = \dfrac{x\cdot\cos x}{x^2+x+1} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2+x+1 \neq 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0 \\ g(x) = \cos x \text{ φραγμένη} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+x+1}.$$

8) $f(x) = 2-\cos x + x^2 \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x).$

Λύση

Θέτω $g(x) = x^2+2$ και $h(x) = -\cos x.$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2+2) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty. \\ h(x) = -\cos x \text{ φραγμένη} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2-\cos x+x^2) = +\infty.$$

9) $f(x) = x\sin^2 x - 2x \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x).$

Λύση

Είναι $f(x) = x\sin^2 x - 2x = x(\sin^2 x - 2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Θέτω $g(x) = x$, $h(x) = \sin^2 x - 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty. \\ \forall x\in\mathbb{R}: \sin^2 x - 2 \leq 1-2 = -1 \Rightarrow h \text{ άνω φραγμένη από το } -1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x(\sin^2 x - 2) = -\infty$$

▼Απροσδιόριστες μορφές στο άπειρο

① Μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ → Παρουσιάζεται σε συναρτήσεις του τύπου
$f(x)=\frac{\varphi(x)}{g(x)}$, $f(x)=\sqrt[\kappa]{\frac{\varphi(x)}{g(x)}}$, $f(x)=\frac{\sqrt[\kappa]{\varphi(x)}}{g(x)}$, $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt[\kappa]{g(x)}}$

όπου $\varphi(x), g(x)$ πολυώνυμα.

Μέθοδος: Βγάζω κοινό παράγοντα από αριθμητή και παρονομαστή την μεγαλύτερη δύναμη του x και μετά εφαρμόζω τις ιδιότητες των ορίων.

- Ειδικά στην 1η περίπτωση, η απροσδιοριστία αίρεται με το όριο ρητής συνάρτησης.

Παραδείγματα

1) $f(x)=\frac{\sqrt{9x^2-2x+5}}{x+4} \longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} 9x^2-2x+5\geq 0, \text{ ισχύει } \forall x\in\mathbb{R} \text{ διότι } \Delta<0 \\ x+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow A=(-\infty,-4)\cup(-4,+\infty)$.

$\exists\, I=(-\infty,-4)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$\forall x\in I: f(x)=\frac{\sqrt{9x^2-2x+5}}{x+4}=\frac{|x|\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x(1+\frac{4}{x})}=\frac{-x\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x(1+\frac{4}{x})}=$

$=\frac{-\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}} \to \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{9-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{-\sqrt{9-2\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+5\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{1+4\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}=$

$=\frac{-\sqrt{9-2\cdot 0+5\cdot 0}}{1+4\cdot 0}=-3$.

2) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $4-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-2,2) \Leftrightarrow A=(-2,2)$

x		-2		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Αρα, το όριο δεν έχει έννοια διότι το $+\infty$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A.

3) $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\frac{x-2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty) \Leftrightarrow A = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$.

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$\exists I = [2, +\infty) \subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.
και στο οποίο $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} = 1.$$

Σε συνάρτησης της μορφής $f(x) = \sqrt[k]{\varphi(x)}$

- Αν το υπόρριζο έχει πεπερασμένο όριο, κάνω ιδιότητες.
- Αν $\lim_{6} \varphi = +\infty \Rightarrow \lim_{6} f = +\infty$.
- Αν $\lim_{6} \varphi = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{6} f$

4) $f(x) = \sqrt{16x^2 + x + 5} - 4x \longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x)$. $\longrightarrow$ Μορφή $\infty + \infty$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $16x^2 + x + 5 \geq 0$, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ (διότι $\Delta < 0$). $\Leftrightarrow A = \mathbb{R}$. στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\lim_{x \to -\infty} (16x^2 + x + 5) = \lim_{x \to -\infty} 16x^2 = 16 \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \sqrt{16x^2 + x + 5} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-4x) = -4 \lim_{x \to -\infty} x = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{16x^2 + x + 5} - 4x\right) = +\infty.$$

(2) Μορφή $\infty - \infty$: Παρουσιάζεται σε συναρτήσεις του τύπου:

1. $f(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$ όπου Q_1, Q_2 ρητές συναρτήσεις.
2. $f(x) = \sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{g(x)}$, $f(x) = \sqrt{\varphi(x)} \pm g(x)$ } μερικές φορές είναι $\infty + \infty$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.
3. $f(x) = \sqrt[k]{\varphi(x)} - \sqrt[k]{g(x)}$

Μέθοδος:
- Στην 1η περίπτωση κάνω πράξεις και φτάνω σε ρητή συνάρτηση
- Στην 2η περίπτωση πολλ/ζω και διαιρώ με την συζυγή παράσταση
- Στην 3η περίπτωση πολλ/ζω και διαιρώ με το αξιοσημείωτο πηλίκο.

• Παραδείγματα

1) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} - \frac{2x^2}{x-1} \longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x^2+1\neq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty) \Rightarrow \exists\, I=(1,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\forall x\in I:\ f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{2x^2}{x-1}=\frac{x^3(x-1)-2x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{x^4-x^3-2x^4-2x^2}{x^3-x^2+x-1}=$$

$$=\frac{-x^4-x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4-x^3-2x^2}{x^3-x^2+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty.$$

2) $f(x)=\sqrt{9x^2+x+1}-3x \longrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=;$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $9x^2+x+1\neq 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ (διότι $\Delta<0, \alpha>0$) $\Leftrightarrow A=\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, I=(0,+\infty)\subset A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$$\forall x\in I:\ f(x)=\sqrt{9x^2+x+1}-3x=\frac{(\sqrt{9x^2+x+1}-3x)(\sqrt{9x^2+x+1}+3x)}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}=\frac{(9x^2+x+1)-9x^2}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}=$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x}=\frac{x+1}{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x}=\frac{x+1}{x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left[\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3\right]}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+3}=\frac{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}+3}=$$

$$=\frac{1+0}{\sqrt{9+0+0}+3}=\frac{1}{6}$$

3) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+\sqrt{x}\geq 0 \\ x-\sqrt{x}\geq 0 \end{cases}$ ($x\geq 0$, $x+\sqrt{x}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$) $\Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x-\sqrt{x}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$. Άρα $A=[1,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\forall x\in A:\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x+\sqrt{x}})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=$$

$$=\frac{(x+\sqrt{x})-(x-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}\rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{2}{\sqrt{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = 1$$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \longrightarrow$ Μορφή $\dfrac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$!! (ΠΡΟΣΟΧΗ).

- Σε τέτοιες περιπτώσεις, πολ/ζω αριθμητή και παρονομαστή με τις συζυγείς παραστάσεις (ή τα αξιοσημείωτα πηλίκα) οπότε καταλήγω σε μορφή $\frac{\infty}{\infty}$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x^2+1\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0 \Leftrightarrow A=[0,+\infty) \Rightarrow \exists\, I=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$$\forall x\in I: f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})} =$$

$$= \frac{[(x^2+1)-x^2](\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{[x-(x+1)](\sqrt{x^2+1}+x)} = -\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x}\,\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}+1} = 0\cdot\frac{1+\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1} = 0\cdot 1 = 0.$$

Απροσδιόριστες μορφές όταν $x\to x_0$

① Μορφή $\frac{0}{0}$ ⟶ Αυτό συμβαίνει όταν $f(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ και το x_0 είναι ρίζα αριθμητή και παρονομαστή (Δηλαδή, όταν $P_1(x_0)=P_2(x_0)=0$).

Μέθοδος: Κάνω άρση απροσδιοριστίας παραγοντοποιώντας τα $P_1(x), P_2(x)$ και απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα. $x-x_0$. Στην συνέχεια, βρίσκω το όριο της νέας συνάρτησης.

Παραδείγματα

1) $f(x) = \dfrac{x^3+2x-3}{x-1} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \Leftrightarrow A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια

1 $\forall x \in A: f(x) = \dfrac{x^3+2x-3}{x-1} = \dfrac{x^3-x+3x-3}{x-1} = \dfrac{x(x^2-1)+3(x-1)}{x-1} = \dfrac{x(x-1)(x+1)+3(x-1)}{x-1} =$

$= \dfrac{(x-1)[x(x+1)+3]}{x-1} = x^2+x+3 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2+x+3) = 1+1+3 = 5.$

2) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1} \longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $|x|-1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow A = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$

$\exists I = (\frac{1}{2},1)\cup(1,\frac{3}{2})$ στο οποίο περιορίζω την f.

$\forall x \in I: |x| = x \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = x-1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x-1) = 1-1 = 0.$

Όταν έχω απόλυτα: Πλευρικά όρια παίρνω μόνο όταν ο x τείνει στην ρίζα ενός απολύτου. Όταν δεν συμβαίνει αυτό, περιορίζω το Π.Ο. σε μία περιοχή του x_0 τέτοια ώστε να φεύγουν τα απόλυτα.

3) $f(x) = \dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|} \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2-2|x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2-2|x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x|-2) \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 0 \vee |x| \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq 0 \vee x \neq 2 \vee x \neq -2 \Leftrightarrow A = (-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty).$

► Το 0 είναι ρίζα του απολύτου.

Παίρνω πλευρικά όρια.

$\forall x \in (0,1) \subseteq A: f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-2x} = \dfrac{x(x+2)}{x(x-2)} = \dfrac{x+2}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{0+2}{0-2} = -1.$

$\forall x \in (-1,0) \subseteq A: f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2+2x} = \dfrac{x(x-2)}{x(x+2)} = \dfrac{x-2}{x+2} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{0-2}{0+2} = -1$

Άρα: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1.$

② Μορφή $\frac{0}{0}$ όπου ο αριθμητής ή ο παρονομαστής έχει διαφορά ριζικών.

Μεθοδος: Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με συζυγή παράσταση (ή αξιοσημείωτο πηλίκο) οπότε, ύστερα από τις πράξεις, γίνεται άρση απροσδιοριστίας.

• <u>Παραδείγματα</u>

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow A=(1,5)\cup(5,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\forall x\in A: f(x)=\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{(x-1)-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}\Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 5}(x-1)}+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x^2+1\geq 0 \\ x^2+16\geq 0 \\ \sqrt{x^2+16}-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+16\neq 16 \Leftrightarrow x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \Rightarrow$

~~$\Leftrightarrow \exists I=(0,5)\cup(5,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια~~

$$\forall x\in A: f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}=$$

$$=\frac{[(x^2+1)-1](\sqrt{x^2+16}+4)}{[(x^2+16)-16](\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+16)}+4}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}+1}=\frac{\sqrt{0+16}+4}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{4+4}{1+1}=4.$$

▼ <u>Άλλες αξιοσημείωτες περιπτώσεις</u>

① <u>Συναρτήσεις πολλαπλού τύπου</u> → Εαν με κατάλληλο διάστημα μπορώ να περιορίσω την συνάρτηση έτσι ώστε να γίνει απλού τύπου και το όριο να έχει έννοια στο διάστημα αυτό, τότε εξετάζω το όριο στο διάστημα αυτό. Αν αυτό δεν μπορεί να γίνει (συνήθως στα <u>συνοριακά σημεία</u>), τότε παίρνω πλευρικά όρια

Παραδείγματα

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-9}{x-5}, & x\in(-\infty,1]\\ \sqrt{x^2+x+2}, & x\in(1,+\infty).\end{cases} \longrightarrow \lim_{x\to1} f(x),\ \lim_{x\to2} f(x).$

Λύση

Π.Ο. $A=(-\infty,1]\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}$.

i) Βρίσκω πλευρικά όρια

$\forall x\in(-\infty,1): f(x)=\dfrac{x-9}{x-5} \to \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\dfrac{x-9}{x-5}=\dfrac{1-9}{1-5}=\dfrac{-8}{-4}=2$

$\forall x\in(1,+\infty): f(x)=\sqrt{x^2+x+2} \Rightarrow \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{\lim_{x\to1^+}(x^2+x+2)}=$
$=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2.$

Άρα: $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=2 \to \lim_{x\to1} f(x)=2.$

ii) $\exists I=(1,2)\cup(2,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$\forall x\in I: f(x)=\sqrt{x^2+x+2} \to \lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{\lim_{x\to2}(x^2+x+2)}=\sqrt{4+2+2}=$
$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)\\ 5, & x=3.\end{cases}$

Λύση

Π.Ο. $A=\mathbb{R} \to \exists I=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$\forall x\in I: f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\dfrac{x^2-2x-3x+6}{x-3}=\dfrac{x(x-2)-3(x-2)}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x-2)}{x-3}=x-2 \to$

$\to \lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}(x-2)=3-2=1.$

② **Μορφή $\frac{k}{0}$** $\longleftrightarrow$ Προσδιορίζεται με τα θεωρήματα

Θ1) $\left.\begin{array}{l}\lim_{6} f=0\\ f(x)>0,\ \forall x\in N\in N(6,A)\end{array}\right\} \to \lim_{6}\dfrac{1}{f}=+\infty \longrightarrow \dfrac{1}{0^+}=+\infty$

Θ2) $\left.\begin{array}{l}\lim_{6} f=0\\ f(x)<0,\ \forall x\in N\in N(6,A)\end{array}\right\} \to \lim_{6}\dfrac{1}{f}=-\infty. \longrightarrow \dfrac{1}{0^-}=-\infty.$

σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των ορίων.

• **Παραδείγματα**

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x\neq 0 \Leftrightarrow A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty) \Rightarrow \exists I=(0,+\infty)$ στο οποίο περιορίζω την f.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in I: x>0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty. \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=0-1=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x}=-\infty.$$

2) $f(x)=\dfrac{e}{x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x).$

Λύση

Π.Ο. $A=\mathbb{R}^*$. Βρίσκω τα πλευρικά όρια

$\exists I_1=(-\infty,0)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in I_1: x<0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} x=-0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e}{x}=-\infty$$

$\exists I_2=(0,+\infty)\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in I_2: x>0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e}{x}=+\infty.$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x).$

3) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2} \longrightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $(x+1)^2\neq 0 \Leftrightarrow x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \Leftrightarrow A=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in A: (x+1)^2>0. \\ \lim\limits_{x\to -1}(x+1)^2=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+2x+1)=1-2+1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=+\infty.$$

▼ Όρια και διάταξη

Θ1)

> Εαν $\forall x\in N\in N(\sigma,A): f(x)\leq g(x)$ και
> - •1 $\lim\limits_{\sigma} f, \lim\limits_{\sigma} g\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} f\leq \lim\limits_{\sigma} g$
> - •2 $\lim\limits_{\sigma} f=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} g=+\infty.$
> - •3 $\lim\limits_{\sigma} g=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{\sigma} f=-\infty.$

Απόδειξη

1) $\lim_\sigma f, \lim_\sigma g \in \mathbb{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim_\sigma (f-g) \in \mathbb{R}$.
$f(x) \leq g(x), \forall x \in N \in N(\sigma, A) \Rightarrow (f-g)(x) = f(x) - g(x) \leq 0, \forall x \in N$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim_\sigma (f-g) \leq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \lim_\sigma f - \lim_\sigma g \leq 0 \Rightarrow \lim_\sigma f \leq \lim_\sigma g$.

2) $\lim_\sigma f = +\infty$
Έστω $M>0$ $\Bigg\} \Rightarrow \exists N_1 \in N(\sigma, A): \forall x \in N_1: f(x) > M$.

Παίρνω $N' = N \cap N_1 \in N(\sigma, A)$, οπότε $\forall x \in N': \begin{cases} x \in N \\ x \in N_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) > M \end{cases} \Rightarrow g(x) > M$

Άρα $\forall M>0, \exists N' \in N(\sigma, A): \forall x \in N': g(x) > M \Rightarrow \lim_\sigma g = +\infty$.
3) Όμοια με το 2.

Θ2) Θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \leq t(x) \leq g(x), \forall x \in N \in N(\sigma, A) \\ \lim_\sigma f = \lim_\sigma g = \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_\sigma t = \ell}$$

Απόδειξη

$\forall x \in N \in N(\sigma, A): f(x) \leq t(x) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq t(x) - f(x) \leq g(x) - f(x) \Rightarrow |(t-f)(x)| \leq |(g-f)(x)|$
$\lim_\sigma (g-f) = \lim_\sigma g - \lim_\sigma f = \ell - \ell = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_\sigma (t-f) = 0 \Rightarrow \lim_\sigma t = \lim_\sigma [f + (t-f)] = \lim_\sigma f + \lim_\sigma (t-f) = \ell + 0 = \ell$.

Παραδείγματα

1) $f(x) = 2x + \sin x \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση

$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = 2x + \sin x > 2x - 1$.
$\lim_{x\to+\infty} (2x-1) = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

→ Όρια συναρτήσεων που περιέχουν $[x]$

• Για να υπολογίσω το όριο μιας τέτοιας συνάρτησης στο $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}$, χρησιμοποιώ την ανισότητα $[x] \leq x < [x]+1$ ή την $x-1 < [x] \leq x$ σε συνδυασμό με το θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων. Όταν χρησιμοποιώ την πρώτη ανισότητα, μπορώ να περιορίσω τις f, g στο $\mathbb{N}^*$ (όταν $\sigma = +\infty$) και να υπολογίσω το όριο τους με τις μεθόδους των ακολουθιών.

Παραδείγματα

1) $f(x)=\sqrt[[x]]{x}$, $\forall x\in(1,+\infty) \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση

$x\in(1,+\infty) \Rightarrow x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow [x]\geq x-1>0$, $[x]\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow [x]\in\mathbb{N}^*$

$\forall x\in(1,+\infty): [x]\leq x<[x]+1 \Rightarrow \sqrt[[x]]{[x]} \leq \sqrt[[x]]{x} < \sqrt[[x]]{[x]+1}$

είναι και $[x]\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{N}^* \to$ θέτω $n=[x]$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[[x]]{x} \leq \sqrt[n]{n+1}$. (1) , $\forall x\in\mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[[x]]{[x]} = \lim\sqrt[n]{n} = 1$ (2)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[[x]]{[x]+1} = \lim\sqrt[n]{n+1} = \lim\sqrt[n]{n(1+\frac{1}{n})} = \lim\sqrt[n]{n}\cdot\lim\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = 1\cdot1=1$ (3).

$(1),(2),(3) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[[x]]{x} = 1$.

$\hookrightarrow$ Κάτα την επίλυση της άσκησης χρησιμοποιούμε το πόρισμα

- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f([x]) = \lim f(n)}$

το οποίο θα αποδειχθεί αργότερα.

2) $f(x) = x\cdot\left[\frac{1}{x}\right] \longrightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x\neq0 \Leftrightarrow A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

i) Παίρνω πλευρικά όρια.

$\exists I_1=(-\infty,0)$ στο οποίο έχει έννοια το $x\to0^-$

$\forall x\in I_1: \begin{cases}\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}\\ x<0\end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{1}{x}-1\right) > x\left[\frac{1}{x}\right] \geq x\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow 1-x>f(x)\geq1$.

$\lim\limits_{x\to0^-}(1-x)=1-0=1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=1$. (1).

$\exists I_2=(0,+\infty)$ στο οποίο έχει έννοια το $x\to0^+$.

$\forall x\in I_2: \begin{cases}\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}\\ x>0\end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{1}{x}-1\right) < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq x\frac{1}{x} \Rightarrow 1-x<f(x)\leq1$

$\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1-0=1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$.

Άρα $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

ii) $\exists\, I = (2, +\infty)$ στο οποίο περιορίζω την f.
$\forall x \in I : x > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0 \Rightarrow f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

▼ <u>Συναρτήσεις που δεν συγκλίνουν</u> $\bullet\!\!\to$ Έχουν όριο στο $\pm\infty$
ή δεν έχουν όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$
ή το όριο δεν έχει έννοια.

• <u>Μέθοδος</u>

1) Αν θέλω να δείξω ότι η f δεν έχει όριο <u>στο $\mathbb{R}$</u>, χρησιμοποιώ το παρακάτω <u>κριτήριο μη σύγκλισης</u>.

Θ. $\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 : \forall N \in N(\sigma, A) : \exists\, x_1, x_2 \in N : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \Rightarrow \lim_{\sigma} f \notin \mathbb{R}.}$

<u>Απόδειξη</u>

Θα δείξω το αντιθετοαντίστροφο: ~~$\forall \varepsilon>0, \exists N \in N(\sigma,A): \forall x_1, x_2 \in N$~~
$\exists\, \ell \in \mathbb{R} : \lim_{\sigma} f = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N(\sigma, A) : \forall x_1, x_2 \in N : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Έστω $\left.\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0. \\ \lim_{\sigma} f = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\exists N \in N(\sigma, A)} : \underline{\forall x_1, x_2 \in N} : \begin{cases} |f(x_1) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x_2) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - \ell) - (f(x_2) - \ell)| \leq |f(x_1) - \ell| + |f(x_2) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon}$.

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N(\sigma, A) : \forall x_1, x_2 \in N : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ισχύει.

Άρα αντιθετοαντίστροφα ισχύει ότι
$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall N \in N(\sigma, A) : \exists\, x_1, x_2 \in N : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \Rightarrow \nexists\, \ell \in \mathbb{R} : \lim_{\sigma} f = \ell \Rightarrow \lim_{\sigma} f \notin \mathbb{R}$.

2) Αν θέλω να δείξω ότι η f δεν έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$, δείχνω ότι η f είναι φραγμένη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Ειδικά, για να δείξω ότι η f δεν έχει όριο το $+\infty$, δείχνω ότι η f είναι φραγμένη άνω ενώ για το $-\infty$, δείχνω ότι η f είναι φραγμένη κάτω.

• Για να δείξω ότι $\nexists \lim_{\sigma} f$

1) Δείχνω από τα προηγούμενα <u>και</u> το 1 <u>και</u> το 2.

2) Αν $\sigma \in \mathbb{R}$, δείχνω ότι $\lim_{\sigma^+} f \neq \lim_{\sigma^-} f$.

3) Δείχνω ότι οι περιορισμοί f_1, f_2 του f σε δύο περιοχές του σ έχουν

$\lim\limits_{6} f_1 \neq \lim\limits_{6} f_2$, κάνοντας την υπόθεση ότι $\lim\limits_{6} f = L \in \overline{\mathbb{R}}$ (απαγωγή σε άτοπο).

4) Δείχνω ότι το όριο δεν έχει έννοια.

• <u>Παραδείγματα</u> Δ

1) Δείξτε ότι αν $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x \neq 0 \Leftrightarrow A = (-\infty, 0)\cup(0,+\infty)$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$\forall x\in A: -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \forall x\in A: -1\leq f(x)\leq 1 \Rightarrow f$ φραγμένη στο $A \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \notin \{-\infty, +\infty\}$.

Θα δείξω ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \notin \mathbb{R}$.

~~Έστω $N = (-a, a)$ μια περιοχή του $N(0,A)$, $a\in\mathbb{R}^*_+$.~~

Έστω $N = (-a, 0)\cup(0,+a) \in N(0,A)$ οπου $a\in\mathbb{R}^*_+$.

Παίρνω $x_1 = \frac{1}{2\kappa\pi} \in N \Leftrightarrow -a < \frac{1}{2\kappa\pi} < a \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2\kappa\pi}\right| < a \Leftrightarrow |2\kappa\pi| > \frac{1}{a} \Leftrightarrow |\kappa| > \frac{1}{2\pi a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa > \frac{1}{2\pi a}$ (διοτι $\kappa\in\mathbb{N}^*$). Αρα $\exists \kappa\in\mathbb{N}^*$ (π.χ. $\kappa = \left[\frac{1}{2\pi a}\right]+1$) $: \kappa > \frac{1}{2\pi a} \Rightarrow x_1 \in N$.

Παίρνω $x_2 = \frac{1}{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}} \in N$, για $\kappa = \left[\frac{1}{2\pi a}\right]+1$, διότι $\left.\begin{array}{l} 0 < x_2 < x_1 \\ x_1\in A \Rightarrow -a < x_1 < a\end{array}\right\} \Rightarrow x_2 \in N$.

Αρα $\exists x_1 = \frac{1}{2\kappa\pi}$, $x_2 = \frac{1}{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}} \in N$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|f\left(\frac{1}{2\kappa\pi}\right) - f\left(\frac{1}{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right| = \left|\sin 2\kappa\pi - \sin\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2}\right| = |0-1| = 1 \geq 1.$$

Αρα $\exists \varepsilon > 0$ (π.χ. ο $\varepsilon = 1$)$: \forall N \in N(0,A), \exists x_1, x_2 \in N$ (π.χ. $x_1 = \frac{1}{2\kappa\pi}$, $x_2 = \frac{1}{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}$ όπου $\kappa = \left[\frac{1}{2\pi a}\right]+1$)

$: |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} f(x) \notin \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) \notin \{+\infty, -\infty\}\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) Αν $f(x) = \sqrt{x - [x]}$, δείξτε ότι $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x - [x] \geq 0 \Leftrightarrow x \geq [x]$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow A = \mathbb{R}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

• Βρίσκω πλευρικά όρια.

$\exists I_1 = (0,1) \subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$\forall x\in I_1: 0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-0} = \sqrt{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 1^-} x} = 1.$

$\exists I_2 = (1,2)$ στο οποίο περιορίζω το f.

$\forall x \in I_2 : 1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{\lim_{x \to 1^+} (x-1)} = \sqrt{1-1} = 0.$

Αρα: $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x).$

3) $f(x) = 3 - x \sin x \longrightarrow \nexists \lim_{x \to +\infty} f(x).$

<u>Λύση</u>

Εστω $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

▼ <u>Όριο και sup, inf φραγμένης συνάρτησης f</u> $\longrightarrow \mathrm{dom} f = (a,b)$, $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$

Θ1) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ αύξουσα στο } (a,b) \\ f \text{ φραγμένη άνω στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R} : \sup f = l = \lim\limits_{x\to b} f(x).}$

<u>Απόδειξη</u>

f φραγμένη άνω στο $(a,b) \rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R} : \sup f = l$. Αρκεί $\lim\limits_{x\to b} f(x) = l$.

Έστω <u>ε>0</u>

$$l = \sup f \Rightarrow \begin{cases} l \text{ άνω φράγμα } f \\ l-\varepsilon \text{ όχι άνω φράγμα } f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in (a,b) : f(x) \le l < l+\varepsilon \\ \exists\, x_0 \in (a,b) : l-\varepsilon < f(x_0) \end{cases}$$

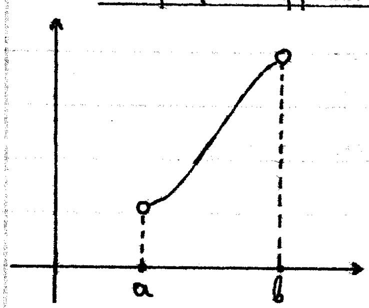
Παίρνω <u>$N = (x_0, b) \in N(b, (a,b))$</u> οπότε

$$\underline{\forall x \in N :} \left.\begin{array}{l} f(x) < l+\varepsilon \\ \left.\begin{array}{l} x > x_0 \\ f \text{ ~~γνησίως~~ αύξουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow l-\varepsilon < f(x_0) \le f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Rightarrow \underline{|f(x)-l| < \varepsilon.}$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in N(b,(a,b)) : \forall x \in N : |f(x)-l| < \varepsilon. \longrightarrow \lim\limits_{x\to b} f(x) = l.$

↳ <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u> : Ο αριθμός l, ως ελάχιστο άνω φράγμα, εκφράζει τον αριθμό τον οποίον διαρκώς τείνει να "πλησιάσει" η συνάρτηση καθώς ο x "πλησιάζει" το b. (διότι η f είναι αύξουσα). Όμως $\lim\limits_{x\to b} f(x) = l$.



Έχουμε λοιπόν <u>μία ακόμα</u> γεωμετρική ερμηνεία του <u>πεπερασμένου</u> ορίου, για συναρτήσεις οι οποίες είναι μονότονες σε μία περιοχή του $N(\sigma, A)$: Το όριο εκφράζει τον αριθμό στον οποίο τείνει να πλησιάσει η συνάρτηση, όταν ο x "πλησιάζει" όσο θέλουμε το σ.

<u>Όμοια αποδεικνύονται τα θεωρήματα:</u>

Θ2) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ αύξουσα στο } (a,b) \\ f \text{ φραγμένη κάτω στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R} : \inf f = l = \lim\limits_{x\to a} f(x).}$

Θ3) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ φθίνουσα στο } (a,b) \\ f \text{ φραγμένη κάτω στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R} : \inf f = l = \lim\limits_{x\to b} f(x)}$

Θ4) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ φθίνουσα στο } (a,b) \\ f \text{ φραγμένη άνω στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{R} : \sup f = l = \lim\limits_{x\to a} f(x)}$

Θ5) $\left.\begin{array}{l} f \text{ γνησίως αύξουσα στο } (a,b) \\ f \text{ όχι άνω φραγμένη στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $M>0$

f όχι άνω φραγμένη στο $(a,b) \Rightarrow M$ όχι άνω φράγμα της f στο $(a,b) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists\, x_0\in(a,b): f(x_0)>M \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in \underbrace{(x_0,b)}_{\in N(b,(a,b))} : f(x)\geq f(x_0)>M \rightarrow f(x)>M.$$

Άρα $\forall M>0, \exists\, N=(x_0,b)\in N(a,(a,b)) : \forall x\in N : f(x)>M \Rightarrow \lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty.$

Όμοια αποδεικνύονται τα θεωρήματα

Θ6) $\left.\begin{array}{l} f \text{ φθίνουσα στο } (a,b) \\ f \text{ όχι κάτω φραγμένη στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty.$

Θ7) $\left.\begin{array}{l} f \text{ αύξουσα στο } (a,b) \\ f \text{ όχι κάτω φραγμένη στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty.$

Θ8) $\left.\begin{array}{l} f \text{ φθίνουσα στο } (a,b) \\ f \text{ όχι άνω φραγμένη στο } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

→ Αντίστοιχα θεωρήματα ισχύουν και για τις ακολουθίες:

- 1 $\left.\begin{array}{l} (a_n) \text{ αύξουσα} \\ (a_n) \text{ όχι φραγμένη άνω} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n=+\infty$
- 2 $\left.\begin{array}{l} (a_n) \text{ φθίνουσα} \\ (a_n) \text{ όχι φραγμένη κάτω} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim b_n=-\infty.$

- <u>Παράδειγμα</u>

1) Να βρεθεί το infinum της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e}{\sqrt{x}-1}$ με πεδίο ορισμό το $A=(1,+\infty)$.

<u>Λύση</u>

- Μελετώ την f ως πρός μονοτονία.

Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

Είναι $1<x_1<x_2 \Rightarrow 1<\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Rightarrow 0<\sqrt{x_1}-1<\sqrt{x_2}-1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_1}-1}>\dfrac{1}{\sqrt{x_2}-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{e}{\sqrt{x_1}-1}>\dfrac{e}{\sqrt{x_2}-1} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow$

f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

• <u>Φράγματα</u>

Είναι $\forall x\in(1,+\infty): \sqrt{x}>1 \Rightarrow \sqrt{x}-1>0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{e}{\sqrt{x}-1}>0,\ \forall x\in(1,+\infty) \Rightarrow f$ φραγμένη κάτω στο $(1,+\infty)$.

Άρα: $\left.\begin{array}{l} f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } (1,+\infty) \\ f \text{ φραγμένη κάτω στο } (1,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \inf f = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e}{\sqrt{x}-1} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{e}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{e}{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0\cdot\dfrac{e}{1-0} = 0 \Rightarrow \inf f = 0.$

▼ <u>Συνέχεια συνάρτησης.</u>

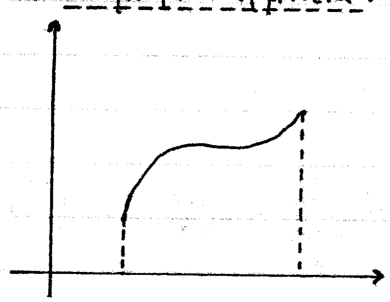
<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω μία συνάρτηση $f\in F_A$ και $x_0\in A$.
f συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

• Αν, δεν υπάρχει το $f(x_0)$
ή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ <u>στο $\mathbb{R}$</u>
ή υπάρχουν και τα δυο, άλλα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

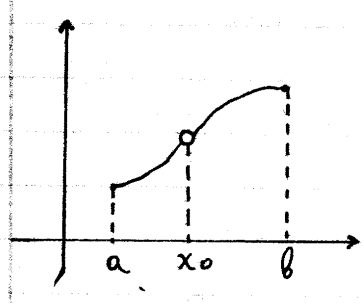
→ τότε λέμε ότι f ασυνεχής στο x_0.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω $f\in F_A$ και $I\subseteq A$
f συνεχής στο $I \Leftrightarrow \forall x_0\in I$, f συνεχής στο x_0.

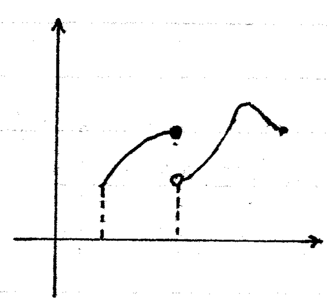
↳ <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>: Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα I (π.χ. το $I=[a,b]$), τότε η γραφική της παράσταση είναι μία "συνεχής" γραμμή, δηλαδή δεν "διακόπτεται" σε κανένα σημείο της $x_0\in I$.



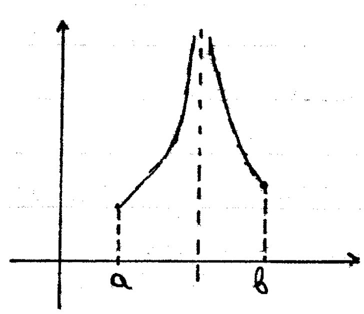
Μία γραφική παράσταση, μπορεί να "διακόπτεται" με τους τρόπους που δείχνουν τα σχήματα:



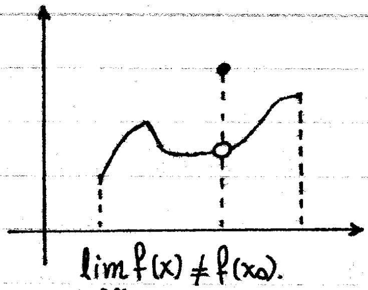
$\nexists f(x_0)$.



$\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \notin \mathbb{R}$.



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Συνέχεια και πράξεις συναρτήσεων

Θ₁) $\boxed{f, g \text{ συνεχείς στο } x_0 \Rightarrow f+g,\ f\cdot g,\ \lambda f,\ |f| \text{ συνεχείς στο } x_0.}$

Απόδειξη

f, g συνεχείς στο $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. (1). Είναι:

i) $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow f+g$ συνεχής στο x_0.

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = (fg)(x_0) \Rightarrow (fg)$ συνεχής στο x_0.

iii) $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f)(x) = \lim\limits_{x\to x_0}[\lambda f(x)] = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda f(x_0) = (\lambda f)(x_0) \Rightarrow \lambda f$ συνεχής στο x_0.

iv) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = |f(x_0)| \Rightarrow |f|$ συνεχής στο x_0.

Θ₂) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } g(x_0)\neq 0 \Rightarrow \\ f, g \text{ συνεχείς στο } x_0\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{f}{g} \text{ συνεχής στο } x_0.}$

Απόδειξη

$\left.\begin{array}{l} g \text{ συνεχής στο } x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0 \\ f \text{ συνεχής στο } x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f}{g}$ συνεχής στο x_0.

Θ₃) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\forall x\in I : f(x)\geq 0 \\ f \text{ συνεχής στο } x_0\in I\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[\kappa]{f} \text{ συνεχής στο } x_0.}$

Απόδειξη

f συνεχής στο $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \geq 0$ (διότι $\forall x \in I : f(x) \geq 0$) $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[k]{f(x_0)}$
$\Rightarrow \sqrt[k]{f}$ συνεχείς στο x_0.

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων.

I. $P \in F_{\mathbb{R}}$ πολυωνυμική $\Rightarrow P$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

II. $Q \in F_A$ ρητή $\Rightarrow Q$ συνεχής στο A.

III. Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

1) $\boxed{\text{Αν } f(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}}$

Απόδειξη

Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\} : |\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq$

$\leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$, $\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(\sin x - \sin x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f = \sin$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2) $\boxed{\text{Αν } f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}.}$

Απόδειξη

Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\} : |\cos x - \cos x_0| = \left|-2\sin\frac{x+x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq$

$\leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$, $\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(\cos x - \cos x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow f = \cos$ συνεχής στο $\mathbb{R}$

3) $\boxed{\text{Αν } f(x) = \tan x, \forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi + \tfrac{\pi}{2}\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} - \{k\pi + \tfrac{\pi}{2}\}.}$

Απόδειξη

Εστω $x_0 \in \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \Rightarrow \cos x_0 \neq 0$.
$\sin, \cos$ συνεχείς στο x_0
$\Rightarrow \tan$ συνεχής στο x_0 ως πηλίκο συνεχών., $\forall x_0 \in \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2\}$

$\Rightarrow f = \tan$ συνεχής στο $\mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2\}$.

4) $\boxed{f(x)=\cot x\,,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}-\{k\pi\}}$

Απόδειξη

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}-\{k\pi\} \Rightarrow \sin x_0 \neq 0$.
$\sin, \cos$ συνεχείς στο x_0
$\Rightarrow \cot$ συνεχής στο x_0, $\forall x_0 \in \mathbb{R}-\{k\pi\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f=\cot$ συνεχείς στο $\mathbb{R}-\{k\pi\}$

Μεθοδοι - ασκήσεις. (στην συνέχεια)

①$^{\eta}$ περίπτωση: Συνέχεια σε συνοριακό σημείο $x_0 \in A \to$ Δηλ. σε σημείο στο οποίο αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης.

- •1 Βρίσκω τα $f(x_0)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.
- •
- •2 Πρέπει $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

• Παράδειγματα

1) Εξετάστε αν η $f: f(x)=\begin{cases} 4x+5 & , x\in(-4,2) \\ 2x^2+1 & , x\in[2,7) \end{cases}$ είναι συνεχής στο 2.

Λύση

$f(2)=2\cdot 2^2+1=8+1=9$.

$\forall x\in(-4,2): f(x)=4x+5 \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(4x+5) = 4\cdot 2+5 = 8+5 = 13 \neq f(2) \Rightarrow f$ ασυνεχής στο 2.

2) Ομοια άν η $f: f(x)=\begin{cases} x^2+\sin x & , x\in(-3,0) \\ \cos x - 1 & , x\in[0,4) \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

Λύση

$\cancel{f(0)=0^2+\cos 0}$

$f(0)=\cos 0 - 1 = 1-1=0$

$\forall x\in(-3,0): f(x)=x^2+\sin x \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+\sin x) = 0+\sin 0 = 0+0=0$.

$\forall x\in(0,4): f(x)=\cos x - 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\cos x - 1) = \cos 0 - 1 = 1-1=0$

Αρα: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f$ συνεχής στο 0.

3) Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases} \lambda x + (\lambda+1)\cos x, & x\in(0,\pi) \\ 2\lambda + x & , x\in[\pi, 2\pi] \end{cases}$ ναι είναι συνεχής στο $x_0=\pi$.

Λύση

$f(\pi)=2\lambda+\pi.$

$\forall x\in(0,\pi): f(x)=\lambda x+(\lambda+1)\cos x \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}[\lambda x+(\lambda+1)\cos x]=\lambda\pi+(\lambda+1)\cos\pi =$
$=\lambda\pi+(\lambda+1)(-1)=\lambda\pi-\lambda-1.$

$\forall x\in(\pi,2\pi): f(x)=2\lambda+x \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}(2\lambda+x)=2\lambda+\pi.$

f συνεχής στο $x_0=\pi \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=f(\pi) \Leftrightarrow \lambda\pi-\lambda-1=2\lambda+\pi \Leftrightarrow \lambda\pi-3\lambda=1+\pi$
$\Leftrightarrow (\pi-3)\lambda=\pi+1 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{\pi+1}{\pi-3}.$

2η <u>περίπτωση</u> : Συνέχεια στο πεδίο ορισμού A της f.

έστω $A=[a,\beta)\cup(\beta,\gamma)\cup[\gamma,\delta)\cup\{\varepsilon\}$ όπου $\varepsilon>\delta$.

- Εξετάζω την συνέχεια

i) Στα ανοιχτά διαστήματα <u>και</u> στα άκρα κλειστών διαστημάτων.

π.χ. στα $[a,\beta)$, (β,γ), (γ,δ)

Σε αυτά, η συνάρτηση βγαίνει συνήθως συνεχής, σύμφωνα με τα θεωρήματα των πράξεων και τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις.

ii) Στα συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού.

π.χ. στο γ, όχι όμως στο β, διότι $\beta\notin A$

ούτε στο a, διότι είναι ακραίο σημείο του A και δεν αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης.

Εξετάζω την συνέχεια <u>με τον ορισμό.</u> (1η περίπτωση).

iii) Στα μεμονωμένα σημεία

π.χ. στο ε

<u>Δεν</u> εξετάζω την συνέχεια αλλά η συναρτηση θεωρείται συνεχής σ'αυτά.

<u>Παράδειγμα</u> : Να βρεθούν τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}1+2\sin x &, x\in(-\infty,-\pi)\\ a\cos x &, x\in[-\pi,0)\\ \beta-4\cos^2 x &, x\in[0,+\infty)\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=(-\infty,-\pi)\cup[-\pi,0)\cup[0,+\infty)=\mathbb{R}$.

f συνεχής στο $(-\infty,-\pi)$ ως άθροισμα συνεχών (σταθερής και τριγωνομετρικής).

f συνεχής στο $(-\pi,0)$ ως τριγωνομετρική.

f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών (σταθερής και τριγωνομετρικής).

Άρα,

$\underline{\Sigma\tau o}\ -\pi$, $f(-\pi) = a\cos(-\pi) = a\cos\pi = -a$

$\forall x \in (-\infty, -\pi): f(x) = 1 + 2\sin x \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\pi^-} (1 + 2\sin x) = 1 + 2\sin(-\pi) = 1 - 2\sin\pi = 1.$

$\forall x \in (-\pi, 0): f(x) = a\cos x \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\pi^+} (a\cos x) = a\cos(-\pi) = a\cos\pi = -a.$

$\underline{\Sigma\tau o}\ 0$, $f(0) = b^2 - 4\cos^2 0 = b - 4$

$\forall x \in (-\pi, 0): f(x) = a\cos x \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (a\cos x) = a\cos 0 = a$

$\forall x \in (0, +\infty): f(x) = b - 4\cos^2 x \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (b - 4\cos^2 x) = b - 4\cos^2 0 = b - 4.$

οπότε,

f συνεχής στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ συνεχής στα $-\pi, 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = f(-\pi) \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{b - 4 = -a} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a = b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = (-1, 3).$

▼ Όριο και συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων

▸ **Το πρόβλημα**: Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$ όταν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = x_1$ και η συμπεριφορά της f στην περιοχή του x_1. όπου $x_0, x_1 \in \overline{\mathbb{R}}$

• **Λύση**: Έστω $A = \mathrm{dom}\, g$ και $B = \mathrm{dom}\, f$.

1. Για να έχει το ζητούμενο όριο έννοια, πρέπει το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του A και το x_1 σημείο συσσώρευσης του B.
2. Επίσης, πρέπει να $\exists A_1 \subseteq \mathrm{dom}(f \circ g): A_1 \in N(x_0, \mathrm{dom}\, g)$ στο οποίο περιορίζω τις $f \circ g$, g.

1η περίπτωση: Αν $x_1 \in \mathbb{R}$ και η f συνεχής στο x_1, τότε το όριο υπολογίζεται με το θεώρημα:

Θ1) $\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = x_1 \in \mathbb{R}. \\ f \text{ συνεχής στο } x_1 \end{array} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \cancel{(f \circ g)(x_0)}\ f(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)).}$

Απόδειξη

1^{η} περίπτωση : Αν $x_1 \in \mathbb{R}$ και η f συνεχής στο x_1, τότε το ζητούμενο όριο υπολογίζεται από το θεώρημα.

Θ1) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = x_1 \in \mathbb{R} \\ f \text{ συνεχής στο } x_1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)}$.

Απόδειξη

f συνεχής στο $x_1 \Rightarrow \left.\lim\limits_{x\to x_1} f(x) = f(x_1) = \ell \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow$

Έστω $\varepsilon > 0$

$\left.\Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \forall y \in B \cap (x_1-\delta_1, x_1+\delta_1) - \{x_1\} : |f(y) - \ell| < \varepsilon\right\} \Rightarrow$

Για $y = x_1 \Rightarrow |f(y) - \ell| = |f(x_1) - \ell| = |\ell - \ell| = 0 < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall y \in B \cap (x_1-\delta_1, x_1+\delta_1) : |f(y) - \ell| < \varepsilon.$ (1).

Είναι $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = x_1 \\ \delta_1 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \exists N \in N(x_0, A_1) : \forall x \in N : |g(x) - x_1| < \delta_1.$

Άρα $\forall x \in N$: $\left\{\begin{array}{l}|g(x) - x_1| < \delta_1 \\ x \in A_1 \text{ (διότι } N \in N(x_0, A_1))\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}-\delta_1 < g(x) - x_1 < \delta \\ x \in \mathrm{dom}\, f\circ g = \{x \in A : g(x) \in B\}\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1 - \delta_1 < g(x) < x_1 + \delta_1 \\ g(x) \in B\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}g(x) \in (x_1-\delta_1, x_1+\delta_1) \\ g(x) \in B\end{array}\right. \Rightarrow g(x) \in B \cap (x_1-\delta_1, x_1+\delta_1) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow |f(g(x)) - \ell| < \varepsilon.$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N(x_0, A_1) : \forall x \in N : |f(g(x)) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \ell = f(x_1) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right).$

• Παραδείγματα: Να βρεθούν τα όρια:

1) $f(x) = \cos\left(3 + \sqrt{x^2-4} - 2x\right) \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \Leftrightarrow A = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$

x		-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$(B = \mathbb{R}).$

▸ Παίρνω $A_1 = (2, 3)$. στο οποίο περιορίζω την f.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \cos(3 + \sqrt{x^2-4} - 2x) = \cos\left[\lim\limits_{x\to 2} (3 + \sqrt{x^2-4} - 2x)\right] =$

$= \cos\left[\lim\limits_{x\to 2} (3 - 2x) + \sqrt{\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4)}\right] = \cos\left(3 - 2\cdot 2 + \sqrt{4-4}\right) = \cos(-1) = \cos 1.$

2) $f(x)= \sin\left[\dfrac{(\pi x+1)(x^2-3)}{(2x+5)(3x^2+4x)}\right] \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $(2x+5)(3x^2+4x)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5\neq 0 \\ x(3x+4)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{5}{2} \wedge x\neq 0 \wedge x\neq -\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{0,-\frac{4}{3},-\frac{5}{2}\}. \Rightarrow \exists\, I=(0,+\infty)\subset A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$\forall x\in I: f(x)=\sin\left[\dfrac{(\pi x+1)(x^2-3)}{(2x+5)(3x^2+4x)}\right]=\sin\left[\dfrac{\pi x^3-3\pi x+x^2-3}{6x^3+8x^2+15x^2+20x}\right]=$

$=\sin\left[\dfrac{\pi x^3+x^2-3\pi x-3}{6x^3+23x^2+20x}\right]\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left[\dfrac{\pi x^3+x^2-3\pi x-3}{6x^3+23x^2+20x}\right]=$

$=\sin\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x^3+x^2-3\pi x-3}{6x^3+23x^2+20x}\right]=\sin\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi x^3}{6x^3}\right]=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}.$

2η περίπτωση: Αν $x_1\in\mathbb{R}$ και f ασυνεχής στο x_1 τότε για τον υπολογισμό του ορίου χρησιμοποιώ το θεώρημα:

Θ2) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=x_1\in\mathbb{R}.\\ \lim\limits_{x\to x_1} f(x)=L\in\overline{\mathbb{R}}\\ g(x)\neq x_1,\ \forall x\in A_1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=L}$

Απόδειξη

Έστω ένα $I\in\mathcal{I}_L$

$\lim\limits_{x\to x_1} f(x)=L \Rightarrow \exists N_1\in N(x_1,B):\forall x\in N_1: f(x)\in I \quad (1).$

Έστω $I'\in\mathcal{I}_{x_1}: N_1=I'\cap B-\{x_1\}.$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=x_1 \\ x_1 \text{ σημείο συσσώρευσης του } I'\in\mathcal{I}_{x_1}\end{array}\right\}\Rightarrow \exists N\in N(x_0,A_1):\forall x\in N: g(x)\in I'.$

$\forall x\in N: \left\{\begin{array}{l} g(x)\in I' \\ x\in A_1\subseteq \mathrm{dom}(f\circ g)=\{x\in A: g(x)\in B\}\Rightarrow g(x)\in B \\ x\in A_1\Rightarrow g(x)\neq x_1 \quad (\text{εξ' υποθέσεως})\end{array}\right\}\Rightarrow x\in N_1=I'\cap B-\{x_1\}\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow f(g(x))\in I.$

Άρα $\forall I\in\mathcal{I}_L,\exists N\in N(x_0,A):\forall x\in N: f(g(x))\in I\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=L.$

• <u>Παραδειγμα</u>: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} x^2+\sin(2x+\pi) & , x\in(-\infty,\frac{\pi}{6})\cup(\frac{\pi}{6},+\infty) \\ e+\pi\sqrt{e} & , x=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

$g(x)=\dfrac{\sqrt{\pi^2x^2+x}}{6x+6}$ και $h(x)=|x-\frac{\pi}{6}|+|x|$. Να βρεθούν τα όρια.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(g(x))$ και 2) $\lim\limits_{x\to\pi/12} f(h(x))$.

<u>Λύση</u>

1) $\mathrm{dom}f=\mathbb{R}$.

Πρέπει $\pi^2x^2+x\geq 0 \Leftrightarrow x(\pi^2x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0]\cup[\frac{1}{\pi^2},+\infty) \Leftrightarrow \mathrm{dom}g=(-\infty,0]\cup[\frac{1}{\pi^2},+\infty)$.

x		0		$1/\pi^2$	
π^2x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$

$\forall x\in(1,+\infty)\subseteq \mathrm{dom}g$: $g(x)=\dfrac{\sqrt{\pi^2x^2+x}}{6x+6}=\dfrac{|x|\sqrt{\pi^2+\frac{1}{x}}}{6x(1+\frac{1}{x})}=\dfrac{x\sqrt{\pi^2+\frac{1}{x}}}{6x(1+\frac{1}{x})}=\dfrac{\sqrt{\pi^2+\frac{1}{x}}}{6(1+\frac{1}{x})}\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\pi^2+\frac{1}{x}}}{6(1+\frac{1}{x})}=\dfrac{\sqrt{\pi^2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}}{6(1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x})}=\dfrac{\sqrt{\pi^2+0}}{6(1+0)}=\dfrac{\pi}{6}$. (1)

▶ <u>Παρατήρηση</u>: Η f <u>δεν</u> είναι συνεχής στο $\pi/6$. Άρα,

Πρέπει $g(x)\neq\pi/6$, $\forall x\in A_1$ όπου $A_1\subseteq\mathrm{dom}(f\circ g)=(-\infty,0]\cup[\frac{1}{\pi^2},+\infty)$ και $A_1\in N(+\infty,\mathrm{dom}$

Είναι $g(x)=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{\pi^2x^2+x}}{6x+6}=\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{\pi^2x^2+x}}{x+1}=\pi\Leftrightarrow\sqrt{\pi^2x^2+x}=\pi(x+1)\Leftrightarrow$

Πρέπει $\pi(x+1)>0\Leftrightarrow x>-1$.

$\Leftrightarrow \pi^2x^2+x=\pi^2(x^2+2x+1)\Leftrightarrow \pi^2x^2+x=\pi^2x^2+2\pi^2x+\pi^2\Leftrightarrow(1-2\pi^2)x=\pi^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi^2}{1-2\pi^2}<0$

Για $A_1=(2,+\infty)$: $\forall x\in A_1$: $x>0\Rightarrow g(x)\neq\pi/6$ (2).

Είναι και, $\forall x\in(-\infty,\frac{\pi}{6})\cup(\frac{\pi}{6},+\infty)$: $f(x)=x^2+\sin(2x+\pi)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pi/6}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi/6}(x^2+\sin(2x+\pi))=$

$=\lim\limits_{x\to\pi/6}x^2+\sin(\lim\limits_{x\to\pi/6}(2x+\pi))=\dfrac{\pi^2}{36}+\sin(\dfrac{\pi}{3}+\pi)=\dfrac{\pi^2}{36}-\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi^2}{36}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3).

(1),(2),(3) $\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(g(x))=\dfrac{\pi^2}{36}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\mathrm{dom}f=\mathbb{R}$, $\mathrm{dom}g=\mathbb{R}$.

Ομοια $\lim\limits_{x\to\pi/12}h(x)=\lim\limits_{x\to\pi/12}(|x-\frac{\pi}{6}|+|x|)=|\lim\limits_{x\to\pi/12}(x-\frac{\pi}{6})|+|\lim\limits_{x\to\pi/12}x|=|\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}|+|\frac{\pi}{12}|=$

$=(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$.

▶ <u>Παρατήρηση</u>: Η f δέν είναι συνεχής στο $\pi/6$. Άρα,

Πρέπει $g(x)\neq\pi/6$, $\forall x\in A_1$ όπου $A_1\subseteq\mathrm{dom}(f\circ g)=\mathbb{R}$ και $A_1\in N(\frac{\pi}{12},\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ Αυτό δεν ισχύει για κανένα A_1. Σε τέτοια περίπτωση εργάζομαι ως εξής:

x		0		$\pi/6$	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-\frac{\pi}{6}$	$-$		$-$	0	$+$

- Υπολογίζω την σύνθεση οπότε προκύπτει συνάρτηση η οποία θα είναι σταθερή σε κατάλληλο $N \in N(\frac{\pi}{12}, \mathbb{R})$.

$\forall x \in (0,\frac{\pi}{12}) \cup (\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}) : h(x) = |x-\frac{\pi}{6}| + |x| = (\frac{\pi}{6}-x) + x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(h(x)) = f(\frac{\pi}{6}) = e+\pi\sqrt{e} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pi/12} f(h(x)) = e+\pi\sqrt{e}$.

<u>3η περίπτωση</u> : Αν $x_1 = +\infty \vee x_1 = -\infty$ τότε, <u>ασχετα με την συνέχεια της f</u> ισχύει τα θεώρηματα

Θ3) $\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = L}$

Θ4) $\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = L.}$

$\hookrightarrow$ Η <u>αποδειξη</u> είναι όμοια με του Θ2 αν θέσω $x_1 = +\infty$ ή $x_1 = -\infty$ αντίστοιχα αλλα δεν ~~χρη~~ χρειάζεται η συνθήκη $g(x) \neq x_1, \forall x \in A_1$ διοτι $x_1 \notin \mathbb{R}$, οπως δεν χρειάζεται και στο Θ1.

- <u>Παράδειγμα</u>

1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \cos\left[\frac{\pi x^2+1}{4x^2+4x}\right]$ και $g(x) = \frac{x^3+x^2+2}{x^2+1}$.
Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(g(x))$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Για την f, πρέπει $4x^2+4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow \mathrm{dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.
Για την g, πρέπει $x^2+1 \neq 0$, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{dom} g = \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \quad (1).$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left[\frac{\pi x^2+1}{4x^2+4x}\right] = \cos\left[\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2+1}{4x^2+4x}\right] = \cos\left[\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2}\right] = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(g(x)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\hookrightarrow$ <u>Ειδικά</u> : όταν η συνάρτηση g είναι ακολουθία, τότε τα θεωρήματα γίνονται :

Θ5) $\left.\begin{array}{l}\lim a_n = x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \\ f \text{ συνεχής στο } x_0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(a_n) = L.$

Θ6) $\left.\begin{array}{l}\lim a_n = x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \\ \exists k\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>k : a_n \neq x_0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(a_n) = L.$

- **Πορίσματα**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim f(n) = L$
2. $\lim f(n) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f([x]) = L.$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = L$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 1} f(x_0 h) = L$

- Παράδειγμα - εφαρμογή : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

Απόδειξη

Θέτω $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $\forall x\in(1,+\infty)$.

Είναι: $\forall x\in(1,+\infty)$: $[x]\leq x<[x]+1 \Rightarrow \frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]} \Rightarrow 1+\frac{1}{[x]+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{[x]}$ (1).

$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(1,+\infty): 1+\frac{1}{x}>1 \\ [x]\leq x<[x]+1\end{array}\right\} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]+1}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]} \wedge \left(1+\frac{1}{x}\right)^{[x]+1} \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$

$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$, $\forall x\in(1,+\infty)$. (1)

$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right] = \lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} =$

$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\lim\frac{1}{n+1}} = e\cdot\frac{1}{1+0} = e.$ $\overset{(2)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = e.$ (2)

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot\left(1+\lim\frac{1}{n}\right) =$

$= e(1+0) = e \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e.$ (3)

$(1),(2),(3) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

- Παράδειγμα : Δείξτε ότι $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.

Λύση

Έστω $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x = L$ (1).

$\left.\begin{array}{l}\lim(2\pi n) = +\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim\cos(2\pi n) = L \quad (2). \\ \lim\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right) = L\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\cos(2\pi n) = \lim\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right) = L.$ (2).

$$\left.\begin{aligned}&\text{Αλλα } \cos(2n\pi)=1,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim \cos(2n\pi)=1\\ &\cos(2n\pi+\tfrac{\pi}{2})=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim \cos(2n\pi+\tfrac{\pi}{2})=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Άτοπο.}$$

Άρα $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$.

- <u>Συνέχεια σύνθεσης συναρτήσεων.</u>

Θ. $\boxed{\left.\begin{aligned}&g \text{ συνεχής στο } x_0\\ &f \text{ συνεχής στο } g(x_0)\end{aligned}\right\} \Rightarrow f\circ g \text{ συνεχής στο } x_0.}$

<u>Απόδειξη</u>

$$\left.\begin{aligned}&g \text{ συνεχής στο } x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=x_1\\ &f \text{ συνεχής στο } x_1=g(x_0) \Rightarrow \lim_{x\to x_1} f(x)=f(x_1)\\ &\qquad f \text{ συνεχής στο } x_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=f(x_1)=f(g(x_0))=(f\circ g)(x_0)$$

$\Rightarrow f\circ g$ συνεχής στο x_0.

- <u>Παράδειγμα</u> : Να βρεθεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\cos x-1) &, x\in(0,+\infty)\\ \lambda^2(x+2)+3\lambda+1 &, x\in(-\infty,0]\end{cases}$$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Στο $(0,+\infty)$: $f=g_1\circ(g_2-g_3)$ όπου $g_1(x)=\sin x$, $g_2(x)=\cos x$, $g_3(x)=1$

$$\left.\begin{aligned}&g_2 \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ως τριγωνομετρική}\\ &g_3 \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ως σταθερή}\end{aligned}\right\} \Rightarrow g_2-g_3 \text{ σταθερή συνεχής στο } \mathbb{R}$$
g_1 συνεχής στο $\mathbb{R}$

Στο $(0,+\infty)$: $f=g_1\circ(g_2-g_3)$ όπου $g_1(x)=\sin x$, $g_2(x)=\cos x$, $g_3(x)=1$.

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&g_2 \text{ συνεχής ως τριγωνομετρική}\\ &g_3 \text{ συνεχής ως σταθερή}\end{aligned}\right\} \Rightarrow g_2-g_3 \text{ συνεχής ως άθροισμα συνεχών}\\ &\qquad g_1 \text{ συνεχής ως τριγωνομετρική}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f=g_1\circ(g_2-g_3)$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

Στο $(-\infty,0)$, f συνεχής ως πολυωνυμική

Στο 0, $f(0)=\lambda^2(0+2)+3\lambda+1=\lambda^2+3\lambda+1$.

$\forall x\in(0,+\infty)$: $f(x)=\sin(\cos x-1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin(\cos x-1)=\sin\left[\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x-1)\right]=$
$=\sin(\cos 0-1)=\sin(1-1)=\sin 0=0.$

$\forall x\in(-\infty,0)$: $f(x)=\lambda^2(x+2)+3\lambda+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\lambda^2(x+2)+3\lambda+1\right]=\lambda^2(0+2)+3\lambda+1=$
$=2\lambda^2+3\lambda+1.$

Άρα: f συνεχής στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ συνεχής στο $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lambda^2+3\lambda+1=0 \Leftrightarrow 2\lambda^2+2\lambda+\lambda+1=0 \Leftrightarrow 2\lambda(\lambda+1)+(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow (2\lambda+1)(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2} \vee \lambda=-1.$

▼ Τριγωνομετρικά όρια

Ισχύουν:

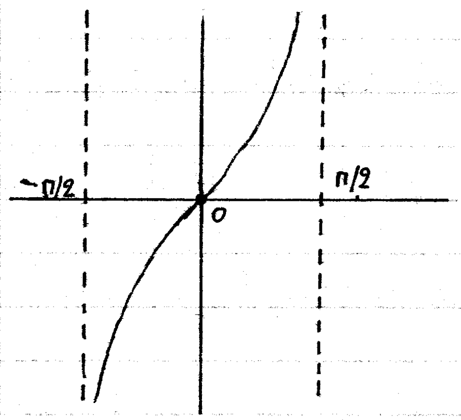
$\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \ , \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \ , \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0 , \forall x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}$ $\lim\limits_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0 , \forall x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi\}.$

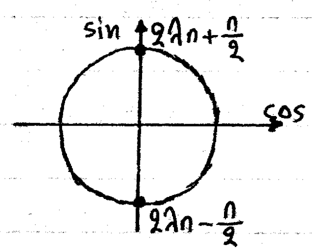
από την συνέχεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

- Επίσης, θα δείξουμε ότι:

1) $\boxed{x_0 = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \tan x = -\infty \ \wedge \lim\limits_{x\to x_0^-} \tan x = +\infty.}$

Απόδειξη





$x_0 = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z} : x_0 = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \vee x_0 = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}.$

i) Αν $x_0 = 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos(2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$ (1).

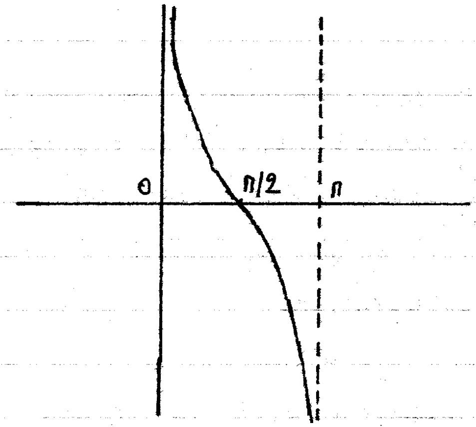
$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in (2\lambda\pi + \frac{\pi}{3}, 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}) : \cos x > 0 \xRightarrow{(1)} \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty \\ \forall x \in (2\lambda\pi + \frac{\pi}{3}, 2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}) : \sin x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \tan x = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in (2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}, 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3}) : \cos x < 0 \xRightarrow{(1)} \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty \\ \forall x \in (2\lambda\pi + \frac{\pi}{2}, 2\lambda\pi + \frac{2\pi}{3}) : \cancel{\sin x} \ \sin x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} \tan x = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty.$$

ii) Αν $x_0 = 2\lambda\pi - \frac{\pi}{2}$, όμοια...

2) $\boxed{x_0 = \kappa\pi \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} \cot x = +\infty \vee \lim_{x\to x_0^+} \cot x = -\infty}$

Απόδειξη : Όμοια με το 1.



• Απροσδιόριστες μορφές στα τριγωνομετρικά όρια

1) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Απόδειξη : $A = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \exists I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$ στο οποίο περιορίζω την $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

$\forall x \in I$: $|\sin x| < |x| < |\tan x| \Rightarrow 1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{|\tan x|}{|\sin x|} \Rightarrow 1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right| \Rightarrow |\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1 \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, διότι $\cos x > 0$ και $\sin x, x$ ομόσημοι στο I.

Άρα $\left.\begin{array}{l} \forall x \in I: \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (1). \\ \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

2) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1}$

Απόδειξη : $A = \mathbb{R}^* - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\} \Rightarrow \exists I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$ στο οποίο περιορίζω την $f(x) = \frac{\tan x}{x}$.

$\forall x \in I$: $f(x) = \frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right] =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos 0} \cdot 1 = 1.$

Πορίσματα: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1, \forall a \in \mathbb{R}^*}$ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1, \forall a \in \mathbb{R}^*}$

• Μέθοδοι - ασκήσεις (στα τριγωνομετρικά όρια).

1) Εαν δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, κάνω ιδιότητες και χρησιμοποιώ τους τύπους:

παράδειγμα : $f(x)=\frac{1-\sin x}{\cos x} \longrightarrow \lim_{x\to \pi/6} f(x)=;$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\} \Rightarrow I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\subset A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\lim_{x\to\pi/6} f(x)=\lim_{x\to\pi/6}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\lim_{x\to\pi/6}\sin x}{\lim_{x\to\pi/6}\cos x}=\frac{1-\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) Αν έχω απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, κάνω τριγωνομετρική παραγοντοποίηση και ανάγω την συνάρτηση στις μορφές.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

Παραδείγματα : Να βρεθούν τα όρια:

1) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\sin 3x\neq 0 \Leftrightarrow 3x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{3} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{3}\}\Rightarrow \exists I=(-\frac{\pi}{3},0)\cup(0,\frac{\pi}{3})\subseteq A$ στο οποίο περιορίζω την f.

$$\forall x\in I: f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}=\frac{2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}.$$

2) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2} \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0\Leftrightarrow A=\mathbb{R}^*$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\forall x\in A: f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

3) $f(x) = \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pi/4} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\sin x - \sin\frac{\pi}{4} \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x \neq (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{2k\pi + \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \exists\, I = \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \subseteq A$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\forall x \in I : f(x) = \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sin\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}}{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sin\frac{x+\pi/4}{2}}{\cos\frac{x+\pi/4}{2}} = -\tan\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi/4} f(x) = \lim_{x\to\pi/4}\left[-\tan\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right] = -\tan\left[\lim_{x\to\pi/4}\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right] = -\tan\left[\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}\right] =$$

$$= -\tan\frac{\pi}{4} = -1.$$

4) $f(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}} \longrightarrow \lim\limits_{x\to\pi/4} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x - \frac{\pi}{4} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi/4 \Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{4}\}$ στο οποίο το όριο έχει έννοια.

$$\forall x \in A : f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{2\sin\frac{x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\cdot\sin\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-x}{2}}{x-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi/4} f(x) = \lim_{x\to\pi/4}\left[-\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right] = -\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} =$$

$$= -\sqrt{2}\cdot 1 = -\sqrt{2}.$$

5) $f(x) = \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x).$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $1 - \sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow (1-\cos x) - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left[\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right] \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{2}\neq 0 \\ \sin\frac{x}{2}\neq\cos\frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}\neq 2\kappa\pi \\ \sin\frac{x}{2}\neq \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4\kappa\pi \\ \frac{x}{2}\neq 2\kappa\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right) \wedge \underset{\text{ταυτότητα.}}{\frac{x}{2}\neq(2\kappa+1)\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4\kappa\pi \\ x\neq 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\left\{4\kappa\pi, 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \exists I=\left(-\frac{\pi}{8},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{8}\right)\subseteq A$$ στο οποίο περιορίζω την f.

$$\forall x\in I: f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\frac{(1-\cos x)+\sin x}{(1-\cos x)-\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}} \rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}\sin\frac{x}{2}+\lim_{x\to0}\cos\frac{x}{2}}{\lim_{x\to0}\sin\frac{x}{2}-\lim_{x\to0}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin 0+\cos 0}{\sin 0-\cos 0}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

3) Μερικές ασκήσεις λύνονται με τα κριτήρια σύγκλισης στο 0.

• <u>Παραδείγματα.</u> : Να βρεθούν τα όρια:

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)$;

<u>Λύση</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \\ \sin \text{ φραγμένη}\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

2) $f(x)=\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} \longrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow A=[0,+\infty)$.

$$\forall x\in(0,+\infty): |f(x)|=\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|=$$

$$=2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\leq 2\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=$$

$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\leq$$

$$\left.\begin{array}{l}\leq\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \forall x\in(0,+\infty): |f(x)|\leq\frac{1}{\sqrt{x}} \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0\end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

4) Μερικές φορές, η απροσδιοριστία αίρεται με το θεώρημα του Del'Hospital που θα δούμε παρακάτω.

Εφαρμογές της έννοιας της συνέχειας.

▼ Το θεώρημα Bolzano και οι εφαρμογές του.

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) : f(x_0)=0.}$

Απόδειξη

$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow f(a), f(b)$ ετερόσημοι. Εστω $f(a)<0$ και $f(b)>0$.

▸ Θα κατασκευάσω μία ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων ($[a_n, b_n]$) με την ιδιότητα $f(a_n)<0 \wedge f(b_n)>0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. και θα δείξω ότι $x_0 = \bigcap([a_n, b_n])$.

Θέτω $[a_1, b_1]=[a,b]$.

Αν $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

Αν $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$, κατασκευάζω τα υπόλοιπα διαστήματα ως εξής:

Εστω ότι κατασκευάστηκε το $[a_n, b_n]$ και είναι $a_n - b_n = \frac{a_1-b_1}{2^{n-1}}$, $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$ και $f(a_n)<0 \wedge f(b_n)>0$.

Θα κατασκευάσω το $[a_{n+1}, b_{n+1}]$

▸ Θέτω $\gamma_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Αν $f(\gamma_n)=0 \Leftrightarrow x_0=\gamma_n$.

Αν $f(\gamma_n)>0$, θέτω $[a_{n+1}, b_{n+1}]=[a_n, \gamma_n]$

Αν $f(\gamma_n)<0$, θέτω $[a_{n+1}, b_{n+1}]=[\gamma_n, b_n]$

Ετσι, ο όρος $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ κατασκευάστηκε.

Αν $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* : f(\gamma_{n_0})=0 \Rightarrow x_0=\gamma_{n_0}$.

Εστω $\forall n \in \mathbb{N}^* : f(\gamma_n)\neq 0$. Τότε κατασκευάζεται μία ακολουθία απείρων διαστημάτων $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$.

• Κιβωτισμός:

Εκ κατασκευής είναι $\forall n \in \mathbb{N}^* : [a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$. (1).

Εστω $\lambda_n = b_n - a_n$.

i) Αν $[a_{n+1}, b_{n+1}]=[a_n, \gamma_n] \Rightarrow \lambda_{n+1} = b_{n+1}-a_{n+1} = \gamma_n - a_n = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{\lambda_n}{2}$

ii) Αν $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [\gamma_n, b_n] \Rightarrow \lambda_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \gamma_n = b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\lambda_n}{2}$

Άρα: $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*: \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{2} \\ \lambda_1 = b - a \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim(b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^{n-1}} = (b-a) \lim \frac{1}{2^{n-1}} = (b-a) \lim \frac{1}{2^n} = (b-a) \cdot 0 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow ([a_n, b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow$ $\underline{\exists x_0 \in \mathbb{R}}: x_0 = \bigcap([a_n, b_n])$.

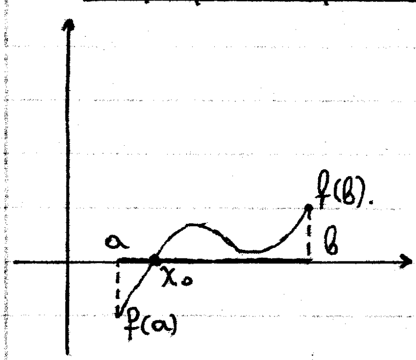
- Αρκεί $f(x_0) = 0$.

$\left.\begin{array}{l} x_0 = \bigcap([a_n, b_n]) \Rightarrow \lim a_n = \lim b_n = x_0 \\ f \text{ συνεχής στο } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(x_0)$. (1).

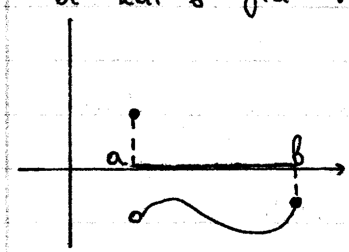
$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*: f(a_n) < 0 \Rightarrow f(x_0) = \lim f(a_n) \leq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*: f(b_n) > 0 \Rightarrow f(x_0) = \lim f(b_n) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) = 0$

Άρα $\exists x_0 \in (a,b): f(x_0) = 0$.

→ <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>: Εάν μία συνεχής καμπύλη στο $[a,b]$ ξεκινά από αρνητικές τιμές και καταλήγει σε θετική τιμή, ή αντίστροφα, τότε αναγκαστικά τέμνει τον άξονα των $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0.



- <u>Παρατήρηση:</u> Η συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής <u>και</u> στα σημεία a και b για να ισχύει το θ. Bolzano, ~~διαφορετικά~~ Αντιπαράδειγμα:



→ f ασυνεχής στο a.

<u>Μέθοδοι - ασκήσεις (στο θ. Bolzano)</u>

1) Δείξτε ότι η εξίσωση $\sin(\cos 3x)$ έχει λύση στο $(0, \pi)$.

<u>Λύση</u>

Θέτω $f(x) = \sin(\cos 3x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$f = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ όπου $g_1(x) = \sin x$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = 3x$.

g_2 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως τριγονομετρική
g_3 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $\Rightarrow g_2 \circ g_3$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών
g_1 συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως τριγωνομετρική $\Rightarrow$
$\Rightarrow f = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ συνεχής στο $[0,\pi]$.
$f(0) = \sin(\cos 0) = \sin 1 \neq 0$
$f(\pi) = \sin(\cos\pi) = \sin(-1) = -\sin 1$ $\Rightarrow f(0)\cdot f(1) = -\sin^2 1 < 0$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ισχύει το θ. Bolzano στο $[0,\pi] \Rightarrow \exists x_0 \in (0,\pi) : f(x_0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Η εξίσωση $\sin(\cos 3x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,\pi)$.

$\Rightarrow$ Για να δείξω ότι μία εξίσωση $f(x)=0$ έχει <u>μία μόνο</u> λύση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$,

- 1 Δείχνω ότι έχει μία τουλάχιστον λύση με το θ. Bolzano.
- 2 Δείχνω ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ ή εφαρμόζω το θ. Rolle το οποίο θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Βέβαια, εαν είναι δυνατόν να λυθεί η εξίσωση, τότε λύνω την εξίσωση.

2) Δείξτε ότι η εξίσωση $\tan x + x - 1 = 0$ έχει μία μόνο λύση στο διάστημα $(0,1)$.

<u>Λύση</u>

Θέτω $f(x) = \tan x + x - 1$, $\forall x \in [0,1]$. $\Rightarrow f = g_1 + g_2$ με $g_1(x) = \tan x$
$g_2(x) = x - 1$

g_1 συνεχής στο $[0,1] \subset [0,\pi)$ ως τριγωνομετρική
g_2 συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών (1).
$f(0) = \tan 0 + 0 - 1 = -1$
$f(1) = \tan 1 + 1 - 1 = \tan 1$ $\Rightarrow f(0)\cdot f(1) = -\tan 1 < 0$, διότι $0 < 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan 1 > 0$
(2).
(1),(2) $\Rightarrow$ ισχύει το θ. Bolzano στο $[0,1] \Rightarrow \exists x_0 \in (0,1) : f(x_0) = 0$
Εστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει και άλλη ρίζα την x_1, και π.χ. $x_0 < x_1$.
$g_1(x) = \tan x$ γνησίως αύξουσα στο $[0,1] \subset [0,\frac{\pi}{2}]$
$g_2(x) = x - 1$ γνησίως αύξουσα στο $[0,1] \subset [0,\frac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow f = g_1 + g_2$ γνησίως αύξουσα στο $[0,1] \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_0) = 0 \Rightarrow x_1$ όχι ρίζα της $f(x)=0$ $\leftarrow$ Ατοπο.
Αρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

→ Μερικές φορές, η οριακή συμπεριφορά κάποιων όρων της εξίσωσης βοηθάει στην εφαρμογή του Θ.Bolzano.

3) Δείξτε ότι η εξίσωση $x(6+\cos x)+(x^2+1)\cos x=-1$ δεν είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Είναι $x(6+\cos x)+(x^2+1)\cos x=-1 \Leftrightarrow 6x+x\cos x+x^2\cos x+\cos x=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6x+1)+(x^2+x+1)\cos x=0 \Leftrightarrow \dfrac{6x+1}{x^2+x+1}+\cos x=0$. (1).

Αρκεί να βρω ένα διάστημα ~~στο~~ ~~στο~~ $[x_1,x_2]$ στο οποίο να ισχύει το Θ. Bolzano.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=6\cdot 0=0 \Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R}: \forall x\in\mathbb{R}, x>x_0: \left|\frac{6x+1}{x^2+x+1}\right|<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{6x+1}{x^2+x+1}<\frac{1}{2}\ ,\ \forall x\in(x_0,+\infty). \quad (1).$$

Παίρνω $\kappa\in\mathbb{N}^*: \kappa>\dfrac{x_0}{2\pi} \Leftrightarrow$ ~~⇔~~ $2\kappa\pi>x_0$.

Για $x_1=2\kappa\pi>x_0 \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{6x_1+1}{x_1^2+x_1+1}>\dfrac{-1}{2}\\ \cos x_1=\cos 2\kappa\pi=1\end{cases} \Rightarrow f(x_1)=\dfrac{6x_1+1}{x_1^2+x_1+1}+\cos x_1>1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ (2).

Για $x_2=2\kappa\pi+\pi>x_0 \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{6x_2+1}{x_2^2+x_2+1}<\dfrac{1}{2}\\ \cos x_2=\cos(2\kappa\pi+\pi)=-1\end{cases} \Rightarrow f(x_2)=\dfrac{6x_2+1}{x_2^2+x_2+1}+\cos x_2<-\dfrac{1}{2}$ (3).

(2),(3) $\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)<0$. (4).

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών (ρητής και τριγωνομετρικής) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ συνεχής στο $[x_1,x_2] \overset{(4)}{\Rightarrow}$ ισχύει το Θ. Bolzano στο $[x_1,x_2] \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x_0\in[x_1,x_2]: f(x)=0 \Rightarrow$ Η εξίσωση (1) έχει ρίζα στο $\mathbb{R} \Rightarrow$
Η εξίσωση $x(6+\cos x)+(x^2+1)\cos x=-1$ έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$ την x_0.

→ Εφαρμογές του Θ.Bolzano

1. $\boxed{\left.\begin{array}{l}P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\ n=2\kappa+1\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\rho\in\mathbb{R}: \rho \text{ ρίζα } P(x)}$

Απόδειξη : Εαν $a_n>0$.

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n=a_n\lim_{x\to+\infty}x^{2\kappa+1}=+\infty \Rightarrow \exists\, a\in\mathbb{R}: P(a)>0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n=a_n\lim_{x\to-\infty}x^{2\kappa+1}=-\infty \Rightarrow \exists b\in\mathbb{R}: P(b)<0$$

▸ Παίρνω $x_1=\min\{a,b\}$ και $x_2=\max\{a,b\}$ οπότε.

P συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $\Rightarrow$ P συνεχής στο $[x_1,x_2]$ $\Big\}\Rightarrow$
$P(x_1)\cdot P(x_2)=P(a)\cdot P(b)<0$

$\Rightarrow$ ισχύει το θ. Bolzano στο $[x_1,x_2]$ $\Rightarrow \exists\, \rho\in(x_1,x_2): P(\rho)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \rho\in\mathbb{R}$: ρ ρίζα $P(x)$.

Ομοια, αν $a_n<0$.

2. $\boxed{\forall a\in(0,+\infty): \exists\, x\in\mathbb{R}: x^n=a}$ $(n\in\mathbb{N}^*, n>1)$.

Απόδειξη: Εστω ένα $a\in(0,+\infty)$.

Εστω $f(x)=x^n-a,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$f(0)=0-a=-a<0$
$f(a+1)=(a+1)^n-a \geq (a+1)-a=1>0$ $\Big\}\Rightarrow f(0)\cdot f(a+1)<0$ (1).

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $\Rightarrow f$ συνεχής στο $[0,a+1]$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow$ ισχύει το θ. Bolzano στο $[0,a+1]$ $\Rightarrow \exists\, x_0\in(0,a+1): f(x_0)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0^n-a=0 \Rightarrow x_0^n=a$.

3. $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f(a)<f(b)\end{array}\Big\}\Rightarrow (f(a),f(b))\subseteq f([a,b])}$

Απόδειξη

Εστω $n\in(f(a),f(b)) \Rightarrow f(a)<n<f(b) \Rightarrow \begin{cases} f(a)-n<0 \\ f(b)-n>0\end{cases}$.

▸ Θέτω $g(x)=f(x)-n,\ \forall x\in[a,b]$.

f συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow g$ συνεχής στο $[a,b]$ $\Big\}\Rightarrow$ ισχύει το θ. Bolzano στο $[a,b]$ $\Rightarrow$
$g(a)=f(a)-n<0$
$g(b)=f(b)-n>0$ $\Big\}\Rightarrow g(a)\cdot g(b)<0$

$\Rightarrow \exists\, x_0\in(a,b): g(x_0)=f(x_0)-n=0 \Rightarrow \exists\, x_0\in(a,b): f(x_0)=n \Rightarrow n\in f([a,b])$

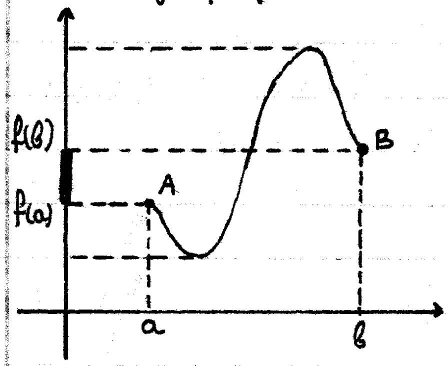
Αρα, $\forall n\in(f(a),f(b)): n\in f([a,b]) \Rightarrow (f(a),f(b))\subseteq f([a,b])$.

4. $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [a,b] \\ f(a)>f(b)\end{array}\Big\}\Rightarrow (f(b),f(a))\subseteq f([a,b])}$

Απόδειξη

Ομοια...

→ Οι προτάσεις 3 και 4 είναι γνωστές ως <u>θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών</u> και η γεωμετρική του ερμηνεία δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



• Αν προβάλλουμε τα άκρα A και B, τμήματος μίας συνεχούς καμπύλης στον άξονα y'y, τότε όλα τα σημεία μεταξύ των προβολών f(α) και f(β) είναι σημεία του πεδίου τιμών $f([\alpha,\beta])$ της συνάρτησης.

• Ως γνωστόν, ένα σύνολο I λέγεται <u>διάστημα</u> όταν είναι της μορφής (α,β) ή $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ ή $[\alpha,\beta]$, δηλαδή

I διάστημα $\Leftrightarrow \exists\, \alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}} : I=(\alpha,\beta) \vee I=[\alpha,\beta) \vee I=(\alpha,\beta] \vee I=[\alpha,\beta]$.

Επίσης ισχύει το κριτήριο

I διάστημα $\Leftrightarrow \forall\, \eta_1,\eta_2 \in I,\ \eta_1<\eta_2 : [\eta_1,\eta_2] \subseteq I$.

5. $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο διάστημα } I \\ f \text{ όχι σταθερή στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow f(I) \text{ διάστημα}}$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\underline{\eta_1,\eta_2 \in f(I)}$ με $\eta_1<\eta_2$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \alpha,\beta \in I : f(\alpha)=\eta_1 \wedge f(\beta)=\eta_2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1<\eta_2 \Rightarrow f(\alpha)<f(\beta) \\ f \text{ συνεχής στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (f(\alpha),f(\beta)) \subseteq f(I) \\ f(\alpha),f(\beta) \in f(I) \end{array}\right\} \Rightarrow [\eta_1,\eta_2]=[f(\alpha),f(\beta)] \subseteq f(I).$$

Άρα, $\forall\, \eta_1,\eta_2 \in f(I) : [\eta_1,\eta_2] \subseteq f(I) \Rightarrow f(I)$ διάστημα.

▼ <u>Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης</u>

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l} f: I \to f(I) \text{ συνεχής στο } I \\ f \text{ γνησίως μονότονη στο } I \\ I \text{ διάστημα ανοιχτό.} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ αντιστρέψιμη με} \\ f^{-1} \text{ συνεχή στο } f(I). \end{array}}$

<u>Απόδειξη</u>

$$\left.\begin{array}{l} f: I \to f(I) \Rightarrow f \text{ "επί"} \\ f \text{ γνησίως μονότονη} \Rightarrow f \text{ "1-1"} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ αντιστρέψιμη με αντίστροφη την} \\ f^{-1}: f(I) \to I. \end{array}$$

Αν π.χ. f γνησίως αύξουσα στο $I \Rightarrow f^{-1}$ γνησίως αύξουσα στο $f(I)$.

Θα δείξω ότι f^{-1} συνεχής στο $f(I)$.

Έστω $y_0 \in f(I) \Rightarrow \exists\, x_0 \in I : y_0 = f(x_0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ γνησίως μονότονη στο } I \Rightarrow f \text{ όχι σταθερή στο } I \\ f \text{ συνεχής στο διάστημα } I \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(I) \text{ διάστημα} \\ y_0 \in f(I) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_0$ σημείο συσσώρευσης του $f(I)$.

Αρκεί $\lim\limits_{x \to y_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0)) = x_0$.

Αν $I = (-\infty, +\infty)$, θέτω $\varepsilon_0 \in (0, +\infty)$.

Αν $I = (a, +\infty)$, θέτω $\varepsilon_0 = \dfrac{x_0 - a}{2}$

Αν $I = (-\infty, \beta)$, θέτω $\varepsilon_0 = \dfrac{\beta - x_0}{2}$

Αν $I = (a, \beta)$, θέτω $\varepsilon_0 = \min\left\{\dfrac{x_0 - a}{2}, \dfrac{\beta - x_0}{2}\right\}$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Σ' όλες τις περιπτώσεις $(x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \subset I$.

Έστω $\underline{\varepsilon > 0}$.

i) Αν $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \Rightarrow x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in I$.

Είναι $|f^{-1}(x) - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f^{-1}(x) - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(x) < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x_0 - \varepsilon) < f(f^{-1}(x)) < f(x_0 + \varepsilon) \Leftrightarrow$ (διότι $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in I$ και f, f^{-1} γνησίως αύξουσες) $\Leftrightarrow f(x_0 - \varepsilon) < x < f(x_0 + \varepsilon)$ (1).

Παίρνω $\delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\}$.

$$\left.\begin{array}{l} x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0 \\ f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) > 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_0 - f(x_0 - \varepsilon) > 0 \\ f(x_0 + \varepsilon) - y_0 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\} > 0.$$

~~$\forall x \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap f(I) - \{y_0\} : y_0 - \delta < x < y_0 + \delta \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow f(x_0 - \varepsilon)$~~

$$\delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta \leq y_0 - f(x_0 - \varepsilon) \\ \delta \leq f(x_0 + \varepsilon) - y_0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x_0 - \varepsilon) \leq y_0 - \delta \\ f(x_0 + \varepsilon) \geq y_0 + \delta. \end{array}\right.$$

$\forall x \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap f(I) - \{y_0\} : y_0 - \delta < x < y_0 + \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) \leq y_0 - \delta < x < y_0 + \delta \leq f(x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) < x < f(x_0 + \varepsilon) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \underline{|f^{-1}(x) - x_0| < \varepsilon}.$

ii) Αν $\varepsilon > \varepsilon_0$, τότε από το i)

$\exists \delta > 0 : \forall x \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap f(I) - \{y_0\} : |f^{-1}(x) - x_0| < \varepsilon$.

ΑΡΑ: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap f(I) - \{y_0\} : |f^{-1}(x) - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to y_0} f^{-1}(x) = x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow f^{-1}$ συνεχής στο y_0, $\forall y_0 \in f(I) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}$ συνεχής στο $f(I)$

2. Συνέχεια αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

▶ Εαν εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα στην συνάρτηση $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$. προκύπτει οτι η Arctan είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δηλαδη:

• $\boxed{\lim_{x \to x_0} \text{Arctan}\, x = \text{Arctan}\, x_0 \,, \forall x_0 \in \mathbb{R}}$

Θα δείξουμε επίσης ότι:

•1 $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}}$

Απόδειξη: Εστω $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$

$|\text{Arctan}\, x - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \text{Arctan}\, x - \frac{\pi}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \text{Arctan}\, x < \frac{\pi}{2} + \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \text{Arctan}\, x$ (διότι $\text{Arctan}\, x < \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) < \tan(\text{Arctan}\, x)$ (διότι tan γν. αύξουσα στο $(-\pi/2, \pi/2)$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cot \varepsilon < x.$ (1).

▶ Παίρνω $x_0 = \cot \varepsilon$ οπότε $\forall x \in (x_0, +\infty) : x > x_0 \Rightarrow x > \cot \varepsilon \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow |\text{Arctan}\, x - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$

Αν $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$, τότε παίρνω $x_0 = \cot \frac{\pi}{6}$ ...

Αρα $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > x_0 : |\text{Arctan}\, x - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$.

•2 $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2}}$

Απόδειξη: Εστω $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$

$|\text{Arctan}\, x + \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \text{Arctan}\, x + \frac{\pi}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \text{Arctan}\, x < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Arctan}\,x < -\frac{\pi}{2}+\varepsilon \Leftrightarrow \tan(\mathrm{Arctan}\,x) < \tan\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) \Leftrightarrow x < -\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow x < -\cot\varepsilon. \quad (1).$$

▸ Παίρνω $\underline{x_0=\cot\varepsilon}$ οπότε $\underline{\forall x\in\mathbb{R},\, x<-x_0}$: $x<-\cot\varepsilon \overset{(1)}{\Longrightarrow} \underline{\left|\mathrm{Arctan}\,x+\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon}$.

Άρα : $\forall \varepsilon>0, \exists x_0>0 : \forall x\in\mathbb{R},\, x<-x_0 : \left|\mathrm{Arctan}\,x+\frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon \rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}\,x = -\frac{\pi}{2}$.

↳ Επειδή $\mathrm{Arctan}\,x+\mathrm{Arccot}\,x=\frac{\pi}{2},\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Arccot}\,x = \frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,x$

οπότε,

$$\boxed{\forall x_0\in\mathbb{R}: \lim_{x\to x_0}\mathrm{Arccot}\,x = \mathrm{Arccot}\,x_0} \quad \begin{matrix} \nearrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Arccot}\,x = 0} \\ \searrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{Arccot}\,x = \pi} \end{matrix}$$

Θ1) $\boxed{\text{Arcsin συνεχής στο } [-1,1]}$

<u>Απόδειξη</u>

$$\forall x\in(-1,1): \mathrm{Arcsin}\,x = \mathrm{Arctan}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] \Longrightarrow \forall x_0\in(-1,1): \lim_{x\to x_0}\mathrm{Arcsin}\,x =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\mathrm{Arctan}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \mathrm{Arctan}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \mathrm{Arctan}\left[\frac{\lim\limits_{x\to x_0}x}{\sqrt{1-\lim\limits_{x\to x_0}x^2}}\right] =$$

$$= \mathrm{Arctan}\left[\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\right] = \mathrm{Arcsin}\,x_0 \rightarrow \text{Arcsin συνεχής στο } (-1,1).$$

• Στο 1,

$$\left.\begin{matrix} \forall x\in(-1,1): \sqrt{1-x^2}>0 \\ \lim\limits_{x\to1}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)} = \sqrt{1-1}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1} x = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Arctan}\,x = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1}\mathrm{Arcsin}\,x = \lim_{x\to1}\mathrm{Arctan}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{\pi}{2} = \mathrm{Arc}\overset{\sin}{\cancel{\tan}}\,1 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Arcsin συνεχής στο } 1.$$

• Στο −1, όμοια

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-1} x = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{Arctan}\,x = -\dfrac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-1}\mathrm{Arcsin}\,x = \lim_{x\to-1}\mathrm{Arctan}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = -\frac{\pi}{2} = \mathrm{Arcsin}(-1) \rightarrow \text{Arcsin συνεχής στο } -1.$$

Άρα: Arcsin συνεχής στο $[-1,1]$.

↳ Άμεση συνέπεια του Θι είναι ότι
$$\boxed{\forall x_0 \in [-1,1] : \lim_{x\to x_0} \text{Arcsin}\,x = \text{Arcsin}\,x_0}$$

• Επειδή $\text{Arcsin}\,x + \text{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1] \Rightarrow \text{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\,x, \forall x \in [-1,1]$
προκύπτει ότι
$$\boxed{\forall x_0 \in [-1,1] : \lim_{x\to x_0} \text{Arccos}\,x = \text{Arccos}\,x_0}$$

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \text{Arctan}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)\right] &, x \in [0,+\infty) \\ (2\lambda+1)\pi + \text{Arccot}\left(\frac{1}{x}\right) &, x \in (-\infty,0). \end{cases}$

Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

• <u>Στο $(0,+\infty)$</u>, $f = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ όπου $g_1(x) = \text{Arctan}\,x$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = \frac{\pi x}{8}$

g_3 συνεχής ως πολυωνυμική, g_2 συνεχής ως τριγωνομετρική $\Rightarrow$ $g_2 \circ g_3$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών, g_1 συνεχής ως αντίστροφη τριγ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow f = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

• <u>Στο $(-\infty,0)$</u>, $f = g_4 + g_5 \circ g_6$ όπου $g_4(x) = (2\lambda+1)\pi$, $g_5(x) = \text{Arccot}\,x$, $g_6(x) = \frac{1}{x}$

g_6 συνεχής ως ρητή, g_5 συνεχής ως αντίστροφη τριγ. $\Rightarrow$ $g_5 \circ g_6$ συνεχης ως σύνθεση συνεχών, g_4 συνεχής ως σταθερή $\Rightarrow$
$\Rightarrow f = g_4 + g_5 \circ g_6$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

• <u>Στο 0</u>, $f(0) = \text{Arctan}[\cos 0] = \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$

$\forall x \in (0,+\infty) : f(x) = \text{Arctan}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)\right] \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \text{Arctan}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)\right] =$

$= \text{Arctan}\left[\lim_{x\to 0^+} \cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)\right] = \text{Arctan}\left[\cos\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi x}{8}\right)\right] = \text{Arctan}[\cos 0] =$
$= \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}.$

$\forall x \in (-\infty,0) : f(x) = (2\lambda+1)\pi + \text{Arccot}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[(2\lambda+1)\pi + \text{Arccot}\left(\frac{1}{x}\right)\right] =$

$= (2\lambda+1)\pi + \lim_{x\to 0^-} \text{Arccot}\left(\frac{1}{x}\right) = (2\lambda+1)\pi + \pi = (2\lambda+2)\pi$, διότι $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

f συνεχής στο $\mathbb{R} \leftrightarrow f$ συνεχής στο $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\lambda+2)\pi = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 8\lambda+8=1 \Leftrightarrow 8\lambda=-7 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -\frac{7}{8}}$

2) Δείξτε ότι η εξίσωση $\text{Arcsin}x + 3\text{Arcsin}(\cos x) = \frac{3\pi}{2}$ έχει μία λύση στο Π.Ο. της.

<u>Λύση</u>

Είναι $\text{Arcsin}x + 3\text{Arcsin}(\cos x) = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arcsin}x + 3\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(\cos x)\right) = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Arcsin}x + \frac{3\pi}{2} - 3x = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arcsin}x - 3x = 0.$ (1).

Θέτω $f(x) = \text{Arcsin}x - 3x,\ \forall x \in [-1,1]$

f συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα συνεχών (αντίστροφης τριγωνομετρικής και πολυωνυμικής) (2).

$f(-1) = \text{Arcsin}(-1) - 3(-1) = -\frac{\pi}{2} + 3$

$f(1) = \text{Arcsin}\,1 - 3\cdot 1 = \frac{\pi}{2} - 3$

$\Rightarrow f(-1)\cdot f(1) = -\left(\frac{\pi}{2}-3\right)^2 < 0 \xrightarrow{(2)}$

$\Rightarrow$ ισχύει το Θ. Bolzano στο $[-1,1] \Rightarrow \exists\, x_0 \in (-1,1) : f(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Arcsin}x - 3x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$ Η εξίσωση $\text{Arcsin}x + 3\text{Arcsin}(\cos x) = \frac{3\pi}{2}$ έχει μία λύση στο $[-1,1]$.

3) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, αν $f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{x^2-1}\right)$

<u>Λύση</u>

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \text{Arcsin}\left[\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{x^2-1}\right] = \text{Arcsin}\left[\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\tan\left(\frac{\pi}{x^2-1}\right)\right] =$$

$$= \text{Arcsin}\left[\frac{1}{2}\tan\left(\lim_{x\to 2}\frac{\pi}{x^2-1}\right)\right] = \text{Arcsin}\left[\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4-1}\right)\right] = \text{Arcsin}\left[\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{3}\right] = \ell \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{3} = \sin\ell \Leftrightarrow \sin\ell = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \ell = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{\pi}{3}.$$

▼ <u>Συνέχεια και φράγματα συνάρτησης</u>

Θ1) $\boxed{f \text{ συνεχής στο } [a,b] \Rightarrow f \text{ φραγμένη στο } [a,b]}$, όπου $a,b \in \mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω f όχι φραγμένη στο $[a,b]$.

▶ Θα κατασκευάσω μία ακολουθία $([a_n,b_n])$ κιβωτισμένων διαστημάτων με την ιδιότητα $\forall n\in\mathbb{N}^*$: f όχι φραγμένη στο $[a_n,b_n]$.

Παίρνω $[a_1,b_1]=[a,b]$. $\Rightarrow f$ όχι φραγμένη στο $[a_1,b_1]$

Έστω ότι κατασκευάστηκε το n-οστό διάστημα $[a_n,b_n]$ και f όχι φραγμένη στο $[a_n,b_n]$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ όχι φραγμένη στο $[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]$ $\vee$ f όχι φραγμένη στο $[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]$, διότι αν

f φραγμένη στο $[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]\Rightarrow \exists\theta_1\in(0,+\infty): |f(x)|\leq\theta_1, \forall x\in[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]$, και

f φραγμένη στο $[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]\Rightarrow\exists\theta_2\in(0,+\infty):|f(x)|\leq\theta_2,\forall x\in[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]$

▶ Παίρνω $\theta=\max\{\theta_1,\theta_2\}$ οπότε

$\forall x\in[a_n,b_n]:|f(x)|\leq\theta\Rightarrow f$ φραγμένη στο $[a_n,b_n]\longleftarrow$ Άτοπο, άρα ισχύει

▶ Παίρνω ως $[a_{n+1},b_{n+1}]$ το ένα από τα δύο διαστήματα $[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]$ ή $[\frac{a_n+b_n}{2},b_n]$ στο οποίο η f όχι φραγμένη.

Έτσι, ορίστηκε η $([a_n,b_n])$: f όχι φραγμένη στο $[a_n,b_n], \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Εκ κατασκευής, $\forall n\in\mathbb{N}^*:[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$

και $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}, \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim(b_n-a_n)=0$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]:\forall n\in\mathbb{N}^*:\xi\in[a_n,b_n]$.

Είναι f όχι φραγμένη στο $[a_n,b_n],\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*:\exists q_n\in[a_n,b_n]:|f(q_n)|>n$.

Επειδή $\lim n=+\infty$
$\forall n\in\mathbb{N}^*: |f(q_n)|>n$ $\Bigg\}\Rightarrow$ $\underline{\lim|f(q_n)|=+\infty.}$

Είναι $q_n\in[a_n,b_n],\forall n\in\mathbb{N}^*$
$\xi\in[a_n,b_n],\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\Bigg\}\Rightarrow 0\leq|q_n-\xi|\leq|a_n-b_n|,\forall n\in\mathbb{N}^*$
$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow\lim(a_n-b_n)=0$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim(q_n-\xi)=0\Rightarrow\lim q_n=\xi\in[a,b]$
f συνεχής στο $[a,b]$ $\Bigg\}\Rightarrow\lim f(q_n)=f(\xi)\Rightarrow$

$\Rightarrow\lim|f(q_n)|=|f(\xi)|\longleftarrow$ Άτοπο, διότι $\lim|f(q_n)|=+\infty$.

Άρα: f φραγμένη στο $[a,b]$.

↳ Σύμφωνα με το Θ_1, κάθε συνάρτηση συνεχής σε <u>κλειστό</u> διάστημα $[a,b]$ είναι φραγμένη σε αυτό, άρα έχει inf και sup. Θα δείξουμε ότι το inf είναι ελάχιστο και το sup μέγιστο της f, ότι δηλαδή

~~το ελάχιστο~~

Θ2) $\boxed{f \text{ συνεχής στο } [a,b] \Rightarrow \exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b] : \forall x \in [a,b] : f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)}$

Απόδειξη

f συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow f$ φραγμένη στο $[a,b] \Rightarrow f$ άνω φραγμένη στο $[a,b]$
$\Rightarrow$ Το $f([a,b])$ είναι άνω φραγμένο με $M = \sup f([a,b])$.

• Έστω $M \notin f([a,b]) \Rightarrow \forall x \in [a,b] : f(x) < M \Rightarrow M - f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$.

Θέτω $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}, \forall x \in [a,b]$ διότι $M - f(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$.

f συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow g$ συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow g$ φραγμένη στο $[a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \vartheta \in (0,+\infty) : |g(x)| \leq \vartheta \Leftrightarrow \frac{1}{|\underbrace{M-f(x)}_{+}|} \leq \vartheta \Leftrightarrow \frac{1}{M-f(x)} \leq \vartheta \Leftrightarrow \underset{+}{\vartheta}\,(M - f(x)) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow M - f(x) \geq \frac{1}{\vartheta} \Leftrightarrow f(x) \leq M - \overset{+}{\frac{1}{\vartheta}}, \forall x \in [a,b] \Rightarrow$$

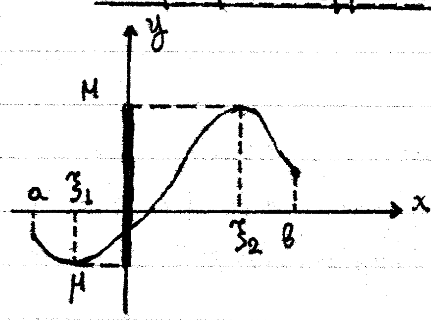
$\Rightarrow f$ άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα το $M - \frac{1}{\vartheta} < M = \sup f([a,b]) \leftarrow$ Άτοπο.

Άρα: $M \in f([a,b]) \Rightarrow \exists \xi_2 \in [a,b] : M = f(\xi_2)$.
M άνω φράγμα της f στο $[a,b]$
$\Big\} \Rightarrow \exists \xi_2 \in [a,b] : f(x) \leq f(\xi_2), \forall x \in [a,b]$

Όμοια $\exists \xi_1 \in [a,b] : f(x) \geq f(\xi_1), \forall x \in [a,b]$.

Άρα, $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b] : \forall x \in [a,b] : f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$.

↳ **Γεωμετρική ερμηνεία**: Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε σ'αυτό το διάστημα έχει ελάχιστο το $\mu = f(\xi_1)$ και μέγιστο το $M = f(\xi_2)$.
Αν μάλιστα, $\mu < M$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών $f([a,b]) = [\mu, M]$.



▼ ~~Πεδίο τιμών συνεχούς συνάρτησης~~

~~Θ. f συνεχής στο (a,b)~~
~~f γνησίως μονότονη στο (a,b)~~ $\Big\} \Rightarrow \Big\{$ $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$
$f((a,b)) = (l_1$

▼ Πεδίο τιμών συνεχούς συνάρτησης $f \in F_I$ με $I=(a,b)$

Θ1)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } I=(a,b) \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{a} f,\ \lim\limits_{b} f \in \overline{\mathbb{R}} \\ f(I) = \left(\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f\right) \end{cases}}$$
όπου $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Απόδειξη

i) Αν
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ φραγμένη άνω στο } I \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{b} f = \ell_2 \in \mathbb{R}.$$

ii) Αν
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ όχι φραγμένη άνω στο } I \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{b} f = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Άρα, $\lim\limits_{b} f = L_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Όμοια $\lim\limits_{a} f \overset{=L_1}{\in} \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Θα δείξω ότι $f(I) = (L_1, L_2)$.

Ευθύ: Έστω $\ell \in (L_1, L_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{a} f = L_1 \Rightarrow \exists x_1 \in I : f(x_1) \in (L_1, \ell) \Rightarrow \exists x_1 \in I : f(x_1) < \ell. \\ \lim\limits_{b} f = L_2 \Rightarrow \exists x_2 \in I : f(x_2) \in (\ell, L_2) \Rightarrow \exists x_2 \in I : f(x_2) > \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_1) < \ell < f(x_2) \\ f \text{ συνεχής στο } [x_1, x_2] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ισχύει το θ. ενδιάμεσων τιμών στο } [x_1,x_2] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} [f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(I) \\ \ell \in (f(x_1), f(x_2)) \end{array}\right\} \Rightarrow \ell \in f(I).$$

Άρα $(L_1, L_2) \subseteq f(I)$.

Αντίστροφο:

i) Αν $L_1 = -\infty \Rightarrow \forall x \in (a,b) : f(x) > L_1$.

ii) Έστω $L_1 \in \mathbb{R}$. Αρκεί $L_1 = \inf f$.

Έστω
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ όχι φραγμένη κάτω στο } I \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{a} f = L_1 = -\infty \leftarrow \text{Άτοπο.}$$

Άρα
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ φραγμένη κάτω στο } I \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow \inf f = \lim_{a} f = L_1 \Rightarrow \begin{cases} L_1 \text{ κάτω φράγμα της } f \text{ στο } I \quad (1) \\ \forall \varepsilon > 0 : L_1 - \varepsilon \text{ όχι κάτω φράγμα της } f \text{ στο } I. \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \forall x \in (a,b) : f(x) \geq L_1$

► Έστω ότι $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = L_1$. Παίρνω $x_1 \in (a, x_0)$ οπότε

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_0 \\ f \text{ γνησίως αύξουσα στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) = L_1 \leftarrow \text{Άτοπο.}$$

Άρα $\forall x \in (a,b) : f(x) > L_1$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\forall x \in (a,b) : f(x) < L_2$.

Άρα $f(I) \subseteq (L_1, L_2)$
είναι και $(L_1, L_2) \subseteq f(I)$ $\Big\} \Rightarrow f(I) = (L_1, L_2) = (\lim_a f, \lim_b f)$.

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$, $\forall x \in (1,5)$. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A = (1,5)$, δίνεται.

$-\frac{b}{2a} = -\frac{25}{2\cdot 3} = -\frac{5}{6} < 1 < 5$, $a = 3 > 0$ $\Big\} \Rightarrow$ f γνησίως αύξουσα στο $(1,5)$.
f συνεχής στο $(1,5)$ ως πολυωνυμική $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(A) = (\lim_{x\to 1} f(x), \lim_{x\to 5} f(x))$. (1).

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (3x^2 + 5x + 2) = 3 + 5 + 2 = 10$.

$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} (3x^2 + 5x + 2) = 3\cdot 25 + 5\cdot 5 + 2 = 75 + 25 + 2 = 102$ $\Big\} \xrightarrow{(1)} f(A) = (10, 102)$.

Όμοια με το Θ₁ αποδεικνύεται ότι

Θ₂) $\boxed{\begin{matrix} f \text{ συνεχής στο } I = (a,b) \\ f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } I \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \begin{cases} \lim_a f, \lim_b f \in \overline{\mathbb{R}} \\ f(I) = (\lim_b f, \lim_a f). \end{cases}}$

2) Όμοια, με την συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ στο $(0,3)$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A = (0,3)$.

$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 2} = 1$, $a = 2 > 0$ $\Big\} \Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και γνησίως αύξουσα στο $(1,3)$.

f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, f συνεχής στο $(0,1)$ $\Big\} \Rightarrow f((0,1)) = (\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x))$.

f γνησίως αύξουσα στο $(1,3)$, f συνεχής στο $(1,3)$ $\Big\} \Rightarrow f((1,3)) = (\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to 3} f(x))$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (2x^2 - 4x + 3) = 2\cdot 0 - 4\cdot 0 + 3 = 3$.

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (2x^2 - 4x + 3) = 2\cdot 1 - 4\cdot 1 + 3 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$.

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (2x^2 - 4x + 3) = 2\cdot 3^2 - 4\cdot 3 + 3 = 18 - 12 + 3 = 9$.

οπότε $f(A)=f((0,1))\cup f\{1\}\cup f((1,3))=(1,3)\cup\{1\}\cup(1,9)=[1,9)$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$, $\forall x\in(1,+\infty)$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το πεδίο τιμών της.

<u>Λύση</u>

Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1>x_2$.

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{2x_1^2}{x_1^2+1}-\frac{2x_2^2}{x_2^2+1}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{2x_1^2(x_2^2+1)-2x_2^2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{2x_1^2x_2^2+2x_1^2-2x_1^2x_2^2-2x_2^2}{(x_1-x_2)(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{2x_1^2-2x_2^2}{(x_1-x_2)(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=$$

$$=\frac{2(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}>0,$$ διότι $x_1>1 \wedge x_2>1 \Rightarrow x_1+x_2>0$.

$x_1^2+1>0$ και $x_2^2+1>0$ ώς άθρ. τέλειου τετραγώνου και θετικού.

Άρα $\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$: $\lambda=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

f συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως ρητή

$\Rightarrow f(A)=\left(\lim\limits_{x\to1}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=\dfrac{2\cdot1^2}{1^2+1}=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

$\Rightarrow f(A)=(1,2)$.

↳ Για να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα θεωρήματα, πρέπει να είναι γνωστή η μονοτονία της συνάρτησης. Μία γενική μέθοδο για την εύρεση της μονοτονίας μίας συνάρτησης θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων.