ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

▼ Δομή στο $\mathbb{R}$

Όπως γνωρίζουμε από την άλγεβρα η δομή $(\mathbb{R},+,\cdot)$ του συνόλου των πραγματικών αριθμών είναι ένα συνεχές διατεταγμένο σώμα. Αυτός ο όρος υποδηλώνει ότι το $\mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες

I) Του σώματος :

1) Αντιμεταθετική ιδιότητα $\forall x,y\in\mathbb{R}: x+y=y+x \wedge xy=yx$
2) Προσεταιριστική ιδιότητα $\forall x,y\in\mathbb{R}: x+(y+z)=(x+y)+z \wedge x(yz)=(xy)z$
3) Ύπαρξη ουδέτερων στοιχείων $\forall x\in\mathbb{R}: 0+x=x+0=0 \wedge 1x=x\cdot 1=x$
4) Ύπαρξη συμμετρικών στοιχείων $\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}: x+y=y+x=0$
5) Επιμεριστική ιδιότητα $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}, \exists y\in\mathbb{R}: xy=yx=1.$
5) Επιμεριστική ιδιότητα $\forall x,y,z\in\mathbb{R}: x(y+z)=xy+xz.$

→ Τα στοιχεία 0 και 1 ονομάζονται αντίστοιχα το μηδενικό στοιχείο και το μοναδιαίο στοιχείο του συνόλου $\mathbb{R}$. Το συμμετρικό στοιχείο του $x\in\mathbb{R}$ ως προς την πρόσθεση ("+") λέγεται αντίθετος του x και συμβολίζεται ως $(-x)$. Όμοια το συμμετρικό του $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ως προς τον πολλαπλασιασμό ("·") λέγεται αντίστροφος του x και συμβολίζεται ως x^{-1} ή $\frac{1}{x}$. Το 0 δεν έχει αντίστροφο.

II) Της διάταξης.

$\exists$ ένα μόνο $\mathbb{R}^*_+ \subset \mathbb{R}: \begin{cases} \forall x,y\in\mathbb{R}^*_+ : x+y,\ xy\in\mathbb{R}^*_+ \\ \forall x\in\mathbb{R}: x=0 \vee x\in\mathbb{R}^*_+ \vee -x\in\mathbb{R}^*_+ \end{cases}$

→ Το σύνολο $\mathbb{R}^*_+$ ονομάζεται σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών.

III) Της συνέχειας → η οποία εκφράζεται με το αξίωμα του ελάχιστου άνω φράγματος το οποίο θα δούμε αναλυτικά στην συνέχεια.

Το $\mathbb{R}$ ως σώμα

Επειδή το $\mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα του σώματος, ισχύουν σε αυτό τα παρακάτω θεωρήματα.

1) Μοναδικότητα μηδενικού στοιχείου.

$\boxed{\text{Αν } \forall x \in \mathbb{R}: x+z=z+x=x \Rightarrow z=0}$

δηλαδή, δεν υπάρχει άλλο στοιχείο στο $\mathbb{R}$ εκτός από το 0 το οποίο να έχει την ιδιότητα του μηδενικού στοιχείου.

Απόδειξη

Είναι $z = 0+z =$ (0 μηδενικό στοιχείο)
$= 0$ (z μηδενικό στοιχείο) QED.

2) Μοναδικότητα μοναδιαίου στοιχείου

$\boxed{\text{Αν } \forall x \in \mathbb{R}: xz=zx=x \Rightarrow z=1.}$

Απόδειξη

Είναι $z = 1z =$ (1 μοναδιαίο στοιχείο)
$=1$ (z μοναδιαίο στοιχείο).

3) Νόμος διαγραφής στην πρόσθεση.

$\boxed{x+z=y+z \Leftrightarrow x=y.}$ όπου $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Ευθύ: Έστω $x+z=y+z$.

$$x = x+0 = x+[z+(-z)] = (x+z)+(-z) \overset{\text{υπ.}}{=} (y+z)+(-z) = y+[z+(-z)] =$$
$$= y+0 = y.$$

Αντίστροφο: ισχύει διότι κάθε πράξη είναι απεικόνιση. "+": $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4) Νόμοι διαγραφής στον πολλαπλασιασμό.

i) $\boxed{x=y \Rightarrow xz=yz}$ όπου $x,y,z \in \mathbb{R}$.

• ii) $\boxed{\left.\begin{array}{l} xz=yz \\ z\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y.}$ όπου $x,y \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Απόδειξη

Έστω $xz=yz$.

$z\neq 0 \Rightarrow \exists z' \in \mathbb{R}: zz'=z'z=1$, οπότε $x = x\cdot 1 = x\cdot(zz') = (xz)z' \overset{\text{υπ}}{=} (yz)z' =$

$= y(zz') = y \cdot 1 = y$. QED.

~~5) Η εξίσωση~~

5) Το 0 ως απορροφητικό στοιχείο

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: \ 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0}$

Απόδειξη.

Εστω $y \in \mathbb{R}$. Είναι $x \cdot y + 0 = xy = x(y+0) = x \cdot y + x \cdot 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 = x \cdot 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ομοια, $yx + 0 = yx = (y+0)x = yx + 0x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 = 0x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Αρα: $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. QED.

6) Κανονας των προσήμων.

i) $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (-x)y = x(-y) = -(xy)}$

Απόδειξη : Εστω $x, y \in \mathbb{R}$

Θα δείξω ότι $(-x)y = -(xy)$.

$(-x) + x = 0 \Rightarrow [(-x)+x]y = 0 \cdot y \Rightarrow [(-x)+x]y = 0 \Rightarrow (-x)y + xy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-x)y, \ xy$ αντίθετοι $\Rightarrow (-x)y = -(xy)$.

Ομοια ότι $x(-y) = -(xy)$.

$(-y) + y = 0 \Rightarrow x[(-y)+y] = x \cdot 0 \Rightarrow x[(-y)+y] = 0 \Rightarrow x(-y) + xy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(-y), \ xy$ αντίθετοι $\Rightarrow x(-y) = -(xy)$.

Αρα: $(-x)y = x(-y) = -(xy)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: \ -(-x) = x.}$

Απόδειξη

$\forall x \in \mathbb{R}: \ x + (-x) = 0 \Rightarrow x, -x$ αντίθετοι $\Rightarrow x = -(-x)$. QED.

iii) $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (-x)(-y) = xy.}$

Απόδειξη

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (-x)(-y) \overset{i)}{=} -[x(-y)] \overset{i)}{=} -[-(xy)] \overset{ii)}{=} xy$.

7) $\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}:\ xy=0\Rightarrow x=0\vee y=0.}$

Απόδειξη

i) Αν $x=0\Rightarrow x=0\vee y=0\ ,\forall y\in\mathbb{R}.$

ii) Αν $x\neq 0$, τότε

$\left.\begin{array}{l} xy=0=x\cdot 0 \\ x\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow y=0$ (νόμος διαγραφής) $\Rightarrow x=0\vee y=0.$ QED.

- Αφαίρεση στο $\mathbb{R}$.

Θ. $\boxed{\forall a,b\in\mathbb{R},\exists \text{ ένας μόνο } x\in\mathbb{R}:\ b+x=a}$

Απόδειξη : Έστω $a,b\in\mathbb{R}$

Είναι $b+x=a\Leftrightarrow(-b)+[b+x]=(-b)+a\Leftrightarrow[(-b)+b]+x=(-b)+a\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0+x=(-b)+a\Leftrightarrow x=(-b)+a\Leftrightarrow x=a+(-b).$

Άρα $\exists x\in\mathbb{R}$ (μόνο ο $x=a+(-b)$) $: b+x=a.$

Άρα $\forall a,b\in\mathbb{R},\exists$ ένας μόνο $x\in\mathbb{R}: b+x=a.$ QED.

↳ Ορίζουμε τώρα μια νέα πράξη, την αφαίρεση, σύμφωνα με την οποία $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\longrightarrow(a-b)\in\mathbb{R}:\ a-b=a+(-b)$

Από το θεώρημα έχουμε ότι

$$\boxed{b+x=a\Leftrightarrow x=a-b.}$$

- Διαίρεση στο $\mathbb{R}$

Θ. $\boxed{\forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{R}^*:\exists \text{ ένας μόνο } x\in\mathbb{R}:\ bx=a.}$

Απόδειξη

Έστω $a\in\mathbb{R}$ και $b\in\mathbb{R}^*$.

Είναι $bx=a\Leftrightarrow\frac{1}{b}(bx)=\frac{1}{b}\cdot a\Leftrightarrow\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)x=\frac{1}{b}\cdot a\Leftrightarrow 1\cdot x=\frac{1}{b}\cdot a\Leftrightarrow x=\frac{1}{b}\cdot a$

$\Leftrightarrow x=a\cdot\frac{1}{b}.$

Άρα $\exists x\in\mathbb{R}$ (μόνο ο $x=a\cdot\frac{1}{b}$)$: bx=a.$

Άρα $\forall a,b\in\mathbb{R}$ με $b\neq 0,\exists x\in\mathbb{R}: bx=a$. QED.

↳ Ορίζουμε τώρα μία νέα πράξη, την διαίρεση, σύμφωνα με την οποία $\forall(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\longrightarrow\frac{a}{b}\in\mathbb{R}:\ \frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$

Απο το θεώρημα έχουμε ότι

$$\boxed{\text{Αν } b\neq 0 \ , \ bx = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}}$$

• Δυνάμεις στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Αν $a\in\mathbb{R}$ και $v\in\mathbb{N}^*$, τότε ορίζουμε ότι:

$$a^v = \begin{cases} a & , \text{ αν } v=1 \\ a^{v-1}\cdot a & , \text{ αν } v>1. \end{cases}$$

$a \to$ βάση

$v \to$ εκθέτης

Αμεση συνέπεια του ορισμού αυτο είναι το

Θ. Αν $a,b\in\mathbb{R}$ και $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}^*$, ισχύουν

1. $a^\kappa a^\lambda = a^{\kappa+\lambda}$
2. $(a^\kappa)^\lambda = a^{\kappa\lambda}$
3. $(ab)^\kappa = a^\kappa b^\kappa$

Ο ορισμός αυτός επεκτείνεται και για εκθέτες στο $\mathbb{Z}$ ως εξής·

Ορισμός.: Αν $a\in\mathbb{R}^*$ τότε ορίζουμε

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$, $\forall v\in\mathbb{N}^*$.

Η ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για εκθέτες απο το $\mathbb{Z}$ όπως και για εκθέτες απο το $\mathbb{N}$. Οι ιδιότητες αυτές συνοψίζονται στο

Θ. Αν $a,b\in\mathbb{R}$ και $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$, με την προυπόθεση ότι όλα τα παρουσιαζόμενα σύμβολα έχουν νόημα, ισχύουν οι ισότητες.

1. $a^\kappa a^\lambda = a^{\kappa+\lambda}$
2. $a^\kappa : a^\lambda = a^{\kappa-\lambda}$
3. $(a^\kappa)^\lambda = a^{\kappa\lambda}$
4. $(ab)^\kappa = a^\kappa b^\kappa$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^\kappa = \frac{a^\kappa}{b^\kappa}$

• Με το ~~θεω~~ αξίωμα της συνέχειας θα επεκτείνουμε τις δυνάμεις με εκθέτες στο $\mathbb{Q}$ και με τις έννοιες της ανάλυσης θα πάρουμε δυνάμεις με εκθέτες στο $\mathbb{R}$.

► Παρατήρηση : Επειδη οι πράξεις, ως γνωστόν, είναι απεικονίσεις, ισχύουν τα εξής:

$$\left.\begin{matrix} a=b \\ x=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+x = b+y \qquad \left.\begin{matrix} a=b \\ x=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax = by$$

Απο την δεύτερη αυτή ιδιότητα ~~ισχύει~~ προκύπτει ότι

$\forall \nu \in \mathbb{N}^*: a=b \Rightarrow a^\nu = b^\nu$.

Αν $\nu=2\kappa+1$, τότε ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή

$\forall \nu \in \mathbb{N}^*, \nu=2\kappa+1 : a=b \Leftrightarrow a^\nu=b^\nu$.

Αν $\nu=2\kappa$, τότε το αντίστροφο ισχύει μόνο όταν a,b είναι γνωστό ότι είναι ομόσημοι (βλ. διάταξη).

▼ Διάταξη στο $\mathbb{R}$

Σύμφωνα με το αξίωμα της διάταξης.

$$\boxed{\exists\, \mathbb{R}^*_+ \subset \mathbb{R} : \begin{cases} \forall x,y \in \mathbb{R}^*_+ : (x+y)\in\mathbb{R}^*_+ \wedge xy \in \mathbb{R}^*_+ . \\ \forall x \in \mathbb{R}^*_+ : x=0 \ \underline{\vee}\ x\in\mathbb{R}^*_+ \ \underline{\vee} -x\in\mathbb{R}^*_+ . \end{cases}}$$

Ορίζουμε τώρα τις διμελείς σχέσεις ">", "≥", "<", "≤" ως εξής:

Ορισμοί:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x>y \Leftrightarrow (x-y)\in\mathbb{R}^*_+ & x<y \Leftrightarrow (y-x)\in\mathbb{R}^*_+ \\ x\geq y \Leftrightarrow (x-y)\in\mathbb{R}^*_+ \vee x-y=0 & x\leq y \Leftrightarrow (y-x)\in\mathbb{R}^*_+ \vee y-x=0. \end{array}}$$

Για $y=0$ προκύπτει απο τους ορισμούς ότι

$$\boxed{\begin{array}{ll} x>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^*_+ & x<0 \Leftrightarrow -x\in\mathbb{R}^*_+ \\ x\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^*_+ \vee x=0 & x\leq 0 \Leftrightarrow -x\in\mathbb{R}^*_+ \vee x=0. \end{array}}$$

και άρα

$\mathbb{R}^*_+ = \{x\in\mathbb{R} / x>0\} \leftarrow$ σύνολο θετικών. Επίσης ορίζουμε

$\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R} / x\geq 0\} \leftarrow$ σύνολο μη αρνητικών

$\mathbb{R}^*_- = \{x\in\mathbb{R} / x<0\} \leftarrow$ σύνολο αρνητικών

$\mathbb{R}_- = \{x\in\mathbb{R} / x\leq 0\} \leftarrow$ σύνολο μη θετικών.

Αμεσες συνέπειες του αξιώματος της διάταξης είναι ότι

- •1 $\boxed{x=0 \ \underline{\vee}\ x<0 \ \underline{\vee}\ x>0}$
- •2 $\boxed{\left.\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y>0 \wedge xy>0.}$
- •3 $\boxed{\left.\begin{array}{l} x<0 \\ y<0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y<0 \wedge xy<0}$

Επίσης ισχύουν οι εξής θεμελιώδης συνεπαγωγές:

$$\boxed{\begin{array}{l} x>y \Leftrightarrow x-y>0. \\ x\geq y \Leftrightarrow x-y\geq 0 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x<y \Leftrightarrow x-y<0 \\ x\leq y \Leftrightarrow x-y\leq 0. \end{array}}$$

→ Ιδιότητες ανισωτήτων.

1) <u>Νόμος της τριχοτομίας</u> : $\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}:\ x=y \veebar x<y \veebar x>y.}$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow x-y\in\mathbb{R} \Rightarrow x-y=0 \veebar x-y<0 \veebar x-y>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=y \veebar x<y \veebar x>y.$ QED.

Δύο αριθμοί $x,y\in\mathbb{R}$ θα λέγονται <u>ομόσημοι</u> $\Leftrightarrow (x>0 \wedge y>0)\vee(x<0\wedge y<0)$.
<u>ετερόσημοι</u> $\Leftrightarrow (x>0\wedge y<0)\vee(x<0\wedge y>0)$.

2) <u>Κανόνας των προσήμων</u> : $\boxed{\begin{array}{l} x,y \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow xy>0 \\ x,y \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow xy<0. \end{array}}$

<u>Απόδειξη</u>

<u>Ευθύ</u> : Αν x,y ομόσημοι, τότε

i) Αν $x>0 \wedge y>0 \Rightarrow xy>0$

ii) Αν $x<0 \wedge y<0 \Rightarrow -x>0 \wedge -y>0 \Rightarrow (-x)(-y)>0 \Rightarrow xy>0$

Αν x,y ετερόσημοι, τότε

i) Αν $x>0\wedge y<0 \Rightarrow x>0 \wedge -y>0 \Rightarrow x(-y)>0 \Rightarrow -xy>0 \Rightarrow xy<0$

ii) Αν $x<0\wedge y>0 \Rightarrow -x>0\wedge y>0 \Rightarrow (-x)y>0 \Rightarrow -xy>0 \Rightarrow xy<0.$

<u>Αντίστροφο.</u>

• Αν $xy>0$, έστω x,y ετερόσημοι $\Rightarrow xy<0 \leftarrow$ Άτοπο (αξ. διάταξης) άρα x,y όχι ετερόσημοι $\Rightarrow x,y$ ομόσημοι.

• Αν $xy<0$, έστω x,y ομόσημοι $\Rightarrow xy>0 \leftarrow$ Άτοπο, άρα x,y όχι ομόσημοι $\Rightarrow$ $\Rightarrow x,y$ ετερόσημοι

<u>Πορίσματα</u>

1. $a\neq 0 \Leftrightarrow a^2>0$ (ως γινόμενο ομόσημων)
2. $1>0$ (από το προηγούμενο πόρισμα για $a=1$)
3. $a>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>0$, $a<0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}<0.$
   (Είναι για $a\neq 0 \Rightarrow a\cdot\frac{1}{a}=1>0 \Rightarrow a,\ 1/a$ ομόσημοι).
4. $\boxed{xy>0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}>0}$ $\boxed{xy<0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}<0.}$

3) Μεταβατικότητα : $\boxed{\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \ x>y \wedge y>z \Rightarrow x>z.}$

Απόδειξη

Είναι $\left.\begin{array}{l} x>y \Rightarrow x-y>0 \\ y>z \Rightarrow y-z>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-y)+(y-z)>0$ (αξ. διάταξης) $\Rightarrow$

$\Rightarrow [(x-y)+y]+(-z)>0 \Rightarrow [x+(y+(-y))]+(-z)>0 \Rightarrow (x+0)+(-z)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-z>0 \Rightarrow x>z.$ QED.

$\hookrightarrow$ Ομοια αποδεικνύεται ότι

$\boxed{\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \ x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z.}$

• Πόρισμα: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*_+ , \forall y \in \mathbb{R}^*_- : \ x>y.}$

• Η φυσική διάταξη στο $\mathbb{R}$.

Ως γνωστόν $x \geq y \Leftrightarrow x>y \vee x=y$

$x \leq y \Leftrightarrow x<y \vee x=y.$

Ευκολα αποδεικνύεται ότι

1) $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq x$, ανακλαστική ιδιότητα

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \left.\begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow x=y.$, αντισυμμετρική

3) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z.$, μεταβατική

Επειδή ισχύουν αυτά τα τρία, η διμελής σχέση λέγεται σχέση διάταξης.
Επειδή ισχύει και ο νόμος της τριχοτομίας, θα είναι σχέση ολικής διάταξης.

• Η σχέση διάταξης "$\leq$" λέγεται φυσική διάταξη στο $\mathbb{R}$

▼ Διάταξη και πράξεις στο $\mathbb{R}$.

1) $\boxed{\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \ x>y \Leftrightarrow x+z>y+z}$

Απόδειξη

Εστω $x,y,z \in \mathbb{R}$.

$x+z>y+z \Leftrightarrow (x+z)-(y+z)>0 \Leftrightarrow x+z-y-z>0 \Leftrightarrow x-y>0 \Leftrightarrow x>y.$ QED.

2) $\boxed{\forall x,y,a \in \mathbb{R}: \ x>y \wedge a>0 \Rightarrow ax>ay}$

Απόδειξη Εστω $x,y \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x>y \Rightarrow x-y>0 \\ \quad\quad\ a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow a(x-y)>0 \Rightarrow ax-ay>0 \Rightarrow ax>ay. \text{ QED.}$$

3) $\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}:\ x>y \wedge a<0 \Rightarrow ax<ay.}$

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $x,y\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x>y \Rightarrow x-y>0 \\ \quad\quad\ a<0 \end{array}\right\} \Rightarrow a(x-y)<0 \Rightarrow ax-ay<0 \Rightarrow ax<ay. \text{ QED.}$$

4) $\boxed{\forall x,y,a,b\in\mathbb{R}:\ x>y \wedge a>b \Rightarrow x+a>y+b.}$

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $x,y,a,b\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x>y \Rightarrow (x-y)>0 \\ a>b \Rightarrow (a-b)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-y)+(a-b)>0 \Rightarrow (x+a)-(y+b)>0 \Rightarrow x+a>y+b. \text{ QED.}$$

5) $\boxed{\forall x,y,a,b\in\mathbb{R}:\ \left.\begin{array}{l} x>a>0 \\ y>b>0 \end{array}\right\} \Rightarrow xy>ab.}$

<u>Απόδειξη.</u> : Έστω $x,y,a,b\in\mathbb{R}$. Αρκεί $xy-ab>0$.

Είναι $xy-ab = xy-ay+ay-ab = (x-a)y+(y-b)a>0$, διότι

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x>a \Rightarrow x-a>0 \\ \quad\quad\quad\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-a)y>0 \\ \left.\begin{array}{l} y>b \Rightarrow y-b>0 \\ \quad\quad\quad\ a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (y-b)a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-a)y+(y-b)a>0 \quad \text{άρα} \quad xy>ab.$$

↳ Απο τα παραπάνω βλέπουμε ότι μπορούμε ΠΑΝΤΑ να προσθέτουμε ανισώσεις κατα μέλη. Επίσης μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατα μέλη ανισώσεις όταν και τα τέσσερα μέλη είναι θετικά. Αυτό που δεν μπορούμε να κάνουμε είναι να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε κατα μέλη.

- <u>Πορίσματα</u>

1. Αν αλλάξουμε τα πρόσημα των όρων μιας ανισότητας, προκύπτει η ετερόστροφη ανισότητα.
2. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη ανισότητας με τον $a\neq 0$, προκύπτει
   i) ανισότητα ομόστροφη, αν $a>0$
   ii) ανισότητα ετερόστροφη, αν $a<0$.

3. Αν $a>0$, τότε $x>y \Leftrightarrow ax>ay$
$a<0$, τότε $x>y \Leftrightarrow ax<ay$

4. Αν $\left.\begin{array}{l} a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}^*_+ \\ a_1>b_1 \wedge a_2>b_2 \wedge \dots \wedge a_\nu>b_\nu \end{array}\right\} \Rightarrow a_1a_2\cdots a_\nu > b_1b_2\cdots b_\nu$.

▼ Διάταξη και δυνάμεις.

Θ.

Αν $x,y \in \mathbb{R}^*_+$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*$, ισχύουν	Αν $x,y \in \mathbb{R}^*_-$ και $\nu \in \mathbb{Z}^*$
1. Αν $\nu>0$, τότε $x>y \Leftrightarrow x^\nu > y^\nu$ 2. Αν $\nu<0$, τότε $x<y \Leftrightarrow x^\nu<y^\nu$ 3. $x=y \Leftrightarrow x^\nu=y^\nu$.	$x<y \Rightarrow \begin{cases} x^\nu>y^\nu, & \nu=2\kappa \\ x^\nu<y^\nu, & \nu=2\kappa+1. \end{cases}$

- Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων.
- Πορίσματα

1. Αν $\nu>0$, τότε $x>1 \Rightarrow x^\nu>1$
$0<x<1 \Rightarrow x^\nu<1$

2. Αν $\nu<0$, τότε $x>1 \Rightarrow x^\nu<1$
$0<x<1 \Rightarrow x^\nu>1$.

- Εφαρμογές.

1) $\boxed{xy>0 \wedge x<y \Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y}}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Είναι $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}>0$, διότι $\left.\begin{array}{l} x<y \Rightarrow y-x>0 \\ xy>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y-x}{xy}>0$

Άρα $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$.

2) $\boxed{xy<0 \wedge x<y \Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y}.}$ Όμοια...

▼~~Ανισοτητες~~

▼ Ανισότητα Bernoulli

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \alpha > -1 \\ \text{και } \nu \in \mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow (1+\alpha)^{\nu} \geq 1+\nu\cdot\alpha.}$$

Απόδειξη

Για $\nu = 0$, $\cancel{(1+\alpha)^0 = 1 \geq 1+0\alpha}$

$\left.\begin{array}{l}(1+\alpha)^{\nu} = (1+\alpha)^0 = 1 \text{ ,διότι } \alpha > -1 \Rightarrow 1+\alpha \neq 0 \\ 1+\nu\alpha = 1+0\cdot\alpha = 1\end{array}\right\} \Rightarrow (1+\alpha)^{\nu} \geq 1+\nu\alpha$,ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $\nu = \kappa$: $(1+\alpha)^{\kappa} \geq 1+\kappa\alpha$.

Θα δείξω ότι ισχύει για $\nu = \kappa+1$: $(1+\alpha)^{\kappa+1} \geq 1+(\kappa+1)\alpha$.

Είναι $\left.\begin{array}{l}(1+\alpha)^{\kappa} > 1+\kappa\alpha \\ \alpha > -1 \Rightarrow (1+\alpha) > 0\end{array}\right\} \Rightarrow (1+\alpha)^{\kappa}(1+\alpha) > (1+\kappa\alpha)(1+\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+\alpha)^{\kappa+1} > 1+\alpha+\kappa\alpha+\kappa\alpha^2 \Rightarrow (1+\alpha)^{\kappa+1} > 1+(\kappa+1)\alpha+\kappa\alpha^2 > 1+(\kappa+1)\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+\alpha)^{\kappa+1} > 1+(\kappa+1)\alpha$. QED.

• Η σχέση ισχύει και όταν $\alpha = -1$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$.

▼ Εννοια του διαστήματος.

• Διαστήματα ονομάζουμε τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$:

1. Ανοικτό διάστημα : $(\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} / \alpha < x < \beta\}$.
2. Ανοικτό αριστερά : $(\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} / \alpha < x \leq \beta\}$.
3. Ανοικτό δεξιά : $[\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} / \alpha \leq x < \beta\}$.
4. Κλειστό : $[\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} / \alpha \leq x \leq \beta\}$.
5. $(\alpha,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > \alpha\}$, $[\alpha,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq \alpha\}$
6. $(-\infty,\beta) = \{x \in \mathbb{R} / x < \beta\}$, $(-\infty,\beta] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq \beta\}$.

▼ Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός : Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε η απόλυτη τιμή του συμβολίζεται ως $|x|$ και ορίζεται ως

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{, αν } x \geq 0 \\ -x & \text{, αν } x < 0 \end{cases}}$$

→ Αμεσες συνέπειες του ορισμού

1. $x=0 \Leftrightarrow |x|=0$
2. $|x|\geq x \,,\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|\geq -x \,,\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|=\max\{x,-x\}$.
3. $-|x|\leq x\leq |x| \,,\forall x\in\mathbb{R}$.
4. $|-x|=|x| \,,\forall x\in\mathbb{R}$.
5. $|x|\geq 0 \,,\forall x\in\mathbb{R}$.
6. $|x|^{2\nu}=x^{2\nu} \,,\forall x\in\mathbb{R}$.

Θ_1) Αν $\vartheta>0$, τότε

1. $|x|\leq\vartheta \Leftrightarrow -\vartheta\leq x\leq\vartheta$
2. $|x|\geq\vartheta$

Θ_1) Αν $\vartheta>0$, τότε

1. $|x|\leq\vartheta \Leftrightarrow x\in[-\vartheta,\vartheta]$.
2. $|x|\geq\vartheta \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\vartheta]\cup[\vartheta,+\infty)$.

Απόδειξη

1. $|x|\leq\vartheta \Leftrightarrow |x|^2\leq\vartheta^2 \Leftrightarrow x^2\leq\vartheta^2 \Leftrightarrow x^2-\vartheta^2\leq 0 \Leftrightarrow (x-\vartheta)(x+\vartheta)\leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$

Θ_1) Αν $\vartheta>0$, τότε

1. $|x|<\vartheta \Leftrightarrow x\in(-\vartheta,\vartheta)$
2. $|x|>\vartheta \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\vartheta)\cup(\vartheta,+\infty)$
3. $|x|=\vartheta \Leftrightarrow x=\vartheta \vee x=-\vartheta$.

Απόδειξη

1. $|x|<\vartheta \Leftrightarrow |x|^2<\vartheta^2$ (διότι $|x|\geq 0$) $\Leftrightarrow x^2<\vartheta^2 \Leftrightarrow x^2-\vartheta^2<0 \Leftrightarrow (x-\vartheta)(x+\vartheta)<0$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x-\vartheta,\ x+\vartheta \text{ ετερόσημοι} \\ x-\vartheta<x+\vartheta \text{ , διότι } -\vartheta<0<\vartheta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\vartheta<0 \\ x+\vartheta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\vartheta \\ x>-\vartheta \end{cases} \Leftrightarrow -\vartheta<x<\vartheta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-\vartheta,\vartheta)$.

2. $|x|>\vartheta \Leftrightarrow |x|^2>\vartheta^2$ (διότι $\vartheta>0$) $\Leftrightarrow x^2>\vartheta^2 \Leftrightarrow x^2-\vartheta^2>0 \Leftrightarrow (x-\vartheta)(x+\vartheta)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\vartheta,\ x+\vartheta$ ομόσημοι $\Leftrightarrow \begin{cases} x-\vartheta<0 \\ x+\vartheta<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-\vartheta>0 \\ x+\vartheta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\vartheta \\ x<-\vartheta \end{cases} \vee \begin{cases} x>\vartheta \\ x>-\vartheta \end{cases} \Leftrightarrow$

~~$-\vartheta<0<\vartheta \Rightarrow$~~

$\Leftrightarrow x<-\vartheta \vee x>\vartheta \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\vartheta) \vee x\in(\vartheta,+\infty) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\vartheta)\cup(\vartheta;+\infty)$.

3. $|x|=\vartheta \Leftrightarrow |x|^2=\vartheta^2 \Leftrightarrow x^2=\vartheta^2 \Leftrightarrow x^2-\vartheta^2=0 \Leftrightarrow (x-\vartheta)(x+\vartheta)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\vartheta=0 \vee x+\vartheta=0 \Leftrightarrow x=\vartheta \vee x=-\vartheta$.

$\theta_2)$ $\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}:\ ||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|.}$

Απόδειξη

Εστω $x,y\in\mathbb{R}$.

i) Είναι $\left.\begin{array}{l}-|x|\leq x\leq |x|\\ -|y|\leq y\leq |y|\end{array}\right\} \Rightarrow -(|x|+|y|)\leq x+y\leq (|x|+|y|) \overset{\theta_1}{\Rightarrow} |x+y|\leq |x|+|y|.$

ii) $|x|=|x+y-y|\leq |x+y|+|-y| = |x+y|+|y| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|x+y|\geq |x|-|y|.\\ \text{Ομοια: } |x+y|\geq |y|-|x|\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow |x+y|\geq \max\{|x|-|y|, -(|x|-|y|)\} \Rightarrow |x+y|\geq ||x|-|y||.$

Αρα: $||x|-|y||\leq |x+y|\leq |x|+|y|.$

$\theta_3)$ $\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}:\ |xy|=|x|\cdot|y|.}$

Απόδειξη

$\left.\begin{array}{l}|xy|^2=(xy)^2=x^2y^2=|x|^2|y|^2=(|x|\cdot|y|)^2\\ |xy|\geq 0 \wedge |x||y|\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow |xy|=|x|\cdot|y|.$

• Πορίσματα : ~~1. $\forall x\in\mathbb{R}, \forall \nu\in\mathbb{N}^*$~~

~~$\forall \nu\in$~~ 1. $|a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_\nu| = |a_1|\cdot|a_2|\cdot|a_3|\cdots|a_\nu|.$

2. $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}^*_0 : \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}.$

▼ Φράγματα και φραγμένα σύνολα

Ορισμός : Εστω ένα σύνολο $E\neq\emptyset$ και $E\subseteq\mathbb{R}$. Ονομάζουμε:

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi \text{ άνω φραγμα του } E \Leftrightarrow \forall x\in E: x\leq\varphi\\ \varphi \text{ κάτω φράγμα του } E \Leftrightarrow \forall x\in E: x\geq\varphi.\end{array}}$$

Ορισμός : Ενα σύνολο $E\neq\emptyset$ με $E\subseteq\mathbb{R}$ θα λέγεται

$$\boxed{\begin{array}{l}E \text{ άνω φραγμένο} \Leftrightarrow \exists\,\varphi\in\mathbb{R}: \varphi \text{ άνω φράγμα του } E\\ E \text{ κάτω φραγμένο} \Leftrightarrow \exists\,\varphi\in\mathbb{R}: \varphi \text{ κάτω φραγμα του } E\end{array}}$$

• Αν ένα άνω (κάτω) φράγμα φ ενός συνόλου E ανήκει στο E, τότε το φ είναι το μοναδικό στοιχείο με αυτή την ιδιότητα. Το φ στην περίπτωση αυτή λέγεται μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο του E (maxE – minE).

• **Παράδειγμα**

1) Δίνεται το σύνολο $A=\{x\in\mathbb{R}: \frac{x+1}{x-2}>3\}$. Να μελετηθεί ως προς τα φράγματα και να εξετάσετε αν έχει μέγιστο ή ελάχιστο.

Λύση

$$x\in A \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2}>3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2}-3>0 \Leftrightarrow \frac{x+1-3(x-2)}{x-2}>0 \Leftrightarrow \frac{x+1-3x+6}{x-2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-2}>0 \Leftrightarrow x\in(2,7/2]$$, άρα $A=(2,7/2] \Rightarrow$

x		2		$7/2$	
$-2x+7$	$+$		$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	0	$+$		$+$
f	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

$\Rightarrow A$ φραγμένο* με ένα άνω φράγμα το $7/2$ και ένα κάτω φράγμα το 2.

Επειδή $7/2\in A$
$7/2$ "ένα" άνω φράγμα $\Big\} \Rightarrow \max A=\frac{7}{2}$.

(* φραγμένο = άνω ΚΑΙ κάτω φραγμένο)

▼ **Αξίωμα του ελάχιστου άνω φράγματος.**

Ορισμός: Έστω $E\neq\emptyset$ και $E\subseteq\mathbb{R}$. Αν E άνω φραγμένο τότε

$$\boxed{a=\sup E \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ άνω φράγμα του } E \\ \forall \varepsilon>0: a-\varepsilon \text{ όχι άνω φράγμα του } E \end{cases}}$$

Ο αριθμός $a=\sup E$ ονομάζεται ελάχιστο άνω φράγμα του E (supremum) και είναι προφανώς μοναδικός, εάν υπάρχει.

Όμοια ορίζεται το ελάχιστο κάτω φράγμα:

Ορισμός: Έστω $E\neq\emptyset$ και $E\subseteq\mathbb{R}$. Αν E κάτω φραγμένο τότε

$$\boxed{a=\inf E \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ κάτω φράγμα του } E \\ \forall \varepsilon>0: a+\varepsilon \text{ όχι κάτω φράγμα του } E \end{cases}}$$

Σύμφωνα με το αξίωμα του ελαχίστου άνω φράγματος, κάθε φραγμένο άνω, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Δηλαδή:

Αξίωμα: $\boxed{\begin{rcases} E \text{ άνω φραγμένο} \\ \emptyset\neq E\subseteq\mathbb{R} \end{rcases} \Rightarrow \exists\, a\in\mathbb{R}: a=\sup E}$

Θα δείξουμε ότι:

Θ. $\boxed{\left.\begin{array}{l}E \text{ κάτω φραγμένο} \\ \emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : a = \inf E}$

<u>Απόδειξη</u>

E κάτω φραγμένο $\Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq \varphi$.

► Έστω το σύνολο $E_1 = \{x \in \mathbb{R} : -x \in E\}$.

$\underline{\forall x \in E_1} : -x \in E \Rightarrow -x \geq \varphi \Rightarrow \underline{x \leq -\varphi.}$, άρα E_1 άνω φραγμένο με ένα άνω

$\left.\begin{array}{l}\text{φράγμα το } -\varphi \\ \emptyset \neq E_1 \subseteq \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : a = \sup E_1 \Rightarrow \begin{cases} a \text{ άνω φράγμα του } E_1 \\ \forall \varepsilon > 0 : a - \varepsilon \text{ όχι άνω φράγμα του } E_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in E_1 : x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in E_1 : x > a - \varepsilon \end{cases}$

Θα δείξω ότι • $\inf E = -a$.

$\underline{\forall x \in E} : -x \in E_1 \Rightarrow -x \leq a \Rightarrow \underline{x \geq -a} \Rightarrow \underline{-a \text{ κάτω φράγμα } E}$. (1).

Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \underline{\exists x_1 \in E_1} : x_1 > a - \varepsilon \Leftrightarrow \underline{-x_1 < -a + \varepsilon} \Rightarrow \underline{\exists x \in E}$ (π.χ. ο $x = -x_1$):

$x < (-a) + \varepsilon \Rightarrow (-a) + \varepsilon$ όχι κάτω φράγμα E, $\forall \varepsilon > 0$. (2)

(1)∧(2) $\Rightarrow \inf E = -a \in \mathbb{R}$ QED.

$\inf(a,b) = a$

$\inf[a,b) = a = \min[a,b)$

$\inf(a,+\infty) = a$

$\inf[a,+\infty) = a = \min[a,+\infty)$

Άμεση συνέπεια του

$\sup(a,b) = b$

$\sup(a,b] = b = \max(a,b]$

$\sup(a,+\infty) =$

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Να βρεθεί το inf και το sup του $A = \{x \in \mathbb{R} / |x^2 - 3x| \leq 2\}$. (άν αυτά υπάρχουν)

<u>Λύση</u>

$x \in A \Leftrightarrow |x^2 - 3x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 - 3x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \leq 2 & (1) \\ x^2 - 3x \geq -2 & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 3x - 2 \leq 0. \\ \Delta = 9 + 8 = 17 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} = \rho_1 \\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} = \rho_2 \end{cases}$

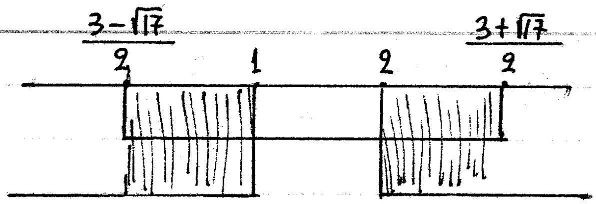
x		ρ_1		ρ_2	
x^2-3x-2	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in [\rho_1, \rho_2]$.

(2) $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \geq 0. \\ \Delta = 9 - 8 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

x		1		2	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.



Αρα $x\in A \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right] \\ x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1\right]\cup\left[2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$

Αρα $A=\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2},1\right]\cup\left[2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \inf A=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \ (=\min A) \\ \sup A = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \ (=\max A). \end{cases}$

2) Ομοια στο σύνολο $A=\{x\in\mathbb{R}: \frac{x+1}{x-1}<\frac{1}{x}\}$

<u>Λύση</u>

$x\in A \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}<\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-(x-1)}{x(x-1)}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-x+1}{x(x-1)}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x(x-1)}<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$, άρα $A=(0,1) \Rightarrow \begin{cases} \sup A=1 \\ \inf A=0. \end{cases}$

x		0		1	
x^2+1	+		+		+
x	−	0	+		+
$x-1$	−		−	0	+
	+	‖	−	‖	+

$\nexists \max A, \min A$

Απο τα παραδείγματα φαίνεται ότι τα sup και inf μπορούν να είναι άκρα κλειστών ή ανοικτών διαστημάτων, δηλαδη δεν είναι αναγκαίο να ανήκουν στο A. Αν όμως συμβαίνει να ανήκουν τότε είναι και max ή min.

- Ειδικά όταν $A\subseteq\mathbb{Z}$, τότε το sup ή inf είναι <u>πάντα</u> max ή min (αρχή καλής διάταξης).

▼ <u>Συνέπειες του αξιώματος του ελαχίστου φράγματος.</u>

Θ1) <u>Θεώρημα του Αρχιμήδη</u> : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \exists \nu\in\mathbb{N}^*: \nu>x}$

<u>Απόδειξη</u>

Εστω οτι δεν ισχύει η πρόταση. Τότε $\exists x\in\mathbb{R}: \forall \nu\in\mathbb{N}^*: \nu\leq x \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{N}^*$ άνω φραγμένο με ένα άνω φράγμα το x, $\emptyset\neq\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists b\in\mathbb{R}: b=\sup\mathbb{N}$, $b-1<b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow b-1$ όχι άνω φράγμα $\mathbb{N} \Rightarrow \exists \nu_0\in\mathbb{N}: \nu_0>b-1 \Leftrightarrow \nu_0+1>\sup\mathbb{N}$ ← Ατοπο διότι $\nu_0+1\in\mathbb{N}$ το οποιο είναι άνω φραγμένο $\Rightarrow \nu_0+1\leq b=\sup\mathbb{N}$

Αρα $\forall \chi \in \mathbb{R}, \exists \nu \in \mathbb{N} : \nu > x$, ισχύει.

$\to$ <u>Πόρισμα:</u> $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \exists \text{ ένας μόνο } k_0 \in \mathbb{Z} : k_0 \leq x < k_0 + 1}$

• Ο k_0 λέγεται <u>ακέραιο μέρος του x</u> και σημειώνεται $[x]$.

Αρα $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}$ με $0 \leq \varepsilon < 1 : x = [x] + \varepsilon$.

• Προφανώς ισχύει $\boxed{x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1}$.

Θα) <u>Υπαρξη τετραγωνικής ρίζας.</u> $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*_+, \exists x \in \mathbb{R}^*_+ : x^2 = a.}$

<u>Απόδειξη</u>

Εστω ένα $a > 0$.

▸ Παίρνω $S = \{x \in \mathbb{R}^*_+ : x^2 \leq a\}$. Προφανώς $S \subseteq \mathbb{R}$.

Είναι $\frac{a}{1+a} \in S \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{1+a} > 0 \text{, ισχύει} \\ \left(\frac{a}{1+a}\right)^2 \leq a \end{cases} \Leftrightarrow a^2 \leq a(1+a)^2 \Leftrightarrow a \leq (1+a)^2$ (διότι

$a > 0) \Leftrightarrow a \leq a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 + a + 1 \geq 0$, ισχύει διότι $a > 0$ και $\Delta = 1 - 4 < 0$

Αρα $S \neq \emptyset$.

Είναι $\left.\begin{array}{l} a < (1+a)^2 \Rightarrow \forall x \in S : x^2 \leq a < (1+a)^2 \\ x > 0 \wedge 1 + a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in S : x < 1 + a \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow S \text{ άνω φραγμένο με ένα άνω φράγμα το } a+1 \\ \emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R} : b = \sup S$

Θα δείξω ότι $b^2 = a$.

i) Εστω $b^2 > a$.

▸ Θέτω $c = b - \frac{b^2 - a}{2b} < b$, διότι $\left.\begin{array}{l} b^2 > a \Rightarrow b^2 - a > 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{b^2 - a}{2b} < 0$

$S \subseteq \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow \forall x \in S : 0 < x \leq b \rightarrow$

Είναι $c^2 = \left(b - \frac{b^2 - a}{2b}\right)^2 = b^2 - 2b \cdot \frac{b^2 - a}{2b} + \frac{(b^2 - a)^2}{4b^2} =$

$= b^2 - (b^2 - a) + \frac{(b^2 - a)}{4b^2} = a + \frac{b^2 - a}{4b^2} > a$ (διότι $b^2 > a$) $\Rightarrow \forall x \in S : x^2 \leq a < c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in S : x < c \Rightarrow c$ άνω φράγμα $S \longleftarrow$ Ατοπο, διότι $c < b = \sup S$.

ii) Εστω $b^2 < a$

Είναι $b > 0 \Rightarrow \exists\, c \in [0, b] : c < \min\left\{b, \frac{a - b^2}{3b}\right\}$. (διότι $a - b^2 > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c < b \\ c < \frac{a - b^2}{3b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < b & (1) \\ 3bc < a - b^2 & (2). \end{cases}$

Είναι $(b+c)^2 = b^2+2bc+c^2 = b^2+c(2b+c) \overset{(1)}{<} b^2+c(2b+b) = b^2+3bc \overset{(2)}{<}$
$< b^2+(a-b^2) = a \Rightarrow (b+c)^2 < a \Rightarrow (b+c) \in S \leftarrow$ Άτοπο διότι $b+c > b = \sup S$.
Άρα, είναι $b^2=a$, άρα $\exists x \in \mathbb{R}^*_+ : x^2 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}^*_+$.

→ Το θεώρημα γενικεύεται ως εξής:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^*_+, \exists x \in \mathbb{R}^*_+ : x^n = a}, \ : n \in \mathbb{N}^*.$$

Επειδή η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του γενικότερου θ. Bolzano θα την αφήσουμε για αργότερα.

- Αν $a \in \mathbb{R}^*_+$ τότε ο αριθμός $x \in \mathbb{R}^*_+$ με την ιδιότητα $x^n = a$, θα δειχθεί ότι είναι μοναδικός και συμβολίζεται $x = \sqrt[v]{a}$ (ν-οστή ρίζα του a)

→ Η έννοια της δύναμης γενικεύεται και για εκθέτες άπο το $\mathbb{Q}$ ως εξής:

~~$a^{k/n} = \sqrt[n]{a^k}$, $\forall a>0, \forall k, n \in \mathbb{N}^* \ \forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.~~

$$\boxed{a^{k/n} = \sqrt[n]{a^k}, \ \forall a>0, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

Οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν για εκθέτες στο $\mathbb{Z}$ ισχύουν και για εκθέτες στο $\mathbb{Q}$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

▼ Η έννοια της συνάρτησης

• <u>Συνάρτηση</u> είναι κάθε διμελής σχέση $f: A \longrightarrow B$ κατά την οποία σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί <u>ένα μόνο</u> $y = f(x) \in B$.

Ειδικά όταν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ η συνάρτηση f θα λέγεται <u>πραγματική</u> συνάρτηση.

$A \longrightarrow$ πεδίο ορισμού. Συμβολισμός : $A = \text{dom} f$

$B \longrightarrow$ σύνολο αφίξεως. Όταν δεν δίνεται, παίρνουμε $B = \mathbb{R}$.

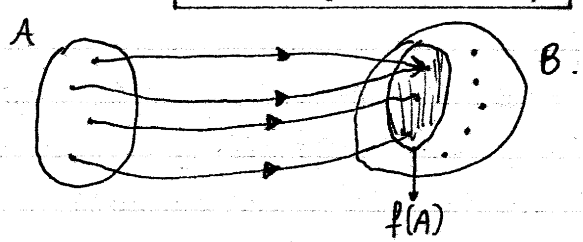
Ο $y = f(x) \longrightarrow$ εικόνα του x.

• <u>πεδίο τιμών</u> μίας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται το σύνολο

$$\boxed{f(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \}.}$$

• Επίσης, αν $A_1 \subseteq A$ τότε <u>εικόνα $f(A_1)$ του συνόλου A_1</u> θα ονομάζεται το σύνολο

$$\boxed{f(A_1) = \{ f(x) \,/\, x \in A_1 \}.}$$



• Προφανώς $f(A) \subseteq B$

→ Για να δείξω ότι μια σχέση είναι συνάρτηση, δείχνω ότι

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

ή αντίθετο αντίστροφα ότι : $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

• <u>Παράδειγμα</u>

Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ είναι συνάρτηση.

<u>Απόδειξη.</u>

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \ x_1 = x_2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : x_1^n = x_2^n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n x_1^n = a_n x_2^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n x_1^n = a_n x_2^n \\ a_{n-1} x_1^{n-1} = a_{n-1} x_2^{n-1} \\ - \ - \ - \ - \ - \\ a_1 x_1 = a_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x = a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + a_1 x \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = a_n x_2^n + a_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$., άρα f συνάρτηση

~~▼ Ειδικές συναρτήσεις~~

~~Εστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση.~~

~~Ορισμοί: f σταθερή με τιμή $c \Leftrightarrow \forall x \in A : f(x) = c$.~~
~~f ταυτοτική στο $A \Leftrightarrow \forall x \in A : f(x) = x$~~

▼ Ειδικές συναρτήσεις.

Εστω $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $A_1 \subseteq A$

Ορισμοί:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ σταθερή στο } A_1 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in A_1 : f(x) = c \\ f \text{ ταυτοτική στο } A_1 \Leftrightarrow \forall x \in A_1 : f(x) = x. \end{array}}$$

▼ Είδη συναρτήσεων

Εστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση

- $\boxed{f \text{ "επι"} \Leftrightarrow f(A) = B.}$

Βέβαια, κάθε συνάρτηση μπορεί να γίνει "επί" αν πάρω $B = f(A)$.

- $\boxed{f \text{ "1-1"} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).}$

δηλαδη, μια συνάρτηση θα λέγεται "1-1" αν και μόνο αν κάθε δύο διαφορετικά x έχουν διαφορετικές εικόνες.

παραδειγματα

1) Η συνάρτηση $f: (-2,5) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^2 + 3$ δεν είναι "1-1" διότι για $-1 \neq 1$ εχει

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2(-1)^2 + 3 = 5 \\ f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) = f(1).$$

- Για να δείξω ότι μία συνάρτηση είναι "1-1" μπορώ να δείξω και την αντιθετο αντίστροφη πρόταση: $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

2) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$ είναι "1-1".

Αποδειξη

Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{2x_1+1} = \frac{x_2}{2x_2+1} \Rightarrow x_1(2x_2+1) = x_2(2x_1+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 + x_1 = 2x_1x_2 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-\tfrac{1}{2}\}$$

Αρα f "1-1".

→ Για να οριστεί πλήρως μια συνάρτηση, πρέπει να δωθουν
1) Το πεδίο ορισμου A, δηλαδη το συνολο των τιμών τις οποίες παίρνει ο x.
2) Ο τύπος $y=f(x)$, δηλαδη μία αλγεβρική σχέση η οποία συνδέει το x με την εικόνα του.
Οταν δεν δίνεται το πεδίο ορισμού, τότε εμείς θεωρούμε το <u>ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.</u> για το οποίο ο τύπος της συνάρτησης δίνει εικόνα η οποία έχει την έννοια πραγματικού αριθμου.
Ετσι,
1) Στην πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ παίρνω $A=\mathbb{R}$.
2) Στην κλασματική συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ παίρνω $A=\{x\in\mathbb{R} / Q(x)\neq 0\}$.
3) Στην άρρητη συνάρτηση $f(x)=\sqrt[\nu]{g(x)}$ παίρνω $A=\{x\in\mathbb{R}/ g(x)\geq 0\}$.

• <u>Παραδειγματα</u>: Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5x-6}$

Πρέπει: $x^2+5x-6\neq 0$, $\Delta = 25-24=1$ $\Rightarrow \rho_{1,2}=\dfrac{-5\pm 1}{2}=\begin{cases}-3\\-2\end{cases} \Leftrightarrow x\neq -3 \wedge x\neq -2 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{-2,-3\}$.

2) $f(x)=\sqrt{x-x^3}$

Πρέπει $x-x^3\geq 0 \Leftrightarrow x(1-x^2)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[0,1] \Leftrightarrow A=(-\infty,-1]\cup[0,1]$.

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

Πρέπει $\dfrac{x+2}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup(3,+\infty)$.

x		-2		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$	‖	$+$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$

Πρέπει $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x>3 \Leftrightarrow A=(3,+\infty).$

• Παρατήρησετε ότι άν και τα παραδείγματα 3,4 έχουν ισοδύναμους τύπος έχουν διαφορετικα πεδία ορισμού. Γι'αυτο πάντα θα βρίσκω το Π.Ο. πριν κάνω πράξεις στον τύπο και όταν θα κάνουμε πράξεις θα πρέπει να προσέχουμε να μην περιορίζεται το Π.Ο. του νέου τύπου. Ετσι, είναι σωστό να γράφουμε

$\forall x\in(3,+\infty): f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ (σωστο)

αλλα λάθος να γράφουμε

$\forall x\in(-\infty,-2]\cup(3,+\infty): f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$ (λάθος).

5) $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

Πρέπει: $(x-2)(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2 \wedge x\neq 2 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{-2,2\}.$

6) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}.$

Πρέπει $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{-2\}.$

• Ισχύει η ίδια παρατήρηση. Ετσι

$\forall x\in\mathbb{R}-\{+2,-2\}: f(x)=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x+1}{x+2}$ (σωστό)

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}: f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ (λάθος).

▼ Πεδίο τιμών συνάρτησης

Για να βρώ το πεδίο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης f στηρίζομαι στην πρόταση

• $\boxed{y\in f(A)\leftrightarrow \exists x\in A: y=f(x).}$

οπότε εργάζομαι ως εξής:

•1 Βρίσκω το πεδίο ορισμού A (αν δεν δίνεται)

•2 Θεωρώ την εξίσωση $y=f(x)$ την οποία λύνω ως προς x.

• 3 Το $y \in f(A)$ αν και μόνο αν μία από τις λύσεις της $y=f(x)$ ανήκει στο A.

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Να εξεταστεί αν ο αριθμός 1 ανήκει στο πεδίο τιμών της $f:(-1,1)\rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+1}$

<u>Λύση</u>

$f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{2x^2+1}=1 \Leftrightarrow x^2+x+1=2x^2+1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1$, άρα η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μία λύση στο A, την $x=0$
$\Rightarrow 1\in f(A)$.

2) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+1}$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $2x^2+1\neq 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ ως αθρ. τετραγώνου και θετικού, άρα $A=\mathbb{R}$

$y=f(x) \Leftrightarrow y=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+1} \Leftrightarrow y(2x^2+1)=x^2+x+1 \Leftrightarrow 2yx^2+y=x^2+x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2y-1)x^2-x+(y-1)=0$. (1).

Αν $y=\frac{1}{2}$, τότε η (1) $\Leftrightarrow -x+(\frac{1}{2}-1)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$, άρα για $y=1/2$
η $y=f(x)$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$ την $x=1/2 \Rightarrow \underline{(1/2)\in f(\mathbb{R})}$.

Αν $y\neq 1/2 \Leftrightarrow 2y-1\neq 0 \Rightarrow$ (1) β' βάθμια

~~Η y=f(x) έχει λύση στο IR~~

$y\in f(A) \Leftrightarrow \exists\, x\in A: y=f(x) \Leftrightarrow$ Η (1) έχει λύσεις στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-4(2y-1)(y-1)\geq 0 \Leftrightarrow 1-4(2y^2-3y+1)\geq 0 \Leftrightarrow 1-8y^2+12y-4\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8y^2+12y-3\geq 0 \Leftrightarrow 8y^2-12y+3\leq 0.$ $\Rightarrow y_{1,2}=\dfrac{12\pm 4\sqrt{3}}{16}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

$\Delta=144-96=48=4^2\cdot 3$

y		$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$	
$8y^2-12y+3$	+	0	−	0	+

$\Leftrightarrow y\in\left[\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$.

Άρα $f(A)=\left[\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right]\cup\{1/2\}=\left[\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$.

β' τρόπος: Αν αποδειχθεί η πρόταση

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

τότε $B = f(A)$.

• Το ευθύ εξασφαλίζει ότι όλες οι εικόνες των $x \in A$ ανήκουν στο B, ότι δηλαδή $f(A) \subseteq B$. Το αντίστροφο εξασφαλίζει ότι όλα τα στοιχεία του B είναι εικόνες των $x \in A$, ότι δηλαδή $B \subseteq f(A)$.
Άρα $B = f(A)$.

• παράδειγμα

1) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f:(-1,3] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 4x-3$.

Λύση

Είναι $x \in (-1,3] \Leftrightarrow -1 < x \leq 3 \Leftrightarrow -4 < 4x \leq 12 \Leftrightarrow -7 < 4x-3 \leq 9 \Leftrightarrow -7 < f(x) \leq 9$
$\Leftrightarrow f(x) \in (-7,9]$.

Άρα $f(A) = (-7,9]$.

• → Πεδία τιμών αξιοσημείωτων περιπτώσεων

(1) $\boxed{\text{Αν } f(x) = ax+b, \forall x \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.}$

Απόδειξη

~~y=ax~~

$y = f(x) = ax+b \Leftrightarrow ax = y-b \Leftrightarrow x = \dfrac{y-b}{a}$, διότι $a \neq 0$

Άρα η εξίσωση $y = f(x)$ έχει λύση $x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(2) $$\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν } f(x) = ax^2+bx+\gamma, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ τότε} \\ a>0 \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right) \\ a<0 \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right] \end{array}}$$

Απόδειξη

$y = f(x) \Leftrightarrow y = ax^2+bx+\gamma \Leftrightarrow ax^2+bx+(\gamma-y) = 0$ (1).

$y \in f(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ Η εξίσωση (1) έχει λύση $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4a(\gamma-y) \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b^2 - 4a\gamma + 4ay \geq 0 \Leftrightarrow \Delta + 4ay \geq 0 \Leftrightarrow 4ay \geq -\Delta$

Αν $a>0$, $4ay \geq -\Delta \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$

Αν $a<0$, $4ay \geq -\Delta \Leftrightarrow y \leq -\dfrac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = \left(-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$

• Όταν έχουμε τριώνυμο $f(x)=ax^2+bx+\gamma$ σε διάστημα A τότε δουλεύουμε με τον β' τρόπο χρησιμοποιώντας τον τύπο.

$$f(x)=ax^2+bx+\gamma=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

<u>παράδειγμα</u>

Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f(x)=2x^2+3x$ αν $x\in[-1,2)$.

Είναι $f(x)=2x^2+3x=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$, $\forall x\in[-1,2)$.

$\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}$, $\frac{\Delta}{4a}=\frac{9}{8}$

$$x\in[-1,2)\Leftrightarrow -1\leq x<2\Leftrightarrow -1+\frac{3}{4}\leq x+\frac{3}{4}\leq 2+\frac{3}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\leq x+\frac{3}{4}<\frac{11}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{4}\leq x+\frac{3}{4}\leq 0\Leftrightarrow 0\leq-\left(x+\frac{3}{4}\right)\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow 0\leq\left(x+\frac{3}{4}\right)^2\leq\frac{1}{16}\\ \vee\\ 0\leq x+\frac{3}{4}<\frac{11}{4}\Leftrightarrow 0\leq\left(x+\frac{3}{4}\right)^2<\frac{121}{16}\end{array}\right\}\vee\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\leq\left(x+\frac{3}{4}\right)^2<\frac{121}{16}\Leftrightarrow 0\leq 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2<\frac{121}{8}\Leftrightarrow-\frac{9}{8}\leq 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}<\frac{121}{8}-\frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{9}{8}\leq f(x)<\frac{112}{8}=14\Leftrightarrow.$$ Άρα $f(A)=\left[-\frac{9}{8},14\right)$.

③

$$\boxed{\text{Αν } f(x)=\frac{ax+b}{\gamma x+\delta},\ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\},\ D=\begin{vmatrix}a & b\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow f(A)=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{\gamma}\right\}.}$$

<u>Απόδειξη</u>

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{ax+b}{\gamma x+\delta}\Leftrightarrow y(\gamma x+\delta)=ax+b\Leftrightarrow y\gamma x+y\delta=ax+b\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y\gamma-a)x=b-y\delta\quad(1).$$

• Αν $y=\frac{a}{\gamma}$, η (1) γίνεται $0x=b-\frac{a}{\gamma}\delta\Leftrightarrow 0x=b\gamma-a\delta=-D\neq 0\leftarrow$ Αδύνατη.

Άρα $\nexists\, x\in A: f(x)=\frac{a}{\gamma}$ οπότε $\frac{a}{\gamma}\notin f(A)$.

• Θα δείξω ότι $\forall y\neq\frac{a}{\gamma}, \exists x\in A: f(x)=y$.

Έστω $y\neq a/\gamma\Leftrightarrow y\gamma-a\neq 0\rightarrow$ Η (1) έχει μία μόνο λύση την $x=\frac{b-y\delta}{y\gamma-a}$

Αν $x \notin A \Leftrightarrow x = -\frac{\delta}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\beta - y\delta}{y\gamma - a} = -\frac{\delta}{\gamma} \Leftrightarrow (\beta - y\delta)\gamma = -\delta(y\gamma - a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta\gamma - y\gamma\delta = -y\gamma\delta + a\delta \Leftrightarrow a\delta - \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow D = 0 \longleftarrow$ Άτοπο

Άρα $x \in A \rightarrow$ Η (1) έχει μία λύση στο A

Άρα $\forall y \neq \frac{a}{\gamma}, \exists x \in A : f(x) = y \Rightarrow f(A) = \mathbb{R} - \{\frac{a}{\gamma}\}$.

● <u>Πεδίο τιμών ρητής συνάρτησης</u> $\longrightarrow f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$

<u>1η περίπτωση</u>: Σε ανάγωγο κλάσμα, δηλαδή όταν δεν υπάρχει απλοποίηση.

●1 Αφού βρω το $A = \mathrm{dom} f$, λύνω την $y = f(x)$ ως προς x και σχηματίζω ενίγένει μία εξίσωση της μορφής

$$a(y)x^2 + \beta(y)x + \gamma(y) = 0 \quad (1)$$

●2 Θέτω όπου x τα x που εξαιρούνται άπο το A και λύνω την (1) ώς προς y. Για την τιμή του y που θα βρω βρίσκω <u>όλες</u> τις ρίζες της (1) και αν <u>όλες</u> εξαιρούνται άπο το A τότε και η τιμή του y θα εξαιρεθεί άπο το $f(A)$.

●3 Αν $a(y) = 0 \Leftrightarrow y = y_0$ και εξετάζω αν το y_0 ανήκει στο $f(A)$ βλέποντας αν για $y = y_0$ η (1) έχει λύση <u>στο A.</u> (μία αρκεί)

●4 Αν $a(y_0) \neq 0$ τότε $y \in f(A) \Leftrightarrow$ Η (1) έχει ρίζα στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta^2(y) - 4a(y)\gamma(y) \geq 0 \Leftrightarrow \ldots y \in B$.

Στο B προσθέτω το y_0 αν ανήκει στο $f(A)$ και εξαιρώ τα y του ●2 οπότε βρίσκω το $f(A)$.

<u>Παράδειγμα</u>

1) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 5x + 6}$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x^2 + 5x + 6 \neq 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1$ $\rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{-2, -3\}$.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 5x + 6} \Leftrightarrow y(x^2 + 5x + 6) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow yx^2 + 5yx + 6y = x^2 + x + 1$

$\Leftrightarrow (y-1)x^2 + (5y-1)x + (6y-1) = 0 \quad (1)$.

Για $x = -3$, η (1) γίνεται

$9(y-1) + (5y-1)(-3) + (6y-1) = 0 \Leftrightarrow 9y - 9 - 15y + 3 + 6y - 1 = 0 \Leftrightarrow 0y = 7 \leftarrow$ Αδύνατη.

Για $x=-2$, η (1) γίνεται $4(y-1)-2(5y-1)+(6y-1)=0 \Leftrightarrow 4y-4-10y+2+6y-1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0y=3 \leftarrow$ Αδύνατη.

Αρα για κανένα $y\in\mathbb{R}$ η (1) έχει λύσεις που δεν ανήκουν στο A.

Αν $y-1=0 \Leftrightarrow y=1$, η (1) γίνεται $4x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}\in A$ άρα $y=1\in f(A)$.

Αν $y-1\neq 0 \Rightarrow$ (1) β' βαθμια οπότε

$y\in f(A) \Leftrightarrow$ Η (1) έχει λύση στο $A \Leftrightarrow$ Η (1) έχει λύση στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5y-1)^2-4(y-1)(6y-1)\geq 0 \Leftrightarrow 25y^2-10y+1-4(6y^2-7y+1)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25y^2-10y+1-24y^2+28y-4\geq 0 \Leftrightarrow y^2+18y-3\geq 0$

$\Delta = 324+12=336=4^2\cdot 21$ $\rightarrow y_{1,2}=\frac{-18\pm 4\sqrt{21}}{2}=$

$=-9\pm 2\sqrt{21}$

y		$-9-2\sqrt{21}$		$-9+2\sqrt{21}$	
$y^2+18y-3$	+	0	−	0	+

Αρα $y\in(-\infty,-9-2\sqrt{21}]\cup[-9+2\sqrt{21},+\infty)$

Είναι $-9+2\sqrt{21}<1 \Leftrightarrow 2\sqrt{21}<10 \Leftrightarrow \sqrt{21}<5 \Leftrightarrow \sqrt{21}<\sqrt{25} \Leftrightarrow 21<25$, ισχύει άρα

$f(A)=(-\infty,-9-2\sqrt{21}]\cup[-9+2\sqrt{21},+\infty)\cup\{1\}=$

$=(-\infty,-9-2\sqrt{21}]\cup[-9+2\sqrt{21},+\infty)$.

2η περίπτωση: Σε μη ανάγωγο κλάσμα, δηλαδή όταν υπάρχει απλοποίηση.

- 1 Αφού βρω το πεδίο ορισμού, παραγοντοποιώ πάνω-κάτω και απλοποιώ.
- 2 Βρίσκω το πεδίο τιμών της νέας συνάρτησης (περίπτωση 1) που είναι επέκταση της αρχικής
- 3 Απο αυτό το Πεδίο τιμών εξαιρώ τις τιμές του y που παίρνω άν στην νέα συνάρτηση βάλω στην θέση του x τις τιμές που εξαιρούνται άπο το A.

Παράδειγμα

1) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2-5x+6\neq 0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases} \Leftrightarrow x\neq 2 \wedge x\neq 3 \Leftrightarrow A=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

$\Delta=25-24=1$

$\forall x\in A: f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x+3}{x-2} \leftarrow$ επέκταση της f.

Το πεδίο τιμών της νέας συνάρτησης είναι $\mathbb{R}-\{1\}$

Επειδη το $x=3\notin A \Leftrightarrow y=\frac{3+3}{3-2}=6\notin f(A)$ άρα $f(A)=\mathbb{R}-\{1,6\}$.

• Πεδίο τιμών άρρητης συνάρτησης $\longrightarrow f(x)=\sqrt[\nu]{\varphi(x)}$

•1 Βρίσκω το $A=\mathrm{dom}f$ $(\varphi(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dots)$ και έστω $y=f(x)$

•2 Βάζω τον περιορισμό $y=\sqrt[\nu]{\varphi(x)}\geq 0$ για να μπορώ να υψώσω κατά μέλη.

Αν $y=\sqrt[\nu]{\varphi(x)}+a$, βάζω $y-a\geq 0$

Αν $y=-\sqrt[\nu]{\varphi(x)}+a$, βάζω $y-a\leq 0$

•3 Υψώνω στην ν-οστή και λύνω ως προς x.

•4 Εφαρμόζω την πρόταση $y\in f(A)\Leftrightarrow \exists x\in A : f(x)=y$ και συναληθεύω με τον περιορισμό της •2.

• Παραδείγματα

1) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+1$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2-3x+2\geq 0$, $\Delta=9-8=1$ $\Rightarrow \rho_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

x		1		2	
x^2-3x+2	+	0	−	0	+

Άρα $A=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

$y=f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=y-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=(y-1)^2 \Leftrightarrow$

Πρέπει $y-1\geq 0$ (1)

1) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f(x)=\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}}$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $\frac{2x+3}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3/2]\cup(-1,+\infty) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=(-\infty,-3/2]\cup(-1,+\infty)$.

x		$-3/2$		-1	
$2x+3$	−	0	+		+
$x+1$	−		−	0	+
	+	0	−	∦	+

$y=f(x)=\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} \Leftrightarrow y^2=\frac{2x+3}{x+1} \Leftrightarrow y^2(x+1)=2x+3 \Leftrightarrow y^2x+y^2=2x+3 \Leftrightarrow$

Πρέπει $y\geq 0$

$\Leftrightarrow (y^2-2)x=3-y^2$ (1)

Για $y^2-2=0 \Leftrightarrow y=\pm 2$

i) Για $y=2$, η (1) γίνεται $0x=3-2=1 \leftarrow$ Αδύνατη $\rightarrow 2\notin f(A)$

ii) Για $y=-2$, η (1) γίνεται $0x=3-2=1 \leftarrow$ Αδύνατη $\rightarrow -2\notin f(A)$.

Έστω $y\neq 2 \wedge y\neq -2$.

$y\in f(A) \Leftrightarrow$ Η εξίσωση (1) έχει ΜΜΛ στο $A \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-y^2}{y^2-2}\in\left(-\infty,-3/2\right]\cup\left[-1,+\infty\right) \\ y\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-y^2}{y^2-2}\leq\dfrac{-3}{2}\ ^{(1)} \ \vee\ \dfrac{3-y^2}{y^2-2}\geq -1 \quad (2)\\ y\geq 0\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{3-y^2}{y^2-2}+\dfrac{3}{2}\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(3-y^2)+3(y^2-2)}{2(y^2-2)}\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{6-2y^2+3y^2-6}{y^2-2}\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{y^2-2}\leq 0 \Leftrightarrow y\in(-2,2).$

y		-2		0		2	
y^2	+		+	0	+		+
y^2-2	+	0	−		−	0	+
	+	‖	−	0	−	‖	+

$(2)\Leftrightarrow \dfrac{3-y^2}{y^2-2}+1>0 \Leftrightarrow \dfrac{3-y^2+y^2-2}{y^2-1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y^2-1}>0 \Leftrightarrow y^2-1>0 \Leftrightarrow$

y		-1		1	
y^2-1	+	0	−	0	+

$\Leftrightarrow y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$

Οπότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} y\in(-2,2)\ \vee\ y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ y\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in\mathbb{R} \\ y\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow y\geq 0 \Leftrightarrow y\in[0,+\infty).$

Άρα $f(A)=[0,+\infty)$.

2) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f(x)=\sqrt{x+3}+2$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3 \Leftrightarrow A=[-3,+\infty)$

$y=f(x) \Leftrightarrow y=\sqrt{x+2}+3 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=y-3 \Leftrightarrow x+2=(y-3)^2 \Leftrightarrow$

Πρέπει $\underline{y-3\geq 0}$

$\Leftrightarrow x=(y-3)^2-2. \quad (1)$

$y\in f(A) \Leftrightarrow$ Η εξίσωση (1) έχει λύση στο $A \Leftrightarrow \begin{cases} x=(y-3)^2-2\in[-3,+\infty) \\ y-3\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)^2-2\geq -3 \quad (2) \\ y-3\geq 0 \quad (3)\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow y^2-6y+9-2\geq -3 \Leftrightarrow y^2-6y+10\geq 0$, ισχύει $\forall y\in\mathbb{R}$ οπότε

$\Delta=36-40<0$

$(2),(3) \Leftrightarrow y-3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 3$, Αρα $f(A)=[3,+\infty)$.

3) $f(x)=\sqrt{x^2-9}-2$ Π.Τ;

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2-9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in(-\infty,-3] \cup[3,+\infty) \Leftrightarrow A=(-\infty,-3] \cup[3,+\infty)$.

x		-3		3	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

$y=f(x) \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2-9}-2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9}=y+2 \Leftrightarrow x^2-9=(y+2)^2 \Leftrightarrow x^2=(y+2)^2+9$. (1)

Πρέπει $y+2 \geq 0$.

$y \in f(A) \Leftrightarrow$ Η εξίσωση (1) έχει λύση στο $A \Leftrightarrow \begin{cases} y+2 \geq 0 & (2) \\ x \in(-\infty,-3] \cup[3,+\infty) & (3) \end{cases}$

$(3) \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow (y+2)^2+9 \geq 9 \Leftrightarrow (y+2)^2 \geq 0$, ισχύει $\forall y \in \mathbb{R}$ οπότε

$(2) \wedge (3) \Leftrightarrow y+2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -2$. Αρα $f(A)=[-2,+\infty)$.

- **Πεδίο τιμών συναρτήσεων πολλαπλού τύπου ή με απόλυτα**

Βρίσκω τα $f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_n)$ για κάθε διάστημα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ οπότε το $f(A)=f(A_1) \cup f(A_2) \cup \cdots \cup f(A_n)$.

Αν η συνάρτηση έχει απόλυτα, την κάνω πρώτα πολλαπλού τύπου βγάζοντας τα απόλυτα.

- Παραδείγματα

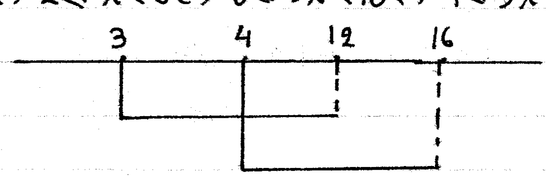
1) $f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x \in[1,2) \\ 3x-2, & x \in[2,6). \end{cases}$

Λύση

$x \in[1,2) \Leftrightarrow 1 \leq x<2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 < 4 \Leftrightarrow 3 \leq 3x^2 < 12 \Leftrightarrow 3 \leq f(x)<12$, ~~Αρα f~~

Αρα, $f([1,2))=[3,12)$.

$x \in[2,6) \Leftrightarrow 2 \leq x<6 \Leftrightarrow 6 \leq 3x<18 \Leftrightarrow 4 \leq 3x-2<16 \Leftrightarrow 4 \leq f(x)<16$, Αρα $f([2,6))=[4,16)$



Αρα $f(A)=[3,12) \cup[4,16)=[3,16)$.

2) $f(x)=|3x-1|-2|x|+3$.

Λύση

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$

x		0		1/3	
$3x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$

$\forall x\in(-\infty,0]: f(x)=-(3x-1)+2x+3=-3x+1+2x+3=$
$=-x+4$.

$\forall x\in[0,1/3]: f(x)=-(3x-1)-2x+3=-3x+1-2x+3=$
$=-5x+4$

$\forall x\in[1/3,+\infty): f(x)=(3x-1)-2x+3=x+2$

Αρα
$$f(x)=\begin{cases}-x+4 & , x\in(-\infty,0]\\ -5x+4 & , x\in[0,1/3]\\ x+2 & , x\in[1/3,+\infty).\end{cases}$$

i) $x\in(-\infty,0]\Leftrightarrow x\leq 0\Leftrightarrow -x\geq 0\Leftrightarrow -x+4\geq 4\Leftrightarrow f(x)\geq 4$, αρα $f((-\infty,0])=[4,+\infty)$.

ii) $x\in[0,1/3]\Leftrightarrow 0\leq x\leq \frac{1}{3}\Leftrightarrow -\frac{5}{3}\leq -5x\leq 0\Leftrightarrow -\frac{5}{3}+4\leq -5x+4\leq 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{3}\leq f(x)\leq 4$, άρα $f([0,1/3])=[\frac{7}{3},4]$.

iii) $x\in[1/3,+\infty): x\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow x+2\geq\frac{1}{3}+2\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{7}{3}$, αρα $f([1/3,+\infty))=[\frac{7}{3},+\infty)$.

Αρα: $f(\mathbb{R})=[4,+\infty)\cup[\frac{7}{3},4]\cup[\frac{7}{3},+\infty)=[\frac{7}{3},+\infty)$.

▼ Το σύνολο F_A των συναρτήσεων.

Το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{R}$ συμβολίζεται F_A. Γι'αυτό όταν θα γράφουμε $f\in F_A$ αυτό σημαίνει ότι $A=\mathrm{dom}f$

Ετσι:

Ορισμος: $\boxed{F_A=\{f \text{ συνάρτηση } / \mathrm{dom}f=A\}}$

• Γενικά, δύο συναρτήσεις θα λέγονται ίσες όταν:

Ορισμός: $\boxed{f_1=f_2 \longleftrightarrow \begin{cases}\mathrm{dom}f_1=\mathrm{dom}f_2=A\\ f_1(x)=f_2(x), \forall x\in A\end{cases}}$

Επίσης θα ορίσουμε πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων ως εξής:

Αν $f_1\in F_{A_1}$ και $f_2\in F_{A_2}$, τότε ορίζουμε αντίστοιχα

1) Το άθροισμα f_1+f_2 : $\mathrm{dom}(f_1+f_2)=\mathrm{dom}f_1\cap\mathrm{dom}f_2=A$
$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x), \forall x\in A$

2) Η αντίθετη $-f_1$: $\mathrm{dom}(-f_1)=\mathrm{dom}f_1=A_1$
$(-f_1)(x)=-f_1(x), \forall x\in A_1$

3) <u>Διαφορά f_1-f_2</u> : $\mathrm{dom}(f_1-f_2)=\mathrm{dom}f_1\cap\mathrm{dom}f_2=A$

$(f_1-f_2)(x)=f_1(x)-f_2(x),\ \forall x\in A$

4) <u>Γινόμενο λf_1 του $\lambda\in\mathbb{R}$ με την f_1</u> : ~~A dom f~~ $\mathrm{dom}(\lambda f_1)=\mathrm{dom}f_1=A_1$

$(\lambda f_1)(x)=\lambda f_1(x),\ \forall x\in A_1$

5) <u>Γινόμενο f_1f_2</u> : $\mathrm{dom}(f_1f_2)=\mathrm{dom}f_1\cap\mathrm{dom}f_2=A$

$(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x),\ \forall x\in A$

6) <u>Συμμετρική $\frac{1}{f_1}$ της f_1</u> : $\mathrm{dom}\frac{1}{f_1}=\mathrm{dom}f_1-\{x\in\mathbb{R}: f_1(x)=0\}=A_1'$

$\left(\frac{1}{f_1}\right)(x)=\frac{1}{f_1(x)},\ \forall x\in A_1'$

7) <u>Πηλίκο $\frac{f_1}{f_2}$</u> : $\mathrm{dom}\frac{f_1}{f_2}=\mathrm{dom}f_1\cap\mathrm{dom}f_2-\{x\in\mathbb{R}: f_2(x)=0\}=A$

$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)},\ \forall x\in A.$

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(a+b)x+a+2b$ και $g(x)=(5a-b)x+3a+2$. Να βρεθούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f=g$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $\mathrm{dom}f=\mathrm{dom}g=\mathbb{R}$. οπότε

$f=g\Leftrightarrow f(x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (a+b)x+a+2b=(5a-b)x+3a+2,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5a-b\\ a+2b=3a+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a-2b=0\\ 2a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=0\\ a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+(a-b)=0\\ a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=0\\ a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ 1-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$

2) Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1: f_1(x)=\begin{cases}x^2-5x+2, & x\in[-3,5]\\ 5x+2, & x\in\mathbb{R}-[-3,5]\end{cases}$ και $f_2: f_2(x)=\begin{cases}-5x+7, & x\in[-2,7]\\ -x^2+5x-1, & x\in\mathbb{R}-[-2,7].\end{cases}$

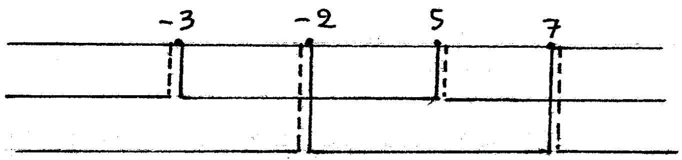
Να οριστεί η f_1+f_2.

<u>Λύση</u>

Είναι $f_1(x)=\begin{cases}5x+2, & x\in(-\infty,-3)\\ x^2-5x+2, & x\in[-3,5]\\ 5x+2, & x\in(5,+\infty)\end{cases}$ και $f_2(x)=\begin{cases}-x^2+5x-1, & x\in(-\infty,-2)\\ -5x+7, & x\in[-2,7]\\ \cancel{5x+2}\ -x^2+5x-1, & x\in(7,+\infty).\end{cases}$

$\mathrm{dom}(f_1+f_2)=\mathrm{dom}f_1\cap\mathrm{dom}f_2=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}.$

• Για να βρώ τα διαστήματα της f_1+f_2 κάνω ένα διάγραμμα όπως παρακάτω:



Τα διαστήματα της f_1+f_2 είναι τα $(-\infty,-3)$, $[-3,-2)$, $[-2,5]$, $(5,7]$, $(7,+\infty)$.

$\forall x\in(-\infty,-3): (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = (5x+2)+(-x^2+5x-1) = -x^2+10x+1.$

$\forall x\in[-3,-2): (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = (x^2-5x+2)+(-x^2+5x-1) = 1$

$\forall x\in[-2,5]: (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = (x^2-5x+2)+(-5x+7) = x^2-10x+9$

$\forall x\in(5,7]: (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = (5x+2)+(-5x+7) = 9$

$\forall x\in[7,+\infty): (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x) = (5x+2)+(-x^2+5x-1) = -x^2+10x+1$, οπότε

$$(f_1+f_2)(x) = \begin{cases} -x^2+10x+1 & , x\in(-\infty,-3) \\ 1 & , x\in[-3,-2) \\ x^2-10x+9 & , x\in[-2,5] \\ 9 & , x\in(5,7] \\ -x^2+10x+1 & , x\in(7,+\infty). \end{cases}$$

3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.
Να οριστεί η συνάρτηση

$$h=\frac{f}{g}(f+g)$$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \Leftrightarrow A_1=\mathrm{dom} f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \land x\neq 1 \Leftrightarrow A_2=\mathrm{dom} g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

$\mathrm{dom}\, h = \mathrm{dom}\dfrac{f}{g} \cap \mathrm{dom}(f+g) = \left[\mathrm{dom} f\cap \mathrm{dom} g - \{x\in\mathbb{R}: g(x)=0\}\right]\cap\left[\mathrm{dom} f\cap\mathrm{dom} g\right] =$

$=\left[A_1\cap A_2-\varnothing\right]\cap\left[A_1\cap A_2\right] = A_1\cap A_2 = \mathbb{R}-\{1,-1\} = A$

$\forall x\in A: h(x)=\left[\dfrac{f}{g}(f+g)\right](x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\cdot(f+g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}\left[f(x)+g(x)\right] =$

$$= \frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\left[\frac{x+1}{x-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}\right] = \frac{(x-1)(x+1)(x+1)}{(x-1)(x^2+1)}\left[\frac{(x+1)(x^2-1)+(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2-1)}\right] =$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\cdot\frac{x^3-x+x^2-1+x^3+x-x^2-1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\cdot\frac{2x^3-2}{(x-1)(x^2-1)} =$$

$$= \frac{2(x^2+2x+1)(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^4-1)} = \frac{2(x^2+2x+1)(x^2+x+1)}{x^4-1}$$

Δομή στο F_A

1) Η δομή $(F_A,+,\cdot)$ όπου "$\cdot$" το γινόμενο συναρτήσεων είναι αντιμεταθετικος δακτύλιος με ~~ουδέτερο~~ μηδενικό στοιχείο την συνάρτηση $\mathbf{0}(x)=0, \forall x\in A$ και μοναδιαίο, την συνάρτηση $\mathbf{1}(x)=1, \forall x\in A$. Αυτο σημαίνει ότι

Το $(F_A,+)$ είναι αβελιανή ομαδα

$\forall f_1,f_2\in F_A: f_1+f_2\in F_A$
$\forall f_1,f_2,f_3\in F_A: f_1+(f_2+f_3)=(f_1+f_2)+f_3$
$\forall f\in F_A: f+\mathbf{0}=\mathbf{0}+f=\mathbf{0}$
$\forall f\in F_A: f+(-f)=(-f)+f=\mathbf{0}$
$\forall f_1,f_2\in F_A: f_1+f_2=f_2+f_1$

Στο $(F_A,\cdot)$

$\forall f_1,f_2\in F_A: f_1f_2\in F_A$
$\forall f_1,f_2,f_3\in F_A: f_1(f_2f_3)=(f_1f_2)f_3$
$\forall f_1,f_2,f_3\in F_A: (f_1+f_2)f_3=f_1f_3+f_2f_3$
$f_3(f_1+f_2)=f_3f_1+f_3f_2$

2) Η δομή $(F_A,+,\cdot)$ όπου "$\cdot$" το γινόμενο αριθμού με συνάρτηση είναι διανυσματικός χώρος στο $\mathbb{R}$, δηλαδη

- Η δομη $(F_A,+)$ είναι αβελιανή ομάδα
- $\forall \lambda\in\mathbb{R}, \forall f_1,f_2\in F_A: \lambda(f_1+f_2)=\lambda f_1+\lambda f_2$
  $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \forall f\in F_A: (\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$
  $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \forall f\in F_A: \lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$
  $\forall f\in F_A: \mathbf{1}\cdot f=f.$

- **ΠΡΟΣΟΧΗ**: Δεν ισχύει η γνωστή ιδιότητα

$$f_1f_2=\mathbf{0}\Rightarrow f_1=\mathbf{0} \vee f_2=\mathbf{0}$$

στο F_A. Π.χ. για $f_1: f_1(x)=\begin{cases}1 &, x\in A-\{5\}\\ 0 &, x=5\in A\end{cases}$, $f_2: f_2(x)=\begin{cases}0 &, x\in A-\{5\}\\ 1 &, x=5\in A\end{cases}$

είναι $fg=\mathbf{0}$ άλλα $f\neq\mathbf{0}$ και $g\neq\mathbf{0}$.

Μονοτονία Συνάρτησης

Ορισμός : Εστω μία συνάρτηση $f\in F_A$.

1) f γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in A: x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
2) f αύξουσα $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in A: x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$
3) f γνησίως φθίνουσα $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in A: x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
4) f φθίνουσα $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in A: x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

f μονότονη $\Leftrightarrow f$ αύξουσα $\vee f$ φθίνουσα
f γνησίως μονότονη $\Leftrightarrow f$ γνησίως αύξουσα $\vee f$ γνησίως φθίνουσα.

Θ1. $\boxed{f \text{ γνησίως μονότονη} \Rightarrow f \text{ "1-1"}}$

Απόδειξη

f γνησίως μονότονη $\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα $\vee$ f γνησίως φθίνουσα.

Εστω $A = \text{dom} f$.

i) Αν f γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right) \Rightarrow f$ "1-1".

ii) Ομοια αν f γνησίως αύξουσα

Θ2. $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f_1, f_2 \in F_A \\ f_1, f_2 \text{ αύξουσες}\end{array}\right\} \Rightarrow f_1 + f_2 \text{ αύξουσα στο } A.}$

Απόδειξη Εστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$

$\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ αύξουσα στο } A \Rightarrow f_1(x_1) \leq f_1(x_2) \\ f_2 \text{ αύξουσα στο } A \Rightarrow f_2(x_1) \leq f_2(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(x_1) + f_2(x_1) \leq f_1(x_2) + f_2(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (f_1+f_2)(x_1) \leq (f_1+f_2)(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f_1 + f_2$ αύξουσα στο A.

Ομοια αποδεικνύονται τα:

Θ3 $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f_1, f_2 \in F_A \\ f_1, f_2 \text{ γνησίως αύξουσες}\end{array}\right\} \Rightarrow f_1 + f_2 \text{ γνησίως αύξουσα στο } A}$

Θ4 $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f_1, f_2 \in F_A \\ f_1, f_2 \text{ φθίνουσες}\end{array}\right\} \Rightarrow f_1 + f_2 \text{ φθίνουσα στο } A}$

Θ5 $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f_1, f_2 \in F_A \\ f_1, f_2 \text{ γνησίως φθίνουσες}\end{array}\right\} \Rightarrow f_1 + f_2 \text{ γνησίως φθίνουσα στο } A}$

Θ6. $\boxed{\begin{array}{l} f_1 \text{ γνησίως αύξουσα στο } A \Leftrightarrow -f_1 \text{ γνησίως φθίνουσα στο } A \\ f_1 \text{ αύξουσα στο } A \Leftrightarrow -f_1 \text{ φθίνουσα στο } A. \end{array}}$

→ Το είδος της μονοτονίας μίας συνάρτησης καθορίζεται ισοδύναμα και από το πρόσημο του λόγου μεταβολής

$$\lambda(x_1,x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} : x_1\neq x_2.$$

Έτσι, η f είναι

1) f γνησίως αύξουσα στο $A \leftrightarrow \forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2 : \lambda>0$
2) f αύξουσα στο $A \leftrightarrow \forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2 : \lambda\geq 0$
3) f γνησίως φθίνουσα στο $A \leftrightarrow \forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2 : \lambda<0$
4) f φθίνουσα στο $A \leftrightarrow \forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2 : \lambda\leq 0$.

Έτσι για να αποδείξουμε το είδος της μονοτονίας μίας συνάρτησης υπάρχουν δύο τρόποι.

<u>α' τρόπος:</u> Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow f(x_1) \gtrless f(x_2)$ οπότε από τον ορισμό συμπεραίνω για το είδος της μονοτονίας.

<u>β' τρόπος:</u> Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$. Παίρνω τον λόγο μεταβολής και βρίσκω το πρόσημό του.

Έναν ακόμη τρόπο θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων.

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$

<u>Λύση</u>

Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

Είναι $1<x_1<x_2 \Rightarrow 1<\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Rightarrow 0<\sqrt{x_1}-1<\sqrt{x_2}-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x_1}-1}>\dfrac{1}{\sqrt{x_2}-1} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x_1}-1}>\dfrac{2}{\sqrt{x_2}-1} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in(1,+\infty), x_1<x_2$

$\Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

2) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $f:[0,+\infty)$ με $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

<u>Λύση</u>

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1\neq x_2$.

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{x_1^2}{x_1^2+1}-\frac{x_2^2}{x_2^2+1}}{x_1-x_2}=\frac{x_1^2(x_2^2+1)-x_2^2(x_1^2+1)}{(x_1-x_2)(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=$$

$$=\frac{x_1^2x_2^2+x_1^2-x_1^2x_2^2-x_2^2}{(x_1-x_2)(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1-x_2)(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=$$

$$=\frac{x_1+x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}>0$$, διότι $x_1^2+1>0$ και $x_2^2+1>0$ ως αθροίσματα τετραγώνου και θετικού και $x_1>0 \wedge x_2>0 \Rightarrow x_1+x_2>0$.

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Μονοτονία γνωστών συναρτήσεων

1) Η $f(x)=\alpha x+\beta$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\alpha>0 \Leftrightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$\alpha<0 \Leftrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$\alpha=0 \Leftrightarrow f$ σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$.

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(\alpha x_1+\beta)-(\alpha x_2+\beta)}{x_1-x_2}=\frac{\alpha x_1-\alpha x_2}{x_1-x_2}=\frac{\alpha(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\alpha,\ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R} \text{ με } x_1\neq x_2$$

οπότε

$\alpha>0 \Leftrightarrow \lambda>0$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2 \Leftrightarrow f$ γνησίως αύξουσα

$\alpha<0 \Leftrightarrow \lambda<0$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2 \Leftrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα

$\alpha=0 \Leftrightarrow \lambda=0$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2 \Leftrightarrow f$ σταθερή στο $\mathbb{R}$.

2) Η $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\forall x\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$

$\alpha>0 \Leftrightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right] \wedge f$ γν. αύξουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

$\alpha<0 \Leftrightarrow f$ γν. αύξουσα στο $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right] \wedge f$ γν. φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

Απόδειξη

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(\alpha x_1^2+\beta x_1+\gamma)-(\alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma)}{x_1-x_2}=\frac{(\alpha x_1^2-\alpha x_2^2)+(\beta x_1-\beta x_2)}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{\alpha(x_1^2-x_2^2)+\beta(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\alpha(x_1-x_2)(x_1+x_2)+\beta(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\alpha(x_1+x_2)+\beta,\ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R} \text{ με } x_1\neq x_2.$$

i) Έστω $a>0$.

$\forall x_1,x_2 \in \left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ με $x_1 \neq x_2$: $\left.\begin{cases} x_1 < -\frac{b}{2a} \\ x_2 < -\frac{b}{2a} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1+x_2 < -\frac{b}{a} \\ a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x_1+x_2) < -b \Rightarrow a(x_1+x_2)+b<0 \Rightarrow \lambda<0$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$.

$\forall x_1,x_2 \in \left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ με $x_1 \neq x_2$: $\left.\begin{cases} x_1 > -\frac{b}{2a} \\ x_2 > -\frac{b}{2a} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1+x_2 > -\frac{b}{a} \\ a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x_1+x_2) > -b \Rightarrow a(x_1+x_2)+b>0 \Rightarrow \lambda>0$, άρα f γν. αύξουσα στο $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$.

ii) Έστω $a<0$. Όμοια αποδεικνύεται ότι
f γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$.

3) $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\frac{a}{x}, \ \forall x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty) \\ a>0 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στα } (-\infty,0),\ (0,+\infty). \\ a<0 \Rightarrow f \text{ γνησίως αύξουσα στα } (-\infty,0),\ (0,+\infty). \end{array}}$

Απόδειξη

Έστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $x_1 \neq x_2$.

$$\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}}{x_1-x_2} = \frac{\frac{ax_2-ax_1}{x_1x_2}}{x_1-x_2} = \frac{-a(x_1-x_2)}{x_1x_2(x_1-x_2)} = \frac{-a}{x_1x_2}$$

i) Έστω $a>0$.

$\forall x_1,x_2 \in (-\infty,0)$: x_1,x_2 ομόσημοι $\Rightarrow x_1x_2>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{1}{x_1x_2}>0 \\ a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{-a}{x_1x_2}<0$

Άρα f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

$\forall x_1,x_2 \in (0,+\infty)$: x_1,x_2 ομόσημοι $\Rightarrow x_1x_2>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{1}{x_1x_2}>0 \\ a>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{-a}{x_1x_2}<0$

Άρα f γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Έστω $a<0$. Όμοια αποδεικνύεται ότι f γν. αύξουσα στα $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

▶ ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει το ίδιο είδος μονοτονίας σε δύο υποσύνολα A_1 και A_2 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν έχει κατανάγκη το ίδιο είδος μονοτονίας και στο $A_1 \cup A_2$. Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=\frac{3}{x}$ είναι γν. φθίνουσα στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ αλλά όχι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ διότι για $x_1=-3$ και $x_2=2$ είναι $x_1<x_2$ αλλά όχι $f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow -1>\frac{3}{2} \leftarrow$ άτοπο

Συνήθως, όταν μία συνάρτηση δεν παρουσιάζει το ίδιο είδος μονοτονίας σε όλο το Π.Ο. της, βρίσκουμε ανοικτά διαστήματα στα οποία η f έχει σταθερή μονοτονία. Τα διαστήματα αυτά λέγονται <u>διαστήματα μονοτονίας</u> και θα μάθουμε να τα βρίσκουμε στο κεφάλαιο των παραγώγων.

4) $f(x)=\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\}$.

$D=\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}>0 \Rightarrow f$ γν. αύξουσα στα $(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma})$, $(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty)$.

$D=\begin{vmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}<0 \Rightarrow f$ γν. φθίνουσα στα $(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma})$, $(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty)$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{-\frac{\delta}{\gamma}\}$ με $x_1\neq x_2$

$$\lambda=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\frac{ax_1+\beta}{\gamma x_1+\delta}-\frac{ax_2+\beta}{\gamma x_2+\delta}}{x_1-x_2}=\frac{(ax_1+\beta)(\gamma x_2+\delta)-(ax_2+\beta)(\gamma x_1+\delta)}{(x_1-x_2)(\gamma x_1+\delta)(\gamma x_2+\delta)}=$$

$$=\frac{(a\gamma \cancel{x_1x_2}+a\delta x_1+\beta\gamma x_2+\cancel{\beta\delta})-(a\gamma\cancel{x_1x_2}+a\delta x_2+\beta\gamma x_1+\cancel{\beta\delta})}{(x_1-x_2)(\gamma x_1+\delta)(\gamma x_2+\delta)}=$$

$$=\frac{a\delta(x_1-x_2)-\beta\gamma(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(\gamma x_1+\delta)(\gamma x_2+\delta)}=\frac{(a\delta-\beta\gamma)(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(\gamma x_1+\delta)(\gamma x_2+\delta)}=\frac{D}{(\gamma x_1+\delta)(\gamma x_2+\delta)}=$$

~~i) Έστω $D>0$~~
~~$\forall x_1,x_2\in(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma})$ με $x_1\neq x_2$: $\begin{cases} x_1<-\frac{\delta}{\gamma} \\ x_2<-\frac{\delta}{\gamma}\end{cases} \rightarrow \{\ \}$~~

$$=\frac{D/\gamma^2}{(x_1+\frac{\delta}{\gamma})(x_2+\frac{\delta}{\gamma})}$$

i) Έστω $D>0$

$\forall x_1,x_2\in(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma})$ με $x_1\neq x_2$: $\begin{cases} x_1+\frac{\delta}{\gamma}<0 \\ x_2+\frac{\delta}{\gamma}<0\end{cases} \rightarrow \lambda=\frac{D/\gamma^2}{(x_1+\frac{\delta}{\gamma})(x_2+\frac{\delta}{\gamma})}>0 \Leftrightarrow$

Αρα f γν αύξουσα στο $(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma})$.

$\forall x_1,x_2\in(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty)$: $\begin{cases} x_1+\frac{\delta}{\gamma}>0 \\ x_2+\frac{\delta}{\gamma}>0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=\dfrac{D/\gamma^2}{(x_1+\frac{\delta}{\gamma})(x_2+\frac{\delta}{\gamma})}>0$

με $x_1\neq x_2$

Αρα f γν. αύξουσα στο $(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty)$.

ii) Εστω $D<0$. Ομοια

f γν. φθίνουσα στα $(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma})$ και $(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty)$.

• <u>Παραδείγματα</u>

Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι συναρτήσεις

1) $f(x)=|x^2-x|+|3x-1|+x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

x		0		$1/3$		1	
x^2-x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$3x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$

$\forall x\in(-\infty,0): f(x)=(x^2-x)-(3x-1)+x^2=x^2-x-3x+1+x^2=2x^2-4x+1$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot 2}=1>0,\ a>0 \rightarrow f$ γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

$\forall x\in(0,1/3): f(x)=-(x^2-x)-(3x-1)+x^2=-x^2+x-3x+1+x^2=-2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(0,1/3)$ διότι $a=-2<0$.

$\forall x\in(1/3,1): f(x)=-(x^2-x)+(3x-1)+x^2=-x^2+x+3x-1+x^2=4x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ γν. αύξουσα στο $(1/3,1)$ διότι $a=4>0$.

$\forall x\in(1,+\infty): f(x)=(x^2-x)+(3x-1)+x^2=2x^2+2x-1$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2}<1$, $a=2>0 \rightarrow f$ γν. αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

• Τα συμπεράσματα της μελέτης συνοψίζονται στον <u>πίνακα μονοτονίας</u>

x	$-\infty$	0	$1/3$	1	$+\infty$
f	↘	↘	↗	↗	

οπου τα σύμβολα σημαίνουν

↗ = γνησίως αύξουσα ↘ = γνησίως φθίνουσα

↗ = αύξουσα ↘ = φθίνουσα

2) $f(x)=\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \Leftrightarrow A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

x		-1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$

$\forall x\in(-\infty,-1): f(x)=\dfrac{|x+1|}{|x-2|}=\dfrac{-(x+1)}{-(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2} \Rightarrow f$ γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$, διότι $D=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2-1=-3<0$

$\forall x\in(-1,2): f(x)=\dfrac{|x+1|}{|x-2|}=\dfrac{x+1}{-(x-2)}=\dfrac{x+1}{-x+2} \Rightarrow f$ γν. αύξουσα στο $(-1,2)$, διότι $D=2+1=3>0$.

$\forall x\in(2,+\infty): f(x)=\dfrac{|x+1|}{|x-2|}=\dfrac{x+1}{x-2} \Rightarrow f$ γν. φθίνουσα στο $(2,+\infty)$, διότι $D=-2-1=-3$.

x		-1		2	
f	↘		↗		↘

▼ Άρτιες – περιττές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΙ:

f άρτια $\Leftrightarrow \forall x\in A: -x\in A \wedge f(-x)=f(x)$.
f περιττή $\Leftrightarrow \forall x\in A: -x\in A \wedge f(-x)=-f(x)$.

Από τους ορισμούς φαίνεται ότι:
βασική προϋπόθεση ώστε η f να είναι άρτια ή περιττή είναι το Π.Ο. της f να έχει την ιδιότητα $\forall x\in A, -x\in A$.
Όταν ισχύει αυτό, θα λέγεται ότι το A είναι συμμετρικό.

• Παραδείγματα

1) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2(x+1)^2-2x^3$ είναι άρτια

Λύση

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}: -x\in\mathbb{R} \Rightarrow A$ συμμετρικό (1).

$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=x^2(x+1)^2-2x^3=x^2(x^2+2x+1)-2x^3=x^4+2x^3+x^2-2x^3=x^4+x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}: f(-x)=(-x)^4+(-x)^2=x^4+x^2=f(x)$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow f$ άρτια

2) Δείξτε ότι η $f: f(x)=\dfrac{3x|x|}{2|x|+1}$ είναι περιττή.

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $2|x|+1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -\frac{1}{2}$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$, διότι $|x| \geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ άρα $A=\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}: -x\in\mathbb{R} \Rightarrow A=\mathbb{R}$ συμμετρικό. (1)

$\forall x\in\mathbb{R}: f(-x)= \dfrac{3(-x)|-x|}{2|-x|+1} = -\dfrac{3x|x|}{2|x|+1} = -f(x)$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow f$ περιττή.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f: f(x)=\begin{cases} (a+b)x^4+bx^2 & , x\in(-3,0) \\ (2b-1)x^4+(1+a)x^2 & , x\in(0,3) \end{cases}$

Να βρεθούν οι a,b έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι άρτια.

Λύση

Π.Ο. $A=(-3,0)\cup(0,3)$.

$\forall x\in A: -x\in A \Rightarrow A$ συμμετρικό (1) οπότε

f άρτια $\Leftrightarrow \forall x\in A: f(-x)=f(x) \Leftrightarrow \forall x\in(0,3): f(-x)=f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b)(-x)^4+b(-x)^2=(2b-1)(+x)^4+(1+a)x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b)x^4+bx^2=(2b-1)x^4+(1+a)x^2, \forall x\in(0,3) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2b-1 \\ b=1+a \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a-b=-1 \Leftrightarrow a=b-1 \Leftrightarrow (a,b)=(b-1,b), b\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή $\forall (a,b)=(b-1,b)$: f άρτια

→ Θα δείξουμε ότι κάθε συνάρτηση f με συμμετρικό πεδίο ορισμού γράφεται με ~~μοναδικό~~ μοναδικό τρόπο ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης ότι δηλαδή.

Θ. $\left.\begin{array}{l} A \text{ συμμετρικό} \\ f\in F_A \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ ~~μοναδικές~~ μοναδικές $f_1,f_2: \begin{cases} f_1 \text{ άρτια} \\ f_2 \text{ περιττή} \\ f=f_1+f_2. \end{cases}$

Απόδειξη

Έστω $f_1,f_2: \begin{cases} f_1 \text{ άρτια } (1) \\ f_2 \text{ περιττή } (2). \\ f=f_1+f_2. \end{cases}$

Είναι $f=f_1+f_2 \Leftrightarrow f(x)=f_1(x)+f_2(x), \forall x\in A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=f_1(x)+f_2(x) \\ f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x) \end{cases}, \forall x\in A \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=f(x) \\ f_1(x)-f_2(x)=f(-x) \end{cases}, \forall x\in A \Leftrightarrow \begin{cases} 2f_1(x)=f(x)+f(-x) \\ f_1(x)+f_2(x)=f(x) \end{cases}, \forall x\in A \Leftrightarrow$

$2f_1(x)=f(x)+f(-x)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \\ f_2(x) = f(x) - f_1(x) = f(x) - \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] = \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]. \end{cases}$$

Άρα $\exists f_1, f_2 \in F_A$, π.χ. οι $\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \\ f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]. \end{cases}$: $\begin{cases} f_1 \text{ άρτια} \\ f_2 \text{ περιττή} \\ f = f_1 + f_2. \end{cases}$

(~~ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 δεν είναι οι μοναδικές. Αν $g \in F_A$~~)

• Παράδειγμα

1) Να αναλυθεί η συνάρτηση $f(x) = 2x^2(x+2)^2$ σε άθροισμα αρτιας και περιττής συνάρτησης.

Λύση.

Π.Ο. $A = \mathbb{R} \Rightarrow A$ συμμετρικό. ~~Άρα $f = f_1 + f_2$: f_1 άρτια, f_2 περιττή~~ τότε

~~$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$~~ =

$f(x) = 2x^2(x+2)^2 = 2x^2(x^2+4x+4) = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Έστω f_1 άρτια, f_2 περιττη : $f = f_1 + f_2$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2}\left[(2x^4+8x^3+8x^2) + (2x^4-8x^3+8x^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[4x^4 + 16x^2] = 2x^4 + 8x^2.$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}\left[(2x^4+8x^3+8x^2) - (2x^4-8x^3+8x^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(16x^3) = 8x^3.$$

2) Ομοια η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $\forall x \in (-1,1)$.

Λύση

$A = (-1,1) \Rightarrow A$ συμμετρικό

Έστω f_1 άρτια, f_2 περιττή : $f = f_1 + f_2$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x-1} + \frac{-x+1}{-x-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{2x^2-2} = \frac{2x^2+2}{2x^2-2} = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{-x+1}{-x-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{2x^2-2} = \frac{4x}{2x^2-2} = \frac{2x}{x^2-1}$$

▼ Φραγμένη συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ : Μια συνάρτηση $f \in F_A$ θα λέγεται

f φραγμένη άνω στο $A \Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathbb{R} : \forall x \in A : f(x) \leq \Phi$

f φραγμένη κάτω στο $A \Leftrightarrow \exists\, \varphi \in \mathbb{R} : \forall x \in A : f(x) \geq \varphi$.

f φραγμένη στο $A \Leftrightarrow f$ φραγμένη άνω στο $A \wedge f$ φραγμένη κάτω στο A.

Θ. (κριτήριο φραγμένης συνάρτησης)

$$\boxed{f \text{ φραγμένη στο } A \Leftrightarrow \exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in A : |f(x)| \leq \vartheta}$$

Απόδειξη

Ευθύ : Έστω f φραγμένη στο $A \Rightarrow \exists\, \varphi, \Phi \in \mathbb{R} : \varphi \leq f(x) \leq \Phi \,,\forall x \in A$

$-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -|\varphi| \leq \varphi \wedge \Phi \leq |\Phi|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow -|\varphi| \leq f(x) \leq |\Phi| \,,\forall x \in A \quad (1)$

▸ Παίρνω $\vartheta = \max\{|\varphi|, |\Phi|\} \Rightarrow \begin{cases} |\varphi| \leq \vartheta \Rightarrow -|\varphi| \geq -\vartheta \\ |\Phi| \leq \vartheta \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow -\vartheta \leq -|\varphi| \leq f(x) \leq |\Phi| \leq \vartheta \,, \forall x \in A \Rightarrow -\vartheta \leq f(x) \leq \vartheta, \forall x \in A \Rightarrow |f(x)| \leq \vartheta, \forall x \in A$

Άρα $\exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+$, π.χ. ο $\vartheta = \max\{|\varphi|, |\Phi|\} : \forall x \in A : |f(x)| \leq \vartheta$.

Αντίστροφο : Έστω ότι $\exists\, \vartheta \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \leq \vartheta, \forall x \in A \Rightarrow -\vartheta \leq f(x) \leq \vartheta \,, \forall x \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ άνω φραγμένη στο } A \text{ με ένα άνω φράγμα το } \vartheta \\ f \text{ κάτω φραγμένη στο } A \text{ με ένα κάτω φράγμα το } -\vartheta \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ φραγμένη στο A.

Θ₁

$$\boxed{f, g \text{ φραγμένες στο } A \Rightarrow \begin{cases} f+g \text{ φραγμένη στο } A \\ cf \text{ φραγμένη στο } A, \forall c \in \mathbb{R} \\ f\cdot g \text{ φραγμένη.} \end{cases}}$$

Απόδειξη

f φραγμένη στο $A \Rightarrow \exists\, \vartheta_1 \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \leq \vartheta_1 \,, \forall x \in A$

g φραγμένη στο $A \Rightarrow \exists\, \vartheta_2 \in \mathbb{R}_+ : |g(x)| \leq \vartheta_2, \forall x \in A$.

i) $\forall x \in A : |(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \vartheta_1+\vartheta_2 \Rightarrow f+g$ φραγμένη στο A

ii) $\forall x \in A : |(cf)(x)| = |c f(x)| = |c|\,|f(x)| \leq |c|\,\vartheta_1 \Rightarrow cf$ φραγμένη.

iii) $\forall x \in A: |(fg)(x)| = |f(x)g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| \leq \theta_1 \cdot |g(x)| \leq \theta_1\theta_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow fg$ φραγμένη στο A.

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ</u>: Για να δείξω ότι μια συναρτηση είναι φραγμένη (ή άνω ή κάτω) στο A

<u>α' τρόπος</u>: Βρίσκω το πεδίο τιμών του A, $f(A)$ και ελέγχω αν έχει ή όχι άνω και κάτω φράγμα.

<u>β' τροπος</u>: <u>ΕΙΔΙΚΑ</u> όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι φραγμένη χρησιμοποιούμε το κριτηριο.

<u>Παράδειγμα</u>

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2+1}$ είναι φραγμένη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

<u>Λύση</u>

<u>α' τροπος</u>: Π.Ο. Πρέπει $x^2+1 \neq 0$, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A = \mathbb{R}$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2-x+1}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 + y = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow (y-1)x^2 + x + (y-1) = 0. \quad (1).$$

Για $y = +1$, $(1) \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}$, άρα $y = 1 \in f(A)$.

Έστω $y \neq 1 \Rightarrow (1)$ δευτέρου βαθμού.

$y \in f(A) \Leftrightarrow$ Η (1) έχει μία τουλ. λύση στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - 4(y^2 - 2y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4y^2 + 8y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow -4y^2 + 8y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4y^2 - 8y + 3 \leq 0$

$\Delta = 64 - 48 = 16 = 4^2$

$\Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{8 \pm 4}{8} = \dfrac{2 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow y \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

y		$1/2$		$3/2$	
$4y^2-8y+3$	+	0	−	0	+

Άρα $f(A) = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup \{1\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \Rightarrow \forall x \in A: \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ φραγμένη με ένα άνω φράγμα το $3/2$
και ένα κάτω φράγμα το $1/2$.

<u>β' τροπος</u>: Π.Ο. Πρέπει $x^2+1 \neq 0$, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: |f(x)| = \left|\frac{x^2-x+1}{x^2+1}\right| = \left|1 + \frac{-x}{x^2+1}\right| \leq 1 + \left|\frac{-x}{x^2+1}\right| = 1 + \frac{|x|}{|x^2+1|} \leq$$
$$\leq 1 + \frac{|x|}{|x^2|} = 1 + \frac{|x|}{|x|^2} = 1 + \frac{1}{|x|} \leq$$

<u>β' τρόπος</u>: $\forall x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$: $|f(x)| = \left|\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}\right| = \left|1+\dfrac{-x}{x^2+1}\right| \leq$

$$\leq 1+\left|\frac{-x}{x^2+1}\right| = 1+\frac{|x|}{|x^2+1|} \leq 1+\frac{|x|}{|x^2|} = 1+\frac{|x|}{|x|^2} = 1+\frac{1}{|x|} \underset{\uparrow}{\leq} 1+1=2.$$

διότι $|x|\geq 1$.

~~$\forall x\in(-1,1)$: $|x|<1 \Rightarrow |x^2+1| \leq |x^2|+1 = |x|^2+1$~~

Αρκεί $\forall x\in(-1,1)$: $|f(x)|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq \dfrac{x^2-x+1}{x^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow -2(x^2+1)\leq x^2-x+1\leq 2(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(x^2+1)\leq x^2-x+1 \\ x^2-x+1\leq 2(x^2+1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2-2\leq x^2-x+1 \\ x^2-x+1\leq 2x^2+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-x+3\geq 0 \\ x^2+x+1\geq 0\end{cases}, \text{ ισχύουν}$$

$\forall x\in(-1,1)$ διότι $\Delta<0$ και $\alpha>0$.

Άρα $\forall x\in\mathbb{R}$: $|f(x)|\leq 2 \Rightarrow f$ φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

▼ <u>Ακρότατα (max–min) συνάρτησης</u>

1) Ενα άνω φράγμα μιας συνάρτησης $f: A\to\mathbb{R}$ είναι δυνατόν να ανήκει στο πεδίο τιμών της $f(A)$. Τότε, $\exists x_0\in A: f(x)\leq f(x_0), \forall x\in A$. Η τιμή $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f.

<u>Ορισμός</u>: $\boxed{\text{Η } f \text{ έχει ολικό μέγιστο στο } x_0 \text{ το } f(x_0) \Leftrightarrow \forall x\in A: f(x)\leq f(x_0).}$

2) Ομοια, ένα κάτω φράγμα είναι δυνατόν να ανήκει στο Π.Τ. $f(A)$. Τότε $\exists x_0\in A: f(x)\geq f(x_0), \forall x\in A$ και η τιμή $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f.

<u>Ορισμός</u>: $\boxed{\text{Η } f \text{ έχει ολικό ελάχιστο στο } x_0 \text{ το } f(x_0) \Leftrightarrow \forall x\in A: f(x)\geq f(x_0).}$

↳ Άρα, τα <u>ολικά</u> ακρότατα είναι συνυφασμένα με το πεδίο τιμών $f(A)$. Γι'αυτό, για να τα βρούμε, βρίσκω το $f(A)$ και αναζητώ τα φράγματα του. Αν ένα φράγμα ανήκει στο πεδίο τιμών, τότε θα είναι άκρο <u>κλειστού</u> διαστήματος. Τα φράγματα αυτά είναι εν'γένει το max και το min της συνάρτησης δηλαδή η μέγιστη και ελάχιστη (M και μ) <u>τιμή της συνάρτησης</u>. Για να βρώ τα x στα οποία η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, λύνω τις εξισώσεις $f(x)=\mu$ και $f(x)=M$.

• **Παράδειγμα**

1) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x^2-2x+3\neq 0$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$ (διότι $\Delta=4-12<0$) $\Leftrightarrow A=\mathbb{R}$.

$y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}\Leftrightarrow yx^2-2yx+3y=2x-3\Leftrightarrow yx^2-(2y+2)x+3(y+1)=0$ (1)

Αν $y=0$, (1) $\Leftrightarrow -2x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\in\mathbb{R}$. Άρα $y=0\in f(A)$.

Αν $y\neq 0 \Rightarrow$ (1) β' βάθμια.

$y\in f(A)\Leftrightarrow$ Η εξίσωση (1) έχει λύση στο $\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta\geq 0\Leftrightarrow (2y+2)^2-12y(y+1)\geq 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4(y+1)^2-12y(y+1)\geq 0\Leftrightarrow 4(y+1)[(y+1)-3y]\geq 0\Leftrightarrow (y+1)(-2y+1)\geq 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y+1)(2y-1)\leq 0\Leftrightarrow y\in[-1,1/2]$

y		-1		$1/2$	
$y+1$	$-$	0	$+$		$+$
$2y-1$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $f(A)=[-1,1/2]\cup\{0\}=[-1,1/2]$.

Η f έχει max το $1/2$ στο $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+3=4x-6\Leftrightarrow x^2-6x+9=0\Leftrightarrow (x-3)^2=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3.$

Άρα $\max=(3,1/2)$.

Η f έχει min το -1 στο $f(x)=-1\Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+3=-2x+3\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0.$

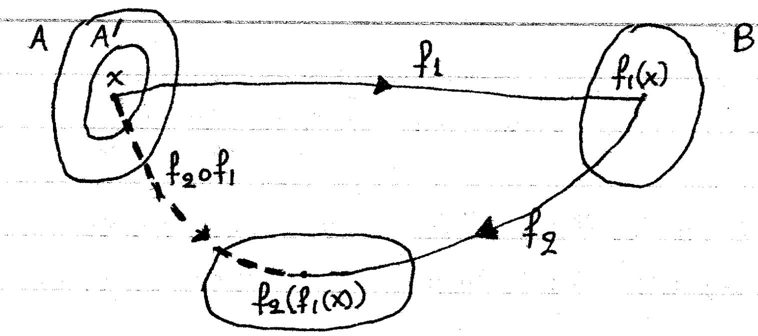
Άρα $\min=(0,-1)$.

▼ Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω δύο συναρτήσεις f_1,f_2 με $A=\mathrm{dom}f_1$ και $B=\mathrm{dom}f_2$. Τότε
$\forall x\in A\longrightarrow f_1(x)$ και αν $f_1(x)\in B\xrightarrow{f_2} f_2(f_1(x))$

Περιορίζοντας λοιπόν την f_1 στο σύνολο $A'=\{x\in A: f_1(x)\in B\}$ ορίζουμε μία νέα συνάρτηση $f_2\circ f_1$ με $\mathrm{dom}f_2\circ f_1=A'$ και
$f_2\circ f_1:\forall x\in A'\xrightarrow{f_2\circ f_1} f_2(f_1(x))$.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται σύνθεση των f_1,f_2.



ΟΡΙΣΜΟΣ :

> Εστω δύο συναρτήσεις $f_1 : A \to \mathbb{R}$ και $f_2 : B \to \mathbb{R}$.
> $$f_2 o f_1 : \begin{cases} (f_2 o f_1)(x) = f_2(f_1(x)) \\ \text{dom}(f_2 o f_1) = \{x \in A : f_1(x) \in B\}. \end{cases}$$

→ ΑΡΑ: για να βρω την σύνθεση $f_2 o f_1$ των f_1, f_2, δουλεύω ως εξής:

- •1 Βρίσκω τα πεδία ορισμού $A = \text{dom} f_1$ και $B = \text{dom} f_2$.
- •2 Βρίσκω το $A' = \text{dom} f_2 o f_1$ λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} x \in A \\ f_1(x) \in B. \end{cases}$
- •3 Βρίσκω τον τύπο της συνάρτησης: $(f_2 o f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = \ldots$

→ Παραδείγματα

1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ και $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Να βρεθεί η σύνθεση $f_2 o f_1$

Λύση

Π.Ο. Για την f_1, πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
Για την f_2, πρέπει $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \Leftrightarrow B = [-1, 1]$

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Για την $f_2 o f_1$, πρέπει $\begin{cases} x \in A \\ f_1(x) \in B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \wedge x \neq 1 \\ -1 \leqslant \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \leqslant 1. \end{cases}$ (1).

$$-1 \leqslant \frac{x^2+1}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1+x^2-1}{x^2-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

x		-1		0		1	
$2x^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	ǁ	$-$	0	$-$	ǁ	$+$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$.

$\Leftrightarrow \lambda[(2\lambda+1)x+(\lambda-3)]+(\cancel{\lambda}-1)=(2\lambda+1)[\lambda x+(\lambda-1)]+(\cancel{\lambda}-3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda(2\lambda+1)x+\lambda(\lambda-3)-1=\lambda(2\lambda+1)x+(2\lambda+1)(\lambda-1)-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-3)-1=(2\lambda+1)(\lambda-1)-3\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-\cancel{1}=2\lambda^2-2\lambda+\lambda-\cancel{1}-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda-3=0$, $\Delta=4+12=16=4^2$ $\rightarrow \lambda_{1,2}=\dfrac{-2\pm4}{2}=-1\pm2=\begin{cases}-3\\1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=1 \vee \lambda=-3.$

Μονοτονία σύνθεσης συναρτήσεων.

Θ. Έστω $f:A\rightarrow B$ και $g:B\rightarrow \Gamma$.

- f,g γνησίως μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας $\rightarrow$ $g\circ f$ γνησίως αύξουσα

Απόδειξη

i) Έστω f,g γνησίως φθίνουσες

$\forall x_1,x_2\in A: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2))\Rightarrow$

$\Rightarrow (g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$, άρα $g\circ f$ γνησίως αύξουσα.

ii) Έστω f,g γνησίως αύξουσα

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2))\Rightarrow (g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in A\Rightarrow$

$\Rightarrow g\circ f$ γνησίως αύξουσα

Θ. Έστω $f:A\rightarrow B$ και $g:B\rightarrow\Gamma$

- f,g γνησίως μονότονες με διαφορετικό είδος μονοτονίας $\rightarrow$ $g\circ f$ γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη

i) Έστω f γν. αύξουσα, g γν. φθίνουσα

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))>g(f(x_2))\Rightarrow(g\circ f)(x_1)>(g\circ f)(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in A\Rightarrow$

$\Rightarrow g\circ f$ γν. φθίνουσα.

ii) Έστω f γν. φθίνουσα, g γν. αύξουσα

$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))>g(f(x_2))\Rightarrow(g\circ f)(x_1)>(g\circ f)(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in A\Rightarrow$

$\Rightarrow g\circ f$ γν. φθίνουσα.

▼ Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω μία συνάρτηση $f: A \to B$

• <u>Γράφημα</u> της f, ονομάζεται το σύνολο $G_f = \{(x,y) \in A\times B : y = f(x)\}$ και προφανώς $y = f(x) \Leftrightarrow (x,y) \in G_f$.

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης, το τυχαίο υποσύνολο $G \subseteq \mathbb{R}^2$ θα είναι γράφημα κάποιας συνάρτησης αν και μόνο αν

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G: x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Το σύνολο $G = \{(1,3),(2,4),(3,3)\}$ είναι γράφημα της συνάρτησης.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , x = 1 \\ 4 & , x = 2 \\ 3 & , x = 3 \end{cases} \quad \text{με } \operatorname{dom} f = \{1,2,3\}.$$

2) Το σύνολο $G = \{(2,4),(4,2),(4,3)\}$ δεν είναι γράφημα συνάρτησης διότι $(4,2),(4,3) \in G$ και $2 \neq 3$.

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>:

Έστω μία συνάρτηση $f: A \to B$
f αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow \exists f^{-1}: B \to A : G_{f^{-1}} = \{(y,x) \in B\times A : y = f(x)\}$

↳ Η συνάρτηση f^{-1} αν υπάρχει, θα είναι μοναδική διότι κάθε άλλη συνάρτηση με το ίδιο γράφημα $G_{f^{-1}}$ θα είναι ίση με την f^{-1} και ονομάζεται <u>αντίστροφη συνάρτηση της f.</u>

• <u>Παραδείγματα</u>

Να βρεθούν οι αντίστροφες των συναρτήσεων: (αν υπάρχουν)

1) $f(x) = 2x+3$ με $A = \{0,1,2\}$ και $B = \{3,5,7\}$.

<u>Λύση</u>

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0+3 = 3 \\ f(1) &= 2+3 = 5 \\ f(2) &= 4+3 = 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow G_f = \{(0,3),(1,5),(2,7)\}.$$

Το σύνολο $G_{f^{-1}} = \{(3,0),(5,1),(7,2)\}$ είναι γράφημα συνάρτησης $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ αντιστρέψιμη με $f^{-1}: \{3,5,7\} \to \{0,1,2\}$ και

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & , x = 3 \\ 1 & , x = 5 \\ 2 & , x = 7. \end{cases}$$

2) $f(x)=2x^2+1$ με $f:\{-1,0,1\}\to\{3,1\}$.

Λύση

$$\left.\begin{aligned} f(-1)&=2+1=3\\ f(0)&=0+1=1\\ f(1)&=2+1=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow G_f=\{(-1,3),(0,1),(1,3)\}.$$

Το σύνολο $G_{f^{-1}}=\{(3,-1),(1,0),(3,1)\}$ δεν είναι γράφημα συνάρτησης διότι $(3,-1),(3,1)\in G_{f^{-1}}$ και $-1\neq 1 \Rightarrow f$ όχι αντιστρέψιμη

3) $f(x)=x^2+x$ με $f:\{0,1,2\}\to\{0,2,3,6\}$

Λύση

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=0+0=0\\ f(1)&=1+1=2\\ f(2)&=4+2=6\end{aligned}\right\} \Rightarrow G_f=\{(0,0),(1,2),(2,6)\}$$

Το σύνολο $G_{f^{-1}}=\{(0,0),(2,1),(6,2)\}$ είναι γράφημα συνάρτησης μεν άλλα όχι γράφημα συνάρτησης με Π.Ο. το $B=\{0,2,3,6\}$.

Δηλαδή $\nexists f^{-1}:\{0,2,3,6\}\to\{0,1,2\}: G_{f^{-1}}=\{(0,0),(2,1),(6,2)\}$.

Αρα f όχι αντιστρέψιμη

→ Κριτήριο αντιστρεψιμότητας

Θ. $\boxed{f:A\to B \text{ αντιστρέψιμη} \Leftrightarrow f \text{ "1-1"} \wedge f \text{ "επί"}}$

Απόδειξη

Ευθύ: Εστω $f:A\to B$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow \exists f^{-1}:B\to A: G_{f^{-1}}=\{(y,x)\in B\times A: y=f(x)\}$.

i) Αν f όχι "1-1" $\Rightarrow \exists x_1,x_2\in A: x_1\neq x_2 \wedge f(x_1)=f(x_2)=y \Rightarrow \exists (x_1,y),(x_2,y)\in G_f$ $\Rightarrow \exists (y,x_1),(y,x_2)\in G_{f^{-1}} \Rightarrow G_{f^{-1}}$ όχι γράφημα συνάρτησης ← Ατοπο

Αρα f "1-1"

ii) Αν f όχι "επί" $\Rightarrow f(A)\subset B \Rightarrow \exists y\in B: y\notin f(A) \Rightarrow \exists y\in B: \forall x\in A: f(x)\neq y \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists y\in B: \forall x\in A: (x,y)\notin G_f \Rightarrow \exists y\in B: \forall x\in A: (y,x)\notin G_{f^{-1}} \Rightarrow$ Η συνάρτηση f^{-1} δεν ορίζεται για $y\in B$ ← Ατοπο. Αρα f "επί".

Αντίστροφο: Εστω f "1-1" και "επί".

▸ Παίρνω $S=\{(y,x)\in B\times A: y=f(x)\}=\{(f(x),x)\in B\times A: x\in A\}$

f "1-1" $\Rightarrow \forall x_1,x_2\in A: [f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2] \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall (f(x_1),x_1),(f(x_2),x_2)\in S: [f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2] \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Το σύνολο S είναι γράφημα μιας συνάρτησης g.

• Θα δείξω ότι το ευρύτερο πεδίο ορισμού της g είναι το B.

f "επί" $\Rightarrow f(A)=B \Rightarrow \forall y\in B, \exists x\in A: f(x)=y \Rightarrow \forall y\in B, \exists x\in A: (x,y)\in G_f \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall y\in B, \exists x\in A: (y,x)\in S \Rightarrow \forall y\in B, \exists x\in A: g(y)=x$, δηλαδή η συνάρτηση g ορίζεται για όλα τα σημεία του συνόλου B και δίνει τιμές που ανήκουν στο A.

Αν $y\notin B \Rightarrow y\notin f(A) \Rightarrow \nexists x\in A: f(x)=y \Rightarrow \ldots$ όμοια $\ldots \Rightarrow \nexists x\in A: g(y)=x \Rightarrow$ Η g δεν δίνει τιμές στο A όταν το αρχέτυπο δεν προέρχεται απο το B.

ΑΡΑ: $\mathrm{dom}\, g = B \Rightarrow \exists f^{-1}: B\to A$ (π.χ. η g): $G_{f^{-1}} = \{(y,x)\in B\times A: y=f(x)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ αντιστρέψιμη. Q.E.D.

• 1 <u>Παρατήρηση</u>: Αν f αντιστρέψιμη με αντίστροφη την f^{-1}, τότε και η f^{-1} είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την f. Αρα <u>η f^{-1} είναι "1-1" και "επί"</u>

• 2 Προφανώς $y=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$. Απο αυτή την ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\boxed{\begin{aligned}(f\circ f^{-1})(x)&=x \ , \forall x\in B\\ (f^{-1}\circ f)(x)&=x \ , \forall x\in A\end{aligned}}$$

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ</u>: Για να βρώ (αν υπάρχει) την αντίστροφη μίας συνάρτησης εργάζομαι ως εξής:

• 1 Βρίσκω το $A=\mathrm{dom} f$ (αν δεν δίνεται) και το πεδίο τιμών $f(A)$

• 2 Παίρνω $B=f(A) \Rightarrow f$ "επί".

• 3 Δείχνω ότι

$$\left.\begin{array}{l}\forall x_1,x_2\in A: f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2\\ \text{ή } \forall x_1,x_2\in A: x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\\ \text{ή } f \text{ γνησίως μονότονη στο } A\end{array}\right\} \text{ οπότε } f \text{ "1-1"}$$

και άρα f αντιστρέψιμη.

• 4 $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=\ldots \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ldots , \forall x\in B$.

• <u>Παραδείγματα</u>

1) Να βρεθεί η αντίστροφη της $f(x)=2x+5$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=\mathbb{R}$ και $f(A)=\mathbb{R}$. Παίρνω $B=\mathbb{R}=f(A) \Rightarrow f$ "επί"
$f(x)=2x+5, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ "1-1" $\Big\} \Rightarrow f$ αντιστρέψιμη. με

$$y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y) \Leftrightarrow x=2y+5 \Leftrightarrow 2y=x-5 \Leftrightarrow y=\frac{x-5}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$$

2) Να βρεθεί η αντίστροφη της $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. $A=\mathbb{R}-\{2\}$ και $f(A)=\mathbb{R}-\{2\}$. Παίρνω $B=\mathbb{R}-\{2\}=f(A) \Rightarrow f$ "επί".

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \dfrac{2x_1+3}{x_1-2} = \dfrac{2x_2+3}{x_2-2} \Rightarrow (2x_1+3)(x_2-2)=(x_1-2)(2x_2+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_1x_2-4x_1+3x_2-6 = 2x_1x_2+3x_1-4x_2-6 \Rightarrow 3x_2-4x_1=3x_1-4x_2 \Rightarrow 7x_2-7x_1=0$

$\Rightarrow x_2-x_1=0 \Rightarrow x_2=x_1,\ \forall x_1,x_2\in A \Rightarrow f$ "1-1" $\Big\}\Rightarrow f$ αντιστρέψιμη με

είναι και f "επί"

$y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y) \Leftrightarrow x=\dfrac{2y+3}{y-2} \Leftrightarrow x(y-2)=2y+3 \Leftrightarrow xy-2x=2y+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)y=2x+3 \Leftrightarrow y=\dfrac{2x+3}{x-2} \Leftrightarrow \underline{f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{x-2},\ \forall x\in\mathbb{R}-\{2\}}$

3) Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \Leftrightarrow A=[1,+\infty)$.

Π.Τ. $y=f(x) \Leftrightarrow y=3+\sqrt{x-1} \Leftrightarrow y-3=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x-1=(y-3)^2 \Leftrightarrow x=(y-3)^2+1$ (1).

Πρέπει $y-3\geq 0$

$y\in f(A) \Leftrightarrow$ Η εξίσωση (1) έχει μία λύση στο $A=[1,+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x=(y-3)^2+1\in[1,+\infty) \\ y-3\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 3 \\ (y-3)^2+1\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 3 \\ (y-3)^2\geq 0 \text{, ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow y\geq 3$, Άρα $f(A)=[3,+\infty)$.

Παίρνω $B=[3,+\infty)=f(A) \Rightarrow f$ "επί"

$x_1\neq x_2 \Rightarrow x_1-1\neq x_2-1 \Rightarrow \sqrt{x_1-1}\neq\sqrt{x_2-1} \Rightarrow 3+\sqrt{x_1-1}\neq 3+\sqrt{x_2-1} \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,

$\forall x_1,x_2\in A \Rightarrow f$ "1-1" $\Big\}\Rightarrow f$ "1-1" και "επί" $\Rightarrow f$ αντιστρέψιμη με

είναι και f "επί"

$y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x=f(y) \Leftrightarrow x=3+\sqrt{y-1} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow y=(x-3)^2+1=x^2-6x+9+1=$

$=x^2-6x+10 \Leftrightarrow \underline{f^{-1}(x)=x^2-6x+10,\ \forall x\in[3,+\infty)}.$

→ <u>Μονοτονία αντίστροφης συνάρτησης</u>

Θα δείξουμε ότι αν μία συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη, τότε η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την συνάρτηση.

Θ1 f αντιστρέψιμη
f γνησίως αύξουσα στο $\Delta\subseteq \mathrm{dom}f$ ⇒

Θ1 $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ αντιστρέψιμη} \\ f \text{ γνησίως αύξουσα} \end{array}\Big\} \Rightarrow f^{-1} \text{ γνησίως αύξουσα.}}$

Απόδειξη

Έστω f^{-1} όχι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow \exists\, y_1, y_2 \in dom f^{-1}$: $\begin{cases} y_1 < y_2 \\ f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2). \end{cases}$ (1)

Παίρνω $x_1, x_2 \in dom f$: $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = f^{-1}(y_1) \\ x_2 = f^{-1}(y_2) \end{cases}$ οπότε

$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow x_1 \geq x_2 \\ \text{είναι } f \text{ γνησίως αύξουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow y_1 \geq y_2 \leftarrow$ Άτοπο, διότι $y_1 < y_2$.

Άρα f^{-1} γνησίως αύξουσα QED.

Όμοια αποδεικνύεται ότι

Θ2. $\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ αντιστρέψιμη} \\ f \text{ γνησίως φθίνουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1} \text{ γνησίως φθίνουσα}}$

→ Αντίστροφη σύνθεσης αντιστρέψιμων συναρτήσεων.

Θ. $\boxed{\begin{array}{l} \text{Έστω δύο συναρτήσεις } f: A \to B \text{ και } g: B \to \Gamma \\ f, g \text{ αντιστρέψιμες} \Rightarrow g \circ f \text{ αντιστρέψιμη με } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \end{array}}$

Απόδειξη

f, g αντιστρέψιμες $\Rightarrow f, g$ είναι "1-1" και "επι".

Θα δείξω ότι και η $g \circ f : A \to \Gamma$ είναι "1-1" και "επι".

- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, διότι f "1-1" $\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, διότι g "1-1" $\Rightarrow$ $\Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow g \circ f$ "1-1".
- $\cancel{(g \circ f)(A) = g(f(A))}$
- $\left.\begin{array}{l} f \text{ "επι"} \Rightarrow f(A) = B \\ g \text{ "επι"} \Rightarrow g(B) = \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow (g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = \Gamma \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g \circ f \text{ "επι"} \\ g \circ f \text{ "1-1"} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g \circ f$ αντιστρέψιμη με αντίστροφη την $(g \circ f)^{-1}$.

Αρκεί $\forall z \in \Gamma : (g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$. Διότι $dom f^{-1} \circ g^{-1} = \Gamma = dom (g \circ f)^{-1}$

Έστω ένα $z \in \Gamma$. Παίρνω $x = (g \circ f)^{-1}(z) \in A$ (1)

και $y = f(x) \in B$ (2)

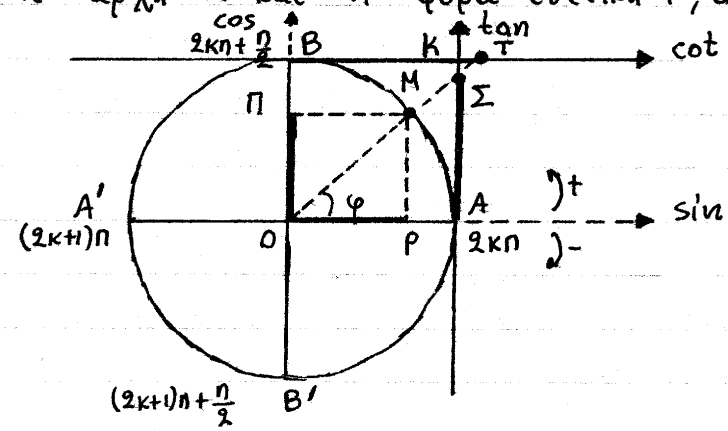
$(1) \Leftrightarrow x = (g \circ f)^{-1}(z) \Leftrightarrow z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \underset{(2)}{=} g(y) \Leftrightarrow y = g^{-1}(z)$ (3)

$(2) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ (4). οπότε

$(g \circ f)^{-1}(z) \underset{(1)}{=} x \underset{(4)}{=} f^{-1}(y) \underset{(3)}{=} f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$, $\forall z \in \Gamma \Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

▼ Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

• <u>Τριγωνομετρικός κύκλος</u> είναι ένας κύκλος με ακτίνα ρ=1 στον οποίο έχει οριστεί η αρχή Α και η φορά (θετική +, αρνητική −) διαγραφής των τόξων.



• Έστω Μ ένα σημείο του κύκλου. Αν $M\hat{O}A=\varphi$ τότε στο Μ λήγουν όλα τα τόξα $x=2\kappa\pi+\varphi$.

• Δύο τόξα x και x' έχουν το ίδιο πέρας $\leftrightarrow$ $x'=2\kappa\pi+x$. , $\kappa\in\mathbb{Z}$.

• Τα τόξα $2\kappa\pi$ έχουν πέρας το Α

Τα τόξα $(2\kappa+1)\pi$ έχουν πέρας το Α'

Τα τόξα ~~(2κ+1)π~~ $2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ έχουν πέρας το Β

Τα τόξα $(2\kappa+1)\pi+\frac{\pi}{2}$ έχουν πέρας το Β'.

• <u>Γενικά</u>: Ορίζεται μία απεικόνιση του συνόλου $\mathbb{R}$ στο σύνολο C των σημείων του κύκλου τέτοια ώστε

$\forall x\in\mathbb{R} \longrightarrow M\in C$: Το τόξο x να έχει πέρας στο σημείο Μ.

Η μελέτη αυτής της απεικόνισης αποτελεί αντικείμενο της γεωμετρίας.

• <u>Για τον ορισμό</u> των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, θεωρούμε τέσσερις άξονες. όπως στο σχήμα.

~~1) Άξονας των ημιτόνων (sin) → εφάπτεται~~

1) <u>Άξονας των ημιτόνων (sin)</u> → Είναι η διάμετρος Α'Α με
αρχή Ο
μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{OA}$

2) <u>Άξονας συνημιτόνων (cos)</u> → Είναι η διάμετρος Β'Β με
αρχή Ο
μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{OB}$

~~3) Άξονας εφαπτόμενης (tan) → είναι η διάμετρος~~

3) Άξονας εφαπτόμενης (tan) → είναι η εφαπτόμενη στο A με
αρχή A
μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{AK}$, K = tan ∩ cot.

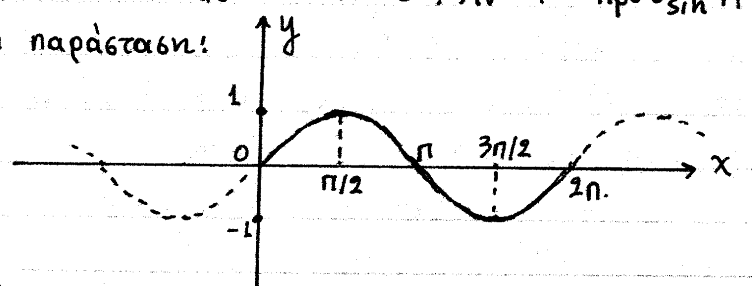
4) Άξονας συνεφαπτόμενης (cot) → είναι η εφαπτόμενη στο B με
αρχή B
μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{BK}$, K = tan ∩ cot.

→ Ορισμός τριγωνομετρικών συναρτήσεων

① Η συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

ΟΡΙΣΜΟΣ : Έστω $x \in \mathbb{R} \longrightarrow M \in C$. Αν $P = \text{προβ}_{\sin} M$ τότε $\boxed{\sin x = \overline{OP}}$

• Γραφική παράσταση:



• Μεταβολή στο $[0,2\pi)$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\sin x$	$0 \nearrow$	$1/2 \nearrow$	$\sqrt{2}/2 \nearrow$	$\sqrt{3}/2 \nearrow$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$

• Μονοτονία : Η sin είναι γνησίως αύξουσα στα $[2k\pi, 2k\pi + \pi/2]$ και $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2k\pi + \pi/2, (2k+1)\pi + \pi/2]$.

• Η sin είναι ~~πε~~ περιττή συνάρτηση, δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) = \sin x$.

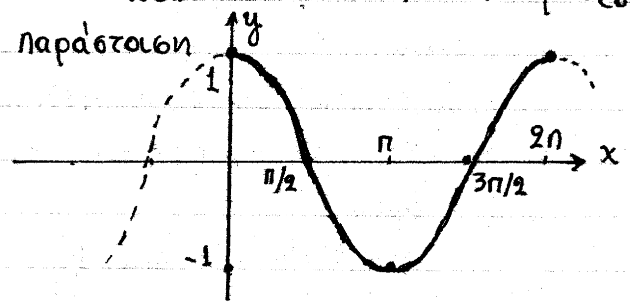
• Η sin είναι φραγμένη με μέγιστο το 1 στα $x = 2k\pi$
και ελάχιστο το -1 στα $x = (2k+1)\pi$

διότι έχει πεδίο τιμών $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

② Η συνάρτηση $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Έστω $x \in \mathbb{R} \to M \in C$. Αν $\Pi = \text{προβ}_{\cos} M$ τότε $\boxed{\cos x = \overline{O\Pi}}$

• Γραφική παράσταση



• Μεταβολή στο $[0, 2\pi]$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1 ↘	$\sqrt{3}/2$ ↘	$\sqrt{2}/2$ ↘	$1/2$ ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1

• Μονοτονία : Η cos είναι γνησίως φθίνουσα στα $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ και γνησίως αύξουσα στα $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$

• Η cos είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R}: \cos(-x) = \cos x$

• Η cos είναι φραγμένη με μέγιστο το 1 στα $x = 2k\pi$
και ελάχιστο το -1 στα $x = (2k+1)\pi$

διότι $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

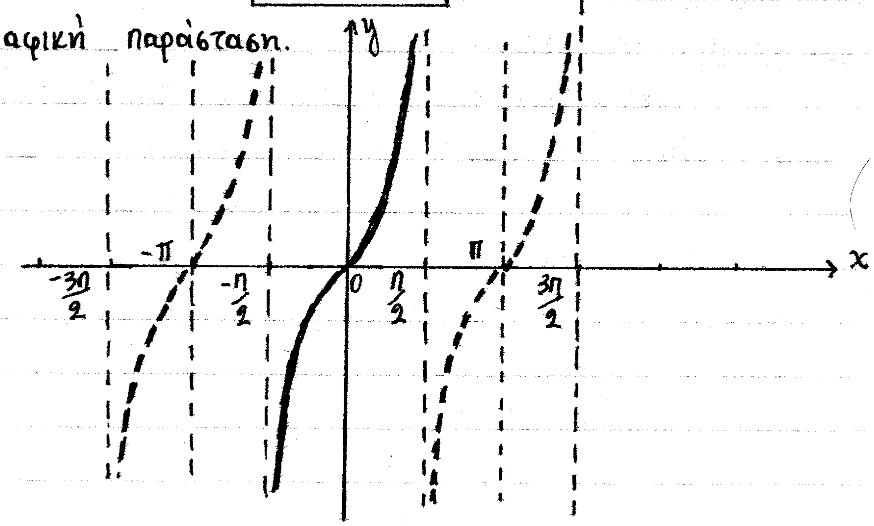
③ Η συνάρτηση $\tan : \underbrace{\mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2\}} \to \mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΣ : Έστω $x \in \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2\} \to M \in C$.

$x \neq k\pi + \pi/2 \leftrightarrow OM \nparallel \tan \Leftrightarrow OM \cap \tan = \{\Sigma\}$.

Θέτω $\boxed{\tan x = \overline{A\Sigma}}$

• Γραφική παράσταση.



• Μεταβολή στο $[0,\pi]$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\dots$
$\tan x$	0	$\nearrow \sqrt{3}/3$	$\nearrow 1$	$\nearrow \sqrt{3}$	$\nearrow +\infty \,//\, -\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow \dots$

• Μονοτονία: Η tan είναι γνησίως αύξουσα στα $[\kappa\pi - \pi/2, \kappa\pi + \pi/2]$.

• Η tan είναι <u>περιττή</u> συνάρτηση, δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \pi/2\}: \tan(-x) = \tan x$.

• Η tan δεν είναι φραγμένη ούτε άνω ούτε κάτω και έχει πεδίο τιμων $\tan(\mathbb{R} - \{\kappa\pi + \pi/2\}) = \mathbb{R}$.

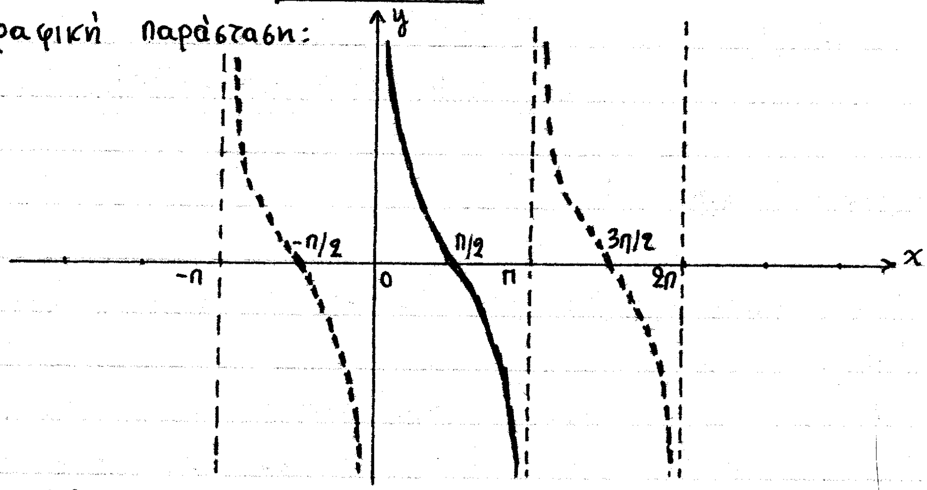
④ <u>Η συνάρτηση $\cot : \mathbb{R} - \{\pi\} \to \mathbb{R}$</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi\} \longrightarrow M \in C$

$x \neq \kappa\pi \Longleftrightarrow OM \nparallel \cot \Longleftrightarrow OM \cap \cot = \{T\}$.

Θέτω $\boxed{\cot x = \overline{BT}}$

• Γραφική παράσταση:



• Μεταβολή στο $[0, 2\pi]$.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$\dots$
$\cot x$	$-\infty \,//\, +\infty$	$\searrow \sqrt{3}$	$\searrow 1$	$\searrow \sqrt{3}/3$	$\searrow 0$	$\searrow -\infty \,//\, +\infty$	$\searrow 0$	$\searrow -\infty \,//\, +\infty$	$\dots$

• Μονοτονία: Η cot είναι γνησίως φθίνουσα στα $[\kappa\pi, (\kappa+1)\pi]$

• Η cot είναι <u>περιττή</u> συνάρτηση, δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi\} : \cot(-x) = \cot x$.

• Η cot δεν είναι φραγμένη ούτε άνω ούτε κάτω και έχει πεδίο τιμών $\cot(\mathbb{R} - \{\kappa\pi\}) = \mathbb{R}$

Βασικές ιδιότητες

- $\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x=1} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1-\cos^2 x \\ \cos^2 x = 1-\sin^2 x \end{cases}$

- $\boxed{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$
- $\boxed{\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}}$

$\Rightarrow \tan x\cdot\cot x = 1$

- $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

- $1+\cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\sin^2 x = \dfrac{1}{1+\cot^2 x} = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

- $\boxed{\begin{array}{l}\forall x\in\mathbb{R}: |\sin x|\leq 1 \\ \forall x\in\mathbb{R}: |\cos x|\leq 1\end{array}}$

- $\boxed{\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}: |\sin x|<|x|<|\tan x|}$

- $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}: |\sin x|<|x|}$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο.

1) Τόξα αντίθετα έχουν <u>το ίδιο cos</u> και αντίθετους τους άλλους τριγονομετρικούς αριθμούς.

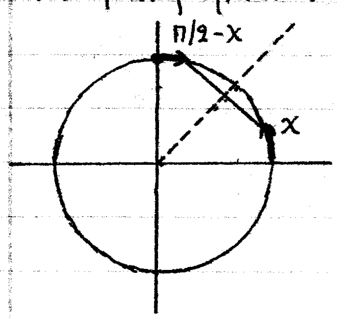
$\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\tan(-x)=-\tan x$, $\cot(-x)=-\cot x$

2) Τα τόξα x και $x+2k\pi$ έχουν ίδιο sin και cos ενώ τα τόξα x και $x+k\pi$ έχουν ίδια tan και cot.

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$ $\quad\quad$ $\tan(x+k\pi)=\tan x$

$\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $\quad\quad$ $\cot(x+k\pi)=\cot x.$

3) Συμπληρωματικά τόξα $\rightarrow \pi/2-x$, x



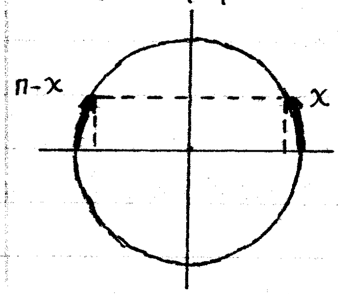
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

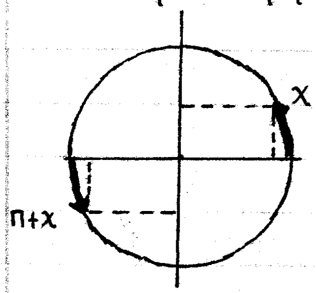
$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$

4) Παραπληρωματικά τόξα $\bullet\!\!\rightarrow \pi - x,\ x$



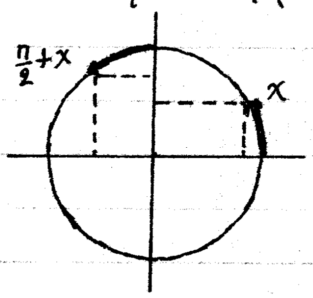
$$\sin(\pi-x)=\sin x$$
$$\cos(\pi-x)=\cancel{\cos x}-\cos x$$
$$\tan(\pi-x)=\cancel{\tan x}-\tan x$$
$$\cot(\pi-x)=-\cot x$$

5) Τόξα με διαφορά π $\bullet\!\!\rightarrow \pi+x,\ x$



$$\sin(\pi+x)=-\sin x$$
$$\cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\tan(\pi+x)=\tan x$$
$$\cot(\pi+x)=\cot x.$$

6) Τόξα με διαφορά $\frac{\pi}{2}$ $\bullet\!\!\rightarrow \frac{\pi}{2}+x,\ x$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan x.$$

- Μνημονικός κανονας:

1) Στα $\pi/2,\ 3\pi/2$ το sin γίνεται cos και <u>αντίστροφα</u>
η tan » cot και »

2) Στα $\pi,\ 2\pi$ παραμένουν <u>ίδια</u>

Το <u>πρόσημο</u> στα παραπάνω είναι το πρόσημο της <u>πρώτης</u> συνάρτησης στο τεταρτημόριο στο οποίο λήγει το <u>τόξο που δίνεται</u> όταν <u>$0<x<\pi/2$</u> ακόμη και όταν δεν ισχύει η ανισότητα για το x.

π.χ. εφαρμοσε τον μνημονικό κανόνα στα 3,4,5,6.

ΤΥΠΟΙ

$\boxed{a\pm b}$

$$\left.\begin{aligned}
\sin(a\pm b) &= \sin a\cos b \pm \cos a\cdot\sin b\\
\cos(a\pm b) &= \cos a\cos b \mp \sin a\cdot\sin b\\
\tan(a\pm b) &= \frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\cdot\tan b}\\
\cot(a\pm b) &= \frac{\cot a\cdot\cot b\mp 1}{\cot b\pm\cot a}\ !!!
\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$\boxed{2a}$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a-\sin^2 a = \begin{cases}2\cos^2 a-1\\ 2\sin^2 a-1\end{cases}$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$$

$\hookrightarrow$ $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b) = \sin^2 a-\sin^2 b$

$\cos(a+b)\cdot\cos(a-b) = \cos^2 a-\cancel{\cos^2 b}\ \sin^2 b$.

$\boxed{3a}\longrightarrow$ $\sin 3a = 3\sin a-4\sin^3 a$ $\qquad \tan 3a = \dfrac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

$\cos 3a = 4\cos^3 a-3\cos a$

Συναρτησει

$\boxed{\cos 2a}$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}\qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}\qquad \cot^2\alpha = \frac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$$

$\boxed{\tan\frac{a}{2}}$

$$\sin a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}\qquad \cos a = \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$$

$$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}\qquad \cot a = \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{2\tan\frac{a}{2}}$$

Μετασχηματισμοί

Σε γινόμενο

$$\sin a\pm\sin b = 2\sin\frac{a\pm b}{2}\cos\frac{a\mp b}{2}$$

$$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a-\cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}\ !!!$$

Σε άθροισμα

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$$

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$$

$$2\sin a\sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b).$$

$$\tan a\pm\tan b = \frac{\sin(a\pm b)}{\cos a\cdot\cos b}$$

$$\cot a\pm\cot b = \frac{\sin(b\mp a)}{\sin a\cdot\sin b}\ !!!$$

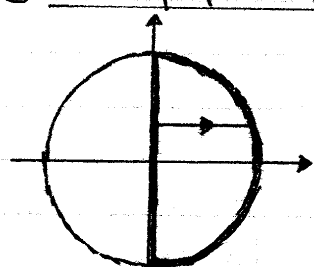
$\hookrightarrow$ $1\pm\sin a = \sin\frac{\pi}{2}\pm\sin a = \ldots$, $\cancel{\sin}$ $\sin a+\cos b = \sin a+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \ldots$

$$1\pm\cos a = \begin{cases}2\cos^2(a/2)\\ 2\sin^2(a/2)\end{cases}$$

▼ Αντίστροφες Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

• Γενικά, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις sin, cos, tan, cot ΔΕΝ είναι αντιστρέψιμες. Αν όμως περιοριστεί το πεδίο ορισμού τους σε κατάλληλο διάστημα και γίνει σωστή επιλογή του συνόλου αφίξεως, τότε αντιστρέφονται και οι αντίστροφές τους είναι συναρτήσεις πολύ σημαντικές για την ανάλυση.

① Αντίστροφη της sin ⟶ Αν περιορίσω το Π.Ο. της sin στο διάστημα $A=[-\pi/2,+\pi/2]$ ~~τότε πεδίο~~ και πάρω $B=[-1,1]$ τότε



sin γνησίως αύξουσα ⇒ sin "1-1" } ⇒ sin αντιστρέψιμη.
$\sin A = B$ ⇒ sin "επι"

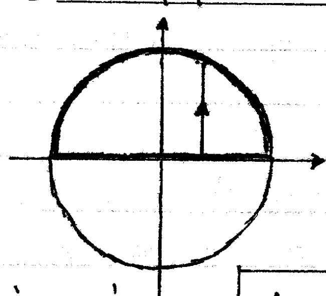
Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση

$$\mathrm{Arcsin}:[-1,1]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

έτσι ώστε $\boxed{\mathrm{Arcsin}\,x=y \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin y \\ -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}}$

• Η Arcsin είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ και φραγμένη με ελάχιστο το $-\pi/2$ και μέγιστο το $+\pi/2$.
• $\forall x\in[-1,1]: |\mathrm{Arcsin}\,x|\leq\frac{\pi}{2}$
• Η Arcsin είναι περιττή, δηλαδή $\forall x\in[-1,1]: \mathrm{Arcsin}(-x)=\mathrm{Arcsin}\,x$.

② Αντίστροφη της cos ⟶ Αν περιορίσω το Π.Ο. της cos στο διάστημα $A=[0,\pi]$ και πάρω $B=[-1,1]$ τότε



cos γνησίως φθίνουσα ⇒ cos "1-1" } ⇒ cos αντιστρέψιμη
$\cos A = B$ ⇒ cos "επι"

Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση

$$\mathrm{Arccos}:[-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$$

έτσι ώστε $\boxed{\mathrm{Arccos}\,x=y \Leftrightarrow \begin{cases} x=\cos y \\ 0\leq y\leq\pi.\end{cases}}$

• Η Arccos είναι γνησίως ~~αύξου~~ φθίνουσα στο $[-1,1]$ και φραγμένη με ελάχιστο το 0 και μέγιστο το π.
• $\forall x\in[-1,1]: 0\leq\mathrm{Arccos}\,x\leq\pi$
• Η Arccos δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Θ. $\boxed{\forall x\in[-1,1]:\ \mathrm{Arcsin}x+\mathrm{Arccos}\,x=\frac{\pi}{2}}$

<u>Απόδειξη</u>

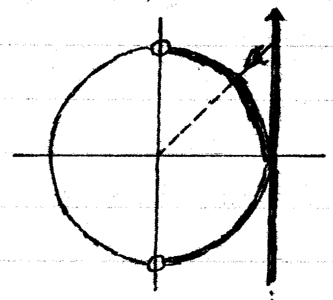
Εστω $x\in[-1,1]$.

Θέτω $y=\mathrm{Arcsin}x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y=x \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y=x \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant -y\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin y=x \\ 0\leqslant\frac{\pi}{2}-y\leqslant\pi\end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-y=\mathrm{Arccos}x.$

Αρα, $\mathrm{Arcsin}x+\mathrm{Arccos}x=y+\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\frac{\pi}{2}$. QED.

③ <u>Αντίστροφη της tan</u> ⟶ Αν περιορίσω το Π.Ο. της tan στο $A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και πάρω $B=\mathbb{R}$ τότε



tan γνησίως αύξουσα ⟹ tan "1-1"
$\tan A=B$ ⟹ tan "επί"
⟹ tan αντιστρέψιμη

Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση
$\mathrm{Arctan}:\mathbb{R}\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

ετσι ώστε $\boxed{\mathrm{Arctan}x=y \Leftrightarrow \begin{cases} x=\tan y \\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\end{cases}}$

- Η Arctan είναι <u>γνησίως αύξουσα</u> και <u>φραγμένη</u> με supremum το $\pi/2$ και infinum το $-\pi/2$.
- $\forall x\in\mathbb{R}:\ |\mathrm{Arctan}x|<\frac{\pi}{2}$
- Η Arctan είναι <u>περιττή</u>, δηλαδή $\forall x\in\mathbb{R}: \mathrm{Arctan}(-x)=\mathrm{Arctan}x$.
- Η Arctan έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και αυτό την καθιστά ιδιαίτερα σημαντική και εύχρηστη συνάρτηση.

⟶ Οι συναρτήσεις Arcsin και Arccos μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της Arctan ως εξής.

Θ.

$\mathrm{Arcsin}x=\mathrm{Arctan}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right],\ \forall x\in(-1,1)$.
$\mathrm{Arccos}x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right],\ \forall x\in(-1,1)$.

<u>Απόδειξη</u> : Έστω $x\in(-1,1)$.

$$\mathrm{Arcsin}\,x=y \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sin y. \\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}, \text{ διότι } x\neq\pm1 \Leftrightarrow \cos y>0. \end{cases}$$

Είναι $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sin y}{\sqrt{1-\underset{\sin}{\cancel{\cos}}^2 y}}=\dfrac{\sin y}{\sqrt{\cos^2 y}}=\dfrac{\sin y}{|\cos y|}=\dfrac{\sin y}{\cos y}=\tan y$

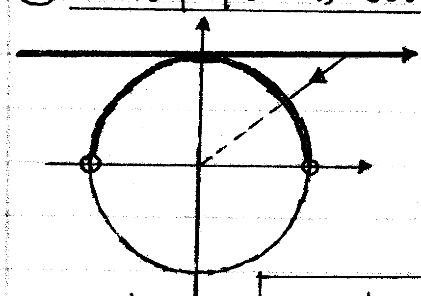
είναι και $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctan}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=y=\mathrm{Arc}\sin x, \quad \forall x\in(-1,1).$$

Όμοια. $\mathrm{Arccos}\,x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arcsin}\,x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$ QED.

▸ <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> : Οι τύποι δεν δίνουν τιμές για $x=\pm1$ άλλα οι συναρτήσεις Arcsin και Arccos ορίζονται <u>και</u> για τις τιμές $x=\pm1$.

④ <u>Αντίστροφη της cot</u> → Αν περιορίσω το Π.Ο. της cot στο $A=(0,\pi)$ και πάρω $B=\mathbb{R}$ τότε



cot γνησίως φθίνουσα $\Rightarrow$ cot "1-1"
$\cot A=B \Rightarrow$ cot "επί" $\Big\}\Rightarrow$ cot αντιστρέψιμη.

Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση
$\mathrm{Arccot}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$

έτσι ώστε $\boxed{\mathrm{Arccot}\,x=y \Leftrightarrow \begin{cases} x=\cot y \\ 0<y<\pi. \end{cases}}$

- Η Arccot είναι <u>γνησίως φθίνουσα</u> και <u>φραγμένη</u> με supremum το π και infimum το 0.
- $\forall x\in\mathbb{R}: 0<\mathrm{Arccot}\,x<\pi$
- Η Arccot δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.

→ Όμοια αποδεικνύεται ότι

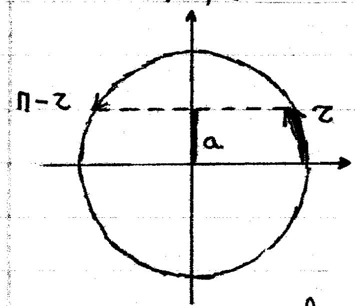
Θ. $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}: \mathrm{Arctan}\,x+\mathrm{Arccot}\,x=\frac{\pi}{2}}$

▼ Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Θεμελιώδεις τριγωνομετρικές εξισώσεις.

① $\boxed{\sin x = a} \Leftrightarrow \sin x = \sin \tau$, όπου $\boxed{\tau = \text{Arcsin}\, a}$

όπου $|a| \leq 1$



Λύσεις: τ , $\pi - \tau$

$2\pi + \tau$, $3\pi - \tau$ (1η περιστροφή)

$4\pi + \tau$, $5\pi - \tau$ (2η περιστροφή)

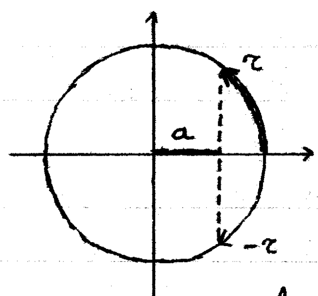
— — — — — — — — —

$2\kappa\pi + \tau$, $(2\kappa+1)\pi - \tau$

Άρα: $\boxed{x = 2\kappa\pi + \tau \ \vee \ x = (2\kappa+1)\pi - \tau}$

② $\boxed{\cos x = a} \Leftrightarrow \cos x = \cos \tau$, όπου $\boxed{\tau = \text{Arccos}\, a}$

όπου $|a| \leq 1$



Λύσεις: τ , $-\tau$

$2\pi + \tau$, $2\pi - \tau$

$4\pi + \tau$, $4\pi - \tau$

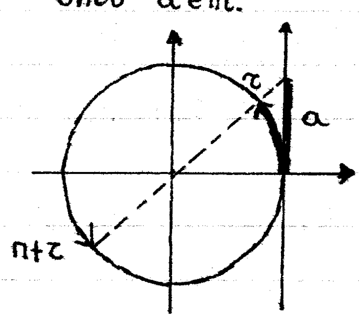
— — — — — —

$2\kappa\pi + \tau$, $2\kappa\pi - \tau$.

Άρα: $\boxed{x = 2\kappa\pi \pm \tau}$

③ $\boxed{\tan x = a} \Leftrightarrow \tan x = \tan \tau$, όπου $\boxed{\tau = \text{Arctan}\, a}$

όπου $a \in \mathbb{R}$.



Λύσεις: τ , $\pi + \tau$

$2\pi + \tau$, $3\pi + \tau$

$4\pi + \tau$, $5\pi + \tau$

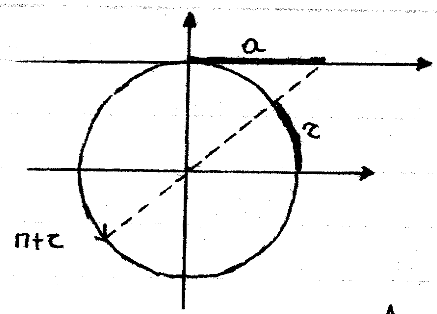
— — — —

$\kappa\pi + \tau$.

Άρα: $\boxed{x = \kappa\pi + \tau}$

④ $\boxed{\cot x = a} \Leftrightarrow \cot x = \cot \tau$, όπου $\boxed{\tau = \text{Arccot}\, a}$

όπου $a \in \mathbb{R}$



Λύσεις: $\tau \quad , \pi+\tau$

$2\pi+\tau \ , \ 3\pi+\tau$

$4\pi+\tau \ , \ 5\pi+\tau$

$- - - - -$

$\kappa\pi+\tau$

Άρα: $\boxed{x=\kappa\pi\pm\tau}$

Ειδικές περιπτώσεις

1) Αν $\alpha=0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi \\ \cos x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \end{array}}$$

2) Αν $\alpha=1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \\ \cos x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi \end{array}}$$

3) Αν $\alpha=-1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x=-1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2} \\ \cos x=-1 \Leftrightarrow x=(2\kappa+1)\pi \end{array}}$$

$, \ \kappa\in\mathbb{Z}$

• **Παραδείγματα**: Να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι εξισώσεις

1) $\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+x-\frac{\pi}{4} \vee \frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=(2\kappa+1)\pi-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x+\frac{3\pi}{4}=6\kappa\pi+3x-\frac{3\pi}{4} \vee x+\cancel{\frac{3\pi}{4}}=(6\kappa+3)\pi-3x+\cancel{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{3\pi}{4}-6\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \vee 4x=(6\kappa+3)\pi \Leftrightarrow x=3\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \vee x=\frac{(6\kappa+3)\pi}{4}$

2) $\sin(\pi-2x)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$ $\qquad$ (• $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, κτλ.)

$\Leftrightarrow \sin(\pi-2x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi+2x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{2}=2\kappa\pi\pm\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $8x-2\pi=8\kappa\pi+4x+\pi \Leftrightarrow 4x=8\kappa\pi+3\pi \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$

$8x-2\pi=8\kappa\pi-4x-\pi \Leftrightarrow 12x=8\kappa\pi+\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$

3) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=0 \Leftrightarrow$ ●→ Για να βάλω το "−" μέσα στο cos

$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right) \Leftrightarrow$ $\quad -\cos x=\cos(\pi-x)$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{3}+2x\right) \Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+2x+\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{7\pi}{12} \\ 3x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-2x-\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{5}-\frac{\pi}{60} \end{cases}$

4) $\tan 3x+\cot 2x=0$

●→ Όταν έχω εξίσωση με tan ή cot τότε πρίν κάνω οτιδήποτε πρέπει να βρίσκω το πεδίο ορισμού

Π.Ο. Πρέπει $\begin{cases} 3x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 2x\neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \\ x\neq \frac{k\pi}{2}. \end{cases}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

●→ Για να βάλω το "−" μέσα στις sin, ~~cos~~, tan, cot χρησιμοποιώ το ότι αυτές οι συναρτήσεις είναι περιττές.

$\tan 3x+\cot 2x=0 \Leftrightarrow \tan 3x=-\cot 2x \Leftrightarrow \tan 3x=\cot(-2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan 3x=\tan\left[\frac{\pi}{2}-(-2x)\right] \Leftrightarrow \tan 3x=\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 3x=k\pi+2x+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{2k\pi+\pi}{2}=\frac{(2k+1)\pi}{2}=\frac{\lambda\pi}{2}$ ⟵ Απορρίπτονται

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

●→ <u>Αλγεβρικές τριγωνομετρικές εξισώσεις με έναν τριγωνομετρικό άγνωστο</u>

Είναι της μορφής ~~f(ημx)~~ $f(\sin x)=0$ ή $f(\cos x)=0$ ή $f(\tan x)=0$ ή $f(\cot x)=0$. Λύνονται με βοηθητική αντικατάσταση.

• <u>Παράδειγμα</u> : Να λυθεί η εξίσωση $(3+\cot x)^2=5(3+\cot x)$

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρέπει $x\neq k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Θέτω $y=3+\cot x$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$y^2=5y \Leftrightarrow y^2-5y=0 \Leftrightarrow y(y-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=5 \end{cases}$ και άρα

$y=0 \Leftrightarrow 3+\cot x=0 \Leftrightarrow \cot x=-3 \Leftrightarrow x=\mathrm{Arccot}(-3)+k\pi$. ⟵ δεκτή

$y=5 \Leftrightarrow 3+\cot x=5 \Leftrightarrow \cot x=2 \Leftrightarrow x=k\pi+\mathrm{Arccot}\,2$ ⟵ δεκτή

Τριγωνομετρικές εξισώσεις με περισσότερους τριγ. αγνώστους

• Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες, τις ανάγω σε εξισώσεις με έναν τριγωνομετρικό άγνωστο κάνοντας ίδια τόξα και ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό.

Παραδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $\cot x + \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 2$

Λύση

Π.Ο. Πρέπει $x \neq \kappa\pi$ και $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq (2\kappa+1)\pi$. Άρα $x \neq \kappa\pi$.

$$\cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1+\cos x) + \sin^2 x = 2\sin x(1+\cos x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin x + 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x + 1 = 2\sin x \cdot \cos x + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + 1 = 2\,\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\,\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + 2\cdot\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

Θέτω $y = \tan\frac{x}{2}$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$\frac{1-y^2}{1+y^2} + 1 = \frac{4y}{1+y^2}\,\frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{4y}{1+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-y^2)(1+y^2) + (1+y^2)^2 = 4y(1-y^2) + 4y(1+y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - y^4 + 1 + 2y^2 + y^4 = 4y - 4y^3 + 4y + 4y^3 \Leftrightarrow 2 + 2y^2 = 8y \Leftrightarrow 1 + y^2 = 4y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 - 4y + 1 = 0 \\ \Delta = 16 - 4 = 12 = 4\cdot 3 \end{array}\right\} \rightarrow y_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{οπότε}$$

$$y = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \kappa\pi + \mathrm{Arctan}(2+\sqrt{3}) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + 2\mathrm{Arctan}(2+\sqrt{3}).$$

δεκτή.

$$y = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \kappa\pi + \mathrm{Arctan}(2-\sqrt{3}) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + 2\mathrm{Arctan}(2-\sqrt{3}).$$

2) Να λυθεί η εξίσωση: $\cos 2x - \sin 3x = 1$.

Λύση

$$\cos 2x - \sin 3x = 1 \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x) - (3\sin x - 4\sin^3 x) = 1 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 3\sin x + 4\sin^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(4\sin^2 x - 2\sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}. \\ \left.\begin{array}{l} 4\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0 \\ \Delta = 4 + 48 = 52 = 4\cdot 13 \end{array}\right\} \rightarrow \sin x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{13}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{4} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{4} > 1 \leftarrow \text{Αδύνατη διότι } |\sin x| \leq 1 \\ \sin x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{4} \in [-1,1] \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{1-\sqrt{13}}{4} \ \vee\ x = (2\kappa+1)\pi - \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{1-\sqrt{13}}{4} \end{cases}$$

• Αφού γίνουν ίδια τόξα, μπορώ να κάνω ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τις ταυτότητες.

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \cot x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}$$

Επειδή όμως με την εισαγωγή του $\tan(x/2)$ περιορίζεται το πεδίο ορισμού (εν'γένει) πρέπει να εξετάσουμε εκ'των υστέρων τις τιμές που εξαιρούμε. Γι'αυτό στις παρακάτω <u>ειδικές</u> περιπτώσεις αυτή η μέθοδος αποφεύγεται:

→ <u>Ειδικές περιπτώσεις</u>

1) <u>Γραμμικές εξισώσεις</u> → $\boxed{a\sin x + b\cos x = \gamma.}$ $: a, b \in \mathbb{R}^*, \gamma \in \mathbb{R}.$

<u>Λύση</u>

$a\sin x + b\cos x = \gamma \Leftrightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{\gamma}{a}$. Θέτω $\frac{b}{a} = \tan\omega$ κι έχω

$\sin x + \tan\omega\cos x = \frac{\gamma}{a} \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\omega}{\cos\omega}\cos x = \frac{\gamma}{a} \Leftrightarrow \sin x\cos\omega + \sin\omega\cos x = \frac{\gamma}{a}\cos\omega$

$\Leftrightarrow \sin(x+\omega) = \frac{\gamma}{a}\cos\omega \overset{*}{=} \sin z \Leftrightarrow \ldots$ κτλ.

* Πρέπει $\left|\frac{\gamma}{a}\cos\omega\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{a^2}\cos^2\omega \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{a^2} \leq \frac{1}{\cos^2\omega} \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{a^2} \leq 1+\tan^2\omega \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{a^2} \leq 1 + \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \underline{a^2+b^2 \geq \gamma^2}.$

• <u>Παράδειγμα</u>

1) Να λυθεί η $\sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x = \sqrt{2}$.

<u>Λύση</u>

$\sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 4x + \tan\frac{\pi}{3}\cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 4x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 4x\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos 4x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{48} \\ 4x + \frac{\pi}{3} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 4x = (2k+1)\pi - \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{4}\pi - \frac{7\pi}{48} \end{cases}$

2) <u>Ομογενής</u> → $\boxed{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + \gamma\cos^2 x = 0}$

<u>Λύση</u>

Αν $\cos^2 x=0$, τότε η εξίσωση γίνεται $a\sin^2 x+0+0=0 \Leftrightarrow \sin^2 x=0$ οπότε $\sin^2 x+\cos^2 x=0 \leftarrow$ Άτοπο. $\rightarrow$ Άρα $\cos^2 x\neq 0$.

Διαιρώ με $\cos^2 x$, οπότε η εξίσωση γίνεται $a\tan^2 x+\beta\tan x+\gamma=0$, δηλαδή αλγεβρική δευτερου βαθμου, κτλ.

- Ομοια λύνεται και η γενική μορφή

$$a_n\sin^n x+a_{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\dots+a_1\sin x\cos^{n-1}x+a_0\cos^n x=0$$

όπου διαιρώ με $\cos^n x\neq 0$.

Ψευδοομογενής $\longrightarrow$ $\boxed{a\sin^2 x+\beta\sin x\cos x+\gamma\cos^2 x=\delta}$

Είναι $a\sin^2 x+\beta\sin x\cos x+\gamma\cos^2 x=\delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\sin^2 x+\beta\sin x\cos x+\gamma\cos^2 x=\delta(\sin^2 x+\cos^2 x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\sin^2 x+\beta\sin x\cos x+\gamma\cos^2 x-\delta\sin^2 x-\delta\cos^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-\delta)\sin^2 x+\beta\sin x\cos x+(\gamma-\delta)\cos^2 x=0 \longleftarrow$ Ομογενής.

- Παραδειγμα

1) Να λυθεί η εξίσωση $\sin^2 x+\sin 2x+2\cos^2 x=\frac{1}{2}$

Λύση

$\sin^2 x+\sin 2x+2\cos^2 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x=\frac{1}{2}(\sin^2 x+\cos^2 x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+4\sin x\cos x+4\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x+4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+4\frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}+3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \tan^2 x+4\tan x+3=0 \rightarrow \tan x=\frac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases}-3\\-1\end{cases}$

$\Delta=16-12=4=2^2$

$\Leftrightarrow$ $\tan x=-1=-\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$

$\tan x=-3 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\mathrm{Arctan}(-3) \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\mathrm{Arctan}3$

3) Συμμετρική $\longrightarrow$ $\boxed{f(\sin x+\cos x,\sin x\cos x)=0}$

Θέτω $\sin x+\cos x=\tau$ οπότε $\sin x\cos x=\frac{1+2\sin x\cos x-1}{2}=\frac{(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)-1}{2}$

$=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}=\frac{\tau^2-1}{2}$ και η εξίσωση γίνεται

$f\left(\tau,\frac{\tau^2-1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \dots\ \tau=\tau_{1,2,\dots,n}$. οπότε

$\sin x+\cos x=\tau_1$ $\longleftarrow$ Γραμμικές.

$\sin x+\cos x=\tau_2$, κτλ

• **Παράδειγμα**

1) Να λυθεί η εξίσωση: $\sin x+\cos x = 1+\sin x\cos x$

Λύση

Θέτω $\sin x+\cos x=\tau$ οπότε $\sin x\cos x = \dots = \frac{\tau^2-1}{2}$ κι έχω

$\tau=1+\frac{\tau^2-1}{2} \Leftrightarrow 2\tau=2+\tau^2-1 \Leftrightarrow \tau^2-2\tau+1=0 \Leftrightarrow (\tau-1)^2=0 \Leftrightarrow \tau-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tau=1 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sin x+\tan\frac{\pi}{4}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=(2\kappa+1)\pi-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=(2\kappa+1)\pi-\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Άλλα είδη τριγωνομετρικών εξισώσεων

• Σε μερικές περιπτώσεις τα αθροίσματα τα κάνω γινόμενα.

Παράδειγμα: Να λυθεί η $\sin 5x-\sin 3x=\sin x$

Είναι

$\sin 5x-\sin 3x=\sin x \Leftrightarrow 2\sin\frac{5x-3x}{2}\cos\frac{5x+3x}{2}=\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos 4x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos 4x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=0 \Leftrightarrow x=\kappa\pi \\ \cos 4x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12} \end{cases}$

• Σε άλλες περιπτώσεις τα γινόμενα τα κάνω αθροίσματα.

Παράδειγμα: Να λυθεί η $2\sin 3x\cdot\sin x=1$.

Είναι $2\sin 3x\cdot\sin x=1 \Leftrightarrow \cos(3x-x)-\cos(3x+x)=1 \Leftrightarrow \cos 2x-\cos 4x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x-(2\cos^2 2x-1)=1 \Leftrightarrow \cos 2x-2\cos^2 2x+1=1 \Leftrightarrow \cos 2x(1-2\cos 2x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ \cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6} \end{cases}$

Λύση τριγωνομετρικής εξίσωσης σε διάστημα

Για να λύσω μία τριγωνομετρική εξίσωση σε διάστημα (α,β) ή $[\alpha,\beta)$ ή $[\alpha,\beta]$ ... εργάζομαι ως εξής:

- 1 Βρίσκω τις γενικές λύσεις συναρτήσει του $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- 2 Τις βάζω στο διάστημα και βρίσκω το κ
- 3 Απο τις γενικές λύσεις βρίσκω το x.

- <u>Παράδειγμα</u> : Να λυθεί στο $[0,\pi)$ η εξίσωση $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{3}$.

<u>Λύση</u>

Π.Ο. Πρεπει $\begin{cases} x+\frac{\pi}{4} \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2} \\ x-\frac{\pi}{4} \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{4} \\ x \neq \kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan x\cdot\tan\frac{\pi}{4}} - \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\tan x}{1-\tan x} - \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow (1+\tan x)^2-(1-\tan x)^2 = 2\sqrt{3}(1-\tan x)(1+\tan x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1}+2\tan x+\cancel{\tan^2 x}-\cancel{1}+2\tan x-\cancel{\tan^2 x} = 2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\tan^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\tan^2 x+4\tan x-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^2 x+2\tan x-\sqrt{3}=0 \quad \tan x = \frac{-2\pm 4}{2\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Delta = 4+12=16=4^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6} & (1) \leftarrow \text{δεκτες} \\ \tan x = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3} & (2) \leftarrow \text{δεκτες.} \end{cases}$$

Αλλα $x\in[0,\pi) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0\leq \kappa\pi+\frac{\pi}{6}<\pi \Leftrightarrow 0\leq \kappa+\frac{1}{6}<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\leq\kappa<\frac{5}{6} \Leftrightarrow \kappa=0$

αρα για $\kappa=0$ η (1) δίνει $x=\pi/6$.

Ομοια $x\in[0,\pi) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0\leq \kappa\pi-\frac{\pi}{3}<\pi \Leftrightarrow 0\leq \kappa-\frac{1}{3}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq\kappa<\frac{4}{3} \Leftrightarrow \kappa=1$

αρα για $\kappa=1$ η (2) δίνει $x=2\pi/3$.

Αρα: $L=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right\}$.

▼ <u>Περιοδικές συναρτήσεις</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> :

Εστω μία συνάρτηση $f\in F_A$.
f περιοδική $\Leftrightarrow \exists\, T\in\mathbb{R}^* : \forall x\in A : (x+T)\in A \wedge f(x+T)=f(x)$

Ο αριθμός Τ αν υπάρχει ονομάζεται <u>περίοδος</u> της συνάρτησης f. Αν μια συνάρτηση έχει περίοδο Τ τότε $\forall \kappa\in\mathbb{Z}^* : \kappa T$ περίοδος f. Απο το σύνολο των περιόδων, την μικρότερη θετική τιμή, ονομάζουμε <u>πρωτεύουσα περίοδο</u>. και την συμβολίζουμε με το T_0.

Βασικές περιοδικές συναρτήσεις

① $\boxed{\text{Η } f(x)=\sin(ax+b) \text{ είναι περιοδική με } T_0=\frac{2\pi}{|a|} \text{ όπου } a\neq 0}$

Απόδειξη

Έστω $T\in\mathbb{R}^*$: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow \sin[a(x+T)+b]=\sin(ax+b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $ax+aT+b=2k\pi+ax+b \Leftrightarrow aT=2k\pi \Leftrightarrow T=\frac{2k\pi}{a}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$ax+aT+b=(2k+1)\pi-ax-b \Leftrightarrow 2ax+aT-(2k+1)\pi+2b=0$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=0 & \leftarrow \text{Αδύνατη, διότι } a\neq 0. \\ aT-(2k+1)\pi+2b=0 \end{cases}$

Άρα $T=\frac{2k\pi}{a} \rightarrow f$ περιοδική με $T_0=\frac{2\pi}{|a|}$

② $\boxed{\text{Η } f(x)=\cos(ax+b) \text{ είναι περιοδική με } T_0=\frac{2\pi}{|a|} \text{ όπου } a\neq 0}$

Απόδειξη

Έστω $T\in\mathbb{R}^*$: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow \cos[a(x+T)+b]=\cos(ax+b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $ax+aT+b=2k\pi+ax+b \Leftrightarrow aT=2k\pi \Leftrightarrow T=\frac{2k\pi}{a}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$ax+aT+b=2k\pi-ax-b \Leftrightarrow 2ax+aT+2b-2k\pi=0$, $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=0 & \leftarrow \text{Αδύνατη, διότι } a\neq 0. \\ aT+2b-2k\pi=0 \end{cases}$

Άρα $T=\frac{2k\pi}{a} \rightarrow f$ περιοδική με $T_0=\frac{2\pi}{|a|}$

③ $\boxed{\text{Η } f(x)=\tan(ax+b) \text{ είναι περιοδική με } T_0=\frac{\pi}{|a|} \text{ όπου } a\neq 0}$

Απόδειξη

Π.Ο. Πρέπει $ax+b\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ax\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-b \Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{a}+\frac{\pi}{2a}-\frac{b}{a}$

Έστω $T\in\mathbb{R}^*$: $\forall x\in\mathbb{R}: f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow \tan[a(x+T)+b]=\tan(ax+b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax+aT+b=k\pi+ax+b \Leftrightarrow aT=k\pi \Leftrightarrow T=\frac{k\pi}{a}$.

Είναι και $\forall x\in A$, $(x+T)\in A$ οπότε f περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο $T_0=\frac{\pi}{|a|}$.

④ $\boxed{\text{Η } f(x)=\cot(ax+b) \text{ είναι περιοδική με } T_0=\frac{\pi}{|a|} \text{ όπου } a\neq 0}$

Ομοίως...

→ Απο τα παραπάνω βλέπουμε ότι (για $a=1$ και $b=0$) οι συναρτήσεις sin, cos είναι περιοδικές με $T_0=2\pi$ ενω οι tan, cot περιοδικές με $T_0=\pi$.

▼ Τριγωνομετρικές ανισώσεις

→ <u>Α' βαθμου</u> → $\boxed{f(x) \gtrless a}$ οπου $f \in \{\sin, \cos, \tan, \cot\}$

Για την επίλυση τους εργάζομαι ως εξής

1) Αν $f=\sin$ ή $f=\cos$

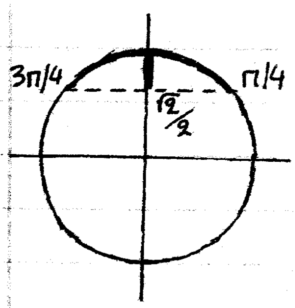
- •1 Βρίσκω στον τριγωνομετρικό κύκλο τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=a$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.
- •2 Βλέπω ποιο απο τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο τριγωνομετρικός κύκλος επαληθεύει την $f(x) \gtrless a$, κι έτσι έχω τις πρωτεύουσες λύσεις στο $[0,2\pi]$
- •3 Προσθέτω στις λύσεις αυτές την περίοδο $2k\pi$ και έχω τις γενικές λύσεις λύνοντας ως προς x.

2) Αν $f=\tan$ ή $f=\cot$, τότε κάνω την ίδια δουλειά στο $[0,\pi]$ και προσθέτω στο τέλος την περίοδο π.

• <u>Παραδείγματα</u>

Να λυθούν οι ανισώσεις

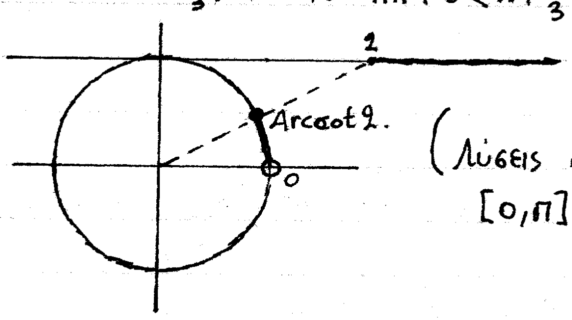
1) $2\sin(3x-1)-\sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sin(3x-1) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2k\pi+\frac{\pi}{4} \leq 3x-1 \leq 2k\pi+\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$



(Λύσεις στο $[0,2\pi]$: $\frac{\pi}{4} \leq 3x-1 \leq \frac{3\pi}{4}$)

$\Leftrightarrow 2k\pi+\frac{\pi}{4}+1 \leq 3x \leq 2k\pi+\frac{3\pi}{4}+1 \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$

2) $\cot(x+\frac{\pi}{3}) \leq 2 \Leftrightarrow k\pi+0 < x+\frac{\pi}{3} \leq k\pi+\text{Arccot}\,2 \Leftrightarrow k\pi-\frac{\pi}{3} < x \leq k\pi+\text{Arccot}\,2-\frac{\pi}{3}$



(Λύσεις στο $[0,\pi]$: $0 < x+\frac{\pi}{3} \leq \text{Arccot}\,2$)

Ανωτέρου του Α' βαθμού

1) Αν έχει έναν άγνωστο, π.χ. το $\sin x$

- •1 Θέτω $y=\sin x$
- •2 Βρίσκω το y
- •3 Λύνω τις τριγωνομετρικές ανισώσεις που προκύπτουν

2) Αν έχει πολλούς αγνώστους και δεν μπορώ να την φέρω στην προηγούμενη μορφή

- •1 Τα πάω όλα στο πρώτο μέλος και παραγοντοποιώ σε παράγοντες πρώτου βαθμού.
- •2 Βρίσκω το πρόσημο του κάθε παράγοντα χώρια.
- •3 Κάνω τον πίνακα και βρίσκω το πρόσημο του γινομένου.
- •4 Βλέπω που αληθεύει η ανίσωση.

• Παραδείγματα

Να λυθούν οι ανισώσεις.

1) $\tan^2 x - (\sqrt{3}+1)\tan x + \sqrt{3} \leqslant 0.$

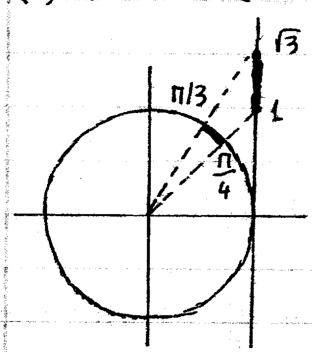
Λύση

Θέτω $y=\tan x$ κι έχω $y^2-(\sqrt{3}+1)y+\sqrt{3} \leqslant 0 \Leftrightarrow y^2-\sqrt{3}y-y+\sqrt{3} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(y-\sqrt{3})-(y-\sqrt{3}) \leqslant 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-\sqrt{3}) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow$

y		1		$\sqrt{3}$	
$(y-1)(y-\sqrt{3})$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant \tan x \leqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow \kappa\pi+\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \kappa\pi+\frac{\pi}{3}$

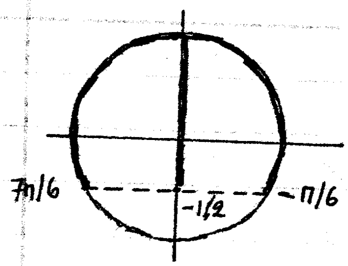


2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1 \geqslant 0$

Λύση

$\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin x - \tan\frac{\pi}{3}\cos x \geqslant -1 \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x \geqslant -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos x \geqslant -\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \geqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$

3) $\sin 2x + \cos x \geq 0.$

Λύση

Είναι $\sin 2x + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x + 1) \geq 0$ (1)

Λύνω την (1) στο $[0,2\pi]$.

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$.

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2})$: $0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 0 \geq \cos x > \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x \leq 1$, διότι cos γν. φθίνουσα στο $[0,\pi/2)$.

$\forall x \in (\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0$.

$\forall x \in (\frac{3\pi}{2},2\pi]$: $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \Rightarrow \cos x > 0$.

$2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}$

Ομοια, $\forall x \in [0,\frac{7\pi}{6})$: $\sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin x + 1 > 0$.

$\forall x \in (\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$: $\sin x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin x + 1 < 0$

$\forall x \in (\frac{11\pi}{6},2\pi]$: $\sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin x + 1 > 0$.

Αρα

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\cos x$		+	0	−		−	0	+		+	
$2\sin x+1$		+		+	0	−		−	0	+	
		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Αρα: $2\kappa\pi \leq x \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \vee 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \leq x \leq 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \vee 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6} \leq x \leq (2\kappa+2)\pi.$