# Μ.Κ.Δ. — Ε.Κ.Π.

- Πρώτος λέγεται ο αριθμός ο οποίος έχει σαν διαιρέτες του τον εαυτό του και τη μονάδα π.χ. ο αριθμός 3 έχει διαιρ. το 1 και το 3
- Δυο αριθμοί λέγονται πρώτοι μεταξύ τους όταν ο Μ.Κ.Δ. τους είναι το 1

| Μ.Κ.Δ. | Ε.Κ.Π. |
|---|---|
| ① Κάνουμε την ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων | ① Κάνουμε την ανάλυση των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων |
| ② Παίρνουμε μόνο τους κοινούς παράγοντες των αριθμών με τον μικρότερο εκθέτη. | ② Παίρνουμε κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη. |

π.χ. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των αριθμών (15, 60, 90)

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 15 = 3\cdot 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 60 = 2^2\cdot 3\cdot 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 90 = 2\cdot 3^2\cdot 5 \end{array}$$

$$Μ.Κ.Δ.(15, 60, 90) = Μ.Κ.Δ.(3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3^2\cdot 5) = 3\cdot 5 = 15$$

$$Ε.Κ.Π.(15, 60, 90) = Ε.Κ.Π.(3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 3^2\cdot 5) = 2^2\cdot 3^2\cdot 5 = 180$$

## ΚΛΑΣΜΑΤΑ

- Ανάγωγο λέγεται το κλάσμα στο οποίο οι όροι του είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους. π.χ $\frac{3}{5}$. Για να τρέψω ένα κλάσμα σε ανάγωγο, διαιρώ τους όρους του με το Μ.Κ.Δ. τους
  π.χ $\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$ , Μ.Κ.Δ. $(8, 12) = 4$
- Όταν έχουμε παρονομαστή αρνητικό τον τρέπουμε σε θετικό. Το ίδιο και για τον αριθμητή. π.χ. $\frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$ , $\frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$ , $\frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$
- Σύνθετα κλάσματα

① $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{6}} = \dfrac{2\cdot 6}{3\cdot 4} = \dfrac{12}{12} = 1$ , $\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} = -\dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = -\dfrac{8}{15}$

② $\dfrac{\frac{3}{4}}{3} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{1}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ , $\dfrac{\frac{3}{4}}{-5} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{-5}{1}} = \dfrac{3}{-20} = -\dfrac{3}{20}$

③ $\dfrac{3}{\frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{3}{1}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{15}{4}$ , $\dfrac{-3}{\frac{4}{5}} = \dfrac{-\frac{3}{1}}{\frac{4}{5}} = -\dfrac{15}{4}$

Να γίνουν οι πράξεις :

1) $-2(3-5+6-7)+2(-3+4-5-6)-(-2)(-5-4+6-8)$

2) $-1\frac{2}{3}+\left(5\frac{1}{6}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)-\left(-3\frac{1}{3}\right)-\left(4\frac{1}{2}\right)$

3) $-10\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{-4}\right)+\left[-2+\left(-\frac{-3}{-4}\right)\right]-\left[-5-\left(-\frac{-3}{2}\right)\right]$

4) $\left(5\cdot\frac{1}{2}-3\right)\left(2-3\frac{1}{3}\right)-\left(4\frac{1}{2}-12\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-3-2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{2}+2\right)\cdot(-4+2)$

5) $\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(1\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(1\frac{1}{5}\right)$

6) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$

7) $\left[\left(5-\frac{1}{-2}+\frac{3}{-4}\right)\cdot(-2)-\left(-\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}-\left(-2\frac{1}{2}\right)\right)\right]:(-3)$

8) $\left(-4+\frac{7}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(2-\frac{1}{6}\right):(-11)-\left(-\frac{3}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)$

9) $\dfrac{\frac{-2}{-3}+\frac{-3}{2}-5+\frac{2}{-3}}{5-\left(\frac{1}{2}-\frac{-2}{-3}\right)}\cdot\dfrac{-3-\frac{-2}{3}+\left(3-\frac{-1}{-2}\right)}{-\frac{1}{2}-\frac{2}{-3}+\frac{-5}{6}}$

10) Αν $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{2}{3}$, $\gamma=\frac{1}{4}$, $\delta=\frac{1}{3}$ να βρεθούν τα:

α) $(\alpha-\beta)\cdot\gamma$ β) $\dfrac{\alpha\beta-\delta}{\gamma-\alpha\beta}\cdot\left(-\dfrac{-3\alpha+6\beta}{2\gamma+3\delta}\right)+1$

γ) $\dfrac{-(\alpha-\beta)}{1-(\gamma-\delta)}-\dfrac{-(2-\gamma)}{1-(-\alpha\gamma+\beta)}$ δ) $\alpha\beta(-\gamma)(-\delta)$

ε) $-2\alpha+3\beta-4\gamma-3\delta$ στ) $8\alpha-6\beta+16\gamma+9\delta$

ζ) $\dfrac{3\alpha\beta-6\gamma\delta}{5\alpha:\beta}$ η) $(3\alpha-2\beta):(\gamma-2\delta)$

# ΔΥΝΑΜΕΙΣ

**Δύναμη ρητού με εκθέτη ακέραιο:** Είναι ένα γινόμενο που όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι μεταξύ τους.

$$a^\nu = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\nu \text{ φορές}}$$

- **Ιδιότητες:**
  1. $a^1 = a$
  2. $0^\nu = 0$, $\nu \in N^*$
  3. $1^\nu = 1$
  4. $10^\nu = 1\underbrace{00\ldots0}_{\nu \text{ μηδενικά}}$
  5. $a^\nu \cdot a^\mu = a^{\nu+\mu}$
  6. $(a^\nu)^\mu = a^{\nu\mu}$
  7. $a^0 = 1$
  8. $a^{-\nu} = \dfrac{1}{a^\nu}$ $(\nu \in N)$
  9. $a^\nu : a^\mu = a^{\nu-\mu}$
  10. $(ab)^\nu = a^\nu \cdot b^\nu$
  11. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\nu = \dfrac{a^\nu}{b^\nu}$, $b \neq 0$

- **Προσοχή:** $\dfrac{a^\nu}{b} \neq \dfrac{a^\nu}{b^\nu}$, $\dfrac{a^\nu}{b} \neq \left(\dfrac{a}{b}\right)^\nu$

$$(a+b)^\nu \neq a^\nu + b^\nu$$

π.χ. $(5+3)^2 \neq 5^2 + 3^2$ διότι: $(5+3)^2 = 8^2 = 64$, ενώ $5^2 + 3^2 = 34$

- Αν $a$ θετικός $\Rightarrow$ $a^\nu$ θετικός
- Αν $a$ αρνητικός $\begin{cases} \wedge\ \nu \text{ άρτιος} \Rightarrow a^\nu \text{ θετικός} \\ \wedge\ \nu \text{ περιττός} \Rightarrow a^\nu \text{ αρνητικός} \end{cases}$

π.χ. $(-3)^2 = 9$, $(-3)^3 = -27$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$

- **Προσοχή:**

1. $\begin{cases} -3^2 = -9 \\ (-3)^2 = 9 \end{cases}$

2. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

Να γίνουν οι πράξεις:

1. α) $4^{-2}$ , β) $(-7)^{-2}$, γ) $(-1)^{1}$ δ) $(-1)^{-2}$ ε) $(-1)^{31}$ στ) $-(-1)^{-3}$
ζ) $-4^{-2}$ η) $-(-7)^{-2}$, θ) $(-1)^{2}$, ια) $-(-1)^{-3}$, ιβ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$, ιγ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
ιδ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ ιε) $(-0,2)^{3}$ ιστ) $(-2)^{-3}$ ιζ) $(-4)^{3}$ ιη) $-(-5)^{-2}$ ιθ) $-(-2)^{7}$

2. $2^{-2}+4^{-1}+3^{0}-8^{1}+(-1)^{-2}$

3. $2^{x-4}-6\cdot 4^{x-3}+1^{x-2}-5^{x-1}$ αν $x=1$

4. α) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}+2^{2}\right)^{2}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+2^{-2}\right)$ β) $\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]^{2}:$
$\left[-2\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+1\right]^{2}$ γ) $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{2}+1$
δ) $\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]^{2}$ ε) $\left[5-(2+3)\right]^{3}-\left(3-(2+3)+3\right)^{8}$

5. Αν $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\gamma=(-1)^{2}$, $\delta=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, να υπολογισθεί:
$a^{-\gamma}\cdot b^{a}+\gamma^{\delta}-\delta^{\gamma}+a^{-a}+b^{\gamma}-\delta^{a}$

6. Αν $a=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $b=-2^{-2}$, $\gamma=-3^{-1}$, $\delta=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, να υπολογισθεί:
α) $(a+b\cdot\gamma):\delta-1$, β) $(a-b)^{-1}+(b-\gamma)^{-1}+(\gamma-\delta)^{-1}$
γ) $(a+b+\gamma+\delta)^{-1}+1$ δ) $(a:b)^{-1}+(b-\gamma)^{-1}+(\gamma:\delta)^{-1}$

7. $2x^{-2}-2^{-x}+x^{x}-3(-1)^{-3}$ αν $x=2$

8) $(x+4)\cdot 2^{x-2}-3\cdot 3^{x+1}+6\cdot 3^{x-1}$ αν $x=0$

9) $(4x^{x})^{2}-6(xy)^{xy}-y^{2y}$ αν $y=2$, $x=-1$

10) Αν $x=2^{-1}$, $y=-2$ να βρεθεί το $\frac{x^{2}-y^{2}}{x-y}$

11) Αν $x=1$ να βρεθεί: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^{x-4}+\left(\frac{1}{3}-x\right)^{x-3}+(1-x)^{2x^{2}}+(-1)^{x-1}$

12) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3}+\left(-\frac{1}{5}\right)^{x-2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1}+(-1)^{x}$, αν $x=1$

# ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

① Με τι ισουνται τα παρακατω γινομενα:
$a^3 \cdot a^2$ , $a \cdot a^5$ , $a^2 \cdot a^6$ , $x^5 \cdot x^3$ , $x^4 \cdot x^2 \cdot x$ , $x^2 \cdot x^3 \cdot x^2$ ,
$y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$ , $y^2 \cdot y^5 \cdot y^6$ , $y^2 \cdot y \cdot y^3 \cdot y^4$

② Με τι ισουνται οι παρακατω δυναμεις:
$(a^2)^3$ , $(a^3)^4$ , $(x^3)^2$ , $(x^4)^5$ , $(y^{10})^2$ , $(y^7)^3$

③ Να υπολογισθουν οι δυναμεις:
$(a\beta\gamma)^4$ , $(3xy\omega)^3$ , $(-4ax\omega)^2$ , $(5\beta\gamma\delta)^3$
$2a(\beta\gamma)^3$ , $(-3x)^2 y\omega$ , $(-a\beta\gamma)^\nu$ , $(-5xy\omega)^\mu$

④ Το γινομενο $9 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 4^3 \cdot 3^2$ να μετασχηματισθει σε γινομενο δυο δυναμεων πρώτων παραγόντων

⑤ Το γινομενο $9 \cdot 25 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 5^4$ να μετασχηματισθει σε δυναμη ενος αριθμου

⑥ Με τι ισουνται τα παρακατω πηλικα;
$a^8 : a^5$ , $x^5 : x^4$ , $a^7 : a^6$ , $y^6 : y^4$
$x^8 : x^4$ , $y^{10} : y^7$ ,
$a^5 : a^8$ , $\beta^3 : \beta^3$ , $\gamma^5 : \gamma^6$ , $\delta^5 : \delta^7$

⑦ Να εφαρμοσθουν οι ιδιοτητες των δυναμεων:
$a^{-2} \cdot a^0 \cdot a^2$ , $[(-a)^2]^{-3}$ $(3a\beta\gamma)^{-2}$
$\beta^{-3} \cdot \beta^1 \cdot \beta^0 \cdot \beta^4$ , $(\beta^\nu)^{-\mu}$ $x^6 : x^{-7}$

⑧ Να εφαρμοσθουν οι ιδιοτητες των δυναμεων και να δοθει το αποτελεσμα σε γινομενο δυο δυναμεων

α) $$\frac{a\beta^{-2} \cdot (a^{-1} \cdot \beta^2)^4 \cdot (a\beta^{-1})^2}{a^{-2} \cdot \beta\,(a^2\beta^{-1})^3 \cdot a^{-1} \cdot \beta}$$

β) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

1. Να τραπουν σε δεκαδικους οι:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{3}{8}$ γ) $\frac{7}{40}$, δ) $\frac{27}{20}$ ε) $\frac{5}{7}$ στ) $\frac{3}{11}$ ζ) $\frac{7}{15}$

2. Να τραπουν σε κλασματα οι:

α) 5,24 β) 3,02 γ) 0,003 δ) 4,525252

ε) 3,78989... στ) 4,53535... ζ) 2,01234234...

η) 3,999... θ) 5,1999... ι) 2,3456756756...

3. Να γινουν οι πραξεις:

α) $5,\overline{8} - 2,\overline{35}$ β) $4,5 - 2,\overline{3}$ γ) $5,47 \cdot 0,\overline{2}$

δ) $3,\overline{4} - 5,1 + 2,\overline{3}$ ε) $3\frac{1}{2} - 5,3 + 4,\overline{2}$ στ) $3\frac{1}{3} + 2,\overline{3} + 5,1$

4. Να βρεθουν οι ριζες με προσεγγιση δεκατου

α) $\sqrt{53}$ β) $\sqrt{432}$ γ) $\sqrt{7}$ δ) $\sqrt{5321}$ ε) $\sqrt{45678}$

στ) $\sqrt{3,1}$ ζ) $\sqrt{3,12}$ η) $\sqrt{53,431}$ θ) $\sqrt{56,2}$ ι) $\sqrt{534567}$

5. Να γινουν απλουστερα τα ριζικα:

α) $\sqrt{128}$ β) $\sqrt{18}$ γ) $\sqrt{180}$ δ) $\sqrt{245}$ ε) $\sqrt{3200}$

6. Να γινουν οι πραξεις:

α) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2}$ β) $2\sqrt{3} + \sqrt{12}$ γ) $\sqrt{3} + \sqrt{27}$ δ) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$

ε) $\sqrt{6} + \sqrt{24} + 3\sqrt{54} - 2\sqrt{6}$ στ) $\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{98}$

ζ) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75}$ η) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{125} - 3\sqrt{48} + \sqrt{75} - \sqrt{8}$

7. Ομοια:

α) $\sqrt{375} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{405}$ β) $\sqrt{275}\,\sqrt{135} \cdot \sqrt{165}$ γ) $\sqrt{3}\,\sqrt{12}\,\sqrt{24}\,\sqrt{72}$

8. Ομοια:

α) $(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})$ β) $(\sqrt{72} - 5\sqrt{18})(\sqrt{8} + 2\sqrt{32})$ γ) $(5+\sqrt{12})(8-\sqrt{3})$

δ) $(\sqrt{5} - \sqrt{27})^2$ ε) $(4\sqrt{2} - 5\sqrt{3})^2$ στ) $(\sqrt{32} - \sqrt{75})(\sqrt{45} + \sqrt{27})$

9. Να γινουν οι πραξεις:

α) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$ β) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{45}}$ γ) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{27}}$ δ) $\sqrt{\frac{2}{9}}$ ε) $\sqrt{\frac{31}{44}}$

10. Να γινουν με ρητο παρ/στη

α) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ γ) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$ δ) $\frac{6}{\sqrt{48}}$ ε) $\frac{5}{\sqrt{162}}$

# ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ



1. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνω ΑΔ = ΑΕ Να δειχθεί ότι ΓΔ = ΒΕ
2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνω την διάμεσο ΑΜ και την προεκτείνω κατά ΜΔ = ΑΜ Να δειχθεί ότι ΓΔ = ΑΒ
3. Μ είναι το μέσον ενός ευθ. τμήματος ΑΒ. Φέρνω ευθεία πού νά περνά από το Μ και πάνω σ' αυτήν παίρνω τμήματα ΜΓ = ΜΔ. Να δειχθεί ότι $\widehat{ΑΓΜ} = \widehat{ΒΔΜ}$.

4. Πάνω σε δύο παρ/λες ευθείες παίρνω από 2 σημεία Α,Ρ και Μ,Β ώστε ΑΡ = ΒΜ. Να δειχθεί ότι τα μέσα των ΑΒ και ΡΜ συμπίπτουν

5. Αν η διχοτόμος ενός τριγώνου είναι και διάμεσος τότε το τρίγωνο → ισοσκελές
6. Αν -"- -"- -"- -"- -"- -"- ύψος -"- -"- -"-
7. Αν -"- διάμεσος -"- -"- -"- -"- -"- -"- -"- -"-

8. Οι κορυφές Α και Γ παρ/μου ισαπέχουν από τη διαγώνιο ΒΔ.
9. Τα άκρα Α, Β ευθ. τμήματος ΑΒ ισαπέχουν από κάθε ευθεία που περνά από το μέσο Μ του ΑΒ.

10. Τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του.
11. Δίνεται $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ όπου ΑΜ η διάμεσος από την κορυφή Α. Αν ΒΕ και ΓΖ οι αποστάσεις των Β και Γ από την διάμεσο ΑΜ, να δείξετε ότι ΒΕ = ΖΓ
12. Δίνεται $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσον της βάσεως ΒΓ. Αν Μ το μέσον της ΒΓ να δείξετε ότι απέχει εξ ίσου από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ.
13. Δίνεται $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$. Εξωτερικά του φέρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ, και ΑΕ = ΑΓ και έτσι ώστε $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΓΑΕ}$. Να δείξετε ότι: ΒΕ = ΓΔ

14. Θεωρούμε $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές. (ΑΒ = ΑΓ) Στις προεκτάσεις της βάσεώς του ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ, τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ. Να δείξετε ότι το $\overset{\triangle}{ΑΕΖ}$ είναι επίσης ισοσκελές.

15. Δίνεται $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισόπλευρο. Προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, προς τις κορυφές Β, Γ, Α, και παίρνουμε στις προεκτάσεις, τμήματα ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ. Να δείξετε ότι το $\overset{\triangle}{ΔΕΖ}$ είναι επίσης ισόπλευρο τρίγωνο.

1. Η γωνια $\hat{A}$ τριγωνου ειναι $10^\circ$ μεγαλύτερη απο τήν $\hat{\Gamma}$ και η $\hat{B}$ ειναι $40^\circ$ μεγαλυτερη απο την $\hat{A}'$. Να βρεθούν οι γωνιες του.

2. Οι γωνιες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τριγώνου διαφέρουν $10^\circ$ και η $\hat{A}$ ειναι $20^\circ$ μικροτερη απο τήν μεγαλύτερη απο αυτές. Να βρεθούν οι γωνιες.

3. Η γωνία $\hat{B}$ τριγώνου ειναι το μισο της γωνιας $\hat{A}$. Η γωνια $\hat{\Gamma}$, ειναι $120^\circ$ μικρότερη απο το άθροισμα των δυο άλλων. Να βρεθούν οι γωνιες.

4. Η γωνία $\hat{A}$ τριγώνου ειναι $20^\circ$ μεγαλύτερη απο την γωνία $\hat{\Gamma}$. Η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ειναι $40^\circ$ μικρότερη απο το διπλάσιο της $\hat{A}$. Να βρεθούν οι γωνιες.

5. Η γωνία $\hat{A}$ ειναι $5^\circ$ μεγαλύτερη απο την $\hat{B}$ και η $\hat{B}$ τριπλάσια της $\hat{\Gamma}$. Να βρεθούν οι γωνίες.

6. Η γωνία $\hat{A}$ τριγώνου ειναι τα $\frac{3}{2}$ της $\hat{B}$ και η $\hat{\Gamma}$, ειναι $16^\circ$ μικροτερη απο το τριπλάσιο της $\hat{A}$. Να βρεθούν οι γωνίες.

7. Η γωνία $\hat{B}$ τριγώνου είναι κατά $30^\circ$ μικρότερη απο το διπλάσιο της $\hat{A}$. Η $\hat{\Gamma}$, το διπλάσιο της κατα $30^\circ$ μικροτερης της $\hat{A}$. Να βρεθούν οι γωνίες.

8. Η γωνία $\hat{B}$ τριγώνου ειναι κατά $80^\circ$ μικρότερη απο το διπλάσιο της $\hat{A}$. Η $\hat{\Gamma}$ κατά $20^\circ$ μικρότερη απο το άθροισμα των 2 άλλων. Να βρεθούν γωνίες του τριγώνου

9. Η γωνία $\hat{\Gamma}$ τριγώνου είναι ίση με το διπλάσιο της κατά $20^\circ$ μικροτερης της $\hat{B}$. Η $\hat{A}$ κατα $20^\circ$ μικρότερη της $\hat{B}$. Να βρεθούν οι γωνιες του τριγώνου

10. Η γωνία $\hat{A}$ τριγώνου ειναι $10^\circ$ μεγαλύτερη απο την $\hat{\Gamma}$ και κατά $10^\circ$ μικρότερη απο το άθροισμα των δυο άλλων. Να βρεθούν οι γωνίες.

196 | 28
56 | 28

# ΕΜΒΑΔΑ

## Μοναδες μετρησεως επιφανειων

Καθε μοναδα ειναι 100 φορες μεγαλυτερη (μικροτερη) απο την αμεσως κατωτερη (ανωτερη) μοναδα

τετραγωνικο χιλιομετρο $km^2$
εκατομετρο $hm^2$
δεκαμετρο $dam^2$
$\boxed{\text{τετραγωνικο μετρο} \quad m^2}$
δεκατομετρο $dm^2$
εκατοστομετρο $cm^2$
χιλιοστομετρο $mm^2$

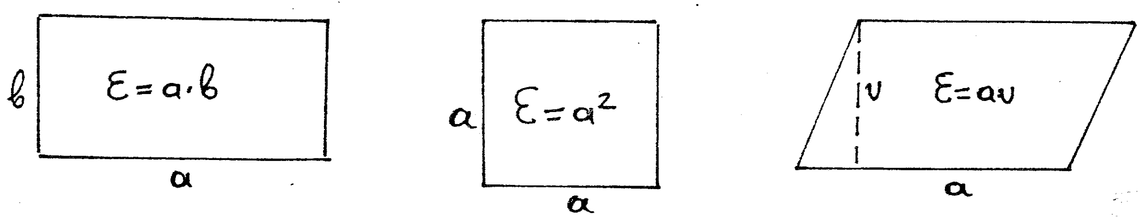
↓ $\cdot 100$ ↑ $: 100$

$\boxed{1\text{στρεμμα} = 1000 m^2}$

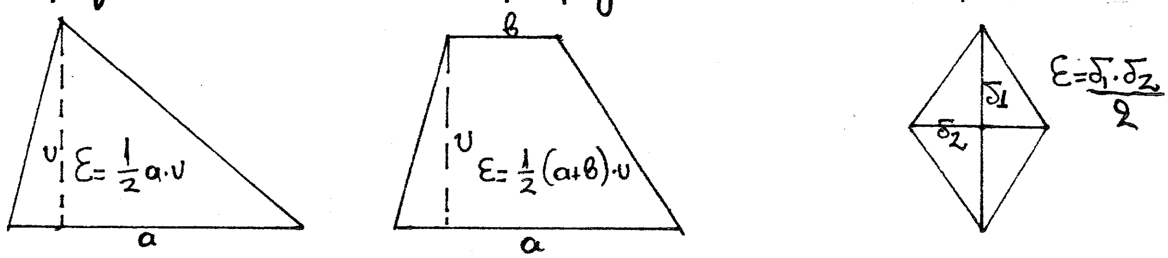
## Εμβαδα Σχηματων

Δυο σχηματα, που εχουν το ιδιο εμβαδο, λεγονται ισοδυναμα.

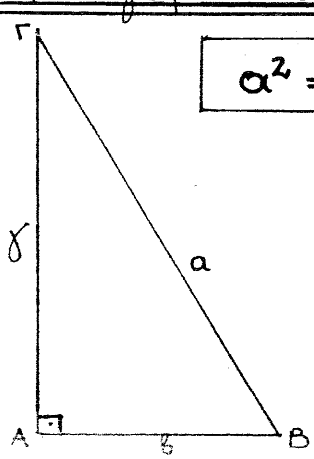
Ορθογωνιο Τετραγωνο Παραλληλογραμμο




Τριγωνο Τραπεζιο Ρομβος




## Πυθαγορειο θεωρημα




$$\boxed{a^2 = β^2 + γ^2}$$

Το τετραγωνο της υποτεινουσας ενος ορθογωνιου τριγωνου ειναι ισο με το αθροισμα των τετραγωνων των δυο καθετων πλευρων

√1. Σε ενα παραλληλογραμμο ΑΒΓΔ ειναι ΑΒ = 8cm και ΑΔ = 10cm, η γωνια του Δε $\hat{A}$ ειναι 45°. Να βρειτε το εμβαδο του.

√2. Ενα ισοπλευρο τριγωνο εχει πλευρα α. Να αποδειξετε οτι το υψος του, ειναι $υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$ και το εμβαδο του $Ε = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$

Εφαρμογη: 1) α = 6cm 2) α = 10cm 3) $α = \sqrt{3}$ cm

√3. Να βρειτε την πλευρα α και το εμβαδο Ε ενος ισοπλευρου τριγωνου που το υψος του ειναι $υ = 5\sqrt{3}$ cm

√4. Η διαγωνιος ενος τετραγωνου ειναι 10cm. Να βρειτε το εμβαδο του

Γενικευση: Να βρειτε το εμβαδο τετραγωνου με διαγωνιο δ.

5. Να βρειτε το υψος και το εμβαδο ενος ισοπλευρου τριγωνου που η πλευρα του ειναι ιση με τη διαγωνιο τετραγωνου πλευρας 5cm

6. Να βρειτε το εμβαδο ισοσκελους τριγωνου που εχει βαση 10cm και η περιμετρος ειναι 50cm

7. Ενα ορθογωνιο τριγωνο εχει εμβαδο $24cm^2$ και μια καθετη πλευρα 6cm. Να βρειτε τις αλλες δυο πλευρες του και το υψος που αντιστοιχει στην υποτεινουσα.

8. Ορθογωνιου τριγωνου το εμβαδο ειναι $24cm^2$ και η μια καθετη πλευρα του ειναι $\frac{4}{3}$ της αλλης. Να βρειτε το υψος που αντιστοιχει στην υποτεινουσα

9. Η υποτεινουσα ΒΓ ορθογωνιου τριγωνου ΑΒΓ ειναι ιση με την πλευρα ισοπλευρου τριγωνου που εχει εμβαδο $25\sqrt{3}\ cm^2$. Η καθετη πλευρα του ΑΒ ειναι ιση με τη διαγωνιο τετραγωνου πλευρας $3\sqrt{2}$ cm. Να βρειτε το υψος που αντιστοιχει στην υποτεινουσα του.

10. Ενα ισοσκελες τριγωνο εχει περιμετρο 32cm και η βαση του ειναι 2cm μεγαλυτερη απο τις ισες πλευρες του. Να βρειτε τα υψη του.

11. Σε ενα τριγωνο ΑΒΓ το υψος ΑΔ = 12cm, το εμβαδο $Ε = 84cm^2$ και ΒΔ = 9cm. Να βρειτε τα αλλα δυο υψη του ΒΕ και ΓΖ.

12. Ρομβος εχει περιμετρο 48cm και μια διαγωνιο 10cm. Να βρειτε το εμβαδο του.

13. Ρομβος εχει μια διαγωνιο 24cm και εμβαδο $216cm^2$. Να βρειτε την αλλη διαγωνιο και την πλευρα του.

14. Να βρειτε τις διαγωνιους ρομβου, αν ειναι γνωστο οτι η μια ειναι διπλασια απο την αλλη και οτι το εμβαδο του ρομβου ειναι $169\ m^2$

15. Ισοσκελες τραπεζιο εχει βασεις 20cm και 38cm. Καθε μια απο τις μη παραλληλες πλευρες του ειναι 15cm. Να βρειτε το υψος και το εμβαδον του τραπεζιου.

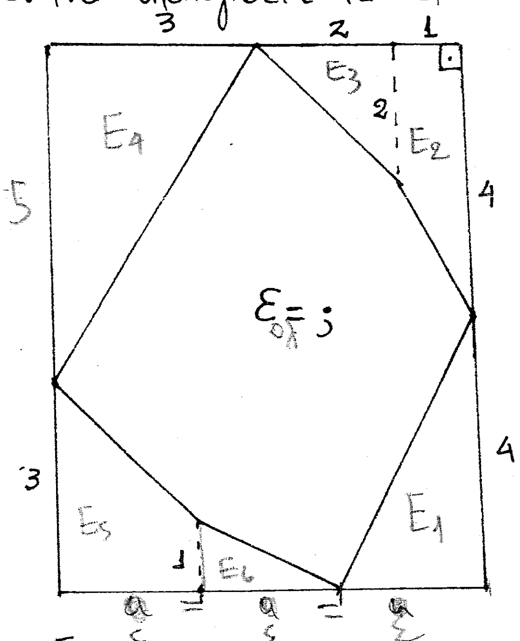
**16.** Ενα τετραγωνο εχει πλευρα $10\sqrt{2}$cm. Να βρειτε τις βασεις ενος τραπεζιου ισοδυναμου με το τετραγωνο, που εχει $υ=5$cm και η μια βαση του ειναι τριπλασια απο την αλλη.

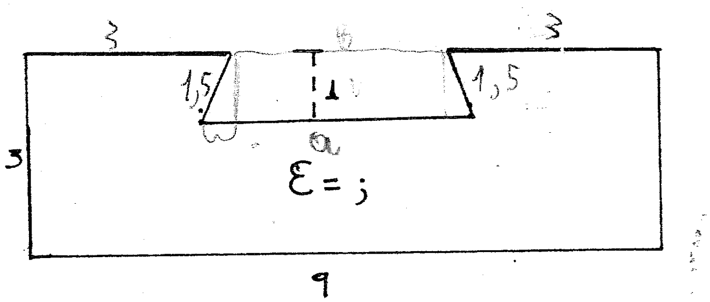
**17.** Ισοσκελες τραπεζιο εχει $Ε=112\,m^2$, $υ=8m$ και καθε μια απο τις μη παραλληλες πλευρες του ειναι 10m. Να βρειτε τις βασεις του. Στη συνεχεια να βρειτε το εμβαδο ρομβου με διαγωνιους ισες με τις βασεις του τραπεζιου.

**18.** Το εμβαδο ενος ισοσκελους τραπεζιου ειναι $64\,cm^2$ και το υψος του 6cm. Η μια βαση του ειναι 1cm μικροτερη απο το διπλασιο της αλλης. Να βρειτε την περιμετρο του τραπεζιου.

**19.** Σε ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90°$) ειναι ΑΒ = 6cm και ΑΓ = 8cm. Φερνουμε το υψος ΑΔ και το προεκτεινουμε κατα τμημα ΔΕ = 6cm. Να βρειτε το εμβαδο και την περιμετρο του τετραπλευρου ~~ΑΒΕΓ~~ ΑΒΕΓ.

**20.** Να υπολογισετε τα εμβαδα των παρακατω σχηματων:




**21.** Σε τριγωνο ΑΒΓ το υψος ΑΔ = 12cm και το εμβαδον του ειναι $84\,cm^2$. Η ΒΔ = 9cm. Να βρεθουν τα υψη του

**22.** Αν σε ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ η ΑΒ = 5cm και η ΑΓ = $5\sqrt{2}$cm, τοτε αν ΑΔ το υψος του $\Rightarrow ΒΔ = \frac{1}{3}ΒΓ$

**23.** Σε ορθογωνιο ΑΒΓΔ οι διαστασεις του ειναι 4cm και 6cm. Αν Α' και Γ' ειναι οι προβολες των Α και Γ πανω στη ΒΔ, βρειτε το ΔΑ', Α'Γ', ΒΓ'

# ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

① Άν $\frac{3-2x}{2} = \frac{5-4x}{3}$ να βρεθει ο x

② Αν $\frac{x}{y} = \frac{21}{35}$ να βρεθουν τα $\frac{x-y}{y}$, $\frac{x+y}{y}$, $\frac{y-x}{y}$, $\frac{x+y}{x}$

③ Αν $\frac{x}{2} = \frac{y}{7}$ -||- -||- -||- -||-

④ Να βρεθει ο μεσος αναλογος των αριθμων 16 και 25

⑤ Ομοια των −9 και −64

⑥ Να βρεθουν τα x και y αν ξερω οτι $\frac{x}{6} = \frac{y}{8}$ και $x+y=70$

⑦ -||- -||- -||- -||- $\frac{x}{y} = \frac{10}{6}$ και $x-y=46$

⑧ -||- -||- -||- -||- $\frac{x}{y} = \frac{14}{10}$ και $2x-3y=25$

⑨ -||- -||- -||- -||- $\frac{x-3}{x+7} = \frac{y+8}{y+3}$ και $x+y=13$

⑩ -||- -||- -||- -||- $\frac{x-5}{x+2} = \frac{y-7}{y+9}$ και $x-y=12$

⑪ -||- -||- -||- -||- $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ και $x=3y+5$

⑫ Αν $\frac{2}{x} = \frac{3}{y} = \frac{4}{\omega}$ και $2x-3y+5\omega=121$ να βρεθουν τα $x, y, \omega$

⑬ Αν $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{\omega}{5}$, $x+y+\omega=200$ -||- -||- -||-

⑭ Αν $\frac{x}{y} = -2$ να βρεθουν τα $\frac{2x+y}{x+3y}$, $\frac{2x-3y}{4x-5y}$

⑮ Δυο αυτοκινητιστες μετεφεραν εμπορευματα και πηραν 6.800 δρχ. Ο α' μετεφερε 4,5 τον σε αποσταση 40 km και ο β' 50 τον σε αποσταση 32 km Ποσες δρχ πρεπει να παρει ο καθενας;

⑯ Δυο βοσκοι νοικιασαν αγρο και εδωσαν 2.850 δρχ. Ο α' βοσκησε 200 προβατα επι 25 μερες και ο β' 150 προβατα επι 30 μερες. Ποσο θα πληρωσει ο καθενας;

⑰ Να βρεθουν τα $x, y, \omega$ αν ξερω οτι

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{\omega}{\frac{1}{4}} \quad \text{και οτι} \quad 5x+4y-7\omega=50$$

$\frac{x}{y} = \frac{-2}{1}$ $x=-2y$

# ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Κριτήρια Ομοιότητος

(1) Αν δυο τριγωνα εχουν δυο γωνιες ισες μια προς μια, ειναι ομοια

(2) Αν δυο τριγωνα εχουν δυο πλευρες αναλογες και τις γωνιες, που περιεχονται απ'αυτές ισες, ειναι ομοια.

(3) Αν δυο τριγωνα εχουν τις (ομολογες) πλευρες τους αναλογες, ειναι ομοια.

Ασκησεις

(1) Να διαιρεθει ενα ευθ. τμημα σε δυο μερη που εχουν λογο $3:2$

(2) Να διαιρεθει ενα τριγωνο σε δυο ετσι ωστε το εμβαδον του ενος να ειναι τα $\frac{2}{5}$ του εμβαδου του αλλου, φερνοντας ενα ευθ. τμημα απο μια κορυφη του

(3) Αν απο το κεντρο βαρους τριγωνου ΑΒΓ φερουμε // προς την ΒΓ, αυτή τεμνει την ΑΒ στο Δ. Να υπολογισθουν οι λογοι $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}$, $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}$, $\frac{ΑΒ}{ΔΒ}$

(4) Δυο πενταγωνα ΑΒΓΔΕ και Α'Β'Γ'Δ'Ε' ειναι ομοια και ισχυει η αναλογια $\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΓΔ}{Γ'Δ'}=\frac{ΔΕ}{Δ'Ε'}=\frac{ΕΖ}{Ε'Ζ'}$. Να βρειτε το λογο των περιμετρων τους.

(5) Σ' ενα ορθογωνιο τριγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}=90^\circ$) φερνουμε το υψος ΑΔ. Να δικαιολογηθει οτι το τριγωνο ΑΔΒ ειναι ομοιο με το ΑΒΓ. Το ιδιο για τα τριγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ. Να γραψετε τους αντιστοιχους λογους

(6) Ενα τραπεζιο εχει βασεις 7cm και 12cm. Ποιος ειναι ο λογος των τμηματων στα οποια η μια διαγωνιος χωριζει την αλλη;

(7) Να κατασκευασετε δυο ομοια τριγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' και να φερετε τις διχοτόμους τους ΑΔ και Α'Δ'. Εξετάστε αν τα τριγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Δ' καθως και τα ΑΓΔ και Α'Γ'Δ' ειναι ομοια

(8) Να σχηματισετε ενα τριγωνο ΑΒΓ και τη διαμεσο ΑΜ. Να φερετε μια // προς τη ΒΓ, η οποια τεμνει τις ΑΒ, ΑΜ, ΑΓ στα σημεια Β', Μ', Γ' αντίστοιχα. Να συγκρινετε τα τμηματα Β'Μ' και Μ'Γ'

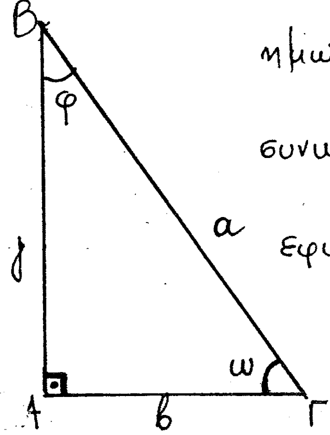
(9) Αν δινεται τριγωνο ΑΒΓ, να βρειτε: α) Πανω στην πλευρα του ΑΒ ενα σημειο Δ τετοιο, ωστε $ΑΔ=\frac{3}{5}ΑΒ$ β) Πανω στην πλευρα ΑΓ ενα σημειο Ε τέτοιο, ωστε $ΓΕ=\frac{2}{5}ΑΓ$. γ) Να εξετασετε τη θεση των ευθειων ΔΕ και ΒΓ και να βρειτε το λογο $ΔΕ:ΒΓ$

(10) Κατασκευάσετε ενα αμβλυγώνιο τριγωνο και ενα αλλο τριγωνο με πλευρες διπλασιες απο τις πλευρες του τριγωνου, του πρωτου. Να εξηγησετε γιατι και το δευτερο τριγωνο θα εχει μια αμβλεια γωνια

(11) Να κατασκευάσετε τα τριγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ετσι, ωστε οι πλευρές του δευτερου να ειναι το 1/3 των ομολογων πλευρων του πρώτου. Να συγκρινετε τις διαμεσους ΑΜ και ΔΝ

# ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας




$$\eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad \eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\gamma}{\beta} \qquad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta}{\gamma}$$

## Σχέσεις μεταξύ ημω, συνω, εφω

$$\boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}$$

$$\boxed{\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}$$

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45°, 60°, 90°

| | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|
| ημ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| συν | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| εφ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να επιλυθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) όταν:
   α) $\alpha = 14m$, $\hat{B} = 40°$ β) $\gamma = 10m$, $\hat{\Gamma} = 30°$, γ) $\alpha = 21m$, $\gamma = 15m$
   δ) $\beta = 10m$, $\gamma = 14m$ ε) $\alpha = 20m$, $\hat{\Gamma} = 50°$ στ) $\alpha = 10m$, $\eta\mu B = 0{,}6428$

2. Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{10}{13}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{7}{13}$;

3. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) είναι $\alpha = 3\beta$. Να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\hat{B}$.

4. Οι διαστάσεις ορθογωνίου είναι 20cm και 15cm. Να υπολογισθούν η διαγώνιος και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών που σχηματίζει η διαγώνιος με τις πλευρές του ορθογωνίου

5. Να αποδειχθούν οι:

α) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x}$, β) $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$

# ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ - ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

① ΠΡΟΤΑΣΗ: Καθε φράση που μπορει να χαρακτηρισθει σαν «αληθης» η «ψευδης», π.χ. « ο 8 ειναι αρτιος » ειναι προταση γιατι ειναι αληθης, « ο 5 ειναι αρνητικος» ειναι προταση γιατι ειναι ψευδης, « Φερε μου ενα ποτηρι νερο» δεν ειναι προταση.

② ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΤΥΠΟΣ $p(x)$ στο συνολο $A$. (1 μεταβλητη)

Ας υποθεσουμε οτι εχουμε το συνολο $A=\{5,6,7,8,9,10\}$ και την φραση $p(x)$: ο $x$ μικροτερος του 8. Αυτη η φραση δεν ειναι προταση. Οποιαδηποτε ομως τιμη του συνολου $A$ παρει ο $x$ γινεται προταση

π.χ. οταν $x=5$ $p(5)$: ο 5 μικροτερος του 8 (ΑΛΗΘΗΣ)
οταν $x=6$ $p(6)$: ο 6 μικροτερος του 8 (ΑΛΗΘΗΣ)
οταν $x=7$ $p(7)$: ο 7 μικροτερος του 8 (ΑΛΗΘΗΣ)
οταν $x=8$ $p(8)$: ο 8 μικροτερος του 8 (ΨΕΥΔΗΣ)
οταν $x=9$ $p(9)$: ο 9 μικροτερος του 8 (ΨΕΥΔΗΣ)
οταν $x=10$ $p(10)$: ο 10 μικροτερος του 8 (ΨΕΥΔΗΣ)

Αρα προτασιακος τυπος $p(x)$ στο συνολο $A$ ειναι μια φραση $p(x)$ που εχει την ιδιοτητα: $\forall\, a \in A$ η $p(a)$ να ειναι αληθης η ψευδης. Το συνολο $A$ θα λεγεται ΣΥΝΟΛΟ ΑΝΑΦΟΡΑΣ του προτασιακου τυπου $p(x)$

③ ΣΥΝΟΛΟ ΑΛΗΘΕΙΑΣ $G$ του προτασιακου τυπου $p(x)$ στο συνολο $A$

Ειναι το συνολο $G \subseteq A$ οπου καθε στοιχειο του $G$ κανει τον $p(x)$ αληθη. Στο προηγουμενο παραδειγμα $G=\{5,6,7\}$ διοτι $p(5)$, $p(6)$, $p(7)$ ειναι αληθεις (μπορει να ειναι $G=\phi$ η $G=A$)

④ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΤΥΠΟΣ $p(x,y)$ στο συνολο $A\times B$ (2 μεταβλητες)

Ας υποθεσουμε οτι εχουμε τα συνολα $A=\{2,5\}$, $B=\{3,6,7\}$ και τον προτασιακο τυπο ; $p(x,y)$: ο $x$ ειναι μικροτερος του $y$. Αυτη η φραση δεν ειναι προταση. Οποιαδηποτε ομως τιμη του συνολου $A\times B$ παρει το διατετ. ζευγος $(x,y)$ γινεται προταση

Θα βρουμε πρωτα το $A\times B=\{(2,3),(2,7),(5,3),(5,6),(5,7)\}$

οταν $(x,y)=(2,3)$ $p(2,3)$: ο 2 ειναι μικρ. του 3 (ΑΛΗΘΗΣ)
οταν $(x,y)=(2,6)$ $p(2,6)$: ο 2 ειναι μικρ. του 6 (ΑΛΗΘΗΣ)
οταν $(x,y)=(2,7)$ $p(2,7)$: ο 2 ειναι μικρ. του 7 (ΑΛΗΘΗΣ)
οταν $(x,y)=(5,3)$ $p(5,3)$: ο 5 ειναι μικρ του 3 (ΨΕΥΔΗΣ)
οταν $(x,y)=(5,6)$ $p(5,6)$: ο 5 ειναι μικρ. του 6 (ΑΛΗΘΗΣ)
οταν $(x,y)=(5,7)$ $p(5,7)$: ο 5 ειναι μικρ. του 7 (ΑΛΗΘΗΣ)

Αρα προτασιακος τυπος $p(x,y)$ στο συνολο $A\times B$ ειναι μια φραση $p(x,y)$ που εχει την ιδιοτητα: $\forall (a,b) \in A\times B$ η $p(a,b)$ ειναι αληθης ή ψευδης. Το συνολο $A\times B$ θα λεγεται συνολο αναφορας του προτασιακου τυπου $p(x,y)$.

ΣΥΝΟΛΟ ΑΛΗΘΕΙΑΣ $G$ του προτασ. τυπου $p(x,y)$ στο συνολο $A \times B$

Ειναι το συνολο $G \subseteq A \times B$ οπου καθε στοιχειο του $G$ κανει τον $p(x,y)$ αληθη. Στο προηγουμενο παραδειγμα

$G = \{(2,3), (2,6), (2,7), (5,6), (5,7)\}$ διοτι $p(2,3)$, $p(2,6)$, $p(2,7)$, $p(5,6)$, $p(5,7)$ ειναι αληθεις.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Δυο προτασ. τυποι λεγονται ισοδυναμοι, οταν εχουν το ιδιο συνολο αναφορας και το ιδιο συνολο αληθειας. π.χ. Με συνολο αναφ. $A = \{1,2,3,4\}$ παιρνω τους προτασιακους τυπους $p(x)$: ο $x$ διαιρει το 6 και $g(x)$: ο $x < 4$

$p(1)$: ο 1 διαιρει το 6 (Α) $g(1)$: ο $1 < 4$ (Α)
$p(2)$: ο 2 διαιρει το 6 (Α) $g(2)$: ο $2 < 4$ (Α)
$p(3)$: ο 3 διαιρει το 6 (Α) $g(3)$: ο $3 < 4$ (Α)
$p(4)$: ο 4 διαιρει το 6 (Ψ) $g(4)$: ο $4 < 4$ (Ψ)

ο $p(x)$ εχει συνολο αληθειας $G_1 = \{1,2,3\}$
ο $g(x)$ εχει συνολο αληθειας $G_2 = \{1,2,3\}$

Αρα ο $p(x)$ και $g(x)$ εχουν το ιδιο συνολο αναφορας και το ιδιο συνολο αληθειας. Δηλαδη ειναι ισοδυναμοι. Συμβολισμος $p(x) \Leftrightarrow g(x)$

## ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

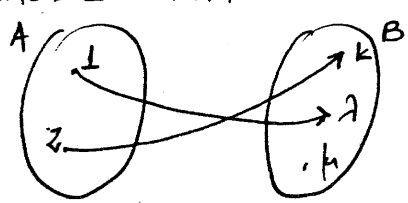
① Διμελης σχεση απο συνολο Α σε συνολο Β λεγεται καθε υποσυνολο του $A \times B$ π.χ

Αν $A = \{1,2\}$, $B = \{\kappa, \lambda, \mu\}$, το συνολο $R = \{(1,\lambda), (2,\kappa)\}$ ειναι μια διμελης σχεση απο το Α στο Β διοτι $R \subseteq A \times B$.

② Τροποι παραστασεως μιας διμελους σχεσεως

α) ΑΝΑΓΡΑΦΗ: η διμελης σχεση του προηγουμενου παραδειγματος δοθηκε με αναγραφη.

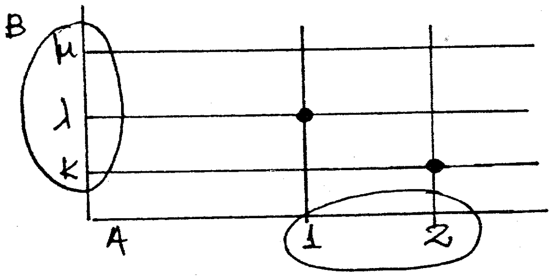
β) ΒΕΛΟΕΙΔΕΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ: Στο προηγουμενο παραδειγμα




γ) ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ: Στο προηγουμενο παραδειγμα

| | | |
|---|---|---|
| μ | | |
| λ | | |
| κ | | |
| B \ A | 1 | 2 |

δ) ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ: Στο προηγουμενο παραδειγμα




ε) ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Δινεται ενας προτασιακος τυπος (χαρακτηριστικη ιδιοτητα) που συνδεει τα στοιχεια $x, y$ των $(x,y)$ που ανηκουν στο Καρτ. γινομενο $A \times B$ και θα αποτελεσουν τα στοιχεια του συνολου $R$.

Το προηγουμενο παραδειγμα δεν αποδιδεται με περιγραφη

Ο τροπος της περιγραφης ομως ειναι ο πιο σημαντικος οταν εχουμε σαν συνολα $A, B$ τα συνολα με πολλα στοιχεια η απειροσυνολα π.χ.

α) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$ και $R=\{(x,y) \in A\times B$ οπου $x+y=6\}$

$A\times B=\{(1,4),\underline{(1,5)},(1,6),\underline{(2,4)},(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

Αρα $R=\{(1,5),(2,4)\}$

β) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,6\}$ και $R=\{(x,y) \in A\times B$ οπου $x/y\}$

Το $x/y$ διαβαζεται: ο $x$ διαιρει τον $y$.

$A\times B=\{\underline{(1,5)},\underline{(1,6)},(2,5),\underline{(2,6)},(3,5),\underline{(3,6)}\}$

Αρα $R=\{(1,5),(1,6),(2,6),(3,6)\}$

γ) $A=N$, $B=N$ και $R=\{(x,y) \in A\times B$ οπου $x \leq y\}$

Ειναι φανερο οτι αυτη η διμ. σχεση δεν δινεται με αναγραφη.

Μερικα ζευγη της ειναι $(1,1)$, $(1,5)$, $(2,8)$, $(13,105)$ κ.τ.λ.

Συμφωνουμε να συμβολιζουμε $1R1$ για να δειξουμε οτι $(1,1)\in R$

-″- -″- -″- $1R5$ -″- -″- $(1,5)\in R$

-″- -″- -″- $2R8$ -″- -″- $(2,8)\in R$

-″- -″- -″- $13R105$ -″- -″- $(13,105)\in R$

κ.τ.λ.

(3). ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ α) Ευνοητο ειναι οτι μπορει $A=B$ (οπως στο παραδ. γ)

Τοτε θα εχουμε μια διμελη σχεση στο $A^2$ π.χ.

$A=\{1,3,6\}$ και $R=\{(x,y) \in A^2$ οπου $x$ πολλαπλασιο του $y\}$

$A^2=\{\underline{(1,1)},(1,3),(1,6),\underline{(3,1)},\underline{(3,3)},(3,6),\underline{(6,1)},\underline{(6,3)},\underline{(6,6)}\}$

Αρα $R=\{(1,1),(3,1),(3,3),(6,1),(6,3),(6,6)\}$

β) Ο τροπος γραφης μιας διμελους σχεσεως με αναγραφη θα λεμε οτι δινει το **γραφημα** της διμελους σχεσεως.

γ) Ειναι απαραιτητο οταν μας δινεται μια διμ. σχεση με οποιοδηποτε τροπο γραφης να μπορουμε να την παραστησουμε και με τους αλλους τροπους (οπου ειναι δυνατον) δ) Μια διμελης σχεση που δοθηκε με αναγραφη, βελοειδες, καρτ. γινομ. η πινακα διπλης εισοδου, μπορει να δοθει με περιγραφη με περισσοτερους απο εναν τροπους η.χ.

$A=\{4,2,3\}$ και $R=\{(2,3),(3,2)\}$

Περιγραφη 1ος τροπος $A=\{4,2,3\}$, $R=\{(x,y)\in A^2$ οπου $x+y=5\}$

Περιγραφη 2ος τροπος $A=\{4,2,3\}$, $R=\{(x,y)\in A^2$ οπου $x,y$ πρωτοι μεταξυ τους και $x/6$, $y/6\}$

4. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΔΙΜ. ΣΧΕΣΕΩΣ R απο το A στο B

Λεγεται το συνολο Π που εχει σαν στοιχεια τα πρωτα μελη των διατεταγμενων ζευγων της διμ. σχεσεως R. Ισχυει $\Pi\subseteq A$

η.χ $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$, $R=\{(1,4),(2,3),(2,4)\}$ τοτε $\Pi=\{1,2\}$

5. ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ ΔΙΜ. ΣΧΕΣΕΩΣ R απο το A στο B

Λεγεται το συνολο T που εχει σαν στοιχεια τα δευτερα μελη των διατ. ζευγων της διμ. σχεσεως R. Ισχυει $T\subseteq B$

Στο προηγ. παραδειγμα $T=\{3,4\}$

6. ΒΑΣΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΔΙΜ. ΣΧΕΣΕΩΣ R απο το A στο B

Λεγεται το συνολο $U=\Pi\cup T$. Ισχυει $U\subseteq A\cup B$

Στο παραδειγμα $\Pi=\{1,2\}$, $T=\{3,4\}$ αρα $U=\{1,2,3,4\}$

Θα μελετησουμε τωρα μερικες ειδικες διμελεις σχεσεις.

ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Μια σχεση ονομαζεται ανακλαστικη αν $\forall x\in U$ το ζευγος $(x,x)\in R$.

Πως θα καταλαβαινουμε αν μια σχεση ειναι ανακλαστικη η οχι;

Εαν δινεται α) με αναγραφη: Σχηματιζουμε το U και ελεγχουμε αν $\forall x\in U$ το $(x,x)\in R$. Αν υπαρχει εστω και ενα $x\in U$ ωστε $(x,x)\notin R$ τοτε η σχεση δεν ειναι ανακλαστικη.

η.χ $A=\{1,2,3\}$, $R=\{(x,y)\in A^2$ τετοια ωστε $x/y\}$

$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$ ειναι $U=\{1,2,3\}$

και $(1,1)\in R$, $(2,2)\in R$, $(3,3)\in R$ αρα η σχεση ειναι ανακλαστικη

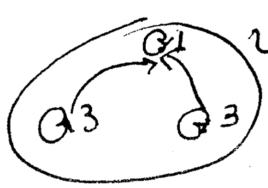
η.χ. $\Gamma=\{1,2,3\}$, $R=\{(x,y)\in\Gamma^2$ οπου $x+y=4\}$ ειναι;

$R=\{(1,3),(3,1),(2,2)\}$ και $U=\{1,2,3\}$

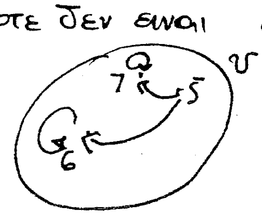
Ομως $(1,1)\notin R$ Αρα η σχεση δεν ειναι ανακλαστικη.

β) Με βελοειδες διαγραμμα

Ελεγχουμε αν καθε στοιχειο του U εχει θηλεια. Αν υπαρχει εστω και ενα στοιχειο του U χωρις θηλεια τοτε δεν ειναι ανακλαστικη

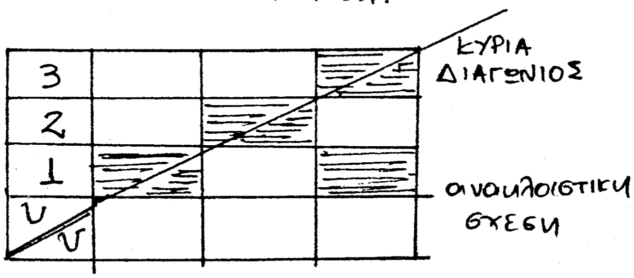


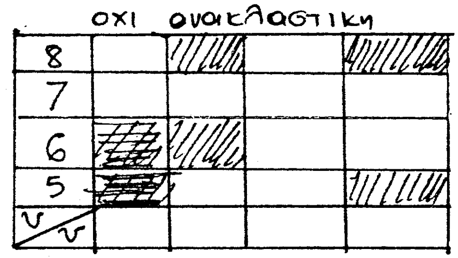

αναυλαστικη σχεση




οχι αναυλαστικη σχεση

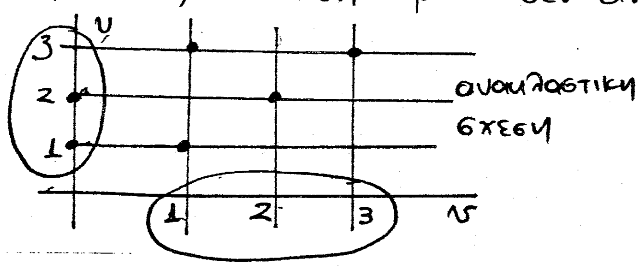
γ) Με πινακα διπλης εισοδου.
Ελεγχουμε αν καθε τετραγωνο της κυριας διαγωνιου ειναι γραμμοσκιασμενο. Αν υπαρχει εστω και ενα χωρις γραμμοσκιαση, η σχεση δεν ειναι αναυλαστικη.

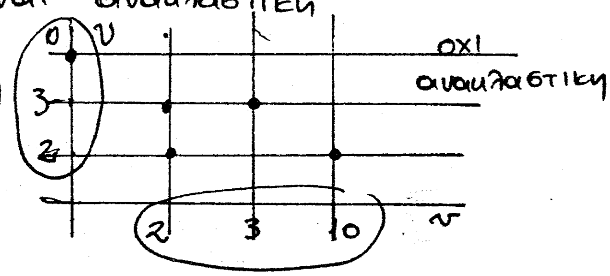



δ) Με καρτεσιανο διαγραμμα
Ελεγχουμε αν καθε κομβος της κυριας διαγωνιου ειναι σημειωμενος
Αν υπαρχει εστω και ενας κομβος της κυριας διαγωνιου οχι σημειωμενος, η σχεση μας δεν ειναι αναυλαστικη

π.χ.




ε) Με περιγραφη: Αν $x \in U$ το $xRx$ η $(x,x) \in R$ τοτε η σχεση ειναι αναυλαστικη. Αν υπαρχει εστω και ενα $x \in U$ που να δινει $x \not R x$ η $(x,x) \notin R$, τοτε η σχεση δεν ειναι αναυλαστικη.
π.χ. Στο $N^*$ η $R = \{(x,y) \in N^{*2}$ οπου $x/y\}$ δινει $\forall x \in N^* \; xRx$ δηλ $x/x$ ειναι αναυλαστικη.
π.χ. Στο συνολο E των ευθειων ενος επιπεδου η $R = \{(x,y) \in E^2 : x \perp y$ δεν ειναι αναυλαστικη διοτι $x \not R x$ δηλ. $x \perp x$

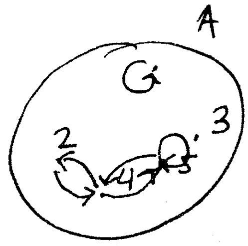
## ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Μια σχεση ονομαζεται συμμετρικη οταν
$$\forall (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$$
Πως θα καταλαβουμε εαν μια σχεση ειναι συμμετρικη η οχι;
Αν δινεται: α) Με αναγραφη: $\forall (x,y) \in R$ πρεπει $(y,x) \in R$
Αν υπαρχει εστω και ενα $(x,y) \in R$ οπου $(y,x) \notin R$ τοτε η σχεση δεν ειναι συμμετρικη
π.χ. $A = \{1,2,3\}$ και $R = \{(1,2), (2,2), (2,1), (3,2), (2,3)\}$ ειναι συμμετρικη διοτι $(1,2) \in R \Leftrightarrow (2,1) \in R$, $(2,2) \in R \Leftrightarrow (2,2) \in R$ και $(3,2) \in R \Leftrightarrow (2,3) \in R$

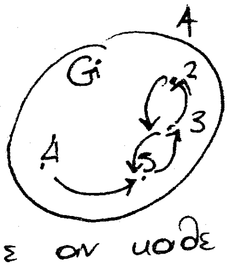
π.χ. $K=\{1,2,3\}$ και $R=\{(1,2),(2,1),(3,3),(3,1)\}$ δεν ειναι συμμετρικη γιατι $(3,1)\in R$ ενω το $(1,3)\notin R$.

β) Με βελοειδες διαγραμμα: Αν απο καποιο στοιχειο α ξεκινα βελος για καποιο στοιχειο β, πρεπει να επιστρεφει και απο το β στο α. Δεν ειναι βεβαια υποχρεωτικο να καλυφθουν ολα τα στοιχεια με βελη. Αν εστω και ενα βελος δεν επιστρεφει απο οπου ξεκινησε δεν εχουμε συμμετρικη σχεση.

π.χ.



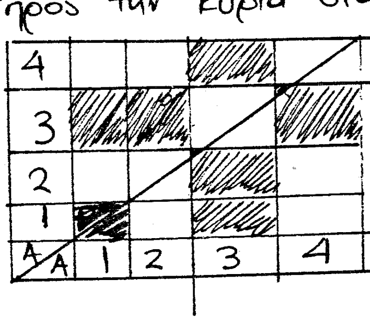

συμμετρικη σχεση



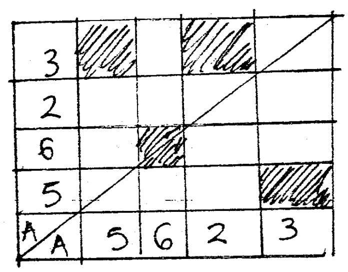

οχι συμμετρικη σχεση

γ) Με πινακα διπλης εισοδου: Ελεγχουμε αν καθε γραμμοσκιασμενο τετραγωνο εχει επισης γραμμοσκιασμενο και το συμμετρικο του ως προς την κυρια διαγωνιο.

π.χ.



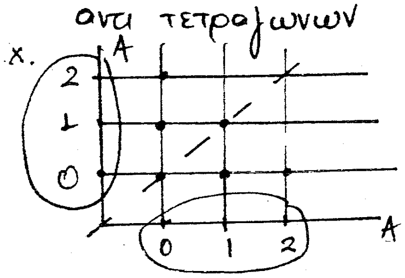

συμμετρικη σχεση



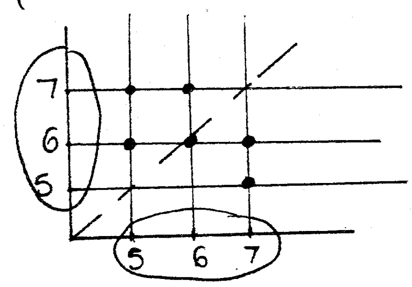

δεν ειναι συμμετρικη

δ) Με καρτεσιανο διαγραμμα: Παρομοια δουλεια με κομβους αντι τετραγωνων

π.χ.




συμμετρικη σχεση




οχι συμμετρικη σχεση

ε) Με περιγραφη: Πρεπει για καθε $xRy$ να παιρνουμε και $yRx$. Αν υπαρχει εστω και ενα $xRy$ που δινει $y\not R x$ η σχεση μας δεν ειναι συμμετρικη

π.χ $A=\{1,2,3\}$ και $R=\{(x,y)\in A^2$ οπου $x+y=5\}$ τοτε αν $xRy \Leftrightarrow yRx$

π.χ. $A=\{1,2,4\}$ και $R=\{(x,y)\in A^2,\ x/y\}$ τοτε $1R4$ αλλα $4\not R 1$ αρα η σχεση δεν ειναι συμμετρικη

π.χ $E$ το συνολο των ευθειων του επιπεδου και $R=\{(x,y)\in E^2,\ x\perp y\}$ ειναι συμμετρικη αφου αν $x\perp y \Leftrightarrow y\perp x$

π.χ. Στο $N^*$ η $R=\{(x,y)\in N^*$ οπου $x\leq y\}$ ειναι μη συμμετρικη διοτι αν $x\leq y$ δεν δινει και $y\leq x$

# ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Μια σχεση ονομαζεται μεταβατικη αν

$$\forall (x,y) \in R \wedge (y,\omega) \in R \Rightarrow (x,\omega) \in R$$

Μια σχεση δεν ειναι μεταβατικη οταν ενω ισχυουν οι $(x,y) \in R$ $\wedge$ $(y,\omega) \in R$ δεν ισχυει $(x,\omega) \in R$.

Πως καταλαβαινουμε αν μια σχεση ειναι μεταβατικη η οχι; Εδω δεν μπορουμε να βγαλουμε συμπερασμα αν η σχεση μας δινεται με πινακα η βελοειδες η καρτεσιανο. Μπορουμε μονο με τις μεθοδους της αναγραφης και της περιγραφης. Μετατρεπουμε λοιπον τον πινακα η το βελοειδες σε αναγραφη και συνεχιζουμε.

Αν η σχεση μας δινεται (με) αναγραφη, ελεγχουμε αν $\forall (x,y) \in R \wedge$ $\wedge (y,\omega) \in R$ υπαρχει και το $(x,\omega) \in R$

π.χ στο $A=\{1,2,3\}$ εστω $R=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ ειναι μεταβατικη αφου $(1,2) \in R \wedge (2,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$

π.χ στο $A=\{1,2,3,4\}$ στην $R=\{(1,2),(2,4),(4,3),(1,4),(2,3)\}$
$(1,2) \in R \wedge (2,4) \in R \Rightarrow (1,4) \in R$
Ομως ενω $(1,2) \in R \wedge (2,3) \in R$ το $(1,3) \notin R$ δεν ειναι μεταβατικη η σχεση.

π.χ. στο $A=\{a,b\}$ η $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$ ειναι μεταβατικη αφου

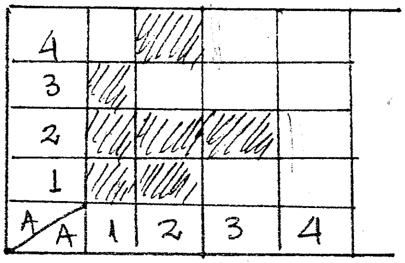
$$(a,a) \in R \wedge (a,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$$
$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in R$$
$$(b,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$
$$(a,b) \in R \wedge (b,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$$
$$(b,a) \in R \wedge (a,a) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

b) Με περιγραφη: Ελεγχουμε αν $\forall\, xRy \wedge yR\omega \Rightarrow xR\omega$
Αν υπαρχει εστω και ενα $xRy \wedge yR\omega$ που να δινει $x \not R \omega$ αρκει για να μην εχουμε μεταβατικη σχεση.

π.χ. στο $\mathbb{N}$ παιρνουμε την $R=\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \text{ οπου } x \leq y\}$
τοτε αν $x \leq y \wedge y \leq \omega \Rightarrow x \leq \omega$ δηλ. εχουμε μεταβατικη σχ.

π.χ. στο $\mathbb{Q}$ παιρνουμε την $R=\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \text{ οπου } x \neq y\}$
τοτε υπαρχει ζευγος $8 \neq 5 \wedge 5 \neq 8$ που δινει $8=8$ δηλ. $8 \not R 8$.
Αρα η σχεση μας δεν ειναι μεταβατικη.

Οπως προαναφεραμε αν η σχεση μας δοθεί με ενα απο τους 3 αλλους τρόπους, θα την γράψουμε με αναγραφή και θα ελεγχουμε αν ειναι η οχι μεταβατικη η.χ.




παιρνω $R=\{(1,1),(1,2),(1,3)(2,1),(2,2)(3,2)(2,4)\}$
δεν ειναι μεταβατικη αφου
$(3,2)\in R \wedge (2,4)\in R$
ενω $(3,4)\notin R$

## ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Μια σχεση θα λεγεται αντισυμμετρικη οταν:

Αν $(x,y)\in R$ με $x\neq y \Rightarrow (y,x)\notin R$

Πως ελεγχουμε αν μια σχεση ειναι αντισυμμετρικη η οχι;

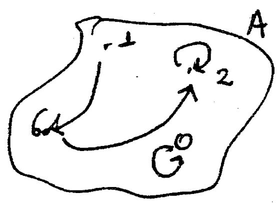
Αν δινεται α) με αναγραφη: ελεγχουμε αν $\forall (x,y)\in R$ με $x\neq y$ το $(y,x)\notin R$. αν φυσικα βρουμε εστω και ενα $(x,y)\in R$ που να ~~ειναι~~ και $(y,x)\in R$ με $x\neq y$ τοτε η σχεση μας δεν ειναι αντισυμμετρικη

η.χ. $A=\{1,2,3,4\}$ και $R=\{(1,1),(3,4),(4,1)\ (2,2)\}$ ειναι αντισυμμετρικη γιατι $(3,4)\in R \Rightarrow (4,3)\notin R$
$(4,1)\in R \Rightarrow (1,4)\notin R$

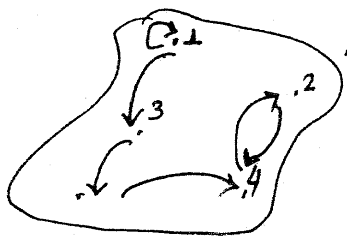
Τα ζευγη $(1,1)$, $(2,2)$ δεν εξεταζονται αφου πρεπει $x\neq y$

η.χ $A=\{5,6,7\}$ και $R=\{(5,6),(6,6),(7,5),(6,5)\}$ δεν ειναι αντισυμμετρικη αφου $(5,6)\in R \Rightarrow (6,5)\in R$ και $6\neq 5$

β) με βελοειδες: Πρεπει τα βελη να μην επιστρεφουν εκει απο οπου ξεκινησαν (εκτος απο τις θηλειες). Εαν εστω και ενα βελος επιστρεφει απο εκει οπου ξεκινησε η σχεση δεν ειναι αντισυμμετρικη



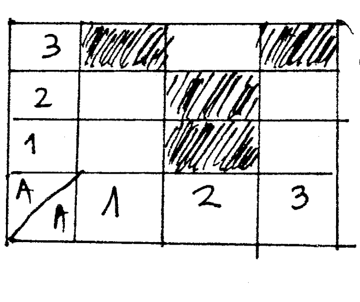

αντισυμμετρικη



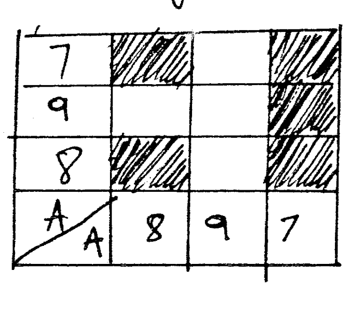

οχι αντισυμμετρικη

γ) Με πινακο διπλης εισοδου: Πρεπει να μην εχουμε μαυρισμενα τετραγωνα συμμετρικα ως προς την κυρια διαγωνιο
(Εξαιρουνται τα τετραγωνα της κυριας διαγωνιου)

η.χ.



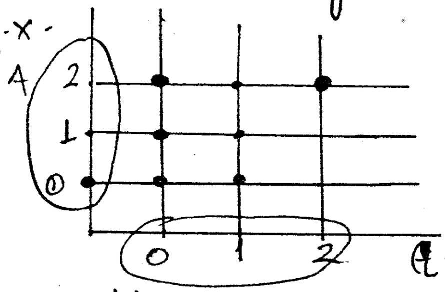

αντισυμμετρικη



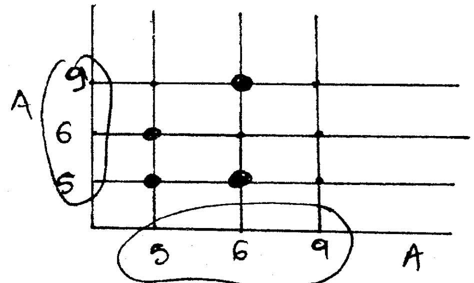

οχι αντισυμμετρικη

δ) Με καρτεσιανο διαγραμμα: Παρομοια δουλεια με τους κομβους

π.χ.




αντισυμμετρικη




οχι αντισυμμετρικη

ε) Με περιγραφη. Ελεγχουμε αν $\forall x R y$ οπου $x \neq y \Rightarrow y \not R x$

π.χ. Εστω στο $N^*$ η $R=\{(x,y) \in N^{*2}$ οπου $x/y\}$

τοτε $\forall x/y$ με $x \neq y \Rightarrow y \nmid x$ δηλ. εχουμε αντισυμμετρικη σχεση.

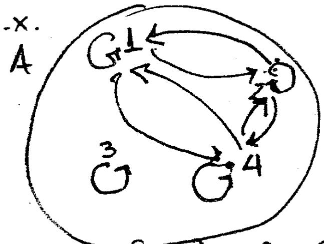
π.χ. Εστω στο $N$ η $R=\{(x,y) \in N^2$ οπου $x+y=100\}$

υπαρχει ζευγος $5R95$ με $5 \neq 95$ που δινει και $95R5$ δηλ. η σχεση δεν ειναι αντισυμμετρικη

## Σχεσεις Ισοδυναμιας

Αν μια σχεση ειναι συγχρονως αναυλαστικη, συμμετρικη και μεταβατικη θα λεμε οτι αποτελει σχεση ισοδυναμιας

π.χ.




ειναι σχεση ισοδυναμιας γιατι:

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(4,1),(1,4)\}$

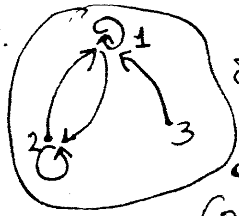
$(1,1) \in R, (2,2) \in R, (3,3) \in R, (4,4) \in R \Rightarrow$ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ.

$$\left.\begin{array}{l}(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R \\ (2,4) \in R \Rightarrow (4,2) \in R \\ (1,4) \in R \Rightarrow (4,1) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ.

$$\left.\begin{array}{l}(1,4) \in R \wedge (2,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R, \\ (1,2) \in R \wedge (4,2) \in R \Rightarrow (2,2) \in R \\ (1,4) \in R \wedge (4,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R \\ (2,1) \in R \wedge (1,2) \in R \Rightarrow (2,2) \in R \\ (4,2) \in R \wedge (2,4) \in R \Rightarrow (4,4) \in R \\ (1,2) \in R \wedge (2,4) \in R \Rightarrow (1,4) \in R \\ (1,4) \in R \wedge (4,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R \\ (4,1) \in R \wedge (1,4) \in R \Rightarrow (4,4) \in R\end{array}\right\} \Rightarrow$$ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ.

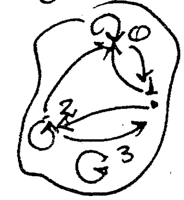
Φυσικα ειναι πολυ ευκολοτερο να ελεγξουμε αν μια σχεση δεν ειναι σχεση ισοδυναμιας

π.χ. A




δεν ειναι σχ. ισοδυναμιας αφου $(3,3) \notin R$ (ΟΧΙ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ)

B



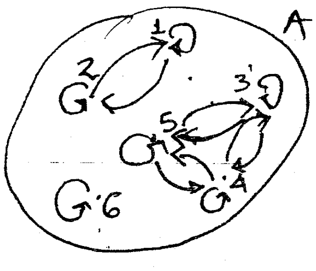

δεν ειναι σχ. ισοδυναμιας αφου το $(2,0) \in R$ ενω το $(0,2) \notin R$ (ΟΧΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ)

οι άλλες ιδιότητες τοτε δεν μας ενδιαφερουν

Εαν R μια σχεση ισοδυναμιας και $(x,y) \in R$ ή $xRy$, συνηθιζουμε να συμβολιζουμε $x \sim y$ και να λεμε οτι x ειναι ισοδυναμο με το y.

Ας μελετησουμε την σχεση $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(6,6),(5,5),(3,3),(4,4),(5,3),(3,5),(4,5),(5,4),(3,4),(4,3),(2,2)\}$

A




Παρατηρουμε οτι η R ειναι σχεση ισοδυναμιας

$$\left.\begin{array}{l} 1R1 \\ 1R2 \\ 2R1 \\ 2R2 \end{array}\right\}$$

εχουμε εδω ενα συνολο απο στοιχεια του A που ειναι μεταξυ τους ισοδυναμα το $\{1,2\}$

Το συνολο αυτο θα λεμε οτι αποτελει μια <u>κλαση ισοδυναμιας</u>

Υπαρχουν στο προηγούμενο παραδειγμα και αλλες κλασεις

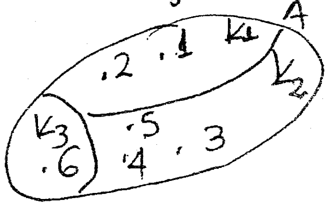
$$\left.\begin{array}{ll} 5R5 & 4R3 \\ 5R3 & 3R4 \\ 3R5 & 4R5 \\ 5R4 & 3R4 \\ 4R4 & \end{array}\right\}$$

δηλαδη κλαση ισοδυναμιας $\{5,3,4\}$ και 6R6 δηλαδη μια ακομη κλαση ισοδυναμιας η $\{6\}$

Εχουμε λοιπον 3 κλασεις ισοδυναμιας $K_1 = \{1,2\}$, $K_2 = \{5,3,4\}$, $K_3 = \{6\}$ ξενες μεταξυ τους και τετοιες ωστε $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = A$

Στο βελοειδες διαγραμμα της R οι κλασεις ισοδυναμιας ξεχωριζουν αν προσεξουμε οτι υπαρχουν ομαδες στοιχειων που επικοινωνουν μεταξυ τους με βελη.

Δηλαδη

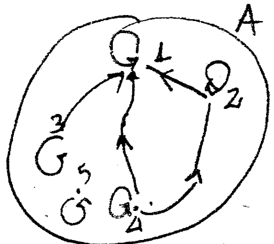



Το ~~βελοσδ.~~ διαγραμμα λοιπον μας βοηθα περισσοτερο απο τους αλλους τροπους να παιρνουμε κλασεις ισοδυναμιας.

# ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Αν μια διμελης σχεση ειναι συγχρονως ανακλαστικη, αντισυμμετρικη και μεταβατικη, θα λεμε οτι αποτελει σχεση διαταξεως.

π.χ.




ειναι σχεση διαταξεως γιατι:

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(3,1),(2,1),(4,1),(4,2)\}$

$(1,1)\in R,\ (2,2)\in R,\ (3,3)\in R,\ (4,4)\in R,\ (5,5)\in R \Rightarrow$ ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ

$\left.\begin{array}{l}(3,1)\in R,\ 3\neq 1 \Rightarrow (1,3)\notin R\\ (2,1)\in R,\ 2\neq 1 \Rightarrow (1,2)\notin R\\ (4,1)\in R,\ 4\neq 1 \Rightarrow (1,4)\notin R\end{array}\right\} \Longrightarrow$ ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ

$\left.\begin{array}{l}(4,2)\in R \wedge (2,1)\in R \Rightarrow (4,1)\in R\\ (4,4)\in R \wedge (4,2)\in R \Rightarrow (4,2)\in R\\ (4,1)\in R \wedge (1,1)\in R \Rightarrow (4,1)\in R\\ (4,2)\in R \wedge (2,2)\in R \Rightarrow (4,2)\in R\\ (3,3)\in R \wedge (3,1)\in R \Rightarrow (3,1)\in R\end{array}\right\} \Longrightarrow$ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗ.

κ.λ.π.

Το συνολο A μεσα στο οποιο ορισαμε μια τετοια σχεση R, θα λεγεται <u>διατεταγμενο συνολο</u>

Αν ολα τα στοιχεια του A συνδεονται μεταξυ τους, με την σχεση που μας δινουν τοτε λεμε οτι εχουμε σχεση <u>ολικης</u> διαταξεως

Στο προηγουμενο παραδειγμα εχουμε στοιχεια που δεν συνδεονται μεταξυ τους οπως π.χ. $(3,5)\notin R \wedge (5,3)\notin R$, αρα δεν εχουμε ολικη διαταξη αλλα σχεση <u>μερικης</u> διαταξεως

Ενα συνολο A εφοδιασμενο με σχεση ολικης διαταξεως, θα λεγεται <u>ολικως διατεταγμενο συνολο</u>

Ενα συνολο A εφοδιασμενο με σχεση μερικης διαταξεως, θα λεγεται <u>μερικως διατεταγμενο συνολο.</u>

# Ασκησεις για επαναληψη

① Δινεται το συνολο $A=\{1,2,3,4\}$ και τα γραφηματα:
$G_1=\{(1,1),(1,3),(3,2),(2,2),(3,3),(1,2),(4,4),(1,4)\}$
$G_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,1),(2,2)\}$
$G_3=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
Ποιες σχεσεις ειναι σχεσεις ισοδυναμιας

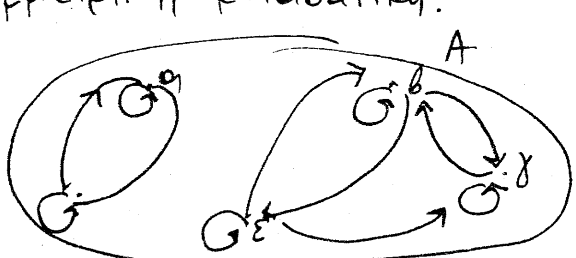
② Δινεται το $A=\{1,2,3,4\}$ και τα γραφηματα των σχεσεων:
$G_1=\{(1,2),(2,2),(3,4),(4,3)(3,3),(4,4)\}$
$G_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4)\}$, $G_3=\{(2,3),(3,2),(4,4)\}$
$G_4=\{(1,1),(1,2),(2,3)\}$, $G_5=\{(1,1),(2,2),(1,3),(3,4),(3,3),(4,4)\}$
Ποιες ειναι ανακλαστικες; Ποιες αντισυμμετρικες;
Ποιες μεταβατικες;

③ Δινεται η σχεση με γραφημα
$G=\{(\alpha,\alpha),(\beta,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\beta),(\gamma,\gamma),(\gamma,\alpha),(\alpha,\gamma),(\delta,\delta)\}$. Ποιο ειναι το συνολο αναφορας; Ειναι σχεση ισοδυναμιας; Εαν ειναι, να βρειτε την κλαση ισοδυναμιας. Να γινει βελοειδες διαγραμμα

④ Δινεται η σχεση με γραφημα $G=\{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma)(\alpha,\delta),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\beta,\delta),(\gamma,\gamma),(\gamma,\delta),(\delta,\delta)\}$. Ποιο ειναι το συνολο αναφορας;
Ειναι σχεση διαταξεως; Εαν ναι μερικης η ολικης;
να γινει πινακας διπλης εισοδου.

⑤ Στο συνολο N οριζουμε μια σχεση, που εχει προτασιακο τυπο:
$\varphi(x,y)$: « $x$ = πολλαπλασιο του $y$ ». Να εξετασετε αν η σχεση αυτη ειναι διαταξεως. Εαν ναι μερικης η ολικης;

⑥ Δινεται το βελοειδες διαγραμμα μιας διμελους σχεσεως.
Να εξετασετε αν ειναι ανακλαστικη, συμμετρικη, αντισυμμετρικη, μεταβατικη.




equivalent

# ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ α' ΒΑΘΜΟΥ

**Α.** Να λυθούν στο σύνολο R οι εξισώσεις:

1) $2x+\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\right)=\frac{5x}{3}+30$   2) $3\left(\frac{2y}{4}-5\right)-\left(2y-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}=15\left(y-\frac{2}{8}\right)$

3) $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)-\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{5x}{6}-1$

4) $3a-5\cdot\left(\frac{2a-3}{5}-\frac{3a}{4}\right)=\frac{a}{9}-3$

5) $\frac{3(t-2)}{4}-5t-3=\frac{2\cdot(3t-4)}{3}+7t-\frac{t-2}{12}$

6) $\frac{x}{3}-4\cdot\left(\frac{3x}{4}-\frac{x-2}{5}\right)=\frac{2x}{-12}$

7) $\frac{2(3x-1)}{3}-\frac{4x-7}{4}=-1-\frac{11x-6}{12}$

8) $\frac{7x-4}{15}+\frac{x-1}{3}=\frac{-1+3x}{5}+\frac{-7-x}{10}$

9) $2x-\left(\frac{15x}{9}-5\right)=\frac{x-6}{3}+7$

10) $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4}-\frac{14-2x}{5}\right)=\frac{x-9}{2}-\frac{7}{8}$

11) $\frac{1}{2}\left[8-\frac{x}{3}-2\cdot\left(\frac{x}{2}+5\right)\right]-\left[6-\frac{3x}{2}+3(x-5)\right]+5=0$

12) $\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$

13) $\frac{x-\frac{5}{3}}{2}-\frac{1-\frac{x}{3}}{4}+\frac{\frac{x}{2}}{6}-\frac{x+1}{3}=\frac{5x+8}{12}$

14) $\frac{\frac{3x-5}{2}-1}{4}=\frac{4(2x-7)}{9}+\frac{3-\frac{5(x-2)}{3}}{3}+\frac{13}{24}$

15) $2x-3\left[\frac{5x-1}{2}-3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\cdot\frac{x-1}{2}\right)-1\right]=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{3}\right)$

16) $2\left(\frac{a-3}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{a-1}{2}\right)$ [illegible] $5-2\cdot\frac{a+1}{3}=-7\left(a-\frac{a-5}{4}\right)$ πάνω

17) $2^{-2}(3x-1)-2^{-1}(2x-1)=3^{-1}(4x-1)-2^{2}(3x-1)$

18) $-5\,\frac{\omega-2(3-4\omega)}{-\frac{1}{2}+2}=\frac{\frac{3\omega-1}{2}-\frac{\omega-1}{3}}{2^{2}}$

**Β.** Να λυθούν στο σύνολο R οι εξισώσεις:

1) $\dfrac{3x-2}{x-1}=\dfrac{4}{3}$  2) $\dfrac{4}{5y-9}=\dfrac{2}{3(y+1)}$

3) $\dfrac{-2}{w+1}=-\dfrac{3}{2w-5}$  4) $\dfrac{x-\frac{4}{5}}{x+\frac{2}{3}}=\dfrac{4}{5}$

**Γ.** Να λυθούν στο σύνολο R οι εξισώσεις:

1) $(3x-2)(x+1)(1-2x)=0$  2) $3x(x-1)(5+2x)(x+1)=0$

3) $2x(3x+1)(x-2)^2(2x-1)^3=0$

4) $-x^2(2x-5)(x-1)^2=0$

**Δ.** Να βρεθεί με αναγραφή το σύνολο $A\cup B$, αν:

1) $A=\left\{x\in N \,/\, \frac{2x}{3}+\frac{x}{6}-5=\frac{5x}{4}\right\}$, $B=\left\{x\in N \,/\, 6{,}5-\frac{5x-1}{6}=\frac{20}{3}\right\}$

2) $A=\left\{x\in Z \,/\, \frac{x}{3}+2=4\right\}$, $B=\left\{x\in Z \,/\, \frac{2x+3}{3}=\frac{x-2}{4}\right\}$

3) $A=\left\{x\in Q \,/\, 3x=-3(2-x)\right\}$, $B=\left\{x\in Q \,/\, \frac{2x-1}{3}-\frac{5x-2}{12}=\frac{x+1}{4}\right\}$

**Ε.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

1) $\dfrac{3x+2}{5}-\dfrac{4x-3}{7}=4+\dfrac{x-2}{35}$

2) $2x-5=\dfrac{x+7}{2}+\dfrac{3x}{2}$

3) $\dfrac{w+6}{2}+\dfrac{2(w+17)}{3}+5\cdot\dfrac{w-10}{6}=2w+6$

4) $6\cdot\dfrac{9+8x}{2}-27=24x$

5) $\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{3x+1}{2}=\dfrac{27x+19}{20}$

**ΣΤ.**

1) Να βρεθεί ο $\lambda$ ώστε η εξίσωση $(4\lambda-6)x=7\lambda+8$ να είναι αδύνατη

2) Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda$ ώστε η εξίσωση $(3\lambda-4)x=2\kappa+5$ να είναι αόριστη (ταυτότητα)

$(\lambda-1)x=2(\lambda-1)$

# ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Αν σε εναν αριθμο προσθεσουμε το $\frac{1}{3}$ του, βρισκουμε τον αριθμο 18 ελαττωμενο κατα το $\frac{1}{6}$ του αριθμου. Ποιος ειναι ο αριθμος;
2. Να βρεθει αριθμος που το 5πλασιο και 3πλασιο του κατα 5 μικροτερου του δινουν αθροισμα κατα 12 μεγαλυτερο απο το 6πλασιό του
3. Ποιου αριθμου το μισό, το $\frac{1}{4}$ και το $\frac{1}{8}$ δνουν αθροισμα 21;
4. Ποιου αριθμου ο κατα 5 μεγαλυτερος του τριπλασιου του ειναι κατα 17 μεγαλυτερος απο το διπλασιο του κατα 4 μικροτερου του;
5. Αν πολ/σουμε τον κατα 5 μικροτερο ενος αριθμού επι 2 βρισκουμε 28. Ποιος ειναι ο αριθμος;
6. Το αθροισμα τριων ανισων ακεραιων ειναι 22. Ο μεσαιος ειναι κατα 17 μεγαλυτερος του μικροτερου και κατα 9 μικροτερος του μεγαλυτερου. Να βρεθουν οι αριθμοι.
7. Το αθροισμα τριων διαδοχικων περιττων ειναι 39. Να βρεθουν.
8. Το αθροισμα τριων διαδοχικων αρτιων ειναι 56. Να τους βρειτε.
9. Ποιον αριθμο πρεπει να αφαιρεσουμε απο τους ορους του κλασματος $\frac{8}{13}$ για να προκυψει κλασμα ισο με $\frac{1}{2}$;
10. Πατερας ειναι 27 χρονων και ο γιος του 7. Πριν απο ποσα χρονια ο πατερας ειχε ηλικια 5πλασια του γιου του;
11. Η ηλικια του Α ειναι διπλασια της ηλικιας του Β. Πριν απο 7 χρονια το αθροισμα των ηλικιων τους ηταν ισο με τη σημερινη ηλικια του Α. Να βρειτε τις ηλικιες των Α και Β.
12. Αν απο το 3πλασιο της σημερινης ηλικιας του Α αφαιρεσεις το 5πλασιο της ηλικιας που ειχε πριν 6 χρονια, θα βρεις το μισο της σημερινης του ηλικιας. Πόσων χρόνων ειναι ο Α;
13. Πατερας εχει 3πλασια ηλικια απο τον γιο του. Πριν απο 5 χρονια ο γιος ειχε το $\frac{1}{3}$ της ηλικιας που θα εχει ο πατερας του μετα 10 χρονια. Ποιες οι σημερινες τους ηλικιες;
14. Πατερας 52 χρονων εχει γιο 26 χρονων. Μετα απο ποσα χρονια ο πατερας θα εχει διπλασια ηλικια απο τον γιο;
15. Σε ενα ορθογωνιο τριγωνο η διαφορα των οξειων γωνιων του ειναι 20°. Να βρεθουν οι γωνιες του.
16. Σε ενα ισοσκελες τριγωνο η γωνια της κορυφης του ειναι το μισο της καθεμιας απο τις γωνιες της βασης του. Να υπολογισθουν οι γωνιες του.

**17.** Τριγωνου ΑΒΓ η γωνια $\hat{B}$ ειναι τα $\frac{3}{8}$ της $\hat{A}$ και η $\hat{Γ}$ το $\frac{1}{3}$ της $\hat{B}$. Να βρεθουν οι γωνιες του τριγωνου

**18.** Μια βρυση γεμιζει μια δεξαμενη σε 3 ωρες, μια αλλη σε 4 ωρες και μια τριτη σε 6 ωρες. Σε ποσες ωρες θα γεμισει η δεξαμενη αν τρεχουν και οι τρεις βρυσες μαζι;

**19.** Μια βρυση γεμιζει μια δεξαμενη σε 12 ωρες, μια αλλη σε 10 ωρες μια τριτη αδειαζει τη δεξαμενη σε 30 ωρες. Αν και οι τρεις βρυσες ανοιχτουν συγχρονως, σε ποσες ωρες θα γεμισει η δεξαμενη;

**20.** Μια αλεπου, που κανει 2 πηδηματα στο δευτερολεπτο, εχει ηδη κανει 30 πηδηματα, οταν ενας σκυλος, που κανει 4 πηδηματα στο δευτερολεπτο, αρχισε να την κυνηγαει. Μετα απο ποσο δευτερολεπτα ο σκυλος θα φτασει την αλεπου;

**21.** Χωρικος σκοπευε να πουλησει οσα αυγα ειχε προς 5 δρχ. το καθενα. Επειδη εσπασαν 3 αυγα, πουλησε τα υπολοιπα προς 6 δρχ. το καθενα και ετσι δεν ζημιωθηκε. Ποσα αυγα ειχε ο χωρικος;

**22.** Ολα τα προβατα και οι κοτες ενος χωρικου εχουν 30 κεφαλια και 72 ποδια. Ποσα προβατα και ποσες κοτες εχει;

**23.** Θελω να πληρωσω 120 δρχ με 15 κερματα των 5 και των 10 δρχ. Ποσα ταλληρα και ποσα δεκαρικα πρεπει να δωσω;

**24.** Αν καποιος μοιρασει στα παιδια μιας παρεας απο 5 μηλα, του περισσευουν 10 μηλα. Αν δωσει απο 7 μηλα του λειπουν 6 μηλα. Ποσα ειναι τα παιδια και ποσα τα μηλα;

**25.** Εμπορος πουλησε υφασμα προς 75 δρχ. το μετρο και κερδισε 900 δρχ. Αν πουλουσε το υφασμα προς 20 δρχ. το μετρο φθηνοτερα, θα ζημιωνε 3.000 δρχ. Ποσα μετρα ηταν το υφασμα;

**26.** Αγορασε καποιος υφασμα των 50 δρχ. το μετρο και 20 μετρα παραπανω απο αλλο υφασμα των 120 δρχ. το μετρο. Και τα δυο τα πουλησε προς 130 δρχ. το μετρο και κερδισε ετσι 900 δρχ. Ποσα μετρα ειχε αγορασει;

**27.** Σε μια εκδρομη οι ανδρες ηταν τριπλασιοι απο τις γυναικες. Μετα την αναχωρηση 4 ανδρων με τις γυναικες τους εμειναν εφταπλασιοι ανδρες απο τις γυναικες. Ποσοι ηταν οι ανδρες και ποσες οι γυναικες;

30) $X = \frac{2}{3}X + 12 + \frac{3}{5}\left(X - \frac{2}{3}X\right)$

$\frac{2}{3}$ ανδρες $= 12 + \frac{3}{5}$ ανδρες



**28.** Δυο εργατες εργαστηκαν ο Α επι 27 μερες και ο Β επι 21 μερες. Ο Α κερδιζει καθε μερα 200 δρχ. παραπανω απο τον Β. Στο τελος ο Α πηρε 8.100 δρχ. περισσοτερες απο τον Β. Ποιο ειναι το μεροκαματο του καθε εργατη;

**29.** Απο τα χρηματα που ειχα ξοδεψα το $\frac{1}{5}$ και μετα τα $\frac{2}{5}$ του υπολοιπου. Στη συνεχεια ξοδεψα και τα $\frac{3}{8}$ του (νεου) υπολοιπου και μου εμειναν 15 δρχ. Ποσες δραχμες ειχα;

**30.** Τα $\frac{2}{3}$ των εργατων μιας επιχειρησης ειναι γυναικες, 12 ανδρες ανυπαντροι και τα $\frac{3}{5}$ των ανδρων ειναι παντρεμενοι. Ποσοι ειναι οι εργατες της επιχειρησης;

**31.** Εμπορος πουλησε εμπορευμα με κερδος 20% και πηρε 360.000 δρχ. Ποσο κοστιζε το εμπορευμα;

**32.** Αν το κερδος απο την πωληση ενος εμπορευματος, που πουληθηκε με κερδος 20% ειναι 4.940 δρχ, ποια ειναι η τιμη πωλησης και ποιο το κοστος του εμπορευματος;

**33.** Εμπορος πουλησε ραδιοφωνο με ζημια 7%. Αν το πουλουσε με κερδος 3% θα επαιρνε 750 δρχ περισσοτερο. Ποιο το κοστος του ραδιοφωνου;

**34.** Ποσο αγοραστηκε εμπορευμα που επιβαρυνθηκε με 10% για εξοδα μεταφορας και πουληθηκε με κερδος 11% αντι 183150 δρχ;

**35.** Δυο αντικειμενα κοστιζουν μαζι 5.000 δρχ και πουληθηκαν, το μεν πρωτο με κερδος 20%, το δε δευτερο με κερδος 15%. Το ολικο κερδος ηταν 900 δρχ. Ποιο το κοστος καθε αντικειμενου;

**36.** Εμπορος αγορασε 20 παλτα. Αν με τα ιδια χρηματα αγοραζε 4 παλτα παραπανω, τοτε καθε παλτο θα του στοιχιζε 1.200 δρχ. λιγοτερο. Ποσο κοστιζε καθε παλτο;

**37.** Σε μια εκδρομη πηραν μερος 30 ατομα, ανδρες, γυναικες και παιδια. Ο αριθμος των γυναικων ηταν ισος με τα $\frac{2}{3}$ του αριθμου των ανδρων, ο δε αριθμος των παιδιων ηταν το $\frac{1}{2}$ του αριθμου των ανδρων και γυναικων μαζι. Ποσοι οι ανδρες, οι γυναικες, τα παιδια;

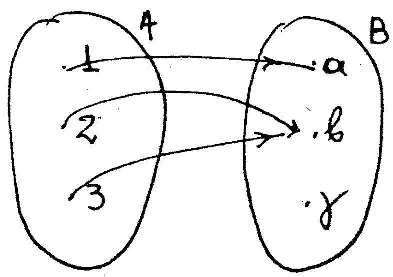
**38.** Το αθροισμα των ψηφιων διψηφιου αριθμου ειναι 12. Αν ελαττωθει κατα 18 προκυπτει ο δ' εναλλαγης των ψηφιων του, αριθμος. Ποιος ο αριθμος;

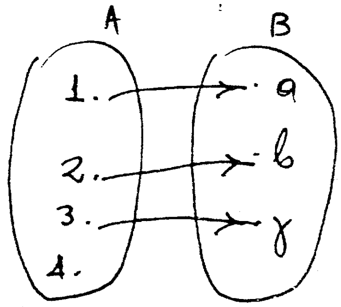
# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ή ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

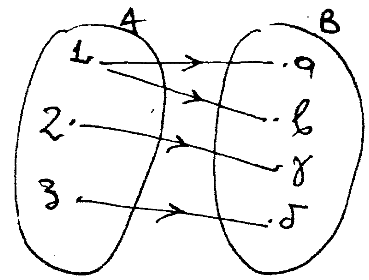
$$\varphi : A \rightarrow B$$

Μια διμελης σχεση απο το συνολο A στο συνολο B λεγεται απεικονιση ή συναρτηση οταν σε κάθε στοιχειο του A αντιστοιχει ενα μονο στοιχειο του B

π.χ.



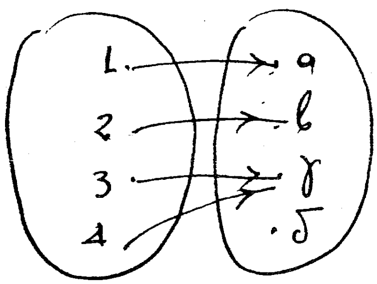




Είναι συναρτηση του A στο B

Δεν ειναι συναρτηση διοτι το $4 \in A$ δεν αντιστοιχει σε στοιχειο του B.

Δεν ειναι συναρτηση διοτι το $1 \in A$, αντιστοιχεί σε 2 στοιχεια του B

π.χ.




Ειναι συναρτηση. Το στοιχειο $x \in A$ δηλωνουμε οτι αντιστοιχει στο στοιχειο y του B γραφοντας $x \xrightarrow{\varphi} y$ ή $\varphi(x) = y$ δηλαδη στο παραδειγμα $1 \xrightarrow{\varphi} a$, $2 \xrightarrow{\varphi} b$, $3 \xrightarrow{\varphi} \gamma$, $4 \xrightarrow{\varphi} \gamma$ ή $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = b$, $\varphi(3) = \gamma$, $\varphi(4) = \gamma$

<u>Συνολο αφετηριας</u> ή <u>Συνολο ορισμου</u> ή <u>Πεδιο ορισμου της φ</u> λεγεται το συνολο A. Δηλαδη στο παραδειγμα $A = \{1, 2, 3, 4\}$

<u>Συνολο αφιξεως</u> λεγεται το συνολο B στο παραδειγμα $B = \{a, b, \gamma, \delta\}$

<u>Πεδιο τιμων</u> ειναι το συνολο $P \subseteq B$ που περιεχει ολα τα στοιχεια του B που ειναι αντιστοιχα καποιου στοιχειου του A. Δηλαδη στο παραδειγμα $P = \{a, b, \gamma\}$

Αν $x \xrightarrow{\varphi} y$, τοτε το x το ονομαζουμε <u>αρχετυπο</u> του y και το y <u>εικονα</u> του x δηλαδη το 1 ειναι αρχετυπο του a κ.λ.π.
το a ειναι εικονα του 1 κ.λ.π.

Επειδη μια συναρτηση ειναι διμ. σχεση ισχυουν ολοι οι τρόποι παραστάσεως μιας διμελους σχεσεως. Υπαρχει ομως και ενας επι πλεον τροπος παραστασεως. Αυτος ειναι ο τύπος της απεικονισεως ή συναρτησεως.

## Τυπος Συναρτησεως

Εστω $A=\{1,2,3,4\}$ και ο τυπος $\varphi(x)=4x+5$. Τότε

$1 \xrightarrow{\varphi} 9$ διότι $\varphi(1)=4\cdot 1+5=9$, $2 \xrightarrow{\varphi} 13$ διοτι $\varphi(2)=4\cdot 2+5=13$

$3 \xrightarrow{\varphi} 17$ διοτι $\varphi(3)=4\cdot 3+5=17$ και $4 \xrightarrow{\varphi} 21$ διοτι $\varphi(4)=4\cdot 4+5=21$

Πιο συντομα γραφουμε

| $x$ | $\varphi(x)$ |
|---|---|
| 1 | 9 |
| 2 | 13 |
| 3 | 17 |
| 4 | 21 |

ή

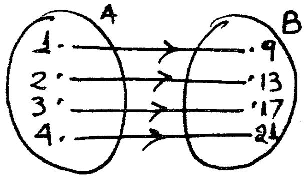
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | 9 | 13 | 17 | 21 |

Φυσικα μπορουμε να γράψουμε και με τους άλλους τρόπους την συναρτηση αυτη

ΑΝΑΓΡΑΦΗ $\varphi=\{(1,9),(2,13),(3,17),(4,21)\}$

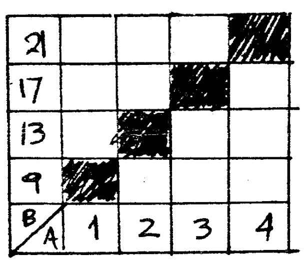
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ $\varphi=\{(x,y)$, οπου $x\in A \wedge y=4x+5\}$

ΒΕΛΟΕΙΔΕΣ

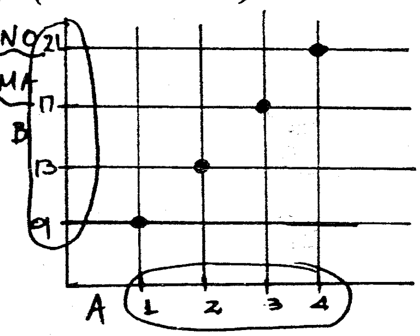



Η συναρτηση δεν αλλαζει αν αντι του Β, πάρω κάποιο υπερσύνολό του (ακόμα και με άπειρα στοιχεια)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ




ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



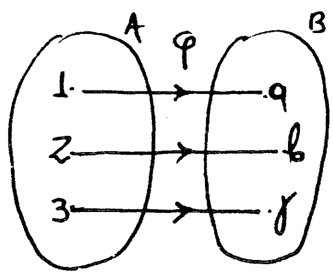

Το σύνολο που σχηματίζεται απο τις τιμές 9, 13, 17, 21 θα συμβολίζεται και με $\varphi(A)=\{9,13,17,21\}$ (Είναι το γνωστό μας σύνολο τιμών)

## ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

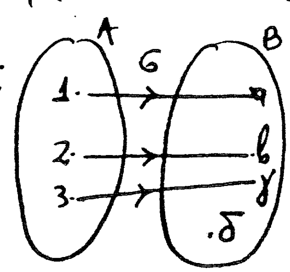
## ή ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΕΝΑ ΠΡΟΣ ΕΝΑ

Ας μελετησουμε τις τρεις παρακατω συναρτησεις

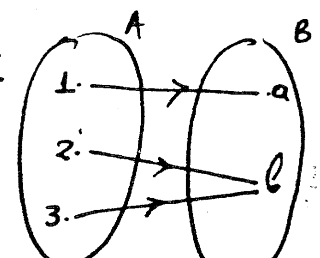
I.



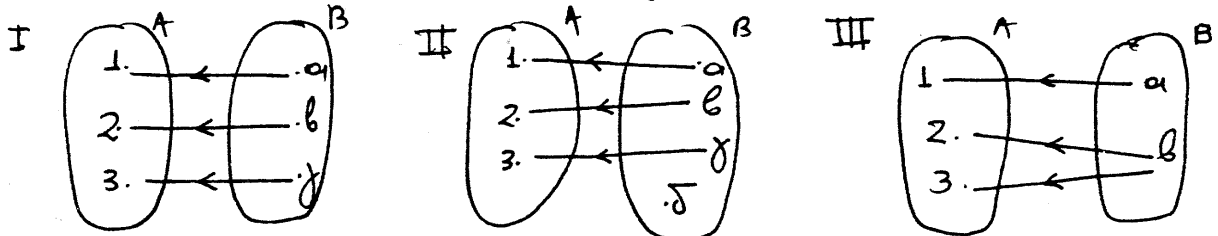

II




III



Ας επιχειρισουμε τωρα να αντιστρεψουμε τη φορα των βελων

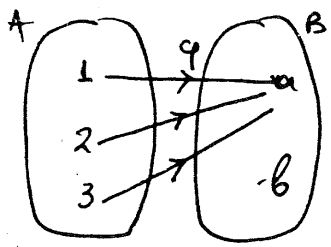



Βλεπουμε οτι μονο στο παρ. I εχουμε παλι συναρτηση
Στα II, III εχουμε αλλες διμελεις σχεσεις του B στο A
Η καινουργια συναρτηση που πηραμε στο I θα λεγεται:
αντιστροφη της φ και συμβολιζεται $\varphi^{-1}: B \to A$. Ειναι φανερο οτι:
$\varphi^{-1}(\alpha)=1,\ \varphi^{-1}(\beta)=2,\ \varphi^{-1}(\gamma)=3$ η

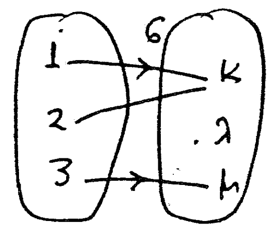
| $x$ | α | β | γ |
|---|---|---|---|
| $\varphi^{-1}(x)$ | 1 | 2 | 3 |

Παρατηρουμε δηλαδη οτι για να υπαρχει αντιστροφη συναρτηση πρεπει: σε δυο διαφορετικα στοιχεια του A να εχουμε διαφορετικες εικονες και $\varphi(A) = B$. Μια τετοια συναρτηση που εχει δηλαδη αντιστροφη, θα λεγεται αμφιμονοσημαντη η ενα προς ενα.

## 1. ΣΤΑΘΕΡΗ – ΤΑΥΤΟΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ



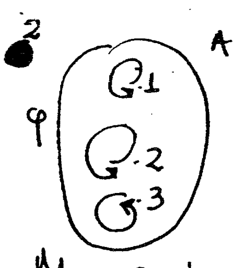

Η φ ειναι σταθερη συναρτηση



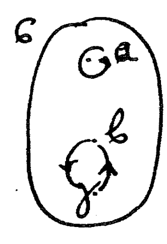

η σ δεν ειναι σταθερη συναρτηση

Μια συναρτηση λεγεται σταθερη οταν ολα τα στοιχεια του A εχουν την ιδια εικονα

2.




η φ ειναι ταυτοτικη συναρτηση




η σ δεν ειναι ταυτοτικη

Μια συναρτηση $\varphi: A \to A$ λεγεται ταυτοτικη οταν:
$\forall x \in A \Rightarrow \varphi(x) = x$

(Ειναι φανερο οτι συναρτησεις της μορφης $A \to B$ δεν μπορει να ειναι ταυτοτικες) Στο παραδειγμα $\varphi(1)=1,\ \varphi(2)=2,\ \varphi(3)=3$

# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

① Αν $\varphi(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ μια συναρτηση με πεδιο ορισμου το $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Να βρεθουν τα

α) $\varphi(-2)$, $\varphi(2)$ ; $\varphi(3)$, $\varphi(-3)$

β) $2\varphi(-2) + 3\varphi(1) - 2\varphi(2)$

γ) Να βρεθει το πεδιο τιμων της (το $\varphi(A)$)

② Αν $\varphi(x) = 3x - 5$ και $\varphi(A) = \{-2, 1, 10, 22\}$ να βρεθει το πεδιο ορισμου της A.

③ Να γινουν οι γραφικες παραστασεις των:

α) $\varphi(x) = 3x$ β) $\varphi(x) = 3x + 1$ γ) $\varphi(x) = 3x - 3$

δ) $\varphi(x) = 5x$ ε) $\varphi(x) = 5x - 2$ στ) $\varphi(x) = 5x + 4$

④ Αν η γραφικη παρασταση της $\varphi(x) = 3x + 4$ περναει απο τα σημεια $(a, 2)$ και $(-1, b)$ να βρεθουν τα $a, b$

⑤ Ομοια $\varphi(x) = 2x - 1$ και $(4, b)$ και $(a, 5)$

⑥ Η γραφικη παρασταση της $\varphi(x) = ax$ περναει απο το $(1, 3)$. Να βρεθει το $a$.

⑦ Ομοια της $\varphi(x) = ax + 2$ περναει απο το σημειο $(2, 8)$ να βρεθουν τα $(3, \gamma)$ και $(\delta, 4)$ απο τα οποια επισης περναει η συναρτηση

⑧ Αν $\varphi(x) = \frac{12}{x}$ μια συναρτηση με πεδιο ορισμου το $A = \{-6, -3, -4, -2, -1\}$ να βρεθουν τα

α) $\varphi(-4)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(1)$

β) $2\varphi(-3) + 3\varphi(-1) - 2\varphi(-4)$

γ) Να βρεθει το $\varphi(A)$

⑨ Αν $\varphi(x) = -\frac{12}{x}$ μια συναρτηση με πεδιο τιμων $\varphi(A) = \{-6, -4, -3, 3, 4\}$ να βρεθει το πεδιο ορισμου της A.

⑩ Να γινουν οι γραφικες παραστασεις των: α) $\varphi(x) = \frac{12}{x}$, β) $\varphi(x) = -\frac{12}{x}$

γ) $\varphi(x) = \frac{6}{x}$ δ) $\varphi(x) = -\frac{6}{x}$

⑪ Να βρεθουν τα $a, b$ αν ξερω οτι η γραφικη παρασταση της $\varphi(x) = \frac{6}{x}$ περναει απο τα $(3, a)$ και $(b, -2)$

⑫ Η γραφικη παρασταση της $\varphi(x) = \frac{a}{x}$ περναει απο το $(3, 4)$ Να βρεθει το $a$.

1 SOS

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΧΡΙΣΤΟΥΓΕΝΝΩΝ

(Α)

(1.) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{\dfrac{3-\left(-2\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}{5-\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}}{5-\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)+(-2)}{4-\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)}}$ β) $\dfrac{-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2\frac{1}{3}\right)(-2)-\left(-\frac{3}{4}\right)(-1)}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)}-\dfrac{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}{5-\left(+\frac{6}{2}\right)}$

(2.) Αν $x=-1$ και $y=-2$ να βρεθούν τα: α) $2x^{3x-2}+(y+3)^{2y+3x+6}$

β) $(x^2+1)^{xy}-2(y-4)^{x+3}-3(2y-1)^{y+5}$ γ) $(2y^2-5)^{2x}-(3x-2)^{y-x+1}$

(3) Αν $x=2^{-1}$ και $y=-3^{-2}$ να βρεθεί το: $(x^{-2}-y^{-1})(x^{-2}+y^{-1})\cdot\dfrac{xy}{x^2-y}$

(4.) Αν $Ε\in ΑΓ$ σε τετράγωνο ΑΒΓΔ και φέρω ΕΒ και ΕΔ να συγκριθούν τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΕΔΓ

(5.) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο Δ. Δείξτε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Α}$.

(6) Αν $x=1$ να βρεθεί η τιμή της παραστάσεως:

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3}+\left(-\frac{1}{5}\right)^{x-2}+(-1)^{x-1}-(x-3)^{x+1}$

(7) όμοια αν $x=-1$ και $y=2$ $(4x^x)^2-6(x\cdot y)^{xy}-y^{2y}+(3x+y)^{5y-x}$

(8) Να υπολογισθεί η παράσταση!

$$\frac{-\frac{4}{3}-\frac{-2}{3}+\left(4-\frac{-1}{-2}\right)}{-\frac{1}{2}-\frac{-2}{-3}+\frac{-5}{6}}:\frac{\frac{2}{-3}+\left(\frac{4}{-3}+1\right)}{\frac{4}{3}+\frac{2}{-3}+\frac{5}{6}}$$

(9) Να γίνουν οι πράξεις των ριζικών:

α) $2\sqrt{6}+\sqrt{24}-5\sqrt{24}+3\sqrt{60}$ β) $\sqrt{12}-2\sqrt{27}+5\sqrt{75}-2\sqrt{98}$

γ) $(\sqrt{12}+2\sqrt{5})^2$ δ) $(5-\sqrt{24})^2$ ε) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{12})(3\sqrt{2}-\sqrt{75})$

στ) $\sqrt{275}\cdot\sqrt{165}\cdot\sqrt{135}$ ζ) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{75}}$ η) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ θ) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

θ) $(3\sqrt{a}+\sqrt{b})(3\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ι) $(a+3\sqrt{b}-\gamma)(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\gamma)$

(10) Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών

α) 3 β) 15 γ) 543 δ) 1352 ε) 53 142

στ) 1,2 ζ) 5,32 η) 23,456 θ) 132,5478 ι) $\dfrac{5}{3}$

B

(11) Δινεται ισοσκελες τριγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$. Πάνω στις ισες πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνω ΑΔ=ΑΕ αντιστοιχα. Στη βάση του ΒΓ παιρνω ΒΚ=ΓΛ. Αν οι ΔΚ και ΕΛ τέμνονται στο Ρ δειξτε οτι το ΡΔΕ ειναι ισοσκελες τριγωνο.

(12) Ορθογωνιου τραπεζιου οι βασεις του διαφερουν 12cm και η πλάγια πλευρα του είναι 13cm. Η περίμετρος του ειναι 44cm. Να βρεθει το εμβαδον του.

(13) Σε ισοσκελες τραπεζιο το εμβαδον του ειναι $95cm^2$ και το υψος του 5cm. Οι μη παραλληλες πλευρες ειναι 13cm. Να βρεθουν οι βασεις του.

(14) Σε τριγωνο ΑΒΓ το υψος ΑΔ ειναι 12cm και ΑΒ = 20cm και ΑΓ = 13cm. Να βρεθουν τα υψη του ΒΕ και ΓΛ. Τι ειδους ειναι η γωνια $\hat{Α}$.

(15) Το εμβαδόν ρομβου ειναι $84cm^2$ Να βρεθει η περιμετρος του αν ξερω οτι η μια διαγωνιος του ειναι τα $\frac{3}{4}$ της αλλης.

(16) Παρ/μου οι πλευρες ειναι 8cm και 6cm και μια γωνια του 45° Να βρεθουν οι αποστασεις των απέναντι πλευρων του.

(17) Σε κυκλο ακτινας R= 60m βρισκεται χορδη ΑΒ=72m. Να βρειτε την αποσταση του κεντρου του κυκλου απο τη χορδη.

(18) Να βρεθουν τα x και y οταν $(2x-3y+2,\ 3x-2) =$
$= (3x-2y+7,\ 4x+3)$

(19) Αν $Α=\{1,2,3\}$, $Β=\{α,β,γ\}$ να παρασταθει με τους 4 τροπους (αναγραφη, καρτεσιανο διαγραμμα, βεννιο διαγραμμα, πινακα διπλης εισοδου) το Α×Β και το Β×Α

(20) Αν το $K\times P = \{(1,5),(3,4),(2,5),(3,5),(1,4),(2,4)\}$ Ποια ειναι τα Ρ και Κ;

(21) Αν $Α=\{α,β,γ\}$, $Β=\{β,γ,δ\}$ να βρειτε τα συνολα:
$(Α\times Α)\cap(Β\times Β)$, $(Α\times Α)\cap(Α\times Β)$, $(Β\cap Β)\cap(Α\times Β)$

(22) Ενα συνολο Α×Β περιεχει 7 στοιχεια. Ποσα στοιχεια μπορει να εχει καθενα απο τα συνολα Α, Β.

(23) Αν ενα συνολο Α εχει 2 στοιχεια και ενα συνολο Β εχει 3 στοιχεια και ξερουμε οτι: $(5,α)\in Α\times Β$, $(β,3)\in Α\times Β$ και $(5,2)\in Α\times Β$ να βρειτε το Α×Β

(24) Σημειωστε σε τετραγωνισμενο χαρτι τα σημεια Α(2,3), Β(-2,3), Γ(-2,-3), Δ(2,-3). Τι σχημα ειναι το ΑΒΓΔ;

SOS

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

**(Α)** 1) Αν δυο τριγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' ειναι ισα τοτε και οι διχοτομοι τους ΑΔ και Α'Δ' ειναι ισες.

2) Ομοια και οι διαμεσοι τους ΑΜ και Α'Μ' ειναι ισες

3) -||- -||- τα υψη τους ΑΗ και Α'Η' ειναι ισα

4) Σε παρ/μο ΑΒΓΔ φερνω ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΓΖ ⊥ ΒΔ. Να δειχθει οτι αυτες ειναι ισες. (δηλ. ΑΕ = ΓΖ)

5) Σε ρομβο οι αποστασεις των 2 απεναντι πλευρων ειναι ισες

6) Δυο τετραπλευρα ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' εχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και ΑΒ = Α'Β', ΑΔ = Α'Δ', ΒΓ = Β'Γ' και $\hat{B} = \hat{B}'$. Να δειχθει οτι ειναι ισα.

**(Β)** 1) Αν $x=-2$ και $y=-1$ να βρεθει η τιμη των παραστασεων

α) $(x+2)^5 - (y+2)^{12} - xy^2 - x^2y - (xy)^2$ β) $(2x+3)^{-5} - (x-y)^{-3} - (2x+y)^2$

γ) $x^x - y^y - (x+y)^{x+y}$ δ) $x^y - y^x - (x-y)^{2x+5y} - (3x-5y)^{-xy}$

ε) $\dfrac{\frac{5}{12} - \left(2\frac{1}{2}-3\right)\left(4\frac{1}{2}-3\right)^2}{\left(5\frac{1}{2}-4\right)\left(2-3\frac{1}{2}\right)\left(2-5\frac{1}{3}\right)}$ στ) $\dfrac{-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2\frac{1}{3}\right)(-2) - \left(-\frac{3}{4}\right)(-1)}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)} - \dfrac{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}{5-\left(+\frac{6}{2}\right)}$

γιατι επαναληψη

**(Γ)** 1) Δινονται τα συνολα $A=\{1,2,3,4\}$ και $B=\{3,4,5,6\}$ και οι παρακατω διμελεις σχεσεις απο το A στο B. Να γινει το γραφημα τους και να εξετασθουν αν ειναι ανακλαστικες, συμμετρικες, μεταβατικες, αντισυμμετρικ.

α) $\rho(x,y)$: $x \le y$ β) $\rho(x,y)$: ο x πολ/σιο του y γ)

γ) $\rho(x,y)$: ο x διαιρει τον y δ) $\rho(x,y)$: ο x διαιρουμενος με το 2 αφηνει το ιδιο υπολοιπο που αφηνει ο y διαιρουμενος με το 2

2) Τι ιδιοτητες εχει η σχεση $\rho(x,y)$: η x σχηματιζει γωνια 45° με την y στο συνολο των ευθειων ενος επιπεδου;

**(Δ)** ~~1)~~ Να λυθουν οι εξισωσεις:

1) $2x - 3(4-5x) = 15 - (5-2x)\cdot 3$ 2) $4^2x - 2\cdot 3^2(x-5^0) = 5^3 - 2(x-1)\cdot 3^2$

3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 5 = 4\left(\frac{x}{2} - 1\right) - \frac{1}{4}$ 4) $3\frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}\left(3 - 1\frac{1}{2}x\right) = \frac{4^2}{2} - (x-1)$

5) $15 - [3 - 2(x-3) - 1] = 10^2 - 3[x - (5-x)\cdot 2 - 3]$

6) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{10}{2} = \frac{5x}{6} + 5$ 7) $\frac{5x}{7} = 10\left(\frac{x}{14} + 1\right)$

8) $\left[3x - 6 - 5\left(\frac{7x}{2} - 5\right)\right] + 13(x-5) + \frac{1}{4} = 0$

9) $5x - \frac{x-1}{12} - \frac{x-3}{2} = 4$ 10) $\frac{3x-1}{2} - 2\,\frac{x-3}{3} = 10 - \frac{x-1}{6}$

11) $5 - 2\,\frac{x-1}{3} - \frac{5x-3}{2}\cdot 3 = 4 - \left(x - \frac{x-1}{12}\right)$ 12) $5 - 2\left(\frac{x-1}{3} - 3\,\frac{x-2}{2}\right) = 10$

13) $10-3\left(\frac{x-1}{2}-2\,\frac{x-3}{3}\right)=5x-2\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x-2}{2}\cdot 3\right)$

14) $\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$ 15) $\frac{x-\frac{2x+3}{9}}{8}-\frac{x-\frac{1}{3}}{2}=\frac{x+1}{3}$

16) $\frac{x-\frac{2(x-6)}{3}}{8}+\frac{x+3}{5}=x-10+\frac{x-\frac{3x-6}{5}}{3}$ 17) $\frac{\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{3}}{2}=12-\frac{x-\frac{1}{3}}{2}$

Ε) Να λυθουν τα προβληματα:

1) Το πληρωμα πλοιου αν παραταχθει κατα 5δες σχηματιζει 2 σειρες παραπανω απο οτι αν παραταχθει κατα 7δες. Ποσοι οι ανδρες του πληρωματος

2) Οι δεκαδες αριθμου ειναι κατα 2 μεγαλυτερες των μοναδων του. Ο αριθμος ισουται με το επταπλασιο του αθροισματος των ψηφιων του. Ποιος ο αριθμος ;(διψηφιος)

3) Πριν απο 10 χρονια ο Α ειχε τετραπλασια ηλικια απο τον Β. Τωρα εχει μονο διπλασια. Ποσων χρονων ειναι ο καθενας;

4) Μου λειπουν 3 δρχ για να αγορασω ενα τετραδιο. Αν ομως μου κανουν εκπτωση το $\frac{1}{3}$ της αξιας του τετραδιου θα μου περισσευουν και 16 δρχ. Ποσο κοστιζε το τετραδιο;

5) Δοχειο γεματο νερο ζυγιζει 12 kgr. Αν αδειασουμε τα $\frac{3}{4}$ του περιεχομενου του θα ζυγιζει μονο 5 kgr. Να βρεθει το βαρος του κενου δοχειου

6) Ειχε καποιος ενα βαρελι κρασι. Πουλα αρχικα το μισο. Επειτα το $\frac{1}{10}$ του υπολοιπου και ετσι του μεναν 103 kgr. Ποσο κρασι ειχε;

7) Μια χωρικη ειχε αυγα. Εσπασε το $\frac{1}{4}$ των αυγων και 2 αυγα ακομα Ετσι της εμειναν 76 αυγα. Ποσα αυγα ειχε;

ΣΤ) Να λυθουν οι ανισωσεις:

1) $\frac{3x-1}{5}-\frac{13}{2}\geq\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}$ 2) $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{12}\leq\frac{x-3}{4}+1.$

3) $\frac{5x}{2}-2\cdot\frac{3x-7}{3}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{2x-3}{3}+5\left(3-\frac{1-4x}{2}\right)$

4) $\frac{x+6}{2}+2\,\frac{x+17}{3}>2x+18-\frac{5}{2}\,\frac{x-10}{3}$ 5) $\frac{x+1}{4}-\frac{2x+19}{20}<\frac{2x-1}{5}-\frac{3x+1}{2}$

Ζ) Να βρεθει που συναληθευουν οι ανισωσεις:

1) $3x-5<7 \wedge 2x+3<8 \wedge 2x-3>x-4$

2) $3x-2<2x-3 \wedge 5x+3>3x+8$

3) $3x-2>4x-7 \wedge x-3>3x-2 \wedge x-3>4x+8 \wedge 2x+3>4x-3$

Η) 1) Αν $A=\{-2,-1,0,1,\frac{2}{3}\}$ να βρεθει το $\varphi(A)$ οταν $\varphi(x)=2x^2-1$

2) Αν $\varphi(A)=\{3,4,5\}$ να βρεθει το $A$ οταν $5x+1$.

3) Ποιες απο τις σχεσεις ειναι και απεικονισεις του A στο B

$A=\{1,2,3\}$ $G_1=\{(1,5),(2,6),(2,7),(3,7)\}$ $G_2=\{(1,7),(2,6),(3,6)\}$

$B=\{5,6,7\}$ $G_3=\{(1,5),(2,6)\}$ $G_4=\{(1,5),(2,6),(3,7),(2,7)\}$