ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

▼ Η έννοια της ακολουθίας

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ακολουθία πραγματικών αριθμών ή απλούστερα πραγματική ακολουθία λέγεται κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ή $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

→ Όταν δεν αναφέρεται το πεδίο ορισμού της ακολουθίας θα εννοείται το $\mathbb{N}^*$. Η τιμή της ακολουθίας στο n συμβολίζεται a_n (αντί $a(n)$) και λέγεται όρος με δείκτη n. Έτσι μία ακολουθία συμβολίζεται

1) (a_n) ή αναλυτικότερα $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
2) (a_n) ή » $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

ανάλογα με το πεδίο ορισμού.

→ Μια ακολουθία μπορεί να οριστεί

1) Με τον γενικό της όρο a_n → Αναλυτικές ακολουθίες

π.χ. η ακολουθία $a_n = \dfrac{n+1}{2n^2+3}$

2) Επαγωγικά με αναδρομικό (αναγωγικό) τύπο. → Αναδρομικές ακολουθίες

i) αναδρομικές α' τάξης: Δίνεται ο 1ος όρος και μία αναδρομική σχέση που εκφράζει τον όρο $n+1$ τάξης συναρτήσει του προηγούμενου όρου n τάξης. π.χ. η ακολουθία $(a_n) : \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1 \end{cases}$

ii) αναδρομικές β' τάξης: Δίνονται ο 1ος και ο 2ος όρος και μία αναδρομική σχέση που εκφράζει τον όρο $n+2$ τάξης συναρτήσει των όρων n και $n+1$ τάξης. π.χ. $(a_n) : \begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$ ← Fibonacci

iii) αναδρομικές κ' τάξης : Δίνονται κ αρχικοί όροι $a_1, a_2, \ldots, a_\kappa$ και μία αναδρομική σχέση που εκφράζει τον γενικό όρο a_n συναρτήσει των κ προηγούμενων όρων. π.χ. $(a_n) : \begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_3 = 5 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n . \end{cases}$

Μονότονες ακολουθίες

ΟΡΙΣΜΟΙ:

(a_n) γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n < a_{n+1}$
(a_n) γνησίως φθίνουσα $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n > a_{n+1}$
(a_n) αύξουσα $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n \leq a_{n+1}$
(a_n) φθίνουσα $\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n \geq a_{n+1}$

Αν η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε θα λέγεται γνησίως μονότονη. Αν η (a_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα τότε θα λέγεται μονότονη. Φυσικά, όλες οι γνησίως μονότονες ακολουθίες είναι και μονότονες.

Μέθοδοι καθορισμού μονοτονίας μιας ακολουθίας

1) Μέθοδος της διαφοράς → Βρίσκω το πρόσημο της διαφοράς $\Delta n = a_{n+1} - a_n$ και από τον ορισμό συμπεραίνω.

• Παράδειγμα: Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία, η ακολουθία

$$a_n = \frac{2n^2-n}{n+1}$$

Λύση

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \Delta n = a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)^2-(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n^2-n}{n+1} = \frac{2n^2+4n+2-n-1}{n+2} - \frac{2n^2-n}{n+1} =$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{n+2} - \frac{2n^2-n}{n+1} = \frac{(2n^2+3n+1)(n+1)-(2n^2-n)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{2n^3}+3n^2+n+2n^2+3n+1-\cancel{2n^3}-4n^2+n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2+6n+1}{(n+1)(n+2)} > 0 \text{, διότι}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: n>0 \Rightarrow \begin{cases} 2n^2+6n+1>0 \\ (n+1)(n+2)>0. \end{cases}$$

Άρα $\Delta n = a_{n+1} - a_n > 0, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα.

2) Μέθοδος πηλίκου → Εφαρμόζεται σε ακολουθίες αναλυτικού τύπου με όρους ομόσημους και που στον γενικό όρο αυτών δεν σημειώνεται πρόσθεση ή αφαίρεση.

• Θεωρώ τον λόγο $\lambda n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ τον οποίο συγκρίνω με την μονάδα οπότε από τον ορισμό συμπεραίνω.

• <u>Παραδείγματα</u> : Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι ακολουθίες

1) (a_n) με $a_n = \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$

<u>Λύση</u>

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>0.$ (1).

$\forall n\in\mathbb{N}^*: \lambda_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}}{\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}} = \dfrac{3n+1}{2n+1} > 1$ (διότι

$3n+1>2n+1 \Leftrightarrow n>0$, ισχύει) $\xrightarrow{(1)} \forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}>a_n \Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα.

2) $a_n = \dfrac{-n^n}{n!}$ • $(n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$, $0!=1)$.

<u>Λύση</u>

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n<0$ (1).

$\forall n\in\mathbb{N}^*: \lambda_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{-\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{-\dfrac{n^n}{n!}} = \dfrac{n!\,(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} = \dfrac{n!\,(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)\cdot n!} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} =$

$=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+n\cdot\dfrac{1}{n} = 1+1>1 \xrightarrow{(1)} \forall \nu\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}<a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_n)$ γνησίως φθίνουσα.

3) <u>Μέθοδος διαδοχικών διαφορών</u> •⟶ Εφαρμόζεται σε αναδρομικές ακολουθίες.

Αν οι διαφορές $\Delta_n = a_{n+1}-a_n$ και $\Delta_{n+1} = a_{n+2}-a_{n+1}$ είναι ομόσημες, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ τότε η ακολουθία είναι μονότονη και αντίστροφα ενώ αν είναι ετερόσημες έστω για μία τιμή του $n\in\mathbb{N}^*$, τότε η (a_n) δεν είναι μονότονη και αντίστροφα.

• <u>Παραδείγματα</u> : Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι ακολουθίες.

1) $(a_n): \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 3a_n-2 \end{cases}$

<u>Λύση</u>

$\Delta_{n+1} = a_{n+2}-a_{n+1} = (3a_{n+1}-2)-(3a_n-2) = 3(a_{n+1}-a_n) = 3\Delta_n, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: \Delta_n, \Delta_{n+1}$ ομόσημοι $\Rightarrow (a_n)$ μονότονη

Αλλά $\Delta_1 = a_2-a_1 = 3a_1-2-a_1 = 12-2-4 = 6>0 \Rightarrow \forall \nu\in\mathbb{N}^*: \Delta_n = a_{n+1}-a_n>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}>a_n \Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα.

2) $(a_n): \begin{cases} a_1 = a \ , \ a \in \mathbb{R}_+ \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{3} \end{cases}$

Λύση

$\forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}^2+2}{3} - \dfrac{a_n^2+2}{3} = \dfrac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{3} = \dfrac{(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)}{3}$

$= \dfrac{a_{n+1}+a_n}{3}\Delta_n$ (1)

Είναι $a_1 = a > 0$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (ως άθροισμα τετραγώνου και θετικού) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{a_{n+1}+a_n}{3} > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall \nu \in \mathbb{N}^* : \Delta_n, \Delta_{n+1}$ ομόσημοι (2)

$\Delta_1 = a_2 - a_1 = \dfrac{a^2+2}{3} - a = \dfrac{a^2-3a+2}{3}$

a	0		1		2	
a^2-3a+2	‖	+	0	−	0	+

- Αν $a \in (0,1) \cup (2,+\infty) \Rightarrow \Delta_1 > 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \forall \nu \in \mathbb{N}^* : \Delta_n = a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : a_{n+1} > a_n \Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα.
- Αν $a \in (1,2) \Rightarrow \Delta_1 < 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \forall \nu \in \mathbb{N}^* : \Delta_n = a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ $\Rightarrow (a_n)$ γνησίως φθίνουσα.
- Αν $a = 1 \Rightarrow \Delta_1 = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_n = a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n = a = 1.$
- Αν $a = 2 \Rightarrow \Delta_1 = 0 \Rightarrow$ ομοια $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n = a = 2.$

3) $(a_n): \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 + \dfrac{5}{a_n} \end{cases}$

Λύση

$\Delta_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = \left(3 + \dfrac{5}{a_{n+1}}\right) - \left(3 + \dfrac{5}{a_n}\right) = \dfrac{5}{a_{n+1}} - \dfrac{5}{a_n} = \dfrac{5(a_n - a_{n+1})}{a_n a_{n+1}} =$

$= \dfrac{-5(a_{n+1}-a_n)}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{-5}{a_n a_{n+1}} \Delta_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1).

Θα δείξω ότι $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n > 0$

Για $n = 1$, $a_1 = 2 > 0$, ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n = k$ ότι $a_k > 0$

Για $n = k+1$, $a_{k+1} = 3 + \dfrac{5}{a_k} > 0$, ισχύει

Άρα $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{-5}{a_n a_{n+1}} < 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_{n+1}, \Delta_n$ ετερόσημοι $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a_n)$ όχι μονότονη.

4) Μέθοδος επαγωγής → Εφαρμόζεται σε αναδρομικές ακολουθίες

•1 Συγκρίνω τους a_1, a_2 οπότε παίρνω μια "ένδειξη" της μονοτονίας
Εστω π.χ. $a_1 < a_2$.

•2 Υποθέτω ότι για $n=k$ ισχύει $a_k < a_{k+1}$. (1)

•3 Αποδεικνύω ότι ισχύει και για $n=k+1$ ότι $a_{k+1} < a_{k+2}$.

• Παραδείγματα : Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι ~~σειρά~~ ακολουθίες:

1) $(a_n): \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \end{cases}$

Λύση

$a_2 = \sqrt{a_1 + 6} = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2} > 2 = a_1$ ← Ενδειξη ότι (a_n) γν. αύξουσα.

Θα δείξω ότι $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} > a_n$.

Για $n=1$, $a_2 > a_1$ ισχύει

Εστω ότι ισχύει για $n=k$ ότι $a_{k+1} > a_k$. (1)

Για $v=k+2$, $a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}+6} \underset{(1)}{>} \sqrt{a_k + 6} = a_{k+1} \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$, ισχύει.

Αρα $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} > a_n \Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα

→ Παρατήρηση : Μερικές φορές, για την απόδειξη της σχέσης $a_{k+1} \gtrless a_{k+2}$ εκτός απο την υπόθεση της επαγωγής, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε

•1 Το πρόσημο των ορων της (a_n), αν αυτό διατηρείται σταθερο

•2 Ενα φράγμα, δηλαδη μία ιδιότητα της μορφής $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n \gtrless \varphi$.

Η απόδειξη των •1, •2 γίνεται επαγωγικά.

Υπάρχουν τέλος περιπτώσεις όπου η υπόθεση της επαγωγής δεν χρειάζεται στην αποδεικτική διαδικασία.

2) $(a_n): \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{3+a_n^2}{2a_n} \end{cases}$

Λύση

$a_2 = \dfrac{3+a_1^2}{2a_1} = \dfrac{3+9}{6} = 2 < a_1$ ← Ενδειξη ότι (a_n) γνησίως φθίνουσα.

▶ Θα δείξω ότι $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > 0$.

Για $n=1$, $a_1 = 3 > 0$, ισχύει

Εστω ότι για $n=k$, $a_k > 0$, ισχύει.

Θα δείξω ότι ισχύει για $n=k+1$.

$a_k > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2a_k} > 0$
Είναι και $3 + a_k^2 > 0$
$\Rightarrow a_{k+1} = \dfrac{3+a_k^2}{2a_k} > 0$, ισχύει.

Άρα $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > 0$ (1)

▸ Θα δείξω ότι $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} < a_n$.

Για $n=1$, $a_2 < a_1$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=k$ ότι $a_{k+1} < a_k$ (2).

Θα δείξω ότι ισχύει για $n=k+1$

$a_{k+2} < a_{k+1} \Leftrightarrow \frac{3+a_{k+1}^2}{2a_{k+1}} < \frac{3+a_k^2}{2a_k} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \cancel{2}a_k(3+a_{k+1}^2) < \cancel{2}a_{k+1}(3+a_k^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a_k + a_k a_{k+1}^2 < 3a_{k+1} + a_{k+1}a_k^2 \Leftrightarrow 3(a_k - a_{k+1}) + a_k a_{k+1}(a_{k+1} - a_k) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_{k+1} - a_k)(a_k a_{k+1} - 3) < 0 \Leftrightarrow a_k a_{k+1} - 3 > 0$ (διότι $(2) \Rightarrow a_{k+1} - a_k < 0$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{a_k} \cdot \frac{3+a_k^2}{2\cancel{a_k}} - 3 > 0 \Leftrightarrow 3 + a_k^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow a_k^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow (a_k - \sqrt{3})(\underset{+}{a_k + \sqrt{3}}) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_k - \sqrt{3} > 0$ (διότι $a_k > 0 \Rightarrow a_k + 3 > 0$) $\Leftrightarrow a_k > \sqrt{3}$. (3)

Αρκεί $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > \sqrt{3}$.

Για $n=1$, $a_1 = 3 > \sqrt{3}$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n=k$ ότι $a_k > \sqrt{3}$.

Για $n=k+1$,

$a_{k+1} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3+a_k^2}{2a_k} > \sqrt{3} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 3 + a_k^2 > 2\sqrt{3}a_k \Leftrightarrow a_k^2 - 2\sqrt{3}a_k + 3 > 0 \Leftrightarrow (a_k - \sqrt{3})^2 >$

$\Leftrightarrow a_k - \sqrt{3} \neq 0$, ισχύει διότι $a_k > \sqrt{3}$. Άρα $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > \sqrt{3}$

οπότε $(3) \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} < a_n \Rightarrow (a_n)$ γνησίως φθίνουσα.

3) $(a_n): \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = \frac{5a_n - 6}{a_n} \end{cases}$

Λύση

$a_2 = \frac{5a_1 - 6}{5} = \frac{25-6}{5} = \frac{19}{5} < 5 = a_1 \leftarrow$ Ένδειξη ότι (a_n) γνησίως φθίνουσα.

▸ Θα δείξω ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} < a_n$.

Για $n=1$, $a_2 < a_1$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=k$. $a_{k+1} < a_k$. (1).

Θα δείξω ότι $a_{k+2} < a_{k+1} \Leftrightarrow \frac{5a_{k+1} - 6}{a_{k+1}} < a_{k+1} \Leftrightarrow \frac{5a_{k+1} - 6}{a_{k+1}} - a_{k+1} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5a_{k+1} - 6 - a_{k+1}^2}{a_{k+1}} < 0 \Leftrightarrow \frac{a_{k+1}^2 - 5a_{k+1} + 6}{a_{k+1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{(a_{k+1} - 2)(a_{k+1} - 3)}{a_{k+1}} > 0$ (2).

Αρκεί $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > 3$.

Για $n=1$, $a_1 = 5 > 3$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=k$: $a_k>3$.

Για $n=k+1$, $a_{k+1}>3 \Leftrightarrow \dfrac{5a_k-6}{a_k}>3 \Leftrightarrow 5a_k-6>3a_k \Leftrightarrow 2a_k-6>0 \Leftrightarrow a_k-3>0$
$\Leftrightarrow a_k>3$.

Άρα: $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>3 \Rightarrow$ Η (2) ισχύει $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}<a_n \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_n)$ γνησίως φθίνουσα.

5) Μέθοδος συγκρίσεως $\longrightarrow$ Εφαρμόζεται σε ακολουθίες αναλυτικού τύπου
Με διαδοχικές ενισχύσεις προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ανισότητες της μορφής:

$a_n \leq \vartheta_1(\nu)$ και $a_{n+1} \geq \vartheta_2(\nu)$. για τις αύξουσες.

ή $a_n \geq \vartheta_1(\nu)$ και $a_{n+1} \leq \vartheta_2(\nu)$ για τις φθίνουσες

και έπειτα συγκρίνουμε τα ϑ_1, ϑ_2.

• Παράδειγμα : Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η
$$a_n=\frac{n}{n^3+\sin n}$$ και να δειχθεί ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση

Είναι $a_n=\dfrac{n}{n^3+\sin n}>\dfrac{n}{n^3+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^3+\sin(n+1)}<\frac{n+1}{(n+1)^3-1}=\frac{n+1}{n^3+3n^2+3n+1-1}=\frac{n+1}{n^3+3n^2+3n}.$$

Αρκεί $\dfrac{n+1}{n^3+3n^2+3n}<\dfrac{n}{n^3+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^3+1)<n(n^3+3n^2+3n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^4+n+n^3+1<n^4+3n^3+3n^2 \Leftrightarrow n+1<2n^3+3n^2$ ισχύει διότι
$\forall n\in\mathbb{N}^*$: $n<2n^3 \wedge 1<3n^2 \Rightarrow n+1<2n^3+3n^2$.

Άρα: $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}<a_n \Rightarrow (a_n)$ γνησίως φθίνουσα

6) Μέθοδος απελπισίας $\longrightarrow$ Εφαρμόζεται σε αναλυτικές ακολουθίες.
Αφού πάρουμε ένδειξη για το είδος της μονοτονίας , θεωρώ την κατάλληλη ανισότητα $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1} \gtrless a_n$ και με διπλό συνεπάγεται καταλήγω σε προφανή σχέση.

• Παράδειγμα : Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η
$$a_n=\sqrt{n^2+n}-n.$$

Λύση

$a_1=\sqrt{1+1}-1=\sqrt{2}-1$

$a_2=\sqrt{4+2}-2=\sqrt{6}-2>\sqrt{2}-1=a_1$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n<a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n}-n<\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}-(n+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{n^2+n}+1<\sqrt{n^2+2n+1+n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n}+1<\sqrt{n^2+3n+2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cancel{n^2}+n+2\sqrt{n^2+n}+1<\cancel{n^2}+3n+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n}<2n+1 \Leftrightarrow 4n^2+4n<4n^2+4n+1$
$\Leftrightarrow 0<1$, ισχύει.

Αρα: $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n<a_{n+1} \Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα.

▼Φραγμένες ακολουθίες

ΟΡΙΣΜΟΙ:

(a_n) φραγμένη άνω $\Leftrightarrow \exists \Phi\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n\leq\Phi$
(a_n) φραγμένη κάτω $\Leftrightarrow \exists \varphi\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n\geq\varphi$
(a_n) φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \varphi,\Phi\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N}^*: \varphi\leq a_n\leq\Phi$.

- Μια άνω φραγμένη ακολουθία (a_n) έχει άπειρα άνω φράγματα άπο τα οποία το ελάχιστο λέγεται supremum και συμβολίζεται $\sup a_n$.
- Μια κάτω φραγμένη ακολουθία (a_n) έχει άπειρα κάτω φράγματα άπο τα οποία το μέγιστο λέγεται infimum και συμβολίζεται $\inf a_n$.

● → Απο το αντίστοιχο κριτήριο που ισχύει για τις συναρτήσεις

$$\boxed{(a_n) \text{ φραγμένη} \Leftrightarrow \exists \vartheta\in\mathbb{R}_+: \forall n\in\mathbb{N}^*: |a_n|\leq\vartheta}$$

- Κάθε αύξουσα ή γνησια αύξουσα (a_n) είναι κάτω φραγμένη άπο τον πρώτο όρο της a_1
- Κάθε φθίνουσα ή γνησίως φθίνουσα (a_n) είναι άνω φραγμένη άπο τον πρώτο όρο της a_1.

● → Μεθοδοι στις φραγμένες ακολουθίες

●$_1$ Αν η (a_n) ορίζεται άπο τον γενικό της όρο (a_n), δείχνω (με ενίσχυση) ότι $\exists \vartheta\in\mathbb{R}_+: |a_n|\leq\vartheta, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Παραδείγματα: Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες

1) $a_n=\dfrac{3n^2-4n\cdot\cos(n^2+1)+3}{4n^2+3n-2}$

Λύση

Είναι $|a_n| = \left| \frac{3n^2 - 4n\cos(n^2+1) + 3}{4n^2+3n-2} \right| = \frac{|3n^2 - 4n\cos(n^2+1) + 3|}{4n^2+3n-2} \leq$

$\leq \frac{|3n^2| + |4n| \cdot |\cos(n^2+1)| + 3}{4n^2+3n-2} \leq \frac{3n^2+4n+3}{4n^2+3n-2} \leq \frac{3n^2+4n^2+3n^2}{4n^2+3n-2} \leq$

$\leq \frac{10n^2}{4n^2} = \frac{10}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n)$ φραγμένη.

2) $a_n = \frac{3n + \operatorname{Arctan}(n^2+3n+1)}{2^n + 4}$

<u>Λύση</u>

Είναι $|a_n| = \left| \frac{3n + \operatorname{Arctan}(n^2+3n+1)}{2^n+4} \right| = \frac{|3n + \operatorname{Arctan}(n^2+3n+1)|}{2^n+4} \leq$

$\leq \frac{|3n| + |\operatorname{Arctan}(n^2+3n+1)|}{2^n+4} \leq \frac{3n + \frac{\pi}{2}}{2^n+4} = \frac{6n+\pi}{2^{n+1}+8} \leq \frac{(6+\pi)n}{2^{n+1}+8} \leq$

$\leq \frac{(6+\pi)n}{2^{n+1}} \underset{\text{Bernoulli}}{\leq} \frac{(6+\pi)n}{1+(n+1)} = \frac{(6+\pi)n}{n+2} \leq \frac{(6+\pi)n}{n} = 6+\pi$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_n)$ φραγμένη.

• 2 Αν οι όροι της ακολουθίας διατηρούν το πρόσημο ή αν η ακολουθία είναι μονότονη, τότε μπορώ να καταλήξω σε συμπεράσματα για τα φράγματα.

<u>Παράδειγμα</u>: Δείξτε ότι η $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$ είναι φραγμένη.

<u>Λύση</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > 0 \Rightarrow (a_n)$ κάτω φραγμένη με ένα κάτω φράγμα το 0 (1)

~~$\forall n \in \mathbb{N}^*:$~~

$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n+2)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} < a_n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n < a_1 \Rightarrow (a_n)$ άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα τον a_1 (2)

(1) ∧ (2) $\Rightarrow (a_n)$ φραγμένη.

•3 Για να δείξουμε ότι η (a_n) δεν είναι φραγμένη, υποθέτω ότι
(a_n) φραγμένη $\Rightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}^*_+ : \forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n| \leq \vartheta$. (1)
Ύστερα ενισχύω $|a_n| > \cdots > \cdots$ και σε συνδυασμό με την (1) καταλήγω σε άτοπο

<u>Παραδείγματα</u> : Δείξτε ότι οι ακολουθίες δεν είναι φραγμένες.

1) $a_n = \dfrac{n^2+n-1}{n+2+\cos^2 n}$

<u>Λύση</u>

Έστω (a_n) φραγμένη $\Rightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n| \leq \vartheta$. (1).

Είναι $|a_n| = \left|\dfrac{n^2+n-1}{n+2+\cos^2 n}\right| = \dfrac{n^2+n-1}{n+2+\cos^2 n} \geq \dfrac{n^2}{n+2+\cos^2 n} \geq \dfrac{n^2}{n+2+1} \geq$

$\geq \dfrac{n^2}{n+3n} = \dfrac{n^2}{4n} = \dfrac{n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n| \geq \dfrac{n}{4} \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{n}{4} \leq \vartheta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq 4\vartheta \longleftarrow$ Άτοπο (θ. Αρχιμήδη)

Άρα (a_n) όχι φραγμένη.

2) $a_n = 3^{n^2-n} - \cos(n^2-n)$

<u>Λύση</u>

Έστω (a_n) φραγμένη $\Rightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n| \leq \vartheta$. (1).

Είναι $|a_n| = |3^{n^2-n} - \cos(n^2-n)| \geq |3^{n^2-n}| - |\cos(n^2-n)| \geq 3^{n^2-n} - 1 =$

$= (1+2)^{n^2-n} - 1 \geq 1 + 2(n^2-n) - 1 = 2n^2 - n = n(2n-1) \geq 2n-1$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n| \geq 2n-1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}^* : 2n-1 \leq \vartheta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq \dfrac{\vartheta+1}{2} \longleftarrow$ Άτοπο (θ. Αρχιμήδη)

Άρα (a_n) όχι φραγμένη.

•4 Παρακάτω θα μάθουμε ότι αν

a_n συγκλίνουσα $\Rightarrow (a_n)$ φραγμένη

▼ Αξιοσημείωτες αναδρομικές ακολουθίες → Πρόοδοι

① Αριθμητική πρόοδος

ΟΡΙΣΜΟΣ : $\boxed{(a_n) \text{ αριθμητική πρόοδος} \Leftrightarrow \exists\, \omega \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^* : a_{n+1} = a_n + \omega .}$

Μονοτονία : Είναι $\Delta_n = a_{n+1} - a_n = (a_n + \omega) - a_n = \omega$ οπότε

$\omega < 0 \Leftrightarrow (a_n)$ γνησίως φθίνουσα

$\omega > 0 \Leftrightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα

● Γενικός όρος : $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\omega}$

② Γεωμετρική πρόοδος

ΟΡΙΣΜΟΣ : $\boxed{(a_n) \text{ γεωμετρική πρόοδος} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^* : \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n = a_{n-1}\lambda .}$

Μονοτονία : Αν $\lambda > 1$ και $\begin{cases} a_1 > 0 \Rightarrow (a_n) \text{ γν. αύξουσα} \\ a_1 < 0 \Rightarrow (a_n) \text{ γν. φθίνουσα} \end{cases}$ $\lambda = 1 \Rightarrow (a_n)$ σταθερη

Αν $0 < \lambda < 1$ και $\begin{cases} a_1 > 0 \Rightarrow (a_n) \text{ γν. φθίνουσα} \\ a_1 < 0 \Rightarrow (a_n) \text{ γν. αύξουσα} \end{cases}$ $\lambda < 0 \Rightarrow (a_n)$ όχι μονότονη

● Γενικός όρος: $\boxed{a_n = a_1 \lambda^{n-1}}$

▼ Αξιοσημείωτα αθροίσματα

Θ_1 $\boxed{\left.\begin{array}{l}(a_n) \text{ αριθμητική πρόοδος} \\ \text{με διαφορα } \omega\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} . n = \frac{2a_1 + (n-1)\omega}{2} . n .}$

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [a_k + a_{n-k+1}] = \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)\omega + a_1 + (n-k+1-1)\omega] = \sum_{k=1}^{n} [a_1 + a_1 + (n-1)\omega] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [a_1 + a_n] = n(a_1 + a_n) \Leftrightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} . n = \frac{2a_1 + (n-1)\omega}{2} . n .$$

Θ_2 $\boxed{\left.\begin{array}{l}(a_n) \text{ γεωμετρική πρόοδος} \\ \text{με λόγο } \lambda \neq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1}}$

Απόδειξη

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \cdots + a_1\lambda^{n-1}$ (1) $\Rightarrow \lambda S_n - S_n = a_1\lambda^n - a_1 \Leftrightarrow$

(1) $\Rightarrow \lambda S_n = a_1\lambda + a_1\lambda^2 + \cdots + a_1\lambda^n$

$\Leftrightarrow S_n(\lambda-1) = a_1(\lambda^n - 1) \Leftrightarrow S_n = \dfrac{a_1(\lambda^n-1)}{\lambda-1}$

Θ3 $\boxed{S_1(\nu) = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

Απόδειξη

Αν $(a_n): 1, 2, \ldots, n, \ldots \Rightarrow (a_n)$ αριθμητική πρόοδος με $a_1 = 1, \omega = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_1(\nu) = 1+2+\cdots+n = \dfrac{2a_1+(n-1)\omega}{2} \cdot n = \dfrac{2+n-1}{2} \cdot n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Θ4 $\boxed{S_2(n) = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Απόδειξη

Είναι $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1, \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε

για $x=1$, $2^3 = 1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$x=2$, $3^3 = 2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$- - - - - - - - -$

~~$x=n$, $n^3=n$~~

$x=n-1$, $n^3 = (n-1)^3+3(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1$

$x=n$, $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$

οπότε, $\cancel{2^3}+\cancel{3^3}+\cdots+\cancel{n^3}+(n+1)^3 = 1^3+\cancel{2^3}+\cancel{3^3}+\cdots+\cancel{(n-1)^3}+\cancel{n^3}+3S_2(n)+3S_1(n)+n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n+1)^3 = 1+3S_2(n)+3S_1(n)+n \Leftrightarrow 3S_2(n) = (n+1)^3 - 3S_1(n) - (n+1)$

$\Leftrightarrow 6S_2(n) = 2(n+1)^3 - 6\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} - 2(n+1) = (n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2] =$

$= (n+1)[2n^2+4n+2-3n-2] = (n+1)(2n^2+n) = n(n+1)(2n+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Θ5 $\boxed{S_3(\nu) = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2(n)}$

Απόδειξη

Είναι $(x+1)^4 = x^4+4x^3+6x^2+4x+1, \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε

Για $x=1$, $2^4 = 1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$x=2$, $3^4 = 2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+2$

$x=n-1$, $n^4 = (n-1)^4+4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1(n-1)$

$x=n$, $(n+1)^4 = n^4+4n^3+6n^2+4n+6$, οπότε

$$\cancel{2^4}+\cancel{3^4}+\cdots+\cancel{(n-1)^4}+\cancel{n^4}+(n+1)^4=(1^4+\cancel{2^4}+\cdots+\cancel{n^4})+4S_3(n)+6S_2(n)+4S_1(n)+n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^4=1+4S_3(n)+6S_2(n)+4S_1(n)+n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4S_3(n)=(n+1)^4-6S_2(n)-4S_1(n)-(n+1)=$$

$$=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)=(n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right]=$$

$$=(n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-(2n+1)\right]=(n+1)\left[(n+1)^3-(n+1)(2n+1)\right]=$$

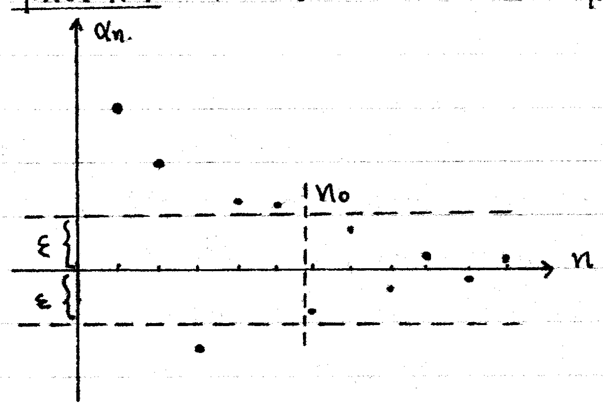
$$=(n+1)^2\left[(n+1)^2-(2n+1)\right]=(n+1)^2(n^2+2n+1-2n-1)=n^2(n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_3(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=S_1^2(n).$$

▼ Μηδενικές ακολουθίες

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\boxed{\lim a_n=0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n|<\varepsilon}$

Γεωμετρική ερμηνεία: Αν $\lim a_n=0$, όλοι οι όροι της a_n, με εξαίρεση ένα πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων (οι n_0 πρώτοι όροι) συσσωρεύονται σε διάστημα κέντρου 0 και ακτίνας ε, για οσοδήποτε μικρές τιμές του ε. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται στην ταινία των παραλλήλων ευθειών $y=\varepsilon$, $y=-\varepsilon$. Αν αυτά ισχύουν, η (a_n) θα λέγεται μηδενική ακολουθία και θα λέμε ότι έχει όριο το 0.



- 1. $\lim a_n=0 \Leftrightarrow \lim(-a_n)=0 \Leftrightarrow \lim|a_n|=0$
- 2. $\lim a_n=0 \Leftrightarrow \lim a_{n+k}=0.$

Θ. $\boxed{\lim a_n=0 \Rightarrow (a_n)\text{ φραγμένη}}$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$, π.χ. $\varepsilon=1$

$\lim a_n=0 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n|<1 \quad (1)$

► Παίρνω $\theta=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{n_0}|,1\}$, οπότε

$\forall n\in\mathbb{N}^*, n\leqslant n_0: |a_n|\leqslant\vartheta$, εξ' ορισμού
$\forall n\in\mathbb{N}^*, n\geqslant n_0: |a_n|\underset{(1)}{<}1\leqslant\vartheta$ $\Bigg\}\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: |a_n|\leqslant\vartheta \Rightarrow (a_n)$ φραγμένη.

→ <u>Βασικές μηδενικές ακολουθίες</u>

① $\boxed{a_n=0, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim a_n=0}$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\forall n\in\mathbb{N}^*: |a_n|=0<\varepsilon$

Άρα $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$ (π.χ. ο $n_0=1$) $: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n|<\varepsilon \Rightarrow \lim a_n=0$.

② $\boxed{a_n=\dfrac{1}{n^\rho}, \forall n\in\mathbb{N}^*, \rho\in\mathbb{Q}_+^* \Rightarrow \lim a_n=0}$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Αρκεί $|a_n|<\varepsilon, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0$ για κάποιο n_0 το οποίο πρέπει να βρεθεί. Λύνω λοιπόν την ανίσωση ως προς n.

Είναι $|a_n|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{n^\rho}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^\rho}<\varepsilon \Leftrightarrow n^\rho>\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\sqrt[\rho]{\varepsilon}}$ (1)

Παίρνω $n_0\in\mathbb{N}^*: n_0\geqslant\left[\dfrac{1}{\sqrt[\rho]{\varepsilon}}\right]$ οπότε $\forall n>n_0 \Rightarrow n>\dfrac{1}{\sqrt[\rho]{\varepsilon}} \overset{(1)}{\Rightarrow} |a_n|<\varepsilon$.

Άρα $\forall\varepsilon>0, \exists\nu_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n|<\varepsilon. \Rightarrow \lim a_n=0$.

③ $\boxed{\left.\begin{array}{l} a_n=a^n, \forall n\in\mathbb{N}^* \\ |a|<1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n=0}$

<u>Απόδειξη</u>

i) Αν $a=0 \Rightarrow \forall\nu\in\mathbb{N}^*: a_n=0^n=0 \Rightarrow \lim a_n=0$

ii) Έστω $a\neq0$ και $|a|<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}>1 \Rightarrow \exists\vartheta>0: \dfrac{1}{|a|}=1+\vartheta \Rightarrow \dfrac{1}{|a|^n}=(1+\vartheta)^n\geqslant1+\nu\vartheta\geqslant n\vartheta$

$\Rightarrow |a_n|=|a^n|<\dfrac{1}{n\vartheta}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. (1)

Έστω $\varepsilon>0$.

Παίρνω $n_0=\left[\dfrac{1}{\vartheta\varepsilon}\right]$ οπότε $\forall n\in\mathbb{N}^*: n>n_0 \Rightarrow n>\dfrac{1}{\vartheta\varepsilon} \Rightarrow \nu\vartheta>\dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{\nu\vartheta}<\varepsilon \Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} |a_n|<\varepsilon$

Άρα $\forall\varepsilon>0, \exists\nu_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n|<\varepsilon. \Rightarrow \lim a_n=0$.

Ιδιότητες μηδενικών ακολουθιών

Θ1) $\boxed{\begin{rcases} \forall n\in\mathbb{N}^*: |a_n|\leq|b_n| \\ \lim b_n=0 \end{rcases} \Rightarrow \lim a_n=0}$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$

$\begin{rcases} \lim b_n=0 \Rightarrow \exists \nu_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |b_n|<\varepsilon \\ \text{είναι και } \forall n\in\mathbb{N}^*: |a_n|\leq|b_n| \end{rcases} \Rightarrow \underline{\exists \nu_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n|<\varepsilon}$

Άρα $\lim a_n=0$.

Θ2) $\boxed{\begin{rcases} \lim a_n=0 \\ (b_n) \text{ φραγμένη} \end{rcases} \Rightarrow \lim(a_n b_n)=0}$

Απόδειξη

(b_n) φραγμένη $\Rightarrow \exists \vartheta\in\mathbb{R}_+: \forall n\in\mathbb{N}^*: |b_n|\leq\vartheta$

Έστω $\begin{rcases} \varepsilon>0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\vartheta}>0 \\ \lim a_n=0 \end{rcases} \Rightarrow \underline{\exists \nu_0\in\mathbb{N}^*}: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n|<\frac{\varepsilon}{\vartheta}$

$\Rightarrow |a_n|\cdot|b_n|<\vartheta\cdot\frac{\varepsilon}{\vartheta} \Rightarrow \underline{|a_n b_n|<\varepsilon, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0}$

Άρα $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n b_n|<\varepsilon \Rightarrow \lim(a_n b_n)=0$.

$\boxed{\lim a_n=0 \Rightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R}: \lim(\lambda a_n)=0}$

Θ3) $\boxed{\begin{rcases} \lim a_n=0 \\ \lim b_n=0 \end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} \lim(a_n+b_n)=0 \\ \lim(a_n b_n)=0 \end{cases}}$

Απόδειξη

Έστω $\lim a_n=0$, $\lim b_n=0$.

i) Έστω $\varepsilon>0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2}>0$

$\lim a_n=0 \Rightarrow \exists n_1\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*; n>n_1: |a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\lim b_n=0 \Rightarrow \exists n_2\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_2: |b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

▶ Παίρνω $n_0=\max\{n_1,n_2\}$

$\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*: n>n_0} \Rightarrow \begin{cases} n>n_1 \\ n>n_2 \end{cases} \Rightarrow |a_n+b_n|\leq|a_n|+|b_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow \underline{|a_n+b_n|<\varepsilon}$

Άρα $\lim(a_n+b_n)=0$.

ii) $\begin{rcases} \lim b_n=0 \Rightarrow (b_n) \text{ φραγμένη} \\ \lim a_n=0 \end{rcases} \Rightarrow \lim(a_n b_n)=0$.

Θ4) $\boxed{\begin{matrix} \lim a_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \geq 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \forall \kappa \in \mathbb{N}^* : \lim \sqrt[\kappa]{a_n} = 0}$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow \varepsilon^\kappa > 0$.

$$\left.\begin{matrix} \lim a_n = 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : |a_n| < \varepsilon^\kappa \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\sqrt[\kappa]{a_n}| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow$$

Άρα $\lim \sqrt[\kappa]{a_n} = 0, \forall \kappa \in \mathbb{N}^*$.

• <u>Παραδείγματα</u>: Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές.

1) $a_n = \dfrac{\sin 1}{n^2+1} + \dfrac{\sin 2}{n^2+2} + \dfrac{\sin 3}{n^2+3} + \dots + \dfrac{\sin n}{n^2+n}$.

<u>Λύση</u>

Είναι $|a_n| = \left| \dfrac{\sin 1}{n^2+1} + \dfrac{\sin 2}{n^2+2} + \dots + \dfrac{\sin n}{n^2+n} \right| \leq \left| \dfrac{\sin 1}{n^2+1} \right| + \left| \dfrac{\sin 2}{n^2+2} \right| + \dots + \left| \dfrac{\sin n}{n^2+n} \right| =$

$$= \frac{|\sin 1|}{n^2+1} + \frac{|\sin 2|}{n^2+2} + \dots + \frac{|\sin n|}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \leq$$

$$\left.\begin{matrix} \leq \underbrace{\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+1} + \dots + \dfrac{1}{n^2+1}}_{(n \text{ φορές})} = \dfrac{n}{n^2+1} \leq \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim \dfrac{1}{n} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim a_n = 0.$$

2) $a_n = (-1)^n \cos\left[\dfrac{n+1}{n-1}\right] \sin\left[\dfrac{2n + \cos(n+1)}{n^2}\right]$

<u>Λύση</u>

Είναι $|a_n| = \left| (-1)^n \cos\left[\dfrac{n+1}{n-1}\right] \sin\left[\dfrac{2n+\cos(n+1)}{n^2}\right] \right| =$

$$= \left| \cos\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \right| \cdot \left| \sin\left[\frac{2n+\cos(n+1)}{n^2}\right] \right| \leq 1 \cdot \left| \sin\left(\frac{2n+\cos(n+1)}{n^2}\right) \right| \leq \left| \frac{2n+\cos(n+1)}{n^2} \right| =$$

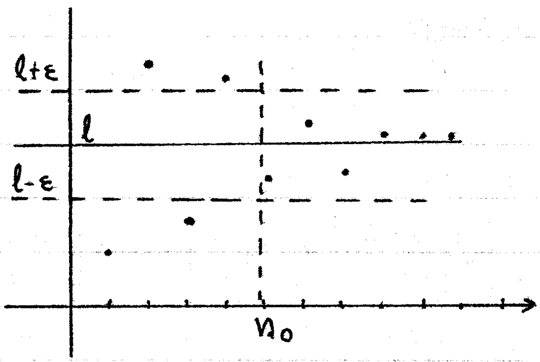
$$\left.\begin{matrix} = \dfrac{|2n+\cos(n+1)|}{n^2} \leq \dfrac{|2n| + |\cos(n+1)|}{n^2} \leq \dfrac{2n+1}{n^2} \leq \dfrac{2n+n}{n^2} = \dfrac{3}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{3}{n} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim a_n = 0$.

▼ Συγκλίνουσες ακολουθίες

ΟΡΙΣΜΟΣ : $\boxed{\lim a_n = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n>n_0 : |a_n-\ell|<\varepsilon}$

Γεωμετρική ερμηνεία : Όλοι οι όροι της (a_n), με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων, συσσωρεύονται σε διάστημα $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ κέντρου ℓ και ακτίνας ε για οσοδήποτε μικρό ε. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται στην ταινία που ορίζουν οι παράλληλες ευθείες $y=\ell-\varepsilon$ και $y=\ell+\varepsilon$. Αν ισχύουν αυτά, τότε λέμε ότι η (a_n) έχει όριο τον αριθμό ℓ.



- Αν υπαρχει $\ell \in \mathbb{R}$ τετοιος ώστε $\lim a_n = \ell$, τότε η ακολουθία (a_n) θα λέγεται συγκλίνουσα.

  Δηλαδή : $\boxed{(a_n) \text{ συγκλίνουσα} \Leftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} : \lim a_n = \ell.}$

Φυσικα (a_n) μηδενική $\rightarrow$ (a_n) συγκλίνουσα

- Παρατηρήσεις

1) $\lim a_n = \ell \Leftrightarrow \lim(a_n-\ell)=0$
2) $a_n = c, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a_n - c = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \lim(a_n-c)=0 \rightarrow \lim a_n = c.$
3) $\lim a_n = \ell \Leftrightarrow \lim a_{n+k} = \ell$
4) $\lim a_n = \ell \Leftrightarrow \lim(-a_n) = -\ell.$

→ Θα δείξουμε ότι αν μία ακολουθία (a_n) έχει όριο έναν αριθμο $\ell \in \mathbb{R}$ τότε δεν έχει όριο κανέναν άλλο αριθμο.

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim a_n = \ell_1 \\ \lim a_n = \ell_2\end{array}\right\} \rightarrow \ell_1 = \ell_2}$

Απόδειξη : Έστω $\ell_1 \neq \ell_2$. Παίρνω $\varepsilon = \frac{|\ell_1-\ell_2|}{2} > 0$ (διότι $\ell_1 \neq \ell_2$)

$\lim a_n = \ell_1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_1 : |a_n - \ell_1| < \frac{|\ell_1-\ell_2|}{2}$

$\lim a_n = \ell_2 \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_2 : |a_n - \ell_2| < \frac{|\ell_1-\ell_2|}{2}$

▸ Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : \begin{cases} n > n_1 \\ n > n_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_n-\ell_1| < \frac{|\ell_1-\ell_2|}{2} \\ |a_n-\ell_2| < \frac{|\ell_1-\ell_2|}{2} \end{cases} \Rightarrow |a_n-\ell_1| + |a_n-\ell_2| < |\ell_1-\ell_2|$

$\Rightarrow |(a_n-\ell_1)-(a_n-\ell_2)| < |a_n-\ell_1| + |a_n-\ell_2| < |\ell_1-\ell_2| \Rightarrow |\ell_1-\ell_2| < |\ell_1-\ell_2| \leftarrow$ Άτοπο

Άρα: $\ell_1 = \ell_2$.

Γενικές ιδιότητες

Θ1) $\boxed{(a_n) \text{ συγκλίνουσα} \Rightarrow (a_n) \text{ φραγμένη}}$

Απόδειξη

(a_n) συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} : \lim a_n = \ell \Rightarrow \lim(a_n - \ell) = 0 \Rightarrow (a_n - \ell)$ φραγμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \vartheta \in \mathbb{R}_+ : |a_n - \ell| \leq \vartheta \Leftrightarrow -\vartheta \leq a_n - \ell \leq \vartheta \Leftrightarrow -\vartheta + \ell \leq a_n \leq \vartheta + \ell, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~(an) συγκλίνουσα~~ (a_n) φραγμένη.

Θ2) $\boxed{\lim a_n = \ell \Rightarrow (|a_n|) \text{ συγκλίνουσα με } \lim|a_n| = |\ell|}$

Απόδειξη

$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = \ell \Rightarrow \lim(a_n - \ell) = 0 \\ \big||a_n| - |\ell|\big| \leq |a_n - \ell|, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(|a_n| - |\ell|) = 0 \Rightarrow \lim|a_n| = |\ell|$.

Θ3) $\boxed{\lim a_n = \ell \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n, \ell \text{ ομόσημοι}}$

Απόδειξη

$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = \ell \Rightarrow \lim(a_n - \ell) = 0 \\ \text{▸ Έστω } \varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*} : \underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0} : |a_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{|\ell|}{2} < a_n - \ell < \frac{|\ell|}{2} \Leftrightarrow \underline{\ell - \frac{|\ell|}{2} < a_n < \ell + \frac{|\ell|}{2}} \quad (1)$

i) Αν $\ell > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : \ell - \frac{\ell}{2} < a_n < \ell + \frac{\ell}{2} \Leftrightarrow \frac{\ell}{2} < a_n < \frac{3\ell}{2} \Rightarrow a_n > \frac{\ell}{2} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n, \ell$ ομόσημοι.

ii) Αν $\ell < 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : \ell + \frac{\ell}{2} < a_n < \ell - \frac{\ell}{2} \Leftrightarrow \frac{3\ell}{2} < a_n < \frac{\ell}{2} < 0 \Rightarrow a_n, \ell$ ομόσημοι

Άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n, \ell$ ομόσημοι.

↳ Πόρισμα : $\boxed{\lim a_n = l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n>n_0 : \frac{|l|}{2} < |a_n| < \frac{3|l|}{2}}$

Θ4) $\boxed{\left.\begin{array}{l}(a_n) \text{ συγκλίνουσα} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n>n_0 : a_n > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n \geq 0}$

Απόδειξη

Έστω $\lim a_n < 0 \xRightarrow{Θ3} \exists n_1 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n>n_1 : a_n < 0$ (1)

▸ Παίρνω $n_2 = \max\{n_0, n_1\} + 1 \Rightarrow n_2 > n_0 \xRightarrow{υπ} a_{n_2} > 0$

Αλλα $n_2 > n_1 \xRightarrow{(1)} a_{n_2} < 0 \longleftarrow$ Ατοπο.

Αρα $\lim a_n \geq 0$.

↳ Ομοια : $\boxed{\left.\begin{array}{l}(a_n) \text{ συγκλίνουσα} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n>n_0 : a_n < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n \leq 0.}$

Αξιοσημείωτες συγκλίνουσες ακολουθίες

① $\boxed{\lim \sqrt[n]{n} = 1}$

Απόδειξη

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \vartheta_n \geq 0 : \sqrt[n]{n} = (1+\vartheta_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow n = (1+\vartheta_n)^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{n} = (1+\vartheta_n)^n \geq 1 + n\vartheta_n > n\vartheta_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq \vartheta_n < \frac{\sqrt{n}}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |\vartheta_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \vartheta_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim(\sqrt[n]{n} - 1) = \lim[(1+\vartheta_n)^2 - 1] = \lim[1 + 2\vartheta_n + \vartheta_n^2 - 1] = \lim(\vartheta_n^2 + 2\vartheta_n) = 0$

(ως άθροισμα των μηδενικών ακολουθιών ϑ_n^2, $2\vartheta_n$) $\Rightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1$.

② $\boxed{\lim \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 1}$

Απόδειξη

$a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \vartheta_n > 0 : \forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt[n]{a} = 1 + \vartheta_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a = (1+\vartheta_n)^n \geq 1 + n\vartheta_n > n\vartheta_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \vartheta_n < \frac{a}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} |\vartheta_n| < \left|\frac{a}{n}\right| \\ \lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{a}{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \vartheta_n = 0 \Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim(1 + \vartheta_n - 1) = \lim \vartheta_n = 0$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$.

↳ Παρακάτω, το συμπέρασμα αυτό θα γενικευτεί $\underline{\forall a > 0}$.

▼ Σύγκλιση και πράξεις

Θ1) $\boxed{(a_n),(b_n) \text{ συγκλίνουσες} \Rightarrow \begin{cases} \lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n \\ \lim(a_n b_n)=\lim a_n\cdot \lim b_n \end{cases}}$

Απόδειξη

i) (a_n) συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists a\in\mathbb{R}: \lim a_n = a \Rightarrow \lim(a_n-a)=0$

(b_n) συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists b\in\mathbb{R}: \lim b_n = b \Rightarrow \lim(b_n-b)=0$

$\Rightarrow \lim[(a_n-a)+(b_n-b)]=0 \Rightarrow \lim[(a_n+b_n)-(a+b)]=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim(a_n+b_n)=a+b=\lim a_n+\lim b_n.$

ii) $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_nb_n-ab=a_nb_n-ab_n+ab_n-ab=b_n(a_n-a)+a(b_n-b)$ (1).

(b_n) συγκλίνουσα $\Rightarrow (b_n)$ φραγμένη, $\lim(a_n-a)=0$ $\Rightarrow \lim[b_n(a_n-a)]=0$

$\lim(b_n-b)=0 \Rightarrow \lim[a(b_n-b)]=0$

$\Rightarrow \lim(a_nb_n-ab)=\lim[b_n(a_n-a)+a(b_n-b)]=0 \Rightarrow \lim a_nb_n = ab = \lim a_n\cdot \lim b_n.$

Πορίσματα

1) $\lim a_n = l \Rightarrow \forall \lambda\in\mathbb{R}: \lim(\lambda a_n)=\lambda l$.

2) $\lim a_n = l \Rightarrow \forall \kappa\in\mathbb{N}^*: \lim(a_n)^\kappa = l^\kappa$.

3) $(a_n),(b_n)$ συγκλίνουσες $\Rightarrow \lim(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda\lim a_n+\mu\lim b_n$.

Θ2) $\boxed{\left.\begin{array}{l}(a_n): a_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}^* \\ (a_n) \text{ συγκλίνουσα με } \lim a_n\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\lim a_n}}$

Απόδειξη: Αρκεί $\lim\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right)=0$, όπου $a=\lim a_n$.

Είναι $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}=\frac{a-a_n}{aa_n}=\frac{1}{a_n}\,\frac{a-a_n}{a}, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{|a_n|}\,\frac{|a_n-a|}{|a|}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (1)

$\lim a_n = a\neq 0 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: \frac{|a|}{2}<|a_n|<\frac{3|a|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|a_n|}<\frac{2}{|a|}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0$

$\frac{|a_n-a|}{|a|}>0$

$\Rightarrow \frac{|a_n-a|}{|a|\cdot|a_n|}<\frac{2|a-a_n|}{|a|^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right|<\frac{2|a_n-a|}{|a|^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0$

$\lim a_n = a \Rightarrow \lim(a_n-a)=0 \Rightarrow \lim\frac{2(a_n-a)}{a^2}=0 \Rightarrow \lim\frac{2|a_n-a|}{|a|^2}=0$

$$\Rightarrow \lim\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right)=0 \Rightarrow \lim\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}=\frac{1}{\lim a_n}$$

↳ Πόρισμα : $\boxed{\left.\begin{matrix}(a_n),(b_n) \text{ συγκλίνουσες με } \lim b_n\neq 0\\ b_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}^*\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}}$

Θ3) $\boxed{\left.\begin{matrix}(a_n) \text{ συγκλίνουσα}\\ a_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}^*\end{matrix}\right\} \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}^*: \lim\sqrt[k]{a_\nu}=\sqrt[k]{\lim a_\nu}}$

Απόδειξη : Έστω $\left.\begin{matrix}l=\lim a_n\\ a_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}^*\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\geq 0.$

i) Αν $l=\lim a_\nu=0 \Rightarrow \lim\sqrt[k]{a_n}=0=\sqrt[k]{0}=\sqrt[k]{\lim a_n}.$

ii) Αν $l>0$, αρκεί $\lim(\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{l})=0.$

Είναι $$|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{l}|=\frac{|\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{l}|\cdot|(\sqrt[k]{a_n})^{k-1}+(\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{l}+\dots+\sqrt[k]{a_n}(\sqrt[k]{l})^{k-2}+(\sqrt[k]{l})^{k-1}|}{|(\sqrt[k]{a_n})^{k-1}+(\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{l}+\dots+\sqrt[k]{a_n}(\sqrt[k]{l})^{k-2}+(\sqrt[k]{l})^{k-1}|}$$

$$=\frac{|a_n-l|}{(\sqrt[k]{a_n})^{k-1}+(\sqrt[k]{a_n})^{k-2}\sqrt[k]{l}+\dots+(\sqrt[k]{l})^{k-1}}\leq\frac{1}{(\sqrt[k]{l})^{k-1}}\cdot|a_n-l|, \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\left.\begin{matrix}\lim a_n=l\Rightarrow\lim(a_n-l)=0\Rightarrow\lim\left[\frac{1}{(\sqrt[k]{l})^{k-1}}\cdot(a_n-l)\right]=0\\ |\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{l}|\leq\left|\frac{1}{(\sqrt[k]{l})^{k-1}}\cdot(a_n-l)\right|, \forall n\in\mathbb{N}^*\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim(\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{l})=0\Rightarrow\lim\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{l}=\sqrt[k]{\lim a_n}.$$

↳ $\boxed{\lim\sqrt[n]{a}=1, \forall a>0}$

Απόδειξη

Αν $a=1\Rightarrow\sqrt[n]{a}=1, \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim\sqrt[n]{a}=1$

Αν $a>1\Rightarrow\lim\sqrt[n]{a}=1$, δείχθηκε.

Έστω $0<a<1\Rightarrow\frac{1}{a}>0\Rightarrow\lim\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1\Rightarrow\lim\sqrt[n]{a}=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=$

$$=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Μέθοδοι - Ασκήσεις (που λύνονται με τις ιδιότητες των πράξεων)

Μορφή 1 $\rightarrow$ $\boxed{a_n = \dfrac{f(n)}{g(n)}}$

Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με την μέγιστη δύναμη του n που υπάρχει στα $f(n), g(n)$ και χρησιμοποιώ την βασική ιδιότητα $\lim \frac{1}{n^p} = 0, \forall p \in \mathbb{Q}^*_+$

• Παράδειγμα: Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{n^2 + 2n\sqrt{n} + 5}{-n^2 - n\sqrt{n} + 8n}$$

Λύση

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \; a_n = \frac{n^2 + 2n\sqrt{n} + 5}{-n^2 - n\sqrt{n} + 8n} = \frac{n^2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n}\right)} = \frac{1 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} + 5\cdot\frac{1}{n^2}}{-1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + 8\cdot\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{1 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} + 5\cdot\frac{1}{n^2}}{-1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + 8\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\lim\left(1 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} + 5\cdot\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + 8\cdot\frac{1}{n}\right)} = \frac{1 + 2\lim\frac{1}{\sqrt{n}} + 5\lim\frac{1}{n^2}}{-1 - \lim\frac{1}{\sqrt{n}} + 8\lim\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1 + 2\cdot 0 + 5\cdot 0}{-1 - 0 - 8\cdot 0} = -1.$$

$\rightarrow$ Ειδικά, αν a_n είναι η ρητή ακολουθία, δηλαδή αν τα $f(n), g(n)$ είναι πολυώνυμα, θα δείξουμε ότι το όριο της a_n ισούται με το όριο του λόγου των μεγιστοβάθμιων όρων των $f(n), g(n)$, δηλαδη

$$\bullet \; \boxed{\lim \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \lim \frac{a_m n^m}{b_p n^p}}$$

• Παραδείγματα: Να βρεθούν τα όρια

1) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n + 4}{3n^3 - 2n^2 + 6n + 7} \Rightarrow \lim a_n = \lim \dfrac{n^2 + 3n + 4}{3n^3 - 2n^2 + 6n + 7} = \lim \dfrac{n^2}{3n^3} = \dfrac{1}{3} \lim \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{3} \cdot 0 = 0$

2) $a_n = \dfrac{5n^2 - 4n + 7}{2n^2 + 3n + 1} \Rightarrow \lim a_n = \lim \dfrac{5n^2 - 4n + 7}{2n^2 + 3n + 1} = \lim \dfrac{5n^2}{2n^2} = \dfrac{5}{2}$

3) $a_n = \dfrac{4}{2n^2 - 1} =$ $\rightarrow$ Σε αυτή την περίπτωση δουλεύω με τον γενικό τρόπο

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{4}{2 - \frac{1}{n^2}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{1}{n^2} \cdot \lim \frac{4}{2 - \frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{n^2} \cdot \frac{4}{2 - \lim \frac{1}{n^2}} =$$

$$= 0 \cdot \frac{4}{2 - 0} = 0$$

Μορφη 2 $\longrightarrow$ $\boxed{a_n = \dfrac{k_1^n + k_2^n + \cdots + k_p^n}{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_m^n}}$

Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με την n-οστή δύναμη της μεγαλύτερης (κατ'απόλυτον) βάσης και χρησιμοποιώ την ιδιότητα $|a|<1 \Rightarrow \lim a^n = 0$.

• Παράδειγμα : Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{(-2)^n - 7^n}{3^{n+1} + (-13)^n}$$

Λύση

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \frac{(-2)^n - 7^n}{3^{n+1} + (-13)^n} = \frac{(-2)^n - 7^n}{3\cdot 3^n + (-13)^n} = \frac{(-13)^n\left[\left(\frac{2}{7}\right)^n - \left(\frac{-7}{13}\right)^n\right]}{(-13)^n\left[3\cdot\left(\frac{-3}{13}\right)^n + 1\right]} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n - \left(-\frac{7}{13}\right)^n}{3\left(\frac{-3}{13}\right)^n + 1} \Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n - \left(\frac{-7}{13}\right)^n}{3\left(\frac{-3}{13}\right)^n + 1} = \frac{\lim\left[\left(\frac{2}{7}\right)^n - \left(-\frac{7}{13}\right)^n\right]}{\lim\left[3\left(\frac{-3}{13}\right)^n + 1\right]} =$$

$$= \frac{\lim\left(\frac{2}{7}\right)^n - \lim\left(-\frac{7}{13}\right)^n}{3\lim\left(-\frac{3}{13}\right)^n + 1} = \frac{0-0}{3\cdot 0 + 1} = 0$$

Μορφή 3 $\longrightarrow$ $\boxed{a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)}$

• Προσδιορίζω το άθροισμα με την βοήθεια των προόδων ή με κατάλληλο τέχνασμα (ανάλυση γενικού όρου) ή με τα βασικά αθροίσματα

$$S_1 = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

οπότε καταλήγω στις μορφές 1 ή 2.

• Παραδείγματα : Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών.

1) $a_n = \frac{1}{n}\left[\left(3+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(3+\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(3+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$

Λύση

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(3+\frac{k}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(9 + \frac{6k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[9(n-1) + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right] = \frac{1}{n}\left[9(n-1) + \frac{6}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$= \frac{9n-9}{n} + \frac{3n^2-3n}{n^2} + \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim\left[\frac{9n-9}{n} + \frac{3n^2-3n}{n^2} + \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}\right] = \lim\frac{9n-9}{n} + \lim\frac{3n^2-3n}{n^2} + \lim\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}$$

$$= \lim\frac{9n}{n} + \lim\frac{3n^2}{n^2} + \lim\frac{2n^3}{6n^3} = 9+3+\frac{1}{3} = 12+\frac{1}{3} = \frac{37}{3}$$

2) $a_n = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$

Λύση

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[k(k+1)\right] = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} + \frac{n^2+n}{2n^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} + \frac{n^2+n}{2n^3}\right] = \lim\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} + \lim\frac{n^2+n}{2n^3} =$$

$$= \lim\frac{2n^3}{6n^3} + \lim\frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\lim\frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

3) $a_n = 1 + \cos 2 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^{n-1} 2.$

Λύση

$1, \cos 2, \cos^2 2, \ldots, \cos^{n-1} 2$ γεωμετρική πρόοδος με αρχικό όρο $=1$, λόγο $\cos 2$, πλήθος όρων $=n \Rightarrow a_n = 1+\cos 2+\cos^2 2+\cdots+\cos^{n-1}2 = \dfrac{\cos^n 2 - 1}{\cos 2 - 1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (1).

$$|\cos 2| < 1 \Rightarrow \lim(\cos 2)^n = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \lim a_n = \lim\frac{\cos^n 2 - 1}{\cos 2 - 1} = \frac{\lim(\cos^n 2) - 1}{\cos 2 - 1} = \frac{0-1}{\cos 2 - 1} =$$

$$= \frac{-1}{\cos 2 - 1}$$

4) $a_n = \dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{(1+2+\cdots+n)\left[1+3+5+\cdots+(2n-1)\right]}$

Λύση

$1,3,5,\ldots,2n-1$ αριθμητική πρόοδος με αρχικό όρο $=1$, τελικό όρο $=2n-1$, πλήθος όρων $= n \Rightarrow 1+3+5+\cdots+(2n-1) = \dfrac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = n^2. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n = \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{(1+2+\cdots+n)\left[1+3+5+\cdots+(2n-1)\right]} = \frac{\frac{\cancel{n^2}(n+1)^{\cancel{2}}}{4}}{\frac{n\cancel{(n+1)}}{2}\cdot\cancel{n^2}} = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim\frac{n+1}{2n} = \lim\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Μορφή 4 $\longrightarrow$ $\boxed{a_n = \sqrt[k]{f(n)} - \sqrt[k]{g(n)}}$

- Αν $k=2$, πολλαπλασιάζω και διαιρώ με την συζυγή παράσταση.
- Αν $k>2$, χρησιμοποιώ την ταυτότητα

$$x-y = \frac{x^k - y^k}{x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1}}$$

Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγω σε ακολουθία της μορφής M_1.

- Παραδείγματα : Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών.

1) $a_n = (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})\sqrt{n+2}$

Λύση

$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})\sqrt{n+2} = \dfrac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3}}\sqrt{n+2} =$

$= \dfrac{(n+4)-(n+3)}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+3}} \cdot \sqrt{n+2} = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+3}} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}} \Longrightarrow$

$\to \lim a_n = \lim \dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = \dfrac{\sqrt{1+2\lim\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+4\lim\frac{1}{n}}+\sqrt{1+3\lim\frac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt{1+2\cdot 0}}{\sqrt{1+4\cdot 0}+\sqrt{1+3\cdot 0}} =$

$= \dfrac{1}{2}.$

2) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n} - n.$

Λύση

$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \sqrt[3]{n^3+n} - n = \dfrac{(n^3+n) - n^3}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2} + \sqrt[3]{n^3+n}\cdot\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} =$

$= \dfrac{n}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2} + \sqrt[3]{n^3+n}\cdot\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\cdot 1 + 1} \to$

$\to \lim a_n = \lim \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + 1} = \dfrac{\lim\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{(1+\lim\frac{1}{n^2})^2} + \sqrt{1+\lim\frac{1}{n^2}} + 1} =$

$= \dfrac{0}{\sqrt[3]{(1+0)^2} + \sqrt[3]{1+0} + 1} = 0$

Συμβιβαστότητα ορίου και διάταξης

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l}(a_n),(b_n) \text{ συγκλίνουσες} \\ \exists \kappa\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa: a_n\leq b_n\end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n.}$

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l}(a_n),(b_n) \text{ συγκλίνουσες} \Rightarrow (a_n-b_n) \text{ συγκλίνουσα} \\ a_n\leq b_n, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa \Rightarrow a_n-b_n\leq 0, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim(a_n-b_n)\leq 0 \\ (a_n),(b_n) \text{ συγκλίνουσες}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n - \lim b_n \leq 0 \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n.$$

Βασικά κριτήρια σύγκλισης

Θ1) Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

$\boxed{\left.\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa: a_n\leq b_n\leq \gamma_n \\ \lim a_n = \lim \gamma_n = \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \lim b_n = \ell}$

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa: a_n\leq b_n\leq\gamma_n \Rightarrow 0\leq b_n-a_n\leq\gamma_n-a_n \Rightarrow |b_n-a_n|\leq|\gamma_n-a_n| \\ \lim(\gamma_n-a_n)=\lim\gamma_n-\lim a_n = \ell-\ell=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim(b_n-a_n)=0 \Rightarrow \lim b_n = \lim[a_n+(b_n-a_n)] = \lim a_n + \lim(b_n-a_n) = \ell+0=\ell.$$

Θ2)

$\boxed{\left.\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>0 \\ \lim a_n = a>0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\sqrt[n]{a_n}=1}$

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l}\lim a_n = a>0 \Rightarrow \exists\kappa\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa: \frac{|a|}{2}<|a_n|<\frac{3|a|}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2}<a_n<\frac{3a}{2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa \\ \lim\sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim\sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1\end{array}\right\} \overset{\Theta_1}{\Rightarrow} \lim\sqrt[n]{a_n}=1.$$

Θ3) Κριτήριο μονοτονίας

$\boxed{\begin{array}{l}(a_n) \text{ αύξουσα} \wedge (a_n) \text{ άνω φραγμένη} \Rightarrow (a_n) \text{ συγκλίνουσα με } \lim a_n = \sup a_n \\ (a_n) \text{ φθίνουσα} \wedge (a_n) \text{ κάτω φραγμένη} \Rightarrow (a_n) \text{ συγκλίνουσα με } \lim a_n = \inf a_n\end{array}}$

Απόδειξη

Εστω (a_n) αύξουσα και άνω φραγμένη

(a_n) άνω φραγμένη $\Rightarrow \underline{\exists \ell \in \mathbb{R}}: \ell = \sup a_n$.

Εστω $\underline{\varepsilon > 0}$

$$\left.\begin{array}{l} \ell = \sup a_n \Rightarrow \underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*}: \ell - \varepsilon < a_{n_0} < \ell \\ (a_n) \text{ αύξουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0: \ell - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < \ell \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0: \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow \underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0: |a_n - \ell| < \varepsilon}$.

Αρα $\exists \ell \in \mathbb{R}$ (π.χ. $\ell = \sup a_n$)$: \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0: |a_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim a_n = \sup a_n$.

Ομοια αν (a_n) φθίνουσα και κάτω φραγμένη.

Θ4) Κριτήριο D'Alembert

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1 \\ a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n = 0}$$

Απόδειξη

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \\ a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow (a_{n+n_0}) \text{ φθίνουσα} \\ \text{είναι και } (a_{n+n_0}) \text{ κάτω φραγμένη} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a_n)$ συγκλίνουσα με $\lim a_n = \ell \geq 0$, διότι $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > 0$.

• Θα δείξω ότι $\ell = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Εστω } \ell \neq 0 \Rightarrow \lim a_n \neq 0 \\ a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim a_{n+1}}{\lim a_n} = \frac{\ell}{\ell} = 1 \leftarrow \text{Ατοπο,}$$

διότι εξ' υποθέσεως $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Αρα $\ell = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0$.

Με όμοιο τρόπο, παραλείποντας το μέρος κάτω από το •, αποδεικνύεται ότι

$$\left.\begin{array}{l} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \\ a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \text{ συγκλίνουσα με } \lim a_n = \ell \geq 0$$

Ο αριθμός Napier

Θ. $\boxed{\text{Η } (a_n): a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ είναι συγκλίνουσα}}$

Απόδειξη

• Θα δείξω ότι (a_n) γνησίως αύξουσα

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + n\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}, \forall n\in\mathbb{N}^* \quad (1)$$

Είναι $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} < \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}\frac{1}{(n+1)^k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n^k} < \frac{n+1}{n-k+1}\frac{1}{(n+1)^k} \Leftrightarrow (n-k+1)(n+1)^k < n^k(n+1) \Leftrightarrow (n-k+1)(n+1)^{k-1} < n^k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n+1)^k - k(n+1)^{k-1} < n^k \Leftrightarrow \left[\cancel{n^k} + \cancel{kn^{k-1}} + \sum_{\lambda=2}^{k}\binom{k}{\lambda}n^{k-\lambda}\right] - k\left[\cancel{n^{k-1}} + \sum_{\lambda=1}^{k-1}\binom{k-1}{\lambda}n^{k-\lambda-1}\right] < \cancel{n^k}$

$\Leftrightarrow \sum_{\lambda=2}^{k}\binom{k}{\lambda}n^{k-\lambda} - \sum_{\lambda=1}^{k-1}k\binom{k-1}{\lambda}n^{k-\lambda-1} < 0 \Leftrightarrow \sum_{\lambda=2}^{k}\binom{k}{\lambda}n^{k-\lambda} < \sum_{\lambda=2}^{k}k\binom{k-1}{\lambda-1}n^{k-\lambda} \quad (2).$

Αρκει $\binom{k}{\lambda} < k\binom{k-1}{\lambda-1} \Leftrightarrow \frac{k!}{\lambda!(k-\lambda)!} < k\cdot\frac{(k-1)!}{(\lambda-1)!(k-\lambda)!} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda!} < \frac{1}{(\lambda-1)!} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda! > (\lambda-1)! \Leftrightarrow \lambda > 1$, ισχύει άρα αντιστρόφως.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall k\in\mathbb{N}^*, k>1, \forall\lambda\in\mathbb{N}^*, \lambda>1 : \lambda>1 \Rightarrow \binom{k}{\lambda} < k\binom{k-1}{\lambda-1} \Rightarrow \binom{k}{\lambda}n^{k-\lambda} < k\binom{k-1}{\lambda-1}n^{k-\lambda}$

$\Rightarrow \sum_{\lambda=2}^{k}\binom{k}{\lambda}n^{k-\lambda} < \sum_{\lambda=2}^{k}k\binom{k-1}{\lambda-1}n^{k-\lambda} \overset{(2)}{\Rightarrow} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < 2 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow a_n < a_{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα.

• Αρκει (a_n) άνω φραγμένη. Εστω $n\in\mathbb{N}^*$.

Αρκεί $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \frac{1}{2^{k-1}}$, ~~$\forall k\in\mathbb{N}^*, k\geq 2, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq k$.~~
$\forall k\in\mathbb{N}^*, n\geq k\geq 2.$

Για $k=2$, $\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{\cancel{2}}\frac{1}{n^2} < \frac{1}{\cancel{2}} \Leftrightarrow n(n-1) < n^2 \Leftrightarrow n^2 - n < n^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > 0$, ισχύει

Εστω ότι ισχύει για $k=\lambda$: $\binom{n}{\lambda}\frac{1}{n^\lambda} < \frac{1}{2^{\lambda-1}} \quad (1).$

Θα δείξω ότι ισχύει και για $\kappa=\lambda+1\leqslant n$

$$\binom{n}{\lambda+1}\frac{1}{n^{\lambda+1}}<\frac{1}{2^{\lambda}} \Leftrightarrow \frac{n!}{(\lambda+1)!\,(n-\lambda-1)!}\,\frac{1}{n^{\lambda+1}}<\frac{1}{2^{\lambda}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{n!}{\lambda!\,(n-\lambda)!}\,\frac{1}{n^{\lambda}}\right]\frac{n-\lambda}{n(\lambda+1)}<\left(\frac{1}{2^{\lambda-1}}\right)\frac{1}{2} \quad (2)$$

Αρκεί $\frac{n-\lambda}{n(\lambda+1)}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(n-\lambda)<n(\lambda+1) \Leftrightarrow 2n-2\lambda<n\lambda+n \Leftrightarrow n\lambda+2\lambda-n>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n(\lambda-1)+2\lambda>0$, ισχύει διότι $n\geqslant\lambda+1\geqslant3 \Rightarrow \begin{cases}\lambda-1\geqslant1>0\\ n\geqslant3>0,\ 2\lambda\geqslant4>0\end{cases}$

Αρα $\frac{n-\lambda}{n(\lambda+1)}<\frac{1}{2}$

είναι και $\frac{n!}{\lambda!(n-\lambda)!}\,\frac{1}{n^{\lambda}}<\frac{1}{2^{\lambda-1}}$

$\Rightarrow (2) \Rightarrow \binom{n}{\lambda+1}\frac{1}{n^{\lambda+1}}<\frac{1}{2^{\lambda}}$, ισχύει.

Αρα $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall \kappa\in\mathbb{N}^*, n\geqslant\kappa\geqslant2 : \binom{n}{\kappa}\frac{1}{n^{\kappa}}<\frac{1}{2^{\kappa-1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{\kappa=2}^{n}\binom{n}{\kappa}\frac{1}{n^{\kappa}}<\sum_{\kappa=2}^{n}\frac{1}{2^{\kappa-1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{1}{2}-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+n\frac{1}{n}+\sum_{\kappa=2}^{n}\binom{n}{\kappa}\frac{1}{n^{\kappa}}<1+1+1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a_n<3,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow (a_n)$ φραγμένη άνω με ένα άνω φράγμα το 3
είναι και (a_n) γνησίως αύξουσα
$\Rightarrow (a_n)$ συγκλίνουσα QED.

Το όριο της a_n είναι ένας άρρητος αριθμός που ονομάζεται αριθμός Napier και συμβολίζεται με το γράμμα e. Έτσι γράφουμε

$$\boxed{e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

Μία δεκαδική προσέγγιση του αριθμού e είναι $e\simeq2{,}718281$

ΜΕΘΟΔΟΙ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ (που λύνονται με τα βασικά κριτήρια σύγκλισης)

Μορφή 5 $\rightarrow$ $\boxed{a_n = f(1,n)+f(2,n)+\dots+f(kn,n)}$

• Βρίσκω τον μικρότερο όρο μ και τον μεγαλύτερο Μ του αθροίσματος και έχω

$$\left.\begin{array}{l} \mu \leq f(1,n) \leq M \\ \mu \leq f(2,n) \leq M \\ \dots\dots\dots \\ \mu \leq f(kn,n) \leq M \end{array}\right\} \Rightarrow kn\mu < a_n < knM$$

και εφαρμόζω το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

• Παραδείγματα : Να βρεθούν τα όρια

1) $a_n = \dfrac{n^3}{n^4+1} + \dfrac{n^3}{n^4+2} + \dots + \dfrac{n^3}{n^4+n}$

Λύση

Είναι $\dfrac{n^3}{n^4+n} \leq \dfrac{n^3}{n^4+k} \leq \dfrac{n^3}{n^4+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq n$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Για } k=1, & \dfrac{n^3}{n^4+n} \leq \dfrac{n^3}{n^4+1} \leq \dfrac{n^3}{n^4+1} \\ k=2, & \dfrac{n^3}{n^4+n} \leq \dfrac{n^3}{n^4+2} \leq \dfrac{n^3}{n^4+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ k=n, & \dfrac{n^3}{n^4+n} \leq \dfrac{n^3}{n^4+n} \leq \dfrac{n^3}{n^4+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{n\cdot n^3}{n^4+n} \leq a_n \leq \dfrac{n\cdot n^3}{n^4+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (1)$$

$$\lim \frac{n\cdot n^3}{n^4+n} = \lim \frac{n^3}{n^3+1} = \lim \frac{n^3}{n^3} = 1 \quad (2)$$

$$\lim \frac{n\cdot n^3}{n^4+1} = \lim \frac{n^4}{n^4+1} = \lim \frac{n^4}{n^4} = 1 \quad (3)$$

$(1),(2),(3) \Rightarrow \lim a_n = 1.$

$\rightarrow$ Αν ο αριθμητής είναι μεταβλητός, τότε βάζω πρώτα τους παρονομαστές, ύστερα πολλαπλασιάζω κατά μέλη τους αριθμητές και προσθέτω κατά μέλη

2) $a_n = \dfrac{n^2+1^2}{n^3+1^2} + \dfrac{n^2+2^2}{n^3+2^2} + \dfrac{n^2+3^2}{n^3+3^2} + \dots + \dfrac{n^2+n^2}{n^3+n^2}$

Λύση

Είναι $\frac{1}{n^3+n^2} \leqslant \frac{1}{n^3+1^2} \leqslant \frac{1}{n^3+1^2} \Rightarrow \frac{n^2+1^2}{n^3+n^2} \leqslant \frac{n^2+1^2}{n^3+1^2} \leqslant \frac{n^2+1^2}{n^3+1^2}$

$\frac{1}{n^3+n^2} \leqslant \frac{1}{n^3+2^2} \leqslant \frac{1}{n^3+1^2} \Rightarrow \frac{n^2+2^2}{n^3+n^2} \leqslant \frac{n^2+2^2}{n^3+2^2} \leqslant \frac{n^2+2^2}{n^3+1^2}$

$\ldots$

$\frac{1}{n^3+n^2} \leqslant \frac{1}{n^3+n^2} \leqslant \frac{1}{n^3+1^2} \Rightarrow \frac{n^2+n^2}{n^3+n^2} \leqslant \frac{n^2+n^2}{n^3+n^2} \leqslant \frac{n^2+n^2}{n^3+1^2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n\cdot n^2+(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{n^3+n^2} \leqslant \frac{n^2+1^2}{n^3+1^2}+\frac{n^2+2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2+n^2}{n^3+n^2} \leqslant \frac{n\cdot n^2+(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{n^3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^3+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2} \leqslant a_n \leqslant \frac{n^3+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6n^3+2n^3+3n^2+n}{6n^3+6n^2} \leqslant a_n \leqslant \frac{6n^3+2n^3+3n^2+n}{6n^3+6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8n^3+3n^2+n}{6n^3+6n^2} \leqslant a_n \leqslant \frac{8n^3+3n^2+n}{6n^3+6}, \ \forall n\in\mathbb{N}^* \quad (1).$$

$$\lim \frac{8n^3+3n^2+n}{6n^3+6n^2} = \lim\frac{8n^3}{6n^3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\lim \frac{8n^3+3n^2+n}{6n^3+1} = \lim\frac{8n^3}{6n^3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (3)$$

$(1),(2),(3) \Rightarrow \lim a_n = \frac{4}{3}$.

Μορφή 6 $\longrightarrow$ $\boxed{a_n=\sqrt[n]{f(n)}}$

- Αν το όριο της $f(n)$ είναι πεπερασμένο $(\neq 0)$ τότε η a_n έχει όριο το 1.

Παράδειγμα : Να βρεθεί το όριο της

1) $a_n=\sqrt[n]{\frac{2n+\sqrt[n]{n}}{n+2}}$

Λύση

Είναι $b_n=\frac{2n+\sqrt[n]{n}}{n+2}=\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\sqrt[n]{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{2+\frac{1}{n}\sqrt[n]{n}}{1+2\cdot\frac{1}{n}} \Rightarrow$

$$\rightarrow \lim b_n=\lim\frac{2+\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{1+2\cdot\frac{1}{n}}=\frac{2+\lim\frac{1}{n}\cdot\lim\sqrt[n]{n}}{1+2\lim\frac{1}{n}}=\frac{2+0\cdot 1}{1+2\cdot 0}=2>0$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*: b_n>0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim a_n=\lim\sqrt[n]{b_n}=1.$$

2) $a_n=\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{|\sin 2n|}{n+2}}$

Λύση

$\forall n\in\mathbb{N}^*: \left|\frac{|\sin 2n|}{n+2}\right|=\frac{|\sin 2n|}{n+2}\leqslant\frac{1}{n+2}\leqslant\frac{1}{n}$, $\lim\frac{1}{n}=0$ $\Big\}\Rightarrow \lim\frac{\sin 2n}{n+2}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim b_n=\lim\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{|\sin 2n|}{n+2}\right]=\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\frac{|\sin 2n|}{n+2}\right]=$

$=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\lim\frac{|\sin 2n|}{n+2}=e+0=e>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*: b_n>0$ $\Big\}\Rightarrow \lim a_n=\lim\sqrt[n]{b_n}=1.$

• Αν $f(n)$ είναι πολυώνυμο, βγάζω κοινό παράγοντα το n^k (μεγιστοβάθμια δύναμη) και χρησιμοποιώ τις ιδιότητες σε συνδυασμό με τα κριτήρια.

Παράδειγμα

1) Να βρεθεί το όριο της $a_n=\sqrt[n]{2n^3-n+5}$

Λύση

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\sqrt[n]{2n^3-n+5}=\sqrt[n]{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^3\sqrt[n]{2-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}$. (1).

Είναι $\lim\left(2-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)=2-\lim\frac{1}{n^2}+5\lim\frac{1}{n^3}=2-0+5\cdot 0=2>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*: 2-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\geqslant 0$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\sqrt[n]{2-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}=1$, $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)^3=\left[\lim\sqrt[n]{n}\right]^3=1^3=1$ $\Big\}\overset{(1)}{\Rightarrow} \lim a_n=1\cdot 1=1.$

• Αν $f(n)=\lambda_1 c_1^n+\lambda_2 c_2^n+\dots+\lambda_k c_k^n$ τότε βγάζω κοινό παράγοντα το $c=\max\{c_1,c_2,\dots$ και εργάζομαι όπως στο πολυώνυμο.

Παράδειγμα

1) Να βρεθεί το όριο της $a_n=\sqrt[n]{2^n+e^n+5^n}$

Λύση

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\sqrt[n]{2^n+e^n+5^n}=\sqrt[n]{5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{e}{5}\right)^n+1\right]}=5\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{e}{5}\right)^n+1}$ (1)

Είναι

$\lim b_n=\lim\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{e}{5}\right)^n+1\right]=\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n+\lim\left(\frac{e}{5}\right)^n+1=0+0+1=1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*: b_n>0$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim a_n=5\lim\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{e}{5}\right)^n+1}=5\cdot 1=5.$

• Σε κάθε άλλη μορφή, κάνω αυθαίρετες αυξομειώσεις και ύστερα την n-οστή ρίζα έτσι ώστε να έχω αριστερά και δεξιά ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες των οποίων το όριο να ανάγεται στα $\lim\sqrt[n]{a}=1$, $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

• Παραδείγματα : Να βρεθούν τα όρια.

1) $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{3^n+n^{n+1}}$.

Λύση

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{3^n+n^{n+1}}=\frac{1}{n}\sqrt[n]{n^n\left(\frac{3^n}{n^n}+n\right)}=\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n+n}$

Είναι $\forall n\in\mathbb{N}^*, n>3: \ n<\left(\frac{3}{n}\right)^n+n<n+n \Rightarrow \sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n+n}<\sqrt[n]{2n}$ (1).

$\lim\sqrt[n]{n}=1$ (2)

$\lim\sqrt[n]{2n}=\lim\left(\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\right)=\lim\sqrt[n]{2}\cdot\lim\sqrt[n]{n}=1\cdot1=1.$ (3)

(1),(2),(3) $\Rightarrow \lim a_n=\lim\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n+n}=1.$

2) $a_n=\sqrt[n]{1-\cos2n+e}$

Λύση

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\sqrt[n]{1-\cos2n+e}=\sqrt[n]{2\sin^2n+e}$

Είναι $\forall n\in\mathbb{N}^*: |\sin n|\leq1 \Rightarrow 0\leq\sin^2n\leq1 \Rightarrow 0\leq2\sin^2n\leq2 \Rightarrow$

$\Rightarrow e\leq2\sin^2n+e\leq2+e \Rightarrow \sqrt[n]{e}\leq\sqrt[n]{2\sin^2n+e}\leq\sqrt[n]{2+e}$. (1).

$e>0 \Rightarrow \lim\sqrt[n]{e}=1.$ (2)

$2+e>0 \Rightarrow \lim\sqrt[n]{2+e}=1$ (3)

(1),(2),(3) $\Rightarrow \lim a_n=\lim\sqrt[n]{1-\cos2n+e}=1.$

Μορφή 7 → Ακολουθίες με ακέραια μέρη.

• Για τον υπολογισμό του ορίου τους χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$x-1<[x]\leq x \quad ,\forall x\in\mathbb{R}$$

σε συνδυασμό με το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

Παραδείγματα

1) $a_n=\frac{n[n\sqrt{3}]}{n^2+n+1}$

Λύση

$\forall n\in\mathbb{N}^*: n\sqrt{3}-1<[n\sqrt{3}]\leq n\sqrt{3} \Rightarrow n^2\sqrt{3}-n<n[n\sqrt{3}]\leq n^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n^2\sqrt{3}-n}{n^2+n+1}<\frac{n[n\sqrt{3}]}{n^2+n+1}\leq\frac{n^2\sqrt{3}}{n^2+n+1} \Rightarrow \frac{n^2\sqrt{3}-n}{n^2+n+1}<a_n\leq\frac{n^2\sqrt{3}}{n^2+n+1}$ (1).

$\lim\frac{n^2\sqrt{3}-n}{n^2+n+1}=\lim\frac{n^2\sqrt{3}}{n^2}=\sqrt{3}$ (2).

$$\lim \frac{n^2\sqrt{3}}{n^2+n+1} = \lim \frac{n^2\sqrt{3}}{n^2} = \sqrt{3} \qquad (3)$$

$(1),(2),(3) \Rightarrow \lim a_n = \sqrt{3}.$

2) $a_n = \dfrac{[\sqrt{3}]+[2\sqrt{3}]+\cdots+[n\sqrt{3}]}{2n^2+n+1}$

Λύση

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{3}-1 < [\sqrt{3}] \leq \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 < [2\sqrt{3}] \leq 2\sqrt{3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n\sqrt{3}-1 < [n\sqrt{3}] \leq n\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+2+\cdots+n)\sqrt{3}-n < [\sqrt{3}]+[2\sqrt{3}]+\cdots+[n\sqrt{3}] \leq (1+2+\cdots+n)\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}n(n+1)\sqrt{3}-n}{2n^2+n+1} < \frac{[\sqrt{3}]+[2\sqrt{3}]+\cdots+[n\sqrt{3}]}{2n^2+n+1} \leq \frac{\frac{1}{2}n(n+1)\sqrt{3}}{2n^2+n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}n^2+(\sqrt{3}-2)n+\sqrt{3}}{4n^2+2n+2} < a_n \leq \frac{\sqrt{3}n^2+\sqrt{3}n}{4n^2+2n+2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (1).$$

$$\lim \frac{\sqrt{3}n^2+(\sqrt{3}-2)n+\sqrt{3}}{4n^2+2n+2} = \lim \frac{\sqrt{3}n^2}{4n^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad (2)$$

$$\lim \frac{\sqrt{3}n^2+\sqrt{3}n}{4n^2+2n+2} = \lim \frac{\sqrt{3}n^2}{4n^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad (3)$$

$(1),(2),(3) \Rightarrow \lim a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

3) $a_n = n^2 \cdot \left[\dfrac{4}{n}\right]$

Λύση

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n>4 : 0 < \dfrac{4}{n} < 1 \Rightarrow \left[\dfrac{4}{n}\right] = 0 \Rightarrow a_n = n^2\left[\dfrac{4}{n}\right] = 0 \Rightarrow \lim a_{n+4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim a_n = 0.$

Μορφή 8 → Ακολουθίες που λύνονται με το κριτήριο D'Alembert

Παραδείγματα : Να βρεθούν τα όρια

1) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

Λύση

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \quad (1$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > 0 \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow \lim a_n = 0.$

<u>β' τρόπος</u>: $\forall n \in \mathbb{N}^*: |a_n| = \dfrac{n}{2^n} \leq \dfrac{n}{1+n}$, $\lim \dfrac{n}{1+n} = \lim \dfrac{n}{n} = 1$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim a_n = 0.$

2) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

<u>Λύση</u>

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n (n+1)!}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n (n+1)\, n!}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

3) $a_n = \dfrac{n^{n+1} + 2^n \cdot n!}{(2n)^n}$

<u>Λύση</u>

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \frac{n^{n+1} + 2^n \cdot n!}{(2n)^n} = \frac{n \cdot n^n + 2^n \cdot n!}{2^n \cdot n^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{n!}{n^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim\left(\frac{n}{2^n} + \frac{n!}{n^n}\right) = \lim \frac{n}{2^n} + \lim \frac{n!}{n^n} \underset{\text{παρ. } 1,2}{=} 0 + 0 = 0.$$

4) $a_n = \dfrac{n^3 + 3n}{n^n}$

<u>Λύση</u>

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^3 + 3(n+1)}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n^3+3n}{n^n}} = \frac{n^n\left[n^3+3n^2+3n+1+3n+3\right]}{(n+1)^{n+1}(n^3+3n)} =$$

$$= \frac{n^n\left(n^3+3n^2+6n+4\right)}{(n+1)^n (n^3+3n)(n+1)} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n^3+3n^2+6n+4}{n^4+n^3+3n^2+3n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n^3+3n^2+6n+4}{n^4+n^3+3n^2+3n}\right] = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \lim \frac{n^3+3n^2+6n+4}{n^4+n^3+3n^2+3n} =$$

$$= \frac{1}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \lim \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{e} \cdot \lim \frac{1}{n} = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0 < 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n > 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim a_n = 0.$

↳ Επειδή το κριτήριο D'Alembert είναι ειδική περίπτωση του κριτήριου μονοτονίας, η <u>σύγκλιση</u> των παραπάνω μπορεί να αποδειχθεί με το κριτήριο μονοτονίας.

Μορφή 9 → Αναδρομικές ακολουθίες

Εστω μία αναδρομική ακολουθία $(a_n): \begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$
Για να βρούμε το όριο της
(αν υπάρχει) εργαζόμαστε ως εξής.

•1 Μελετώ την (a_n) ως προς την μονοτονία και τα φράγματα και αποδεικνύω ότι είναι συγκλίνουσα με το κριτήριο της μονοτονίας. Αν και χρειάζεται μόνο ένα φράγμα (το άνω ή το κάτω) για να δείξω ότι (a_n) συγκλίνουσα, βρίσκουμε και τα δύο φράγματα και καλό είναι να βρίσκονται όσο γίνεται πιο κοντά στο infinum και το supremun.

•2 Θέτω $\lim a_n = x \Rightarrow \lim a_{n+1} = x$ οπότε απο την εξίσωση $\lim a_{n+1} = \lim f(a_n)$ παίρνουμε $f(x) = x \Leftrightarrow \ldots$

•3 Απο τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης το όριο είναι η ρίζα που είναι ανάμεσα στα φράγματα. Αν μεταξύ των φραγμάτων βρίσκονται περισσότερες ρίζες, τότε συμπτύσσουμε το μεταξύ των φραγμάτων διάστημα, ώστε το όριο να ορίζεται μονότιμα.

Παραδείγματα : Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών.

1) $(a_n): \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 7}. \end{cases}$

Λύση

$a_2 = \sqrt{a_1 + 7} = \sqrt{3+7} = \sqrt{10} > 3 = a_1 \longleftarrow$ Ενδειξη ότι (a_n) γν. αύξουσα

▸ Θα δείξω ότι (a_n) γνησίως αύξουσα.

Για $n=1$, $a_2 > a_1$, ισχύει

Εστω ότι ισχύει για $n=k$ ότι $a_{k+1} > a_k$.

$a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} + 7} > \sqrt{a_k + 7} = a_{k+1}$, ισχύει για $n = k+1$

Αρα $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} > a_n \Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n \geq a_1 = 3$.

▸ Θα δείξω ότι $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n < 4$.

Για $n=1$ ισχύει $a_1 = 3 < 4$.

Εστω ότι για $n=k$, $a_k < 4$ ισχύει.

Για $n = k+1$, $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 7} < \sqrt{4+7} = \sqrt{11} < 4$

Αρα $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n < 4 \Rightarrow (a_n) \text{ άνω φραγμένη} \\ \text{είναι και } (a_n) \text{ γνησίως αύξουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n)$ συγκλίνουσα

Εστω $\lim a_n = x \Rightarrow \lim a_{n+1} = x$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_{n+1} = \sqrt{a_n + 7} \Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{a_n + 7} \Leftrightarrow \lim a_{n+1} = \sqrt{\lim a_n + 7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{x+7} \Leftrightarrow x^2=x+7 \Leftrightarrow x^2-x-7=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{29}}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\\ \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}<0 \leftarrow \text{Απορρ.}\end{cases}$

Πρέπει $x\geq 0$ $\quad \Delta=1+28=29$

διότι $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n\geq 3 \Rightarrow x=\lim a_n \geq 3.$

2) $(a_n): \begin{cases} a_1=5 \\ a_{n+1}=\dfrac{2(a_n-12)}{a_n-8}\end{cases}$

Λύση

$a_2=\dfrac{2(a_1-12)}{a_1-8}=\dfrac{2(5-12)}{5-8}=\dfrac{2\cdot 7}{3}=\dfrac{14}{3}<5=a_1.$ ← Ενδειξη ότι a_n γνησίως φθίνουσα

▶ Θα δείξω ότι $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n<6.$

Για $n=1$, $a_1=5<6$ ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $n=k$ ότι $a_k<6$ (1)

Θα δείξω ότι ισχύει για $n=k+1$

$a_{k+1}<6 \Leftrightarrow \dfrac{2(a_k-12)}{\underbrace{a_k-8}_{-}}<6 \Leftrightarrow 2(a_k-12)>6(a_k-8) \Leftrightarrow a_k-12>3a_k-24 \Leftrightarrow 2a_k<12$

$\Leftrightarrow a_k<6$, ισχύει. Αρα $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n<6.$

▶ Θα δείξω ότι $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>0.$

Για $n=1$, $a_1=5>0$ ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $n=k$ ότι $a_k>0$.

Θα δείξω ότι ισχύει για $n=k+1$ ότι

$a_{k+1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2(a_k-12)}{a_k-8}>0$, ισχύει διότι $a_k<6 \Rightarrow \begin{cases} a_k-12<0 \\ a_k-8<0\end{cases} \Rightarrow \dfrac{2(a_k-12)}{a_k-8}>0.$

Αρα $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>0.$

▶ Θα δείξω ότι $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}<a_n$

Για $n=1$, $a_2<a_1$ ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $n=k$ ότι $a_{k+1}<a_k$.

Θα δείξω ότι ισχύει και για $n=k+1$.

$a_{k+2}<a_{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{2(a_{k+1}-12)}{\underbrace{a_{k+1}-8}_{-}}<\dfrac{2(a_k-12)}{\underbrace{a_k-8}_{-}} \Leftrightarrow (a_{k+1}-12)(a_k-8)<(a_k-12)(a_{k+1}-8) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_k a_{k+1}-8a_{k+1}-12a_k+96<a_k a_{k+1}-8a_k-12a_{k+1}+96 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a_{k+1}-4a_k<0 \Leftrightarrow 4(a_{k+1}-a_k)<0 \Leftrightarrow a_{k+1}-a_k<0 \Leftrightarrow a_{k+1}<a_k$, ισχύει άρα

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}<a_n \Rightarrow (a_n)$ γνησίως φθίνουσα $\Big\} \Rightarrow (a_n)$ συγκλίνουσα. $\Rightarrow$

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>0 \Rightarrow (a_n)$ κάτω φραγμένη

$\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}: \lim a_n=x.$

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}=\dfrac{2(a_n-12)}{a_n-8} \Rightarrow \lim a_{n+1}=\lim\dfrac{2(a_n-12)}{a_n-8} \Leftrightarrow \lim a_{n+1}=\dfrac{2(\lim a_n-12)}{\lim a_n-8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2(x-12)}{x-8} \Leftrightarrow x(x-8)=2(x-12) \Leftrightarrow x^2-8x=2x-24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-10x+24=0 \\ \Delta=100-96=4=2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{10\pm 2}{2}=\begin{cases}6 \leftarrow \text{απορρίπτεται}\\ 4\end{cases}$

(a_n) γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n<a_1=5 \Rightarrow$ ~~$\lim a_n$~~ $x=\lim a_n\leq 5$, οπότε $\lim a_n=4$.

▼ Θεώρημα κιβωτισμού

ΟΡΙΣΜΟΣ : Εστω $([a_n,b_n]): [a_1,b_1],[a_2,b_2],\dots,[a_n,b_n],\dots$ μία ακολουθία διαστημάτων (κλειστών)

$$\boxed{([a_n,b_n]) \text{ κιβωτισμένη} \Leftrightarrow \begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*: [a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]\\ \lim(b_n-a_n)=0\end{cases}}$$

Θ1) $\boxed{([a_n,b_n]) \text{ κιβωτισμένη} \Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}: \forall n\in\mathbb{N}^*: x\in[a_n,b_n]}$

Απόδειξη

$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: [a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n] \Rightarrow \begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*: a_{n+1}\geq a_n\\ \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n<b_1\end{cases} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow (a_n)$ γνησίως αύξουσα~~

$\Rightarrow \begin{cases}(a_n) \text{ ~~γνησίως~~ αύξουσα}\\ (a_n) \text{ άνω φραγμένη}\end{cases} \Rightarrow (a_n)$ συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists x\in\mathbb{R}: \lim a_n=x=\sup a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n\leq x.$

$([a_n,b_n])$ κιβωτισμένη $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: [a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n] \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: \begin{cases}b_{n+1}\leq b_n\\ b_n>a_1\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}(b_n) \text{ ~~γνησίως~~ φθίνουσα}\\ (b_n) \text{ κάτω φραγμένη}\end{cases} \Rightarrow (b_n)$ συγκλίνουσα με $\lim b_n=\inf b_n$.

Αλλά $\inf b_n=\lim b_n=\lim(a_n+(b_n-a_n))=\lim a_n+\lim(b_n-a_n)=x+0=x \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: b_n\geq x.$

Άρα $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n\leq x\leq b_n \Rightarrow x\in[a_n,b_n]$. QED.

↳ Κάθε αριθμός με την ιδιότητα $\forall n\in\mathbb{N}^*: x\in[a_n,b_n]$ ονομάζεται κοινό στοιχείο της $([a_n,b_n])$. και συμβολίζεται $x=\bigcap([a_n,b_n])$.

Σύμφωνα με το Θ1, κάθε κιβωτισμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα κοινό στοιχειο. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το στοιχείο αυτό είναι μοναδικό.

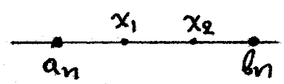
Θ2) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Εστω } ([a_n,b_n]) \text{ μια κιβωτισμένη ακολουθία διαστημάτων.}\\ \left.\begin{array}{l} x_1=\bigcap([a_n,b_n]) \\ x_2=\bigcap([a_n,b_n]) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=x_2 \end{array}}$

Απόδειξη

Εστω $x_1 \neq x_2$ και π.χ. $x_1 > x_2$

$$\left.\begin{array}{l} ([a_n,b_n]) \text{ κιβωτισμένη} \Rightarrow \lim (b_n-a_n)=0 \\ \text{Εστω } \varepsilon = x_1-x_2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : |b_n-a_n| < |x_1-x_2|. \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\bigcap([a_n,b_n]) \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^* : x_1\in[a_n,b_n] \\ x_2=\bigcap([a_n,b_n]) \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^* : x_2\in[a_n,b_n] \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : |x_1-x_2| \leqslant |b_n-a_n| \quad (2).$$



$(1)\wedge(2) \leftarrow$ Ατοπο.

Αρα $x_1=x_2$.

↳ <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>: Μια ακολουθία διαστημάτων λέγεται κιβωτισμένη όταν το επόμενο διάστημα είναι γνήσιο υποσύνολο του προηγούμενου και υπάρχουν διαστήματα οσοδήποτε μικρά στο πλάτος. Σύμφωνα με το Θ1, κάθε κιβωτισμένη ακολουθία διαστηματων έχει κοινό στοιχείο τον $x=\lim a_n=\lim b_n$, δηλαδή ο x ανήκει στα άπειρα διαστήματα της ακολουθιας, ενώ σύμφωνα με το Θ2, <u>δεν</u> υπάρχει άλλος αριθμός με την ιδιότητα αυτή. Οι προτάσεις αυτές αποτελούν το <u>θεώρημα του κιβωτισμού</u>.

~~Θ3) $\forall x\in\mathbb{R}, \exists$ κιβωτισμένη $([a_n,b_n]) : x=\bigcap([a_n,b_n])$.~~

~~Απόδειξη~~

Θ3) $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \exists\, (a_n),(b_n) \text{ ακολουθίες}: \left\{\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n,b_n\in\mathbb{Q} \\ ([a_n,b_n]) \text{ κιβωτισμένη} \\ x=\bigcap([a_n,b_n]). \end{array}\right.}$

Απόδειξη

$$\text{Θέτω} \left.\begin{array}{l} a_1=[x]\in\mathbb{Q} \\ b_1=[x]+1\in\mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow [x]\leqslant x<[x]+1 \Rightarrow a_1\leqslant x<b_1 \Rightarrow x\in[a_1,b_1]$$

Είναι και $a_1,b_1\in\mathbb{Q}$.

Εστω ότι κατασκευάστηκε το n-οστό διάστημα $[a_n,b_n]$ με $x\in[a_n,b_n]$ και $a_n,b_n\in\mathbb{Q}$.

i) Αν $x \leq \frac{a_n+b_n}{2}$, θέτω $\left.\begin{array}{l} a_{n+1}=a_n \in \mathbb{Q} \\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \rightarrow x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

ii) Αν $x > \frac{a_n+b_n}{2}$, θέτω $\left.\begin{array}{l} a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \in \mathbb{Q} \\ b_{n+1}=b_n \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \rightarrow x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$

Και στις δύο περιπτώσεις είναι $\cancel{a_{n+1}-b_n}$ $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}$

Ορίζεται λοιπόν μια ακολουθία διαστημάτων με τις ιδιότητες

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n, b_n \in \mathbb{Q} \\ x \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Αρκεί $([a_n, b_n])$ κιβωτισμένη.

Εκ' κατασκευής : $\forall n \in \mathbb{N}^*: [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. (1)

$\forall n \in \mathbb{N}^*: b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: b_n-a_n=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} \rightarrow$

$\rightarrow \lim(b_n-a_n)=\lim \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=(b_1-a_1)\lim\frac{1}{2^{n-1}}=(b_1-a_1)\cdot 0=0$. (2)

(1),(2) $\Rightarrow ([a_n, b_n])$ κιβωτισμένη $\cancel{\text{ΟΕΔ}}$. $\Rightarrow x=\bigcap([a_n, b_n])$.

$\rightarrow$ Σύμφωνα με το θ_3, κάθε πραγματικός αριθμός, μπορεί να προσεγγιστεί από μία κιβωτισμένη ακολουθία διαστημάτων με άκρα ρητούς αριθμούς. Οι ακολουθίες $(a_n), (b_n)$ προσεγγίζουν τον x κατ' έλλειψη και υπεροχή αντίστοιχα και είναι οι δεκαδικές προσεγγίσεις του x.

▼ Ακολουθίες Cauchy.

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\boxed{(a_n) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1>n_0, n_2>n_0 : |a_{n_1}-a_{n_2}|<\varepsilon}$

~~Απόδειξη~~

$\rightarrow$ Γεωμετρική ερμηνεία: Οι άπειροι όροι μίας ακολουθίας Cauchy, με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων, απέχουν ανα δύο μεταξύ τους απόσταση οσοδήποτε μικρή.

Θ1) $\boxed{(a_n) \text{ Cauchy} \Rightarrow (a_n) \text{ φραγμένη}}$

Απόδειξη

$\left.\begin{array}{l} \text{Εστω } \varepsilon=1>0 \\ (a_n) \text{ Cauchy} \end{array}\right\} \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*: \forall n \in \mathbb{N}^*, n>n_0 : |a_n-a_{n_0+1}|<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_n| - |a_{n_0+1}| \leq |a_n - a_{n_0+1}| < 1 \ , \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_n| \leq 1 + |a_{n_0+1}| \ , \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0.$

▶ Παίρνω $\vartheta = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0+1}|\}$. οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq n_0 : |a_n| \leq \vartheta \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : |a_n| \leq 1 + |a_{n_0+1}| \leq \vartheta \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n| \leq \vartheta \Rightarrow (a_n) \text{ φραγμένη.}$$

Θ2) $\boxed{(a_n) \text{ Cauchy} \iff (a_n) \text{ συγκλίνουσα}}$

<u>Απόδειξη</u>

<u>Ευθυ:</u> Εστω (a_n) Cauchy.

Θα κατασκευάσω μία κιβωτισμένη ακολουθία $([b_n, \gamma_n])$ με την χαρακτηριστική ιδιότητα: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n \in [b_k, \gamma_k]$.

και θα δείξω ότι $\lim a_n = \bigcap([b_n, \gamma_n])$.

(a_n) Cauchy $\Rightarrow (a_n)$ φραγμένη $\Rightarrow \exists b_1, \gamma_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \in [b_1, \gamma_1]$

άρα κατασκευάστηκε ο πρώτος όρος $[b_1, \gamma_1]$.

Εστω ότι κατασκευάστηκε ο κ-όρος $[b_k, \gamma_k]$ και

$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_1 : a_n \in [b_k, \gamma_k]$.

Θα κατασκευάσω τον $(k+1)$-όρο.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Εστω } \varepsilon = \dfrac{\gamma_k - b_k}{4} > 0 \\ (a_n) \text{ Cauchy} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists n_1' \in \mathbb{N}^* : \forall n_2, n_3 \in \mathbb{N}^*, n_2 > n_1', n_3 > n_1' : |a_{n_2} - a_{n_3}| < \frac{|b_k - \gamma_k|}{4}$$

(~~Παίρνω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ οπότε~~
~~$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 + 1 : |$~~)

▶ Παίρνω $n_0 = \max\{n_1 + 1, n_1' + 1\}$ οπότε

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : n > n_1', n_0 > n_1' \Rightarrow |a_n - a_{n_0}| < \dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4} \iff$

$\iff -\dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4} < a_n - a_{n_0} < \dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4} \iff a_{n_0} - \dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4} < a_n < a_{n_0} + \dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4} \iff$

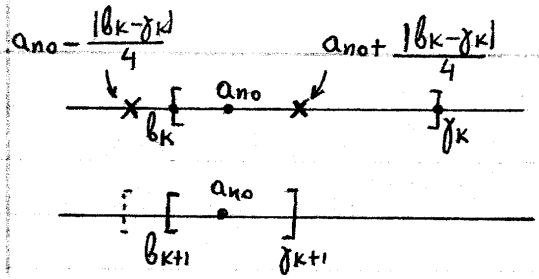
$\iff a_n \in \left[a_{n_0} - \dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4}, a_{n_0} + \dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4}\right]$

▶ Παίρνω $b_{k+1} = \max\left\{b_k, a_{n_0} - \dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4}\right\}$.

$\gamma_{k+1} = \min\left\{\gamma_k, a_{n_0} + \dfrac{|b_k - \gamma_k|}{4}\right\}$.

$n_0 \geq n_1 + 1 > n_1 \Rightarrow a_{n_0} \in [b_k, \gamma_k] \Rightarrow b_k \leq a_{n_0} \leq \gamma_k \Rightarrow \begin{cases} b_k < a_{n_0} + \dfrac{|b_k - a_k|}{4} \\ a_{n_0} - \dfrac{|b_k - a_k|}{4} < \gamma_k \end{cases} \Rightarrow \cancel{b_2 \nless}$

$\Rightarrow b_{k+1} < \gamma_{k+1}$.



• Είναι $b_{\kappa+1} \geq b_\kappa \wedge \gamma_{\kappa+1} \leq \gamma_\kappa \Rightarrow \forall x \in [b_{\kappa+1}, \gamma_{\kappa+1}] : b_{\kappa+1} \leq x \leq \gamma_{\kappa+1} \Rightarrow b_\kappa \leq b_{\kappa+1} \leq x \leq \gamma_{\kappa+1} \leq \gamma_\kappa$
$\Rightarrow x \in [b_\kappa, \gamma_\kappa] \Rightarrow \underline{[b_{\kappa+1}, \gamma_{\kappa+1}] \subseteq [b_\kappa, \gamma_\kappa]}.$

~~• Είναι~~ $\cancel{\left\{\begin{array}{l} b_{\kappa+1} \geq a_{n_0} - \frac{|b_\kappa-\gamma_\kappa|}{4} \\ \gamma_{\kappa+1} \leq a_{n_0} + \frac{|b_\kappa-\gamma_\kappa|}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n \in [}$

• Είναι $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n \in \left[a_{n_0} - \frac{|b_\kappa-\gamma_\kappa|}{4}, a_{n_0} + \frac{|b_\kappa-\gamma_\kappa|}{4}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : n > n_1 + 1 > n_1 \Rightarrow a_n \in [b_\kappa, \gamma_\kappa] \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n \in \left[a_{n_0} - \frac{|b_\kappa-\gamma_\kappa|}{4}, a_{n_0} + \frac{|b_\kappa-\gamma_\kappa|}{4}\right] \cap [b_\kappa, \gamma_\kappa] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n \in [b_{\kappa+1}, \gamma_{\kappa+1}].$

• Είναι $\left.\begin{array}{l} \gamma_{\kappa+1} \leq a_{n_0} + \frac{\gamma_\kappa - b_\kappa}{4} \\ b_{\kappa+1} \geq a_{n_0} - \frac{\gamma_\kappa - b_\kappa}{4} \Rightarrow -b_{\kappa+1} \leq -a_{n_0} + \frac{\gamma_\kappa - b_\kappa}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\gamma_{\kappa+1} - b_{\kappa+1} < \frac{\gamma_\kappa - b_\kappa}{2}}$

Έτσι κατασκευάζεται μία ακολουθία (κιβωτισμένων) διαστημάτων $([a_n, b_n])$ με τις ιδιότητες

- •$_1$ $\forall n \in \mathbb{N}^* : [b_{n+1}, \gamma_{n+1}] \subseteq [b_n, \gamma_n]$ (1)
- •$_2$ $\forall \kappa \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n \in [b_\kappa, \gamma_\kappa].$ (2)
- •$_3$ $\forall n \in \mathbb{N}^* : |b_{n+1} - \gamma_{n+1}| < \frac{|b_n - \gamma_n|}{2}.$ (3).

$\left.\begin{array}{l} (3) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : |b_n - \gamma_n| < \frac{|b_1 - \gamma_1|}{2^{n-1}} \\ \lim \frac{|b_1 - \gamma_1|}{2^{n-1}} = |b_1 - \gamma_1| \cdot \lim \frac{1}{2^{n-1}} = |b_1 - \gamma_1| \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(b_n - \gamma_n) = 0 \xRightarrow{(1)}$

$\Rightarrow$ $([b_n, \gamma_n])$ κιβωτισμένη με μοναδικό κοινό στοιχείο το $\ell = \cap([b_n, \gamma_n])$.

▸ Θα δείξω ότι $\lim a_n = \ell$.

Έστω $\left.\begin{array}{l} \underline{\varepsilon > 0.} \\ \lim(b_n - \gamma_n) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \kappa \in \mathbb{N}^* : |b_\kappa - \gamma_\kappa| < \varepsilon.$

$\left.\begin{array}{l} (2) \Rightarrow \underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n \in [b_\kappa, \gamma_\kappa].} \\ \ell = \cap([a_n, b_n]) \Rightarrow \ell \in [b_\kappa, \gamma_\kappa] \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : |a_n - \ell| \leq |b_\kappa - \gamma_\kappa| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : |a_n - \ell| < \varepsilon.}$

Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : |a_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$ <u>(a_n) συγκλίνουσα.</u>

<u>Αντίστροφο</u> : Έστω (a_n) συγκλίνουσα.

(a_n) συγκλίνουσα $\Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} : \lim a_n = \ell$
Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\Bigg\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} |a_{n_1} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n_1 > n_0 \\ |a_{n_2} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n_2 > n_0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| = |(a_{n_1} - \ell) - (a_{n_2} - \ell)| \leq |a_{n_1} - \ell| + |a_{n_2} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1 > n_0, n_2 > n_0$

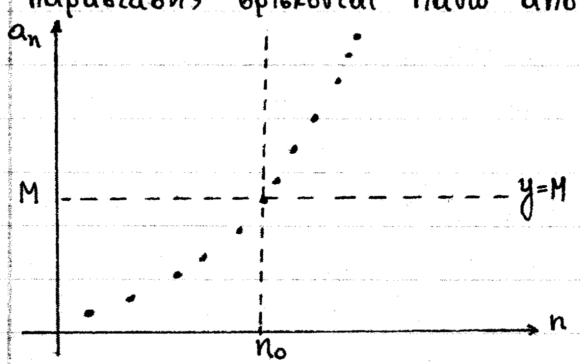
$\Rightarrow \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1 > n_0, n_2 > n_0 : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon.$

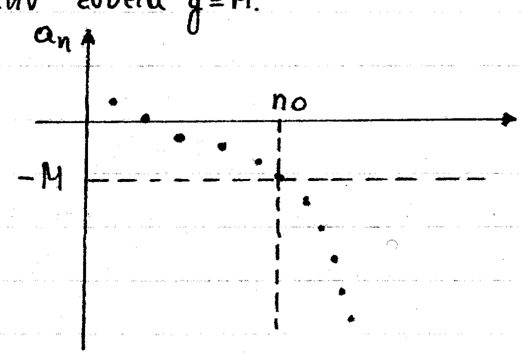
Άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1 > n_0, n_2 > n_0 : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon \Rightarrow$ (a_n) Cauchy.

▼ Απειριζόμενες ακολουθίες

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : $\boxed{\lim a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n > M.}$

↳ <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>: Αν $\lim a_n = +\infty$, τότε για οσοδήποτε μεγάλο $M > 0$ όλοι οι όροι της ακολουθίας, με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων, βρίσκονται στο διάστημα $(M, +\infty)$. Τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y = M$.





<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : $\boxed{\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n < -M}$

↳ <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u> : Αν $\lim a_n = -\infty$, τότε για οσοδήποτε μεγάλο $M > 0$ όλοι οι όροι της ακολουθίες, με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων, βρίσκονται στο διάστημα $(-\infty, -M)$. Τα αντοίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = -M$.

• <u>Παρατηρήσεις</u>

1) $\lim a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim a_{n+k} = +\infty$

2) $\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim a_{n+k} = -\infty$

3) $\lim a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim (-a_n) = -\infty$

4) $\lim a_n = +\infty \vee \lim a_n = -\infty \Rightarrow \lim |a_n| = +\infty$.

Θ1) $\boxed{\lim a_n = +\infty \Rightarrow (a_n) \text{ όχι φραγμένη άνω.}}$

Απόδειξη

Εστω (a_n) φραγμένη άνω $\Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} : a_n \leq \varphi, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \vartheta \in \mathbb{R}_+ : a_n \leq \vartheta, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1).
(π.χ. ο ~~φ~~ $\vartheta = \max\{\varphi, 1\}$).

$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = +\infty \Rightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : a_{n_0} > M \\ \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} a_{n_0} \leq \vartheta \end{array}\right\} \Rightarrow \forall M > 0 : M \leq \vartheta \leftarrow$ Ατοπο, διότι για $M = \vartheta + 1 > \vartheta > 0$ δεν ισχύει

Αρα (a_n) όχι φραγμένη άνω.

Ομοια αποδεικνύεται ότι

Θ2) $\boxed{\lim a_n = -\infty \Rightarrow (a_n) \text{ όχι φραγμένη κάτω}}$

Επειδη κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι και φραγμένη, άπο τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν μία ακολουθία έχει όριο το $+\infty$ ή $-\infty$, τότε δεν είναι συγκλίνουσα. Δηλαδή:

$\boxed{\lim a_n = +\infty \vee \lim a_n = -\infty \Rightarrow (a_n) \text{ όχι συγκλίνουσα}}$

Ετσι, μια ακολουθία <u>μη συγκλίνουσα</u>, δηλαδή που δεν έχει πεπερασμένο όριο $l \in \mathbb{R}$ είναι δυνατόν:

1) Να έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$
2) Να μην έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Ιδιότητες απειριζόμενων ακολουθιών

Θ1. Εστω (a_n) με $\lim a_n = +\infty$.
I) (b_n) φραγμένη κάτω $\Rightarrow \lim(a_n + b_n) = +\infty$
II) (b_n) φραγμένη κάτω με κάτω φραγμα θετικο $\Rightarrow \lim(a_n b_n) = +\infty$
III) (b_n) φραγμένη άνω με άνω φράγμα αρνητικό $\Rightarrow \lim(a_n b_n) = -\infty$.

Απόδειξη

I) (b_n) φραγμένη κάτω $\Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} : b_n \geq \varphi, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1).
Εστω <u>$M > 0$.</u> Παίρνω τυχαίο <u>θετικό</u> $\vartheta > M - \varphi$. (2).

$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = +\infty \\ \vartheta > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*} : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n > \vartheta \\ \overset{(2)}{\Rightarrow} \vartheta > M - \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_n > M - \varphi, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \\ \overset{(1)}{\Rightarrow} b_n \geq \varphi, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n+b_n > (M-\varphi)+\varphi,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 \Rightarrow \underline{a_n+b_n > M,\ \forall n\in\mathbb{N}^*}$

Άρα $\forall M>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^* : \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : a_n+b_n>M \Rightarrow \lim(a_n+b_n)=+\infty.$

II) (b_n) κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα θετικό $\Rightarrow \exists \vartheta\in\mathbb{R}^*_+ : b_n\geq\vartheta,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$ (1)

Έστω $\underline{M>0} \Rightarrow \dfrac{M}{\vartheta}>0$, $\lim a_n=+\infty$ $\Rightarrow \underline{\exists n_0\in\mathbb{N}^*} : a_n > \dfrac{M}{\vartheta},\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0$

$\Rightarrow a_nb_n > \vartheta\cdot\dfrac{M}{\vartheta},\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 \Rightarrow \underline{a_nb_n>M,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0}$

Άρα $\forall M>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^* : \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : a_nb_n>M \Rightarrow \lim(a_nb_n)=+\infty.$

III) (b_n) άνω φραγμένη με άνω φράγμα αρνητικό $\Rightarrow \exists a\in\mathbb{R}^*_- : b_n\leq a,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow$
$\Rightarrow -b_n\geq -a,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (-b_n)$ κάτω φραγμένη από θετικό $\vartheta=-a\in\mathbb{R}^*_+ \xRightarrow{\text{II}}$
$\Rightarrow \lim[a_n(-b_n)]=+\infty \Rightarrow \lim(-a_nb_n)=+\infty \Rightarrow \lim(a_nb_n)=-\infty.$

Θ2) Έστω (a_n) με $\lim a_n=-\infty$
I) (b_n) φραγμένη άνω $\Rightarrow \lim(a_n+b_n)=-\infty$
II) (b_n) άνω φραγμένη με άνω φράγμα αρνητικό $\Rightarrow \lim(a_nb_n)=+\infty$
III) (b_n) κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα θετικό $\Rightarrow \lim(a_nb_n)=-\infty.$

Η απόδειξη είναι άμεση αν εφαρμόσουμε το Θ1 στις $(-a_n), (-b_n)$

Θ3) $\left.\begin{array}{l}\lim a_n\in\{-\infty,+\infty\}\\ \forall n\in\mathbb{N}^* : a_n\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\dfrac{1}{a_n}=0$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\lim a_n=-\infty \Rightarrow \forall M>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^* : \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : a_n<-M$ (1).

Έστω $\underline{\varepsilon>0} \Rightarrow \dfrac{1}{\varepsilon}>0 \xRightarrow{(1)} \underline{\exists n_0\in\mathbb{N}^*} : \underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0} : a_n<-\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |a_n|>\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \dfrac{1}{|a_n|}<\varepsilon \Leftrightarrow \underline{\left|\dfrac{1}{a_n}\right|<\varepsilon}.$

Άρα $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^* : \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : \left|\dfrac{1}{a_n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim\dfrac{1}{a_n}=0.$

Έστω $\lim a_n=+\infty \Rightarrow \lim(-a_n)=-\infty \Rightarrow \dots \Rightarrow \lim\left(-\dfrac{1}{a_n}\right)=0 \Rightarrow \lim\dfrac{1}{a_n}=0.$

Θ4) $\left.\begin{array}{l}\lim a_n=0\\ \exists \kappa\in\mathbb{N}^* : \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa : a_n>0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\dfrac{1}{a_n}=+\infty$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\underline{M>0} \Rightarrow \frac{1}{M}>0$, $\lim a_n=0$ $\Big\} \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0: |a_n|<\frac{1}{M}$

• Θέτω $\underline{n_1=\max\{\kappa, n_0\}}$ οπότε.

$\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_1}:$ $\begin{cases} n>\kappa \\ n>n_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n>0 \\ |a_n|<\frac{1}{M} \end{cases} \Rightarrow 0<a_n<\frac{1}{M} \Rightarrow \underline{\frac{1}{a_n}>M}$

Άρα $\forall M>0, \exists n_1\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_1: \frac{1}{a_n}>M \Rightarrow \lim\frac{1}{a_n}=+\infty$.

$$\boxed{\left.\begin{matrix} \lim a_n=0 \\ \exists \kappa\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa: a_n<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\frac{1}{a_n}=-\infty}$$

Από τα παραπάνω θεωρήματα έχουμε τις παρακάτω προτάσεις με τις οποίες δουλεύουμε στις ασκήσεις:

1) $\left.\begin{matrix}\lim a_n=+\infty \\ \lim b_n=+\infty \vee \lim b_n=\ell\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(a_n+b_n)=+\infty$

2) $\left.\begin{matrix}\lim a_n=+\infty \\ \lim b_n=+\infty \vee \lim b_n=\ell>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(a_nb_n)=+\infty$

3) $\left.\begin{matrix}\lim a_n=+\infty \\ \lim b_n=-\infty \vee \lim b_n=\ell<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(a_nb_n)=-\infty$

4) $\left.\begin{matrix}\lim a_n=-\infty \\ \lim b_n=-\infty \vee \lim b_n=\ell\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(a_n+b_n)=-\infty$

5) $\left.\begin{matrix}\lim a_n=-\infty \\ \lim b_n=+\infty \vee \lim b_n=\ell>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(a_nb_n)=-\infty$

6) $\left.\begin{matrix}\lim a_n=-\infty \\ \lim b_n=-\infty \vee \lim b_n=\ell<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim(a_nb_n)=+\infty$.

• Πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

$(+\infty)+\ell=+\infty$

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

$(+\infty)\cdot\vartheta=+\infty$

$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

$(+\infty)\cdot a=-\infty$.

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

$(-\infty)+\ell=-\infty$

$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

$(-\infty)\cdot\vartheta=-\infty$

$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

$(-\infty)\cdot a=+\infty$.

$\frac{\ell}{+\infty}=0$

$\frac{\ell}{-\infty}=0$

Τα θεωρήματα, δεν δίνουν συμπεράσματα για τις παρακάτω μορφές:

1) $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$.

2) $0\cdot(+\infty)$, $0\cdot(-\infty)$.

3) $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$

4) $\frac{+\infty}{0}$, $\frac{-\infty}{0}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\ell}{0}$, $\ell\in\mathbb{R}$.

Αυτές οι μορφές ονομάζονται απροσδιόριστες μορφές και για να υπολογιστεί το όριο τους πρέπει να φέρουμε, με κατάλληλους μετασχηματισμούς το γενικό όρο της ακολουθίας σε μή απροσδιόριστη μορφή, να κάνουμε δηλαδή άρση της απροσδιοριστείας.

Κριτήρια απειρισμού

Θ1) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\exists \kappa\in\mathbb{N}^*: a_n\leq b_n\,,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa \\ \lim a_n=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim b_n=+\infty.}$

Απόδειξη

Εστω $M>0$

$\lim a_n=+\infty \Rightarrow \exists n_1\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_1 : a_n>M.$

Παίρνω $n_0=\max\{n_1,\kappa\}.$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : \begin{cases} n>n_1 \\ n>\kappa\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n>M \\ b_n\geq a_n\end{cases} \Rightarrow b_n> M$

Αρα $\forall M>0, \exists n_0\in\mathbb{N}^*: \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : b_n>M \Rightarrow \lim b_n=+\infty.$

$\boxed{\left.\begin{array}{l}\exists \kappa\in\mathbb{N}^*: a_n\leq b_n\,,\ \forall n\in\mathbb{N}^*, n>\kappa \\ \lim b_n=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n=-\infty}$

Θ2) Κριτήριο D'Alembert : $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda>1. \\ a_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n=+\infty}$

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l}\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda>1 \Rightarrow \lim \frac{\left(\frac{1}{a_{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{a_n}\right)} = \lim \frac{1}{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)} = \frac{1}{\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)} = \frac{1}{\lambda}<1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>0 \Rightarrow \frac{1}{a_n}>0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \lim \frac{1}{a_n}=0 \\ a_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n=+\infty.$$

Θ3) $\boxed{\left.\begin{array}{l}\lim a_n=+\infty \\ a_n\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \sqrt[\kappa]{a_n}=+\infty}$

Απόδειξη

Έστω $\underline{M>0} \Rightarrow M^K>0$, $\lim a_n=+\infty$ $\Big\} \Rightarrow \underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*:} \; \underline{\forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0} : a_n > M^K \Rightarrow \sqrt[K]{a_n} > |M| \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\sqrt[K]{a_n} > M}$

Άρα $\forall M>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n\in\mathbb{N}^*, n>n_0 : \sqrt[K]{a_n} > M \Rightarrow \lim \sqrt[K]{a_n} = +\infty$.

→ Αξιοσημείωτες απειριζόμενες ακολουθίες

(1) $\boxed{\forall p\in\mathbb{Q}^*_+ : \lim n^p = +\infty}$ → $\boxed{\forall p\in\mathbb{Q}^*, \lim(-n^p) = -\infty}$

Απόδειξη.

$\lim \frac{1}{n^p} = 0, \; \forall p\in\mathbb{Q}^*_+$

$\frac{1}{n^p} > 0, \; \forall n\in\mathbb{N}^*, \forall p\in\mathbb{Q}^*_+$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim n^p = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{n^p}\right)} = +\infty$.

(2) $\boxed{a>1 \Rightarrow \lim a^n = +\infty}$

Απόδειξη.

$a>1 \Rightarrow \cancel{\vartheta=a-1>0}\; \exists \vartheta>0 : a=1+\vartheta$.

Είναι $a^n = (1+\vartheta)^n \geq 1+n\vartheta \geq n\vartheta, \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\lim n\vartheta = \vartheta\cdot\lim n = +\infty$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim a^n = +\infty$.

ΜΕΘΟΔΟΙ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

• Για να δείξουμε ότι μία ~~ακολουθία~~ ακολουθία έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$ συνήθως την συγκρίνουμε με μία από τις αξιοσημείωτες ακολουθίες.

Παραδείγματα: Να βρεθούν τα όρια.

1) $a_n = \sin 5n + 5n^2$.

Λύση

$\forall n\in\mathbb{N}^* : a_n = \sin 5n + 5n^2 \geq 5n^2 - 1$

$\lim 5n^2 = +\infty \Rightarrow \lim(5n^2-1) = +\infty$ $\Bigg\} \Rightarrow \lim a_n = +\infty$

• Φυσικά χρησιμοποιούμε, όποτε αυτό είναι απαραίτητο, ~~τις~~ τις ιδιότητες και τα κατάλληλα κριτήρια.

2) $a_n=\sqrt{n^2+n+1}$.

Λύση

α' τρόπος: $\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\sqrt{n^2+n+1}=\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$.

$\cancel{\lim\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1+\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{1}{n^2}=1+0+0=1.}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{1}{n^2}}=\sqrt{1+0+0}=1\\ \lim n=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim a_n=+\infty.$$

β' τρόπος

$$\left.\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N}^*: n^2+n+1\geq n^2\\ \lim n^2=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim(n^2+n+1)=+\infty\\ n^2+n+1\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{array}\right\}\Rightarrow \lim a_n=\lim\sqrt{n^2+n+1}=+\infty.$$

3) $a_n=\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n}$. → Μορφή $\infty-\infty$: Πολ/ζω και διαιρώ με την συζυγή παράσταση.

Λύση

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n}=\frac{(n^2+5)-n}{\sqrt{n^2+5}+\sqrt{n}}=\frac{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+n^{-1/2}\right)}=$$

$$=n\cdot\frac{1+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+n^{-1/2}}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\frac{1+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+n^{-1/2}}=\frac{1+5\lim\frac{1}{n^2}-\lim\frac{1}{n}}{\sqrt{1+5\lim\frac{1}{n^2}}+\lim n^{-1/2}}=\frac{1+5\cdot0-0}{\sqrt{1+5\cdot0}+0}=1\\ \lim n=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim a_n=+\infty$.

4) $a_n=\frac{8^n+6^n-2^n}{5^n+3^n}$ → Δουλεύω όπως στις συγκλίνουσες μόνο που τώρα καταλήγω σε μορφή $(+\infty)\cdot\ell$.

Λύση

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\frac{8^n+6^n-2^n}{5^n+3^n}=\frac{8^n\left[1+\left(\frac{6}{8}\right)^n-\left(\frac{2}{8}\right)^n\right]}{5^n\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]}=\left(\frac{8}{5}\right)^n\cdot\frac{1+\left(\frac{6}{8}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\frac{1+\left(\frac{6}{8}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1+\lim\left(\frac{6}{8}\right)^n-\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1+0-0}{1+0}=1\\ \lim\left(\frac{8}{5}\right)^n=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim a_n=+\infty.$$

5) $a_n = 2^n + 4^n - 7^n$.

<u>Λύση</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = 2^n + 4^n - 7^n = 7^n\left[\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{4}{7}\right)^n - 1\right]$

$\lim\left[\left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{4}{7}\right)^n - 1\right] = \lim\left(\frac{2}{7}\right)^n + \lim\left(\frac{4}{7}\right)^n - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$

$\lim 7^n = +\infty$

$\Rightarrow \lim a_n = -\infty$.

↳ <u>Άρση απροσδιοριστίας</u>

1) <u>Σε πολυωνυμική ακολουθία</u>: $\boxed{\lim(a_\kappa n^\kappa + a_{\kappa-1} n^{\kappa-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim a_\kappa n^\kappa}$

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $\lim(a_\kappa n^\kappa + a_{\kappa-1} n^{\kappa-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim\left[a_\kappa n^\kappa\left(1 + \frac{a_{\kappa-1}}{a_\kappa}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{a_\kappa}\frac{1}{n^{\kappa-1}} + \frac{a_0}{a_\kappa}\frac{1}{n^\kappa}\right)\right] =$

$= \lim(a_\kappa n^\kappa) \cdot \lim\left(1 + \frac{a_{\kappa-1}}{a_\kappa}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{a_\kappa}\frac{1}{n^{\kappa-1}} + \frac{a_0}{a_\kappa}\frac{1}{n^\kappa}\right) =$

$= \lim(a_\kappa n^\kappa) \cdot \left[1 + \frac{a_{\kappa-1}}{a_\kappa}\lim\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_1}{a_\kappa}\lim\frac{1}{n^{\kappa-1}} + \frac{a_0}{a_\kappa}\lim\frac{1}{n^\kappa}\right] =$

$= \lim(a_\kappa n^\kappa) \cdot (1 + 0 + \cdots + 0) = \lim(a_\kappa n^\kappa)$.

2) <u>Σε ρητή ακολουθία</u>: $\boxed{\lim \frac{b_\kappa n^\kappa + b_{\kappa-1} n^{\kappa-1} + \cdots + b_1 n + b_0}{\gamma_\lambda n^\lambda + \gamma_{\lambda-1} n^{\lambda-1} + \cdots + \gamma_1 n + \gamma_0} = \lim \frac{b_\kappa n^\kappa}{\gamma_\lambda n^\lambda}}$

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $\lim \frac{b_\kappa n^\kappa + b_{\kappa-1} n^{\kappa-1} + \cdots + b_1 n + b_0}{\gamma_\lambda n^\lambda + \gamma_{\lambda-1} n^{\lambda-1} + \cdots + \gamma_1 n + \gamma_0} = \lim \frac{b_\kappa n^\kappa\left(1 + \frac{b_{\kappa-1}}{b_\kappa}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{b_\kappa}\frac{1}{n^{\kappa-1}} + \frac{b_0}{b_\kappa}\frac{1}{n^\kappa}\right)}{\gamma_\lambda n^\lambda\left(1 + \frac{\gamma_{\lambda-1}}{\gamma_\lambda}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{\gamma_1}{\gamma_\lambda}\frac{1}{n^{\lambda-1}} + \frac{\gamma_0}{\gamma_\lambda}\cdot\frac{1}{n^\lambda}\right)} =$

$= \lim \frac{b_\kappa n^\kappa}{\gamma_\lambda n^\lambda} \cdot \lim \frac{1 + \frac{b_{\kappa-1}}{b_\kappa}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{b_\kappa}\frac{1}{n^{\kappa-1}} + \frac{b_0}{b_\kappa}\frac{1}{n^\kappa}}{1 + \frac{\gamma_{\lambda-1}}{\gamma_\lambda}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{\gamma_1}{\gamma_\lambda}\frac{1}{n^{\lambda-1}} + \frac{\gamma_0}{\gamma_\lambda}\frac{1}{n^\lambda}} =$

$= \lim \frac{b_\kappa n^\kappa}{\gamma_\lambda n^\lambda} \cdot \frac{1 + \frac{b_{\kappa-1}}{b_\kappa}\cdot\lim\frac{1}{n} + \cdots + \frac{b_1}{b_\kappa}\lim\frac{1}{n^{\kappa-1}} + \frac{b_0}{b_\kappa}\lim\frac{1}{n^\kappa}}{1 + \frac{\gamma_{\lambda-1}}{\gamma_\lambda}\lim\frac{1}{n} + \cdots + \frac{\gamma_1}{\gamma_\lambda}\lim\frac{1}{n^{\lambda-1}} + \frac{\gamma_0}{\gamma_\lambda}\lim\frac{1}{n^\lambda}} =$

$= \lim \frac{b_\kappa n^\kappa}{\gamma_\lambda n^\lambda} \cdot \frac{1 + 0 + \cdots + 0}{1 + 0 + \cdots + 0} = \lim \frac{b_\kappa n^\kappa}{\gamma_\lambda n^\lambda}$.

Παραδείγματα

1) $\lim(4n^3-5n+2)=\lim 4n^3=4\lim n^3=+\infty$

2) $\lim(-7n^4+3n^2-2n+5)=\lim(-7n^4)=-7\lim n^4=-\infty.$

3) $\lim \dfrac{n+7}{n^2+n+1}=\lim\dfrac{n}{n^2}=\lim\dfrac{1}{n}=0$

4) $\lim\dfrac{-3n^2+4n+7}{5n^2-6n-1}=\lim\dfrac{-3n^2}{5n^2}=\dfrac{-3}{5}$

5) $\lim\dfrac{4n^4+3n^3-2n+1}{3n^2-2n+1}=\lim\dfrac{4n^4}{3n^2}=\dfrac{4}{3}\lim n^2=+\infty.$

6) $\lim\dfrac{-4n^3+7n^2+8n+1}{5n^2+4n+3}=\lim\dfrac{-4n^3}{5n^2}=-\dfrac{4}{5}\lim n=-\infty.$

- Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

1) $a_n=\sqrt{4n^2+n+3}+\sqrt{2n+1}.$

Λύση

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim(4n^2+n+3)=\lim 4n^2=4\lim n^2=+\infty\\ \forall n\in\mathbb{N}^*: 4n^2+n+3\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\sqrt{4n^2+n+3}=+\infty\\ \left.\begin{array}{l}\lim(2n+1)=\cancel{+\infty}\lim 2n=+\infty\\ \forall n\in\mathbb{N}^*: 2n+1\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\sqrt{2n+1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim a_n=+\infty.$

2) $a_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}+\dfrac{n^2}{n^2+2}+\dots+\dfrac{n^2}{n^2+n}.$

Λύση

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dfrac{n^2}{n^2+1}\geq\dfrac{n^2}{n^2+n}\\ \dfrac{n^2}{n^2+2}\geq\dfrac{n^2}{n^2+n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{n^2}{n^2+n}\geq\dfrac{n^2}{n^2+n}\end{array}\right\}\Rightarrow a_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}+\dfrac{n^2}{n^2+2}+\dots+\dfrac{n^2}{n^2+n}\geq\dfrac{n^3}{n^2+n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\ \lim\dfrac{n^3}{n^2+n}=\lim\dfrac{n^3}{n^2}=\lim n=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim a_n=+\infty.$

3) $a_n=\dfrac{5^n}{n^2+2n}.$

Λύση : α' τρόπος : με κριτήριο D'Alembert.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2+2(n+1)}}{\frac{5^n}{n^2+2n}} = \frac{5^{n+1}(n^2+2n)}{5^n[(n+1)^2+2(n+1)]} = \frac{5n^2+10n}{n^2+2n+1+2n+2} =$$

$$= \frac{5n^2+10n}{n^2+4n+3} \Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{5n^2+10n}{n^2+4n+3} = \lim \frac{5n^2}{n^2} = 5 > 1$$

$$\left.\begin{matrix} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 5 > 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim a_n = +\infty .$$

~~β' τρόπος:~~ $\cancel{\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n = \frac{5^n}{n^2+2n} = \frac{(1+4)^n}{n^2+2n} \geq}$

β' τρόπος:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{1}{a_n} =$$

4) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

Λύση

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{1}{a_n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0. \\ \forall n\in\mathbb{N}^*: n+1>n \Rightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n}>0 \Rightarrow 1/a_n>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim a_n = +\infty .$$

▼ Μη συγκλίνουσες ακολουθίες

• Γενικά, για να δείξω ότι μία ακολουθία δεν συγκλίνει, δείχνω ότι δεν είναι ακολουθία Cauchy, δηλαδή δείχνω ότι

$$\exists \varepsilon>0 : \forall n_0\in\mathbb{N}^*, \exists n_1,n_2\in\mathbb{N}^*, n_1>n_0, n_2>n_0 : |a_{n_1}-a_{n_2}| \geq \varepsilon \quad (1).$$

Αρα αν (a_n) όχι Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) όχι συγκλίνουσα.

Παραδείγματα

1) Δείξτε ότι η $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+2}$, δεν συγκλίνει.

Λύση

Εστω $n_0\in\mathbb{N}^*$.

Παίρνω $n_1 = 2k > n_0$, $n_2 = 2k+1 > n_0$ (τα οποία υπαρχουν λόγω του θεωρήματος Αρχιμήδη).

Είναι $|a_{n_1}-a_{n_2}| = \left| \dfrac{(-1)^{2k}\cdot 2k}{2k+2} - \dfrac{(-1)^{2k+1}\cdot(2k+1)}{2k+1+2} \right| = \left| \dfrac{k}{k+1} + \dfrac{2k+1}{2k+3} \right| =$

$$= \frac{K}{K+1} + \frac{2K+1}{2K+3} \geq \frac{K}{K+1} \geq \frac{K}{K+K} = \frac{1}{2}, \ \forall n_0 \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα $\exists \varepsilon > 0$ (π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{2}$) $: \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}^* ; n_1 > n_0, n_2 > n_0 : |a_{n_1} - a_{n_2}| \geq \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_n)$ όχι Cauchy $\to (a_n)$ όχι συγκλίνουσα.

2) Δείξτε ότι η $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ δεν είναι συγκλίνουσα

Λύση

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Παίρνω $n_1 = 6K > n_0$, $n_2 = 6K+1 > n_0$ οπότε

$$|a_{n_1} - a_{n_2}| = \left| \sin\frac{6K\pi}{3} - \sin\frac{(6K+1)\pi}{3} \right| = |\sin 2K\pi - \sin(2K\pi + \tfrac{\pi}{3})| =$$

$$= |\sin 0 - \sin\tfrac{\pi}{3}| = |0 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}| = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \ \forall n_0 \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα $\exists \varepsilon > 0$ (π.χ. $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$) $: \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1 > n_0, n_2 > n_0 : |a_{n_1} - a_{n_2}| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_n)$ όχι Cauchy $\to (a_n)$ όχι συγκλίνουσα.

3) Δείξτε ότι η $a_n = \dfrac{n \cdot \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{n+1}$ δεν συγκλίνει.

Λύση

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Παίρνω $n_1 = 8K > n_0$, $n_2 = 8K+1 > n_0$. οπότε

$$|a_{n_1} - a_{n_2}| = \left| \frac{8K \cdot \cos(6K\pi)}{8K+1} - \frac{(8K+1)\cos(6K\pi + \frac{3\pi}{4})}{8K+2} \right| = \left| \frac{8K}{8K+1} - \frac{(8K+1)\cos\frac{3\pi}{4}}{8K+2} \right| =$$

$$= \left| \frac{8K}{8K+1} + \frac{(8K+1)\frac{\sqrt{2}}{2}}{8K+2} \right| = \frac{8K}{8K+1} + \frac{(8K+1)\sqrt{2}}{2(8K+2)} \geq \frac{8K}{8K+1} \geq \frac{8K}{8K+K} = \frac{8}{9}$$

Άρα $\exists \varepsilon > 0$ (π.χ. $\varepsilon = \frac{8}{9}$) $: \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1 > n_0, n_2 > n_0 : |a_{n_1} - a_{n_2}| \geq \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_n)$ όχι Cauchy $\to (a_n)$ όχι συγκλίνουσα.

~~Επειδή (an) όχι Cauchy~~

Επειδή (a_n) Cauchy $\leftrightarrow$ (a_n) συγκλίνουσα, όλες οι ακολουθίες που δεν συγκλίνουν μπορούν να λυθούν με αυτή την μέθοδο, δηλαδή δεν υπάρχει μη συγκλίνουσα ακολουθία η οποία να είναι Cauchy. Γι'αυτό και αυτή η μέθοδος είναι γενική.

- Ειδικά
  1) Αν (a_n) μη φραγμένη $\to$ (a_n) μη συγκλίνουσα.
  2) Αν $(|a_n|)$ μη συγκλίνουσα $\to$ (a_n) μη συγκλίνουσα
  3) Αν $\lim a_n = +\infty \vee \lim a_n = -\infty \to (a_n)$ μη συγκλίνουσα.

$\updownarrow\!\!\rightarrow$ Αυτές οι μέθοδοι είναι <u>ειδικές</u>, δηλαδή <u>δεν</u> βγαίνουν πάντα όλες οι ασκήσεις με αυτές, βγαίνουν όμως οι περισσότερες.

<u>Παραδείγματα</u>

1) Δείξτε ότι η $(a_n)=(-1)^n(n^2+n-1)$ δεν συγκλίνει.

<u>Λύση</u>

$\forall n\in\mathbb{N}^*: |a_n|=|(-1)^n(n^2+n-1)|=n^2+n-1 \Rightarrow \lim|a_n|=\lim(n^2+n-1)=\lim n^2=+\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow (|a_n|)$ όχι συγκλίνουσα $\Rightarrow (a_n)$ όχι συγκλίνουσα.

2) Δείξτε ότι η $a_n=e^{2n^2-n}-\cos(2n+3)$. δεν συγκλίνει.

<u>Λύση</u>

Αρκεί (a_n) όχι φραγμένη.

Έστω (a_n) φραγμένη $\Rightarrow \exists\vartheta\in\mathbb{R}_+: \forall n\in\mathbb{N}^*: |a_n|<\vartheta$. (1).

$|a_n|=|e^{2n^2-n}-\cos(2n+3)|\geq|e^{2n^2-n}|-|\cos(2n+3)|\geq e^{2n^2-n}-1\geq 2^{2n^2-n}-1=$
$=(1+1)^{2n^2-n}-1=1+2n^2-n-1=2n^2-n\geq 2n-n=n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (2)

$(1),(2)\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: n\leq|a_n|<\vartheta \leftarrow$ Άτοπο, διότι δεν ισχύει π.χ. για $n=[\vartheta]+1$.

Άρα (a_n) όχι φραγμένη $\Rightarrow (a_n)$ όχι συγκλίνουσα.

▼<u>Αποκλίνουσες ακολουθίες.</u> $\bullet\!\!\rightarrow$ Λέγονται οι ακολουθίες οι οποίες δεν έχουν όριο στο $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

Για να δείξω ότι μία ακολουθία (a_n) είναι αποκλίνουσα

<u>α' τρόπος:</u> •1 Δείχνω ότι (a_n) όχι συγκλίνουσα, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα.

•2 Δείχνω ότι $\lim a_n\neq+\infty$ και $\lim a_n\neq-\infty$, δείχνοντας.

1) Με τον ορισμό, ότι για ένα $M>0$ δεν ορίζεται το κατάλληλο n_0.

2) Ότι η (a_n) είναι φραγμένη.

<u>β' τρόπος:</u> Στηρίζεται στην παρατήρηση ότι

$$\lim a_n=L\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim a_{2n}=\lim a_{2n+1}=L$$

η οποία είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

Έτσι, αν $\begin{cases}\lim a_{2n}=\dots=\dots=L_1\\ \lim a_{2n+1}=\dots=\dots=L_2\neq L_1\end{cases}$, τότε αντιθετοαντίστροφα, η (a_n) δεν έχει πουθενά όριο, διότι <u>Αν</u> είχαε, τότε οι $(a_{2n}),(a_{2n+1})$ θα είχαν το ίδιο όριο.

Παραδείγματα: Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι αποκλίνουσες.

1) $a_n = e^2 \sin(n\pi) + (e+1)\cos(n\pi)$.

Λύση

▸ Θα δείξω ότι (a_n) όχι συγκλίνουσα.

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Παίρνω $n_1 = 2k > n_0$, $n_2 = 2k+1 > n_0$ οπότε.

$|a_{n_1} - a_{n_2}| = |(e^2 \sin(2k\pi) + (e+1)\cos(2k\pi)) - (e^2 \sin(2k\pi+\pi) + (e+1)\cos(2k\pi+\pi))| =$
$= |e^2 \underbrace{\sin 0}_{0} + (e+1)\underbrace{\cos 0}_{1} - e^2 \underbrace{\sin \pi}_{0} - (e+1)\underbrace{\cos \pi}_{-1}| = |e+1+e+1| = 2e+2$

Άρα $\exists \varepsilon > 0$ (π.χ. ο $\varepsilon = 2e+2$): $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*, n_1 > n_0, n_2 > n_0 : |a_{n_1} - a_{n_2}| \geq \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_n)$ όχι Cauchy $\Rightarrow (a_n)$ όχι συγκλίνουσα.

▸ Θα δείξω ότι $\lim a_n \neq \pm\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n| = |e^2 \sin(n\pi) + (e+1)\cos(n\pi)| \leq e^2 |\sin(n\pi)| + (e+1)\cdot|\cos(n\pi)| \leq$
$\leq e^2 + e + 1 \Rightarrow (a_n)$ φραγμένη $\Rightarrow \lim a_n \neq +\infty \wedge \lim a_n \neq -\infty$ } $\Rightarrow (a_n)$ αποκλίνουσα.
είναι και (a_n) όχι συγκλίνουσα

2) $a_n = (-1)^n (2n+3)$.

Λύση

α' τρόπος

▸ Θα δείξω ότι (a_n) όχι συγκλίνουσα.

$\forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n| = |(-1)^n (2n+3)| = 2n+3 \Rightarrow \lim |a_n| = \lim(2n+3) = \lim 2n = +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow (|a_n|)$ όχι συγκλίνουσα $\Rightarrow (a_n)$ όχι συγκλίνουσα (1)

▸ Θα δείξω ότι (a_n) : $\lim a_n \neq \pm\infty$.

Έστω $\lim a_n = +\infty \Rightarrow$ ~~∀M>0~~, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n > 1$ ~~Έστω M>0.~~

Αν, $n_0 = 2k \Rightarrow a_{n_0+1} = (-1)^{2k+1}[2(2k+1)+3] = -4k-2-3 = -4k-5 < 0 < 1$
Αν, $n_0 = 2k+1 \Rightarrow a_{n_0+2} = (-1)^{2k+3}[2(2k+3)+3] = -4k-6-3 = -4k-9 < 0 < 1$ ← Άτοπο
διότι $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n > M$.

Άρα $\lim a_n \neq +\infty$. (2)

Έστω $\lim a_n = -\infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n < -1$.

Αν $n_0 = 2k \Rightarrow a_{n_0+2} = (-1)^{2k+2}[2(2k+2)+3] = 4k+4+3 = 4k+7 > 0 > -1$.
Αν $n_0 = 2k+1 \Rightarrow a_{n_0+3} = (-1)^{2k+4}[2(2k+4)+3] = 4k+8+3 = 4k+11 > 0 > -1$ ← Άτοπο
διότι $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_0 : a_n < -M$.

Άρα $\lim a_n \neq -\infty$. (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow (a_n)$ αποκλίνουσα.

β' τροπος:

$\forall n\in\mathbb{N}^* : a_{2n} = (-1)^{2n}\,[2(2n)+3] = 4n+3 \Rightarrow \lim a_{2n} = \lim(4n+3) = \lim 4n = +\infty$

$\forall n\in\mathbb{N}^* : a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}\,[2(2n+1)+3] = -4n-2-3 = -4n-5 \Rightarrow \lim a_{2n+1} = \lim(-4n-5) =$
$= \lim(-4n) = -\infty \neq \lim a_{2n} \Rightarrow (a_n)$ αποκλίνουσα.

$\updownarrow$ παράδειγμα που στηρίζεται στην παρατήρηση

$$\lim a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = L$$

3) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{en-1}{n}\sqrt[n]{(e+1)n} & , n=2k \\ \dfrac{n^2+2n+3}{n^2-3n+7}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n. & , n=2k+1. \end{cases}$$

Λύση

$$\forall n\in\mathbb{N}^* : a_{2n} = \frac{e2n-1}{2n}\sqrt[2n]{2n(e+1)} = \frac{2en-1}{2n}\sqrt{\sqrt[n]{(e+1)\cdot 2n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_{2n} = \lim\left[\frac{2en-1}{2n}\sqrt{\sqrt[n]{2(e+1)n}}\right] = \lim\frac{2en-1}{2n}\sqrt{\lim\sqrt[n]{2(e+1)}\cdot\lim\sqrt[n]{n}} =$$

$$= \lim\frac{2en}{2n}\cdot\sqrt{1\cdot 1} = \frac{2e}{2} = e. \quad (1)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* : a_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2+2(2n+1)+3}{(2n+1)^2-3(2n+1)+7}\left(\frac{2n+1+1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \frac{4n^2+4n+1+4n+2+3}{4n^2+4n+1-6n-3+7}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} =$$

$$= \frac{4n^2+8n+6}{4n^2-2n+5}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \Rightarrow \lim a_{2n+1} = \lim\left[\frac{4n^2+8n+6}{4n^2-2n+5}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right] =$$

$$= \lim\frac{4n^2+8n+6}{4n^2-2n+5}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim\frac{4n^2}{4n^2}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \frac{4}{4}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (2).$$

$(1),(2) \Rightarrow \lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = e \Rightarrow \lim a_n = e$

▼ Όριο παραμετρικής ακολουθίας

• **Παραμετρική**, λέγεται κάθε ακολουθία της οποίας ο γενικός όρος εξαρτάται από μία ή περισσότερες παραμέτρους.

π.χ. Οι ακολουθίες $(a_n): a_n = 2an + 3$, $(a_n): \begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = \lambda a_n + \mu \end{cases}$

είναι παραμετρικές ακολουθίες.

• Το όριο μίας παραμετρικής ακολουθίας (αν υπάρχει) θα εξαρτάται από τις παραμέτρους. Έτσι, για να το βρώ χρειάζεται συχνά να κάνω διάκριση περιπτώσεων.

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί το όριο $a_n = \dfrac{a^n + b^{n+1}}{2a^n - 3b^{n-1}}$: $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση

1) Αν $a = b = 0$, η ακολουθία δεν έχει έννοια.

2) Αν $a = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \dfrac{b^{n+1}}{-3b^{n-1}} = \dfrac{-b^2}{3} \Rightarrow \lim a_n = \dfrac{-b^2}{3}$.

3) Αν $b = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \dfrac{a^n}{2a^n} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim a_n = \dfrac{1}{2}$.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}^*$.

1) Αν $|a| < |b| \Rightarrow \left|\dfrac{a}{b}\right| < 1 \Rightarrow \lim\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$. οπότε.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \frac{a^n + b^{n+1}}{2a^n - 3b^{n-1}} = \frac{b^n\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + b\right]}{b^n\left[2\left(\frac{a}{b}\right)^n - \frac{3}{b}\right]} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + b}{2\left(\frac{a}{b}\right)^n - \frac{3}{b}} \Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + b}{2\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{3}{b}} =$$

$$= \frac{\lim\left(\frac{a}{b}\right)^n + b}{2\lim\left(\frac{a}{b}\right)^n - \frac{3}{b}} = \frac{0 + b}{2\cdot 0 - \frac{3}{b}} = \frac{-b^2}{3}$$

2) Αν $|a| > |b| \Rightarrow \left|\dfrac{b}{a}\right| < 1 \Rightarrow \lim\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = 0$, οπότε.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \frac{a^n + b\cdot b^n}{2a^n - \frac{3}{b}\cdot b^n} = \frac{a^n\left[1 + b\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]}{a^n\left[2 - \frac{3}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^n\right]} = \frac{1 + b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{2 - \frac{3}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{1 + b\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n}{2 - \frac{3}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{1 + b\cdot\lim\left(\frac{b}{a}\right)^n}{2 - \frac{3}{b}\cdot\lim\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{1 + b\cdot 0}{2 - \frac{3}{b}\cdot 0} = \frac{1}{2}$$

3) Αν $|a|=|b| \Leftrightarrow a=\pm b$.

i) Αν $a=b \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\dfrac{a^n+a\cdot a^n}{2a^n-\frac{3}{a}a^n}=\dfrac{1+a}{2-\frac{3}{a}}=\dfrac{a^2+a}{2a-3} \Rightarrow \lim a_n=\dfrac{a^2+a}{2a-3}$ • Πρέπει $a\neq 3/2$.

ii) Αν $a=-b \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\dfrac{a^n-a(-a)^n}{2a^n+\frac{3}{a}(-a)^n}=\dfrac{1-a(-1)^n}{2+\frac{3}{a}(-1)^n}$

Προσοχή στον παράγοντα $(-1)^n$. Είναι επικίνδυνος.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{2n}=\dfrac{1-a}{2+\frac{3}{a}}=\dfrac{a-a^2}{2a+3} \Rightarrow \lim a_{2n}=\dfrac{a-a^2}{2a+3}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{2n+1}=\dfrac{1+a}{2-\frac{3}{a}}=\dfrac{a+a^2}{2a-3} \Rightarrow \lim a_{2n+1}=\dfrac{a+a^2}{2a-3}$

Για να είναι (a_n) συγκλίνουσα $\Leftrightarrow \lim a_{2n}=\lim a_{2n+1} \Leftrightarrow \dfrac{a-a^2}{2a+3}=\dfrac{a+a^2}{2a-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-a}{2a+3}=\dfrac{1+a}{2a-3} \Leftrightarrow (1-a)(2a-3)=(1+a)(2a+3) \Leftrightarrow \cancel{2a}-3-2a^2+\cancel{3a}=\cancel{2a}+3+2a^2+\cancel{3a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2+6=0 \leftarrow$ Αδύνατη, διότι $4a^2+6>0, \forall a\in\mathbb{R}$ ως άθροισμα τετραγώνου και θετικού.

Άρα $\lim a_{2n}\neq \lim a_{2n+1} \Rightarrow (a_n)$ αποκλίνουσα.

ΑΡΑ:

$$\lim a_n=\begin{cases} -\dfrac{b^2}{3}, & \text{αν } 0<|a|<|b| \vee a=0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } |a|>|b|\geq \vee\, b=0 \\ \dfrac{a^2+a}{2a-3}, & \text{αν } a=b\neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Αν $a=-b \Rightarrow (a_n)$ αποκλίνουσα.

Παρατήρηση: $\lim a^n=\begin{cases} 0, & \text{αν } |a|<1 \\ 1, & \text{αν } a=1 \\ +\infty, & \text{αν } a>1 \end{cases}$ • $a\leq -1 \Rightarrow \nexists \lim a^n$.

2) Να υπολογιστεί το όριο της $(a_n): a_n=\dfrac{x^2+\cos x}{1+(2\sin x)^{2n}}, x\in[0,2\pi]$

Λύση

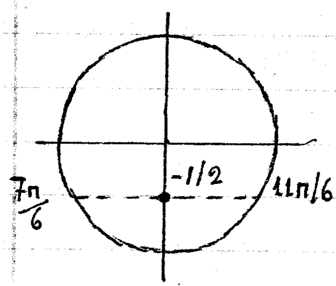
1) Αν $2\sin x=1 \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6} \vee x=\dfrac{5\pi}{6}$

i) Αν $x=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\dfrac{\frac{\pi^2}{36}+\cos\frac{\pi}{6}}{1+1^{2n}}=\dfrac{\pi^2}{72}+\dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \lim a_n=\dfrac{\pi^2}{72}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

ii) Αν $x=\dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\dfrac{\frac{25\pi^2}{36}+\cos\frac{5\pi}{6}}{1+1^{2n}}=\dfrac{25\pi^2}{72}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=$

$$= \frac{25\pi^2}{72} - \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \lim a_n = \frac{25\pi^2}{72} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2) Αν $2\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}$ τότε



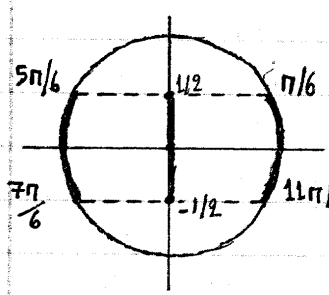
i) Αν $x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \dfrac{\frac{49\pi^2}{36} + \cos\frac{7\pi}{6}}{1+(-1)^{2n}} = \frac{49\pi^2}{72} + \frac{1}{2}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{49\pi^2}{72} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{49\pi^2}{72} - \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \lim a_n = \frac{49\pi^2}{72} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$

ii) Αν $x = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \dfrac{\frac{121\pi^2}{36} + \cos\frac{11\pi}{6}}{1+(-1)^{2n}} = \frac{121\pi^2}{72} + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \frac{121\pi^2}{72} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{121\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \lim a_n = \frac{121\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

3) Αν $|2\sin x| < 1 \Leftrightarrow |\sin x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(11\pi/6, 2\pi\right]$

τότε $\lim(2\sin x)^n = 0 \Rightarrow \lim(2\sin x)^{2n} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{x^2+\cos x}{1+(2\sin x)^{2n}} = \frac{x^2+\cos x}{1+\lim(2\sin x)^{2n}} = \frac{x^2+\cos x}{1+0} = x^2+\cos x.$$

4) Αν $|2\sin x| > 1 \Leftrightarrow |\sin x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x > \frac{1}{2} \vee \sin x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$

τότε $\left|\frac{1}{2\sin x}\right| < 1 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{2\sin x}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{2\sin x}\right)^{2n} = 0$, οπότε.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \frac{x^2+\cos x}{1+(2\sin x)^{2n}} = \frac{1}{(2\sin x)^{2n}} \cdot \frac{x^2+\cos x}{\frac{1}{(2\sin x)^{2n}}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim\left[\left(\frac{1}{2\sin x}\right)^{2n}\frac{x^2+\cos x}{\left(\frac{1}{2\sin x}\right)^{2n}+1}\right] = \lim\left(\frac{1}{2\sin x}\right)^{2n}\cdot\frac{x^2+\cos x}{\lim\left(\frac{1}{2\sin x}\right)^{2n}+1} =$$

$$= 0\cdot\frac{x^2+\cos x}{0+1} = 0.$$

ΑΡΑ:

$$\lim a_n = \begin{cases} x^2+\cos x &, x\in[0,\frac{\pi}{6}) \\ \frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{4} &, x=\pi/6 \\ 0 &, x\in(\pi/6, 5\pi/6) \\ \frac{25\pi^2}{72}-\frac{\sqrt{3}}{4} &, x=5\pi/6 \\ x^2+\cos x &, x\in(5\pi/6, 7\pi/6) \\ \frac{49\pi^2}{72}-\frac{\sqrt{3}}{4} &, x=7\pi/6 \\ 0 &, x\in(7\pi/6, 11\pi/6) \\ \frac{121\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{4} &, x=11\pi/6 \\ x^2+\cos x. &, x\in(11\pi/6, 2\pi] \end{cases}$$

3) Να βρεθεί το όριο της $a_n = \frac{(\lambda^2-1)n^2-5n+6}{\lambda n^2+3n+8}$

Λύση

1) Αν $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1 \vee \lambda=-1$, ~~τότε~~

i) Αν $\lambda=1 \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n = \frac{-5n+6}{n^2+3n+8} \Rightarrow \lim a_n = \lim\frac{-5n+6}{n^2+3n+8} = \lim\frac{-5n}{n^2} =$

$= -5\lim\frac{1}{n} = 0.$

ii) Αν $\lambda=-1 \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n = \frac{-5n+6}{-n^2+3n+8} \Rightarrow \lim a_n = \lim\frac{-5n+6}{-n^2+3n+6} = \lim\frac{-5n}{-n^2} =$

$= 5\lim\frac{1}{n} = 0.$

2) Αν $\lambda=0 \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n = \frac{-n^2-5n+6}{3n+8} \Rightarrow \lim a_n = \lim\frac{-n^2-5n+6}{3n+8} = \lim\frac{-n^2}{3n} =$

$= -\frac{1}{3}\lim n = -\infty.$

3) Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{0,-1,1\} \Rightarrow \begin{cases}\lambda^2-1\neq 0\\ \lambda\neq 0\end{cases} \Rightarrow \lim a_n = \lim\frac{(\lambda^2-1)n^2-5n+6}{\lambda n^2+3n+8} = \lim\frac{(\lambda^2-1)n^2}{\lambda n^2} = \frac{\lambda^2-1}{\lambda}$

ΑΡΑ:
$$\lim a_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2-1}{\lambda} & , \lambda \in \mathbb{R}-\{0,-1,1\} \\ 0 & , \lambda \in \{-1,1\}. \\ -\infty & , \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2-1}{\lambda} & , \lambda \in \mathbb{R}-\{0\} \\ -\infty & , \lambda = 0. \end{cases}$$

4) Να βρεθεί το όριο της $a_n = (\lambda^2-\lambda-2)n^2 + (\lambda-2)n + \lambda + 3$.

<u>Λύση</u>

1) Αν $\left.\begin{array}{l}\lambda^2-\lambda-2=0 \\ \Delta = 1+8=9\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=2 \vee \lambda=-1.$, τότε.

i) Αν $\lambda = 2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = 0n^2 + 0n + 5 = 5 \Rightarrow \lim a_n = 5.$

ii) Αν $\lambda = -1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = 0n^2 - 3n + 2 = -3n+2 \Rightarrow \lim a_n = \lim(-3n+2) = \lim(-3n) =$
$= -3\lim n = -\infty.$

2)

λ		-1		2	
$\lambda^2-\lambda-2$	$+$	0	$-$	0	$+$

i) Αν $\lambda \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty) \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2 > 0 \Rightarrow \lim a_n = \lim[(\lambda^2-\lambda-2)n^2 + (\lambda-2)n + \lambda+3] =$
$= \lim[(\lambda^2-\lambda-2)n^2] = (\lambda^2-\lambda-2)\lim n^2 = +\infty.$

ii) Αν $\lambda \in (-1,2) \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2 < 0 \Rightarrow \lim a_n = \lim[(\lambda^2-\lambda-2)n^2 + (\lambda-2)n + \lambda+3] =$
$= \lim[(\lambda^2-\lambda-2)n^2] = (\lambda^2-\lambda-2)\lim n^2 = -\infty.$

ΑΡΑ:
$$\lim a_n = \begin{cases} +\infty & , \lambda \in (-\infty,-1) \\ -\infty & , \lambda \in [-1,2) \\ 5 & , \lambda = 2 \\ +\infty & , \lambda \in (2,+\infty). \end{cases}$$

5) Να βρεθεί το όριο της $a_n = \sqrt{n^2+n+3} - \lambda n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

1) Αν $\lambda = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \sqrt{n^2+n+3}$.
$\left.\begin{array}{l}\lim(n^2+n+3) = \lim n^2 = +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}^*: n^2+n+3 \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n = \lim\sqrt{n^2+n+3} = +\infty.$

2) Αν $\lambda < 0 \Rightarrow -\lambda > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim(-\lambda n) = +\infty \\ \text{Ομοια} \quad \lim\sqrt{n^2+n+3} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n = \lim\left(\sqrt{n^2+n+3} - \lambda n\right) = +\infty.$

3) Αν $\lambda > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*: a_n = \sqrt{n^2+n+3} - \lambda n = \dfrac{(n^2+n+3) - \lambda^2 n^2}{\sqrt{n^2+n+3} + \lambda n} =$

$= \cancel{\dfrac{(1-\lambda^2)n^2+n+3}{\sqrt{n^2-\lambda^2 n+3}+\lambda n}} = \dfrac{(1-\lambda^2)n^2+n+3}{\sqrt{n^2+n+3}+\lambda n}$

i) Αν $\lambda=+1 \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\dfrac{n+3}{\sqrt{n^2+n+3}+n}=\dfrac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+n}=\dfrac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim a_n=\lim\frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{1+3\lim\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}+3\lim\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1+3\cdot 0}{\sqrt{1+0+3\cdot 0}+1}=\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

ii) Αν $\lambda\neq+1 \Rightarrow 1-\lambda^2\neq 0 \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=\dfrac{n\left[(1-\lambda^2)n+1+\frac{3}{n}\right]}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\lambda n}=\dfrac{(1-\lambda^2)n+1+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\lambda}=$

$$=\frac{(1-\lambda^2)n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\lambda}+\frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\lambda}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n=\lim\frac{(1-\lambda^2)n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\lambda}+\lim\frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+\lambda}=$$

$$=\frac{1-\lambda^2}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}+3\lim\frac{1}{n^2}}+\lambda}\cdot\lim n+\frac{1+3\lim\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}+3\lim\frac{1}{n^2}}+\lambda}=$$

$$=\frac{1-\lambda^2}{\sqrt{1+0+3\cdot 0}+\lambda}\cdot\lim n+\frac{1+3\cdot 0}{\sqrt{1+0+3\cdot 0}+\lambda}=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda}\cdot\lim n+\frac{1}{1+\lambda}=$$
$$=(1-\lambda)\lim n+\frac{1}{1+\lambda}.$$

α) Αν $0<\lambda<1 \Rightarrow 1-\lambda>0 \Rightarrow \lim a_n=+\infty$

β) Αν $1<\lambda \Rightarrow 1-\lambda<0 \Rightarrow \lim a_n=-\infty$.

ΑΡΑ:
$$\lim a_n=\begin{cases}+\infty, & \lambda\in(-\infty,1)\\ \frac{1}{2}, & \lambda=1\\ -\infty, & \lambda\in(1,+\infty).\end{cases}$$

6) $a_n = \sqrt[n]{(n+1)(x^n+3^n)}$

<u>Λύση</u>

Είναι $1 < n+1 < n+n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n]{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$\lim \sqrt[n]{2n} = \lim \sqrt[n]{2} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{n+1} = 1.$

Έστω $m = \max\{x, 3\} \Rightarrow m^n < x^n + 3^n < m^n + m^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m < \sqrt[n]{x^n+3^n} < m\sqrt[n]{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim(m\sqrt[n]{2}) = m \lim \sqrt[n]{2} = m$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{x^n+3^n} = \max\{x, 3\}$

Άρα $\lim a_n = \lim \sqrt[n]{(n+1)(x^n+3^n)} = \lim \sqrt[n]{n+1} \cdot \lim \sqrt[n]{x^n+3^n} = 1 \cdot \max\{x,3\} =$

$$= \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 3 \\ x, & x > 3. \end{cases}$$