ΣΥΝΟΛΑ

① Ορισμός: Δεν υπάρχει. Ο Cantor όμως που είναι ο θεμελιωτής της θεωρίας των συνόλων θεώρησε τα σύνολα ως εξής: Σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων που τα θεωρούμε σαν μια ολότητα, είναι εντελώς καθορισμένα, και διαφορετικά μεταξύ τους.

π.χ. Η πρόταση: «Οι συμμαθητές μου με ύψος πάνω από 1.50 m» αποτελεί σύνολο ενώ,

η πρόταση: «Οι ψηλοί συμμαθητές μου» δεν ορίζει σύνολο

Ποιες από τις προτάσεις είναι σύνολα και ποιες όχι;

α. Τα ψηλά βουνά της Ελλάδος
β. Οι άνθρωποι με ύψος πάνω από 2m
γ. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5, 6
δ. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 2, 4, 5

② Τρόποι παραστάσεως συνόλων:

ⓐ Δι' αναγραφής των στοιχείων: Γράφουμε όλα τα στοιχεία του συνόλου, μέσα σε άγκιστρα, χωρίζοντάς τα με κόμμα

π.χ. το σύνολο γ της ① γράφεται: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

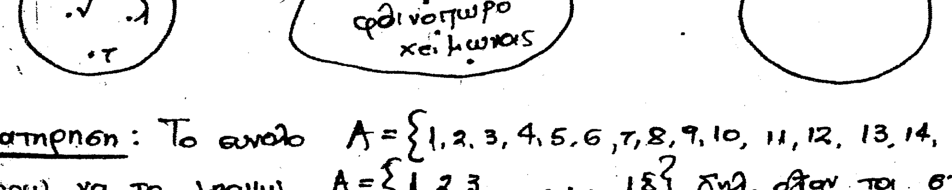
ⓑ Δια περιγραφής (της ιδιότητας των στοιχείων): Γράφουμε τη χαρακτηριστική ιδιότητα που συνδέει τα στοιχεία του συνόλου.

π.χ. το σύνολο γ της ① γράφεται: $A=\{$ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 6$\}$

ⓒ Με βέννιο διάγραμμα: Σχεδιάζουμε περίγραμμα οποιασδήποτε μορφής και εφαρμόζουμε τον κανόνα

1. Το όνομα του συνόλου θα το βάζω δίπλα στη γραμμή απ' έξω
2. Μέσα θα υπάρχουν ένα, ένα όλα τα στοιχεία του συνόλου
3. Κάθε στοιχείο θα παριστάνεται από μια τελεία και το όνομά του μέσα στο διάγραμμα.
4. Κανένα στοιχείο πάνω στη γραμμή.
5. Όταν το σύνολο έχει πολλά στοιχεία τότε δεν θα βάζουμε κανένα.

π.χ. Για τα σύνολα $A=\{κ, α, λ, ν, τ\}$, $B=\{$οι εποχές του έτους$\}$, $Γ=\{$οι κάτοικοι της Ελλάδος$\}$ να γίνουν τα βέννια διαγράμματα



③ Παρατήρηση: Το σύνολο $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$ μπορώ να το γράψω $A=\{1,2,3,\ldots,18\}$ δηλ. όταν τα στοιχεία του συνόλου είναι πολλά και ακολουθούν έναν ορισμένο νόμο, τότε μπορούμε να παραλείψουμε ορισμενα, βαζοντας τελειες.

(4) Κενο συνολο: Ειναι το συνολο που δεν εχει κανενα στοιχειο

- Τροποι γραφης:

(α) Με βεννιο διαγραμμα: Ειναι περιγραμμα γραμμοσκιασμενο 

(β) Με περιγραφη: $\{x \neq x\}$

(γ) Με αναγραφη: $\{\ \}$ η $\varnothing$

(5) Μονομελες συνολο: Ειναι καθε συνολο με 1 μονο στοιχειο

- Τροποι γραφης:

(α) Με αναγραφη: π.χ $\{2\}$

(β) Με περιγραφη: {ακεραιοι μεταξυ 1 και 3}

(γ) Με βεννιο διαγραμμα: 

1 • Ποια απο τα παρακατω συνολα ειναι γραμμενα λαθος; Να το βρειτε και να το διορθωσετε:

$A=\{1,2,3.5,2\}$, $B=\{\varepsilon, \jmath\}$, $\Gamma=\{5]$ $\Delta=\{1, 11, 111, 1111\}$, $E=\{0,1,2,3,\dots,\}$

$Z=\{0,2,4,6,\dots\}$, $H=\{1,3,5,7,\dots\}$, $\Theta=\{2,3,4,\dots,15\}$,

$I=\{2,3,4,\dots\}$, $K=\{0,1,2,\dots,15,12,13,\dots,20\}$

2 • Να γραφουν με τους δυο αλλους τροπους γραφης τα συνολα:

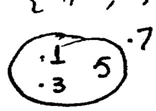
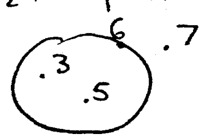
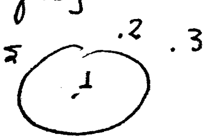
$A=\{$ακεραιοι μεταξυ 2 και 7$\}$, $B=\{$ψηφια του 1122$\}$,

$\Gamma=\{$ημερες της εβδομαδας$\}$, $\Delta=\{$αριθμοι απο το 1 μεχρι και το 1000$\}$

$E=\{$οι συμμαθητες μου με υψος πανω απο 1.40$\}$ $Z=\{a, 2\}$

$H=\{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$, $\Theta=\{\beta, \gamma, \delta\}$, $I=\{0\}$, $K=\{\ \}$

$\Lambda=\{1,3,5,7,8\}$, $M=\{1,3,5,7,\dots\}$ $N=\{$τα κρατη της γης$\}$

Ξ  Ο.  Π.  Ρ.  Σ 

3 • Ποια στοιχεια υπονοουν οι τελειες στα συνολα:

α. $A=\{5,6,7,8,\dots,23,25,27,\dots,43,46,49,52,\dots 70\}$

β. $B=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \omega\}$

γ. $\Gamma=\{3,6,9,\dots,81,82,84,86,88,\dots,202,203,204,205,210,215,\dots 310\}$

(6) Ισα συνολα: Ειναι τα συνολα που εχουν τα ιδια ακριβως στοιχεια

π.χ. Τα συνολα $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{2,3,1\}$ ειναι ισα και το δηλωνω με τη σχεση $A=B$. Αν δεν ειναι ισα τοτε γραφω $A\neq\Gamma$

Τα συνολα: $\Delta=\{$τα φωνηεντα της λεξεως οξυγονο$\} \rightarrow \Delta=\{o, \upsilon\}$

και $E=\{$ —"— —"— —"— —"— υδρογονο$\} \rightarrow E=\{\upsilon, o\}$

ειναι ισα. Αρα $\Delta=E$

- Ιδιοτητες: 1) $A=A$ (ανακλαστικη)
  2) $A=B \Leftrightarrow B=A$ (συμμετρικη)
  3) $A=B$ και $B=\Gamma \Rightarrow A=\Gamma$ (μεταβατικη)

1
- Ποια απο τα παρακατω συνολα ειναι ισα μεταξυ τους:
  $A=\{3,5,7\}$, $B=\{5,7,3\}$, $\Gamma=\{3,7,5\}$, $\Delta=\{$ψηφια του 3752$\}$
  $E=\{$ψηφια του 3573$\}$, $Z=\{$ψηφια του 35335735$\}$

2
- Να οριστεί ο α ωστε τα παρακατω συνολα ειναι ισα μεταξύ τους:
  $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{4,3,\alpha,2\}$

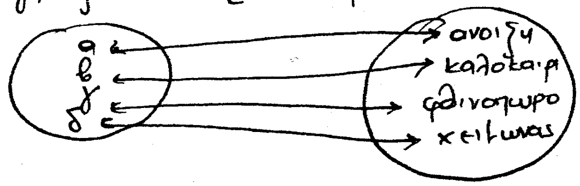
⑦ Ισοδυναμα συνολα : Λεγονται δυο συνολα Α και Β που μπορουμε να αντιστοιχισουμε τα στοιχεια τους ενα με ενα

Συμβολισμος : $A \sim B$ ή $B \sim A$

Ιδιοτητες : 1) $A \sim A$ (ανακλαστικη)
2) $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ (συμμετρικη)
3) $A \sim B$ και $B \sim \Gamma \Rightarrow A \sim \Gamma$ (μεταβατικη)

ΠΡΟΣΟΧΗ : Δυο συνολα ειναι ισοδυναμα οταν εχουν το ιδιο πληθος στοιχειων

π.χ $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$ τοτε $A \sim B$ ή $B \sim A$
$A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ $B=\{$οι εποχες του ετους$\}$



⑧ Η έννοια του $\in$ (ανηκει)

Το "$\in$" σημαινει οτι : αυτο που ειναι αριστερα του ειναι στοιχειο αυτου που ειναι δεξια του Αντιστοιχα το "$\notin$" σημαινει δεν ανηκει δηλ. δεν ειναι στοιχειο

π.χ. $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ $B=\{$Νικος, Γιωργος, Τασος$\}$
$\alpha \in A$, $\beta \in A$, $\gamma \in A$, $\delta \in A$ ειναι σωστα
$\eta \in A$, $\kappa \in A$, Νικος $\in A$ ειναι λαθος και γραφουμε $\eta \notin A$, $\kappa \notin A$, Νικος $\notin A$
Ομοιως $\rho \in B$, $\alpha \in B$ —||— —||— $\rho \notin B$, $\alpha \notin B$

1
- Ποια απο τα παρακατω συνολα ειναι ισοδυναμα;
  $A=\{5\}$, $B=\{$φυσικοι αριθμοι μεταξυ 2 και 6$\}$,
  $\Gamma=\{$ψηφια του 153421$\}$, $\Delta=\{$μερες της εβδομαδας$\}$
  $E=\{$φυσικοι μικροτεροι του 7$\}$, $Z=\{$ψηφια του 888$\}$, $H=\{\ \}$
  $\Theta=\{$φυσικοι μεταξυ 1 και 2$\}$, $I=\{$ψηφια του 3455$\}$

2 ● Ποιοι απο τους παρακατω συμβολισμους ειναι σωστοι και ποιοι οχι;

$\phi=\{\phi\}$, $a\in\{\ \}$, $0=\phi$, $\phi=\{\ \}$, $0\in\{\ \}$,
$\{$οι ανθρωποι πατησαν στη Σεληνη$\}=\phi$

(9) Υπαρχουν συνολα που εχουν σαν στοιχεια συνολα

π.χ. $A=\{1,\{2,3\},\{4\}\}$ Τα στοιχεια του συνολου A ειναι τα 1, $\{2,3\}$, $\{4\}$
αρα $1\in A$, $\{2,3\}\in A$, $\{4\}\in A$ ενω ειναι λαθος τα: $2\in A$, $3\in A$, $4\in A$, $\{2,3,4\}\in A$, $\{1\}\in A$

1 ● Αν $A=\{5,6,\{8\}\}$ ποιες απο τις παρακατω σχεσεις ειναι σωστες;
$5\in A$, $6\in A$, $8\in A$, $\{8\}\notin A$, $\{6\}\notin A$

2 ● Ποιες απο τις παρακατω σχεσεις ειναι σωστες; Να διορθωθουν οι λανθασμενες.

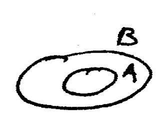
1. $a\in\{a\}$, 2. $\{a\}\in\{\{a\},\beta,\gamma\}$, 3. $\phi=\{\phi\}$, 4. $\phi=\{\ \}$, 5. $\{\ \}=\{0\}$,
6. $\{a\}\notin\{a\}$. 7. $0=\{0\}$ 8. $1=\{1,2\}$, 9. $\phi\in\{\ \}$, 10. $a\in\{\{a\},\{\beta,\gamma\},\delta\}$
11. $\phi=0$, 12. $a\notin\{\{a,\beta\},\{\gamma\},\{a\},a\}$, 13. $1\notin\{\{1\},1\}$
14. $\{1,6\}\in\{\{1,6,2\},3\}$, 15. $\{1,7\}\notin\{\{1,7,8\},\{1,7\}\}$
16. $1\notin\{\{1,2\},1,2\}$ 17. $\{2,3\}\neq\{3,2\}$
18. $\{5,8,\{5\}\}=\{5,8\}$, 19. $75\in\{7,5\}$, 20. $80=\{8,0\}$

(10) Σχεσεις εγκλεισμου

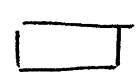
Λεμε οτι $B\subset A$ (B γνησιο υποσυνολο του A ή B εγκλειεται στο A, ή B περιεχεται στο A ή A υπερσυνολο του B, ή A εγκλειει το B) οταν: καθε στοιχειο του B ειναι και στοιχειο του A και υπαρχει στοιχειο του A που δεν ανηκει στο B.
π.χ. Αν $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{1,2,3,4,5\}$ τοτε $A\subset B$

$K\not\subset\Lambda$ (K οχι υποσυνολο του Λ) σημαινει οτι το K δεν ειναι υποσυνολο του Λ.

α. Το "$\subset$" τιθεται μεταξυ 2 συνολων
β. Το βεννιο διαγραμμα ειναι της μορφης:



(11) Ορισμος του U: Ειναι το υπερσυνολο ολων των συνολων μιας ασκησεως
Ειδικα για το U εχουμε σαν βεννιο διαγραμμα το



(12) Λεμε οτι $B \subseteq A$ (B μη γνησιο υποσυνολο του A) οταν καθε στοιχειο του B ειναι και στοιχειο του A

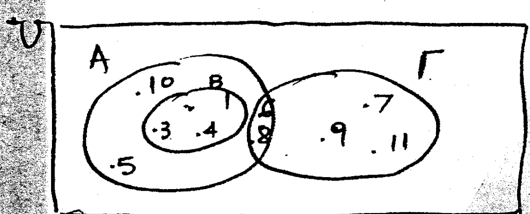
α. Καθε συνολο (και το κενο) ειναι μη γνησιο υποσυνολο του εαυτου του δηλ. $A \subseteq A$

β. Ιδιοτητες της σχεσεως " $\subseteq$ "

1. $A \subseteq A$ (αυτοπαθης)
2. $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (αντισυμμετρικη)
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ (μεταβατικη)

- Δινονται τα συνολα $B = \{\gamma, \alpha\}$ $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
  Η σχεση $B \subset \Gamma$ ειναι σωστη διοτι $\gamma \in B$ και $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \in B$ και $\alpha \in \Gamma$ αρα: καθε στοιχειο του B ειναι και του Γ και υπαρχει το $\beta \in \Gamma$ που $\beta \notin B$.

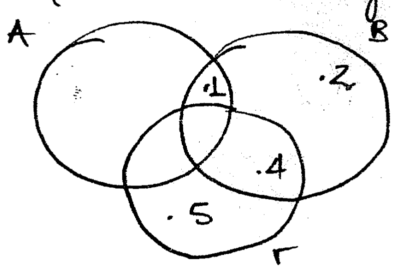
- Ποια ειναι η σχεση μεταξυ των συνολων και ποια τα συνολα;



Απο το σχημα φαινεται οτι:
$B \subset A$, $A \subset U$, $B \subset U$, $\Gamma \subset U$
Δεν υπαρχει σχεση εγκλεισμου μεταξυ των A και Γ

$A = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, $\Gamma = \{6, 8, 7, 9, 11\}$

- Να βρεθει η σχεση εγκλεισμου για τα συνολα:



Ισχυει μονο η σχεση: $A \subset B$

1. Δινονται τα συνολα: $A = \{\delta\}$, $B = \{\gamma, \delta\}$, $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, $E = \{\alpha, \beta, \delta\}$
   Ποιες απο τις σχεσεις ειναι σωστες;
   $\Delta \subset \Gamma$, $B \neq E$, $A \subset \Gamma$, $B \subset \Delta$, $B \not\supset A$, $E \supset A$, $\Delta \not\subset E$, $\gamma \in \Delta$, $\beta \in B$, $\alpha \subset \Delta$.

√ 2. Ποιες απο τις σχεσεις ειναι σωστες:
   $\emptyset \subset \{\emptyset\}$, $\gamma \subset \{\{\alpha, \beta\}, \gamma\}$, $\{\alpha\beta\} \subset \{\{\alpha, \beta\}, \gamma\}$, $\{2, 3\} \subset \{3, 2\}$

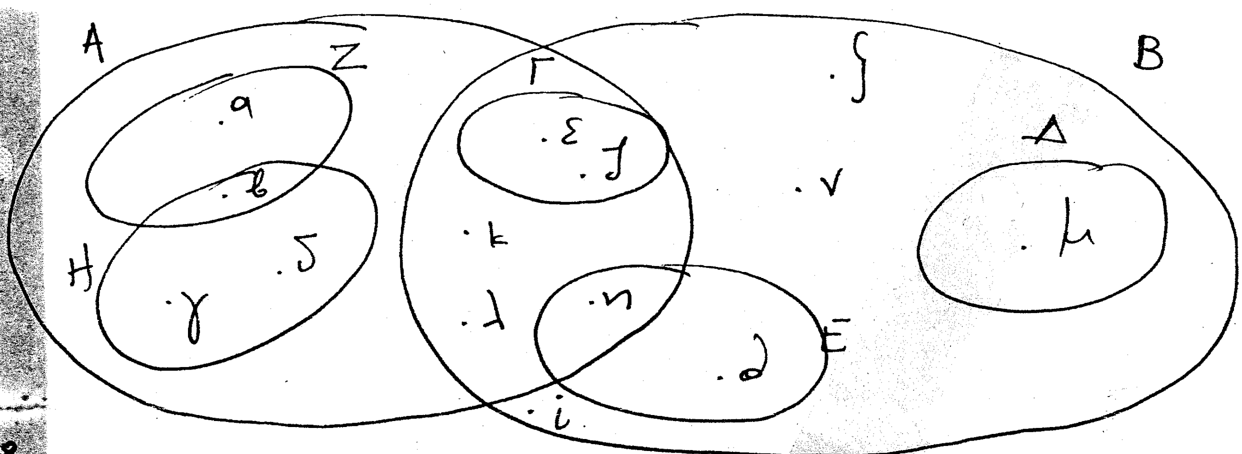
√ 3. Ομοιως: $\{4\} \in \{\{4\}\}$, $\{4\} \subseteq \{\{4\}\}$, $\emptyset \subset \{\{4\}\}$, $\{4\} \subset \{4\}$

4 • Να γραφούν τα γνήσια υποσύνολα του A = {ψηφία του 112532}
και του B = {γράμματα της λέξεως θάλασσα}

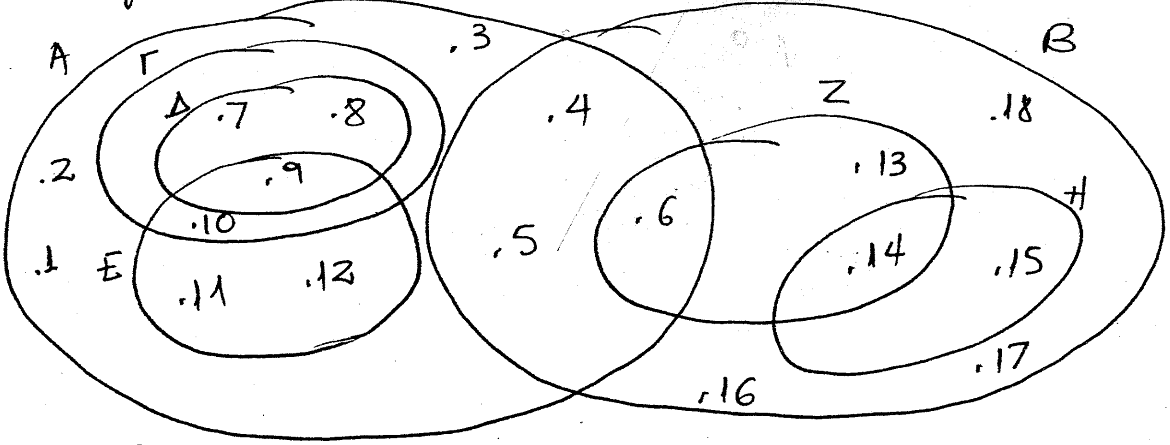
5 • Ποια είναι τα υποσύνολα του {8, 2} και ποια τα γνήσια υποσύνολα του {0, 8, 2}

6 • Να γράψετε τη σχέση εγκλεισμού για τα σύνολα:
$A = \{1, 2, \ldots, 99\}$, $B = \{1, 2, \ldots, 100\}$, $\Gamma = \{1, 2, \ldots, 999\}$

7 • Στο παρακάτω σχήμα να βρείτε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι υποσύνολα άλλων



8 • Το ίδιο για το σχήμα:



9 • Αν $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$ ποιες από τις σχέσεις είναι σωστές;
$\{4,5\} \subset A$, $\{4,5\} \in A$, $\{\{4,5\}\} \subset A$, $5 \in A$, $\{5\} \in A$, $\{5\} \subset A$
Λ Σ Σ Λ Λ Λ

10 • Ομοίως αν $A = \{0, 1\}$
$\{0\} \in A$, $\phi \in A$, $\{0\} \subset A$, $0 \in A$, $\phi \subset A$, $0 \subset A$
Λ Λ Σ Σ Λ Λ

11 • Να διορθωθούν οι σχέσεις που είναι ψευδείς:

1. $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4\}$, 2. $\{a\} \subset \{\{a\},\{b\},\gamma\}$, 3. $\{a\} \supseteq \emptyset$, $\{\emptyset\} = \emptyset$

4. $1 \subset \{1\}$ 5. $1 \in \{1\}$, 6. $\{\{i\}\} \subset \{\{i\},2\}$,

7. $\{1,2,3\} \supset \{1,5\}$, 8. $\{1,4,3\} \subseteq \{4,1,3\}$ 9. $\{0\} \supset \{\ \}$

10. $0 \subset \{0,3\}$, 11. $\{5,8\} \subset \{\{5\},8,10\}$

12 • Στο ίδιο σχήμα να παραστήσετε με διάγραμμα του Venn τα σύνολα:

$A=\{0,5,6,7\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$

ομοίως για τα σύνολα:

$\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\Delta=\{\beta,\gamma,\delta\}$ $E=\{\delta,\varepsilon,\zeta\}$

13 • Να βρεθούν οι σχέσεις εγκλεισμού, ισοδυναμίας, ισότητος που συνδέουν τα σύνολα:

1. A={διψήφια πολλαπλάσια του 11} και
B={διψήφιοι ακέραιοι με όμοια γράμματα}
2. A={ημέρες της εβδομάδας} και B={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
3. A={πολλαπλάσια του 5 μικρότερα του 51} και
B={0, 1, 2, . . . , 10}
4. A={οι αριθμοί που όταν πολλαπλασιασθούν με τον εαυτό τους δίνουν πάλι τον εαυτό τους} και B={1}
5. A={υπόλοιπα της διαιρέσεως ενός αρτίου με το 2}, και B={0}

13 ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

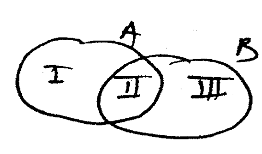
Συμβολισμός: (για 2 σύνολα) $A \cap B$

Ορισμός: Τομή 2 συνόλων A και B λέγεται το σύνολο που αποτελείται μόνο από τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλ.

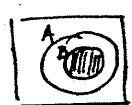
π.χ. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $\Gamma=\{5,6\}$, $\Delta=\{1,2\}$, $E=\{1,2,3,4\}$

$A\cap B=\{2,3\}$, $A\cap\Gamma=\{\ \}$, $A\cap\Delta=\{1,2\}$, $A\cap E=\{1,2,3\}$

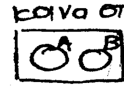
Διάγραμμα της τομής $A\cap B$:
Είναι ο χώρος II



1. Αν $B \subset A \Rightarrow A\cap B = B$



2. $A\cap A = A$
3. $A\cap\emptyset=\emptyset$, $\emptyset\cap A=\emptyset$, $\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$
4. $A\cap B \subseteq A$ και $A\cap B \subseteq B$
5. Αν η τομή 2 συνόλων είναι κενό σύνολο τότε:
   - → Τα σύνολα δεν έχουν κανένα στοιχείο κοινό και λέγονται ξένα



   - → 3 δηλ. το ένα είναι το κενό

Ιδιότητες της τομής:
1. $A \cap B = B \cap A$ (αντιμεταθετική)
2. $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap B \cap \Gamma$ (προσεταιριστική)

1 • Να βρείτε την τομή των παρακάτω συνόλων
α) $A = \{5, 6, 2, 3\}$ $B = \{3, 7, 0, 2\}$ β) $\Gamma = \{7, 3, 6, 5\}$, $\Delta = \{3, 2, 6, 7\}$
γ) $E = \{$ψηφία του $16251\}$, $Z = \{$ψηφία του $23511\}$, $H = \{$ψηφία του $12375\}$
Να γίνουν και τα διαγράμματα του Venn

2 • Αν $A = \{$αυτοκίνητα$\}$, $B = \{$κόκκινο χρώμα$\}$, $\Gamma = \{$αυτοκίνητο Ford$\}$
τι σημαίνουν τα σύνολα; 1. $A \cap B$, 2. $A \cap \Gamma$, 3. $B \cap \Gamma$

3 • Αν $A = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$, $B = \{12, 13, \dots, 25\}$ τότε $A \cap B =$;
$A \cap B = \{12, 13, \dots, 19\}$.

4 • Να βρείτε την τομή των συνόλων:
1. $A = \{7, 8, 9, \dots, 30\}$, $B = \{27, 28\}$, $\Gamma = \{2, 3, \dots, 27\}$
2. $A = \{$φυσικοί μεταξύ 1 και 5$\}$ $B = \{$τα ψηφία του $\{112358\}$,
$\Gamma = \{5, 6, 7, \dots, 20\}$

14 ΕΝΩΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

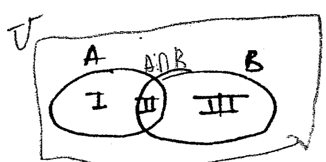
Συμβολισμός: $A \cup B$

Ορισμός: Ένωση δύο συνόλων Α και Β λέγεται το σύνολο $A \cup B$ που αποτελείται από τα στοιχεία των δύο συνόλων (κοινά και μη κοινά)

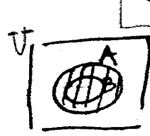
π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $\Gamma = \{5, 6\}$, $\Delta = \{1, 2\}$ $E = \{1, 2, 3, 4\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, ~~B~~ $A \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $A \cup \Delta = \{1, 2, 3\}$, $A \cup E = \{1, 2, 3, 4\}$

Αν $A = \{1, 2, 3, \dots, 19\}$, $B = \{12, 13, \dots, 25\}$ τότε $A \cup B =$;
$A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 25\}$

Βέννιο διάγραμμα της ενώσεως $A \cup B$:
Είναι όλοι οι χώροι I, II, III



$A \cup B = U$



1. Αν $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$
2. $A \cup A = A$
3. $A \cup \emptyset = A = \emptyset \cup A$
4. $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
5. $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$
6. $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

Ιδιοτητες της ενωσεως:

1. $A \cup B = B \cup A$ (αντιμεταθετικη)
2. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup B \cup \Gamma$ (προσεταιριστικη)

1 • Να βρειτε την ενωση των παρακατω συνολων:

α) $A = \{3, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

β) $\Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Delta = \{5, 6, 7, 8\}$

γ) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z = \{4, 5, 6\}$, $H = \{7, 8, 9\}$

Να γινουν τα διαγραμματα του Venn.

2 • Δινονται τα συνολα:

$A = \{5, 6, 7, \dots, 25\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$\Gamma = \{26, 27, 28, \dots\}$

$\Delta = \{10, 11, 12, \dots, 20\}$

$E = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$Z = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$

$H = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$\Theta = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$I = \{6, 7, 8, 9, \dots, 32\}$

$K = \{13, 14, 15, \dots, 48\}$

$\Lambda = \{10, 11, 12, \dots, 30\}$

$\Xi = \{16, 17, 18, \dots\}$

$O = \{21, 22, 23, \dots, 48\}$

$\Pi = \{25, 26, 27, \dots\}$

$P = \{4, 5, 6, \dots, 23, 28, 29, 30, \dots, 50\}$

$T = \{3, 4, 5, \dots, 13, 15, 17, 19, \dots, 51\}$

$\Sigma = \{3, 6, 9, 12, \dots, 102\}$

3 • Να βρεθουν τα συνολα:

1. $A \cap B$, 2. $A \cap Z$, 3. $A \cap \Lambda$, 4. $A \cap K$, 5. $\Gamma \cap \Xi$, 6. $Z \cap P$, 7. $H \cap T$,
8. $A \cap E \cap \Lambda$, 9. $K \cap H \cap \Xi$, 10. $A \cap \Delta \cap Z$, 11. $K \cap \Xi \cap O$, 12. $A \cap B \cap E$

ομοιως τα συνολα:

1. $A \cup B$, 2. $B \cup \Gamma$, 3. $B \cup E$, 4. $E \cup \Xi$, 5. $K \cup \Xi$, 6. $O \cup \Pi$, 7. $\Delta \cup \Sigma$, 8. $H \cup \Theta$
9. $A \cup \Gamma \cup \Lambda$, 10. $K \cup H \cup \Xi$, 11. $\Pi \cup P \cup O$, 12. $\Gamma \cup \Delta \cup E$, 13. $B \cup H \cup \Xi$

4 • Να βρεθει το συνολο $A \cap (B \cup \Gamma)$

1. Υπολογιζουμε το συνολο που ειναι μεσα στην παρενθεση
2. Βρισκουμε την τομη (ή σε αλλη ασκηση την ενωση) του συνολου που ειναι εξω απο την παρενθεση μ'αυτο που βρηκαμε

Σ'αυτην την περιπτωση:

$A \cap (B \cup \Gamma) = \{5, 6, 7, \dots, 25\} \cap (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{26, 27, 28, \dots\}) =$

$= \{5, 6, 7, \dots, 25\} \cap \{1, 2, 3, 4, 26, 27, 28, 29, \dots\} =$

$= \{\ \}$

4 • Να βρεθουν τα συνολα:

1. $\Gamma \cap (B \cup E)$, 2. $E \cap (K \cup \Xi)$, 3. $(A \cup B) \cap \Delta)$, 4. $(E \cup Z) \cap K$,
5. $A \cup (B \cap \Gamma)$, 6. $\Gamma \cup (B \cap E)$

5 • Ομοιως τα συνολα:
1. $(A\cap\Delta)\cup(B\cap E)$ 2. $(K\cap H)\cup(\Xi\cap O)$, 3. $(O\cap\Pi)\cup(E\cap Z)$
4. $(\Theta\cap I)\cup(\Xi\cap H)$, 5. $(A\cup\Delta)\cap(B\cup E)$, 6. $(K\cup H)\cap(\Xi\cup O)$

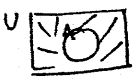
6 • Να αποδειχθουν οι ισοτητες:
1. $A\cap(B\cup\Gamma) = (A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$ οταν $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,5,6,7\}$, $\Gamma=\{2,3,5,7,8\}$
2. $A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ οταν $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $B=\{\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$, $\Gamma=\{\delta,\theta,\zeta,\eta\}$

7 • Οι παραπανω ιδιοτητες επαληθευονται για οποιαδηποτε τριαδα συνολων και διαβαζονται:
$A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$: Επιμεριστικη ιδιοτητα της τομης ως προς την ενωση
$A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$: Επιμεριστικη ιδιοτητα της ενωσεως ως προς την τομη

8 • Αν $A=\{$φυσικοι αριθμοι μεταξυ 4 και 9$\}$, $B=\{$φυσικοι μικροτεροι του 7$\}$ να αποδειχθει η ιδιοτητα: $(A\cup B)\cup(B\cap A) = A\cup B$

(15) ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ

Συμπληρωμα συνολου A ειναι τα στοιχεια του U που δεν ανηκουν στο A.
Βεννιο διαγραμμα A'



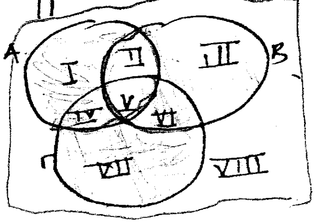
① $U'=\varnothing$, ② $\varnothing'=U$ ③ $(U')'=U$
④ $A'\cup A=U$ ⑤ $A'\cap A=\varnothing$

• Αν $U=\{0,1,2,\dots,10\}$, να βρεθουν τα συμπληρωματα των συνολων
$A=\{2,3,4\} \Rightarrow A'=\{0,1,5,6,\dots,10\}$
$B=\{5,6,7\}$, $\Gamma=\{2,3,9,10\}$, $\Delta=\{1,2,3,\dots,10\}$
$E=\{$ψηφια του 123$\}$, $Z=\{$περιττοι απο το 1 μεχρι το 10$\}$
Να γινουν και τα διαγραμματα του Venn.
• $(A\cup B)' = (\{2,3,4\}\cup\{5,6,7\})' = (\{2,3,4,5,6,7\})' = \{0,1,8,9,10\}$
• $A\cap(B'\cup\Gamma) = \{2,3,4\}\cap(\{5,6,7\}'\cup\{2,3,9,10\}) = \{2,3,4\}\cap(\{0,\dots,4,8,9,10\}\cup\Gamma) =$
$= \{2,3,4\}\cap\{0,1,2,3,4,8,9,10\} = \{2,3,4\}$
• $A'\cup B = (\{2,3,4\})'\cup\{5,6,7\} = \{0,1,5,6,7,8,9,10\}\cup\{5,6,7\} = \{0,1,5,6,7,\dots,10\}$

1 • Ομοιως να βρεθουν $(A\cap B)'$, $A\cap B'$, $(A'\cup B')'$

2 • Ποιο ειναι το συμπληρωμα των συμφωνων του ελληνικου αλφαβητου ως προς το συνολο των γραμματων της αλφαβητου;

3 •



Στο παραπλευρως διαγραμμα ποιοι χωροι ειναι:
1. A', 2. B', 3. $A\cap B'$, 4. $A\cup B'$, 5. $A'\cap B'$, 6. $A\cap B'\cap\Gamma'$,
7. $A'\cap(B\cup\Gamma)'$ 8. $A'\cup(B\cap\Gamma)'$

4
- Δίνονται τα σύνολα:
$A=\{1,2,5,7\}$, $B=\{1,3,6,7,8\}$, $\Gamma=\{1,4,5,6,7\}$, $\Delta=\{1,3,4,7,8\}$
και το βασικό σύνολο $\Omega=\{1,2,3,\ldots,10\}$ Να βρεθούν:
1. $B\cap\Gamma$, 2. $A\cup\Delta$, 3. $A\cap B\cap\Gamma$, 4. $A\cup B\cup\Gamma$, 5. A', 6. B', 7. Γ', 8. Δ',
9. $A\cup(B\cap\Delta)$, 10. $A\cap(B\cup\Gamma)$, 11. $(A\cap\Gamma)\cup\Delta$, 12. $(A\cup\Gamma)\cap B$, 13. $(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$
14. $(B\cup\Gamma)\cap(A\cup\Delta)$, 15. $A'\cap B$, 16. $A\cap B'$, 17. $A\cap(B\cup\Gamma')$, 18. $A'\cup B'$,
19. $A\cap(B'\cup\Gamma')'$, 20. $B'\cup(A'\cap\Gamma')'$, 21. $(A\cup B)'\cap(A\cup\Gamma')$

16 ΓΝΗΣΙΑ ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ ΤΟΥ N.

Είναι σύνολα που έχουν στοιχεία τους φυσικούς αριθμούς (και δεν είναι το ίδιο το N), και είναι γνήσια υποσύνολα του N
π.χ $\{2,5,7\}$, $\{0,5,10,15,20,25\}$, {άρτιοι αριθμοί}, {περιττοί αριθμοί}

- Ορίζουμε τον $N^* = \{1,2,3,4,\ldots\}$
- Ονομάζουμε αρχικά αποκόμματα του N^* τα γνήσια υποσύνολά του, που σχηματίζονται με τα πρώτα στοιχεία του. Αυτά συμβολίζονται με το ίδιο γράμμα T, το οποίο συνοδεύεται από έναν δείκτη που μας λέει ποιο είναι το τελευταίο στοιχείο.
π.χ. $T_1=\{1\}$, $T_2=\{1,2\}$, $T_{85}=\{1,2,3,\ldots,85\}$

- Για τα αποκόμματα ισχύει: $\emptyset \subset T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \ldots \subset T_\nu \subset \ldots$

17 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Κάθε σύνολο το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα αρχικό απόκομμα του N^* λέγεται πεπερασμένο σύνολο
π.χ. Το σύνολο των συμφώνων είναι ισοδύναμο με το T_{17} και άρα πεπερασμένο

- Πληθικός αριθμός σ' ένα πεπερασμένο σύνολο είναι ο αριθμός των στοιχείων
- Πληθάριθμος (πληθικός αριθμός) του κενού είναι το μηδέν.
- Τα αρχικά αποκόμματα $T_1, T_2, T_3, \ldots$ του N^* έχουν πληθάριθμους τους αριθμούς $1, 2, 3, \ldots$ αντίστοιχα
- Τα ίσα σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο
- Τα ισοδύναμα σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο
- Τα σύνολα που έχουν τον ίδιο πληθάριθμο είναι ισοδύναμα. Είναι ίσα;

1α
- Ποια από τα σύνολα είναι πεπερασμένα και ποια όχι;

$A=\{$κάτοικοι της Αθήνας$\}$
$B=\{3,6,9,12,\ldots\}$
$\Gamma=\{0,2,4,6,\ldots,70\}$

Το A και το Γ είναι πεπερασμένα διότι είναι ισοδύναμα με κάποιο απόκομμα του N^* πχ $\Gamma\sim T_{36}$, Το B είναι απειροσύνολο

1• Ποια απο τα παρακατω συνολα ειναι πεπερασμενα και ποια ειναι απειροσυνολα Να βρεθει ο πληθικος αριθμος των πεπερασμενων

$A = \{0, 1, 2, \ldots, 30\}$, $B = \{$διαιρετες του $12\}$

$\Gamma = \{$πολλαπλασια του $12\}$, $\Delta = \{$περιττοι μεγαλυτεροι του $9\}$,

$E = \{$πολλαπλασια του 13 μικροτερα του $169\}$

$Z = \{0, 1, 2, \ldots, 50, 51, 52, \ldots\}$, $H = \{0, 1, 2, \ldots, 30, 32, 34, 36, \ldots, 100\}$

2• Να οριζετε το συνολο Σ με τον μικροτερο πληθαριθμο ωστε να ειναι $A \subseteq \Sigma$ και $B \subseteq \Sigma$

i) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, F

ii) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $B = \emptyset$

iii) $A = \{\alpha, \beta, \delta\}$, $B = \{\beta, \varepsilon\}$

iv) $A = \{\alpha, \gamma\}$, $B = \{\beta, \delta, \varepsilon\}$

• Να βρεθουν τα παρακατω: $U = N^*$

1. $T_5 \cap T_4'$, 2. $T_{10} \cup T_7 \cup T_6 \cup T_3 \cup T_2 \cup T_{12} \cup T_5$

3. $T_5 \cup T_6$, 4. $T_7' \cup T_3'$, 5. $T_7' \cap T_3'$

6. $(T_1 \cup T_4) \cap T_5$ 7. $(T_3 \cup T_5) \cap (T_2 \cup T_4)$, 8. $(T_3 \cap T_5) \cup (T_3 \cup T_5)$

(18). ΔΙΑΤΑΞΗ στο N

Ειναι η σειρα με την οποια μπορουν να μπουν οι φυσικοι αριθμοι ωστε να προηγειται παντα ο μικροτερος

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$$

- Το μηδεν ειναι το μικροτερο στοιχειο του N
- Δεν υπαρχει φυσικος αριθμος που να ειναι μεγαλυτερος απο ολα ~~στα~~ στοιχεια του N
- Αν εχουμε 2 ανισους φυσικους τοτε θα ειναι:

  $a < b$ V $b < a$
- Αν εχουμε 2 οποιουσδηποτε φυσικούς αριθμούς α και β, τοτε αυτοι θα συνδεονται με τη σχεση:

  $a < b$ V $a = b$ V $b < a$
- Αν για 2 φυσικους αριθμους α και β, ισχυουν συγχρονως $a \leq b$ και $b \leq a$ τοτε σημαινει οτι: $a = b$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ N

1. Ποιες τιμες μπορει να παρει ο α σε καθε μια απο τις παρακατω περιπτωσεις:

α) $\alpha \leq 9$ β) $\alpha \leq 3$ γ) $\alpha > 3$ δ) $0 < \alpha < 5$ ε) $5 < \alpha < 10$
ζ) $0 \leq \alpha < 8$ η) $8 \leq \alpha \leq 9$ θ) $9 < \alpha \leq 10$, ι) $\alpha \leq 0$ κ) $8 < \alpha < 9$

2. Τα παρακατω συνολα να γραφουν με αναγραφη
$A = \{x \in N, x > 3\}$, $B = \{y \in N^*, y \leq 5\}$, $\Gamma = \{z \in N, 3 < z < 7\}$, $\Delta = \{\omega \in N, 3 \leq \omega < 7\}$
$E = \{\alpha \in N, 0 \leq \alpha < 2\}$, $Z = \{\beta \in N, \beta > 0\}$, $H = \{\tau \in N, \tau \geq 16\}$, $\Theta = \{\varphi \in N, 1 < \varphi \leq 16\}$

3. Τα παρακατω συνολα να γραφουν με περιγραφη
$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\Gamma = \{3, 4, \ldots, 50\}$, $\Delta = \emptyset$, $E = \{1\}$
$E = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $Z = \{5, 6, \ldots, 7, 15, 16, \ldots, 28\}$, $H = \{0, 1, \ldots, 10\}$
$\Theta = \{0\}$, $I = \{10, 11, \ldots, 100, 110, 111, \ldots\}$, $K = \{8, 9\}$, $\Lambda = \{10\}$
$M = \{2, 3, 4, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, $N = \{7, 8, 9, 10, 30, 31, 32, \ldots 50\}$

4. Να ορισετε τα συνολα τιμων των μεταβλητων x, y σε καθε μια απο τις παρακατω περιπτωσεις:
α) $x < 3$, $x < y < 10$ β) $7 \leq x < 10$, $y > x$ γ) $0 \leq x < 7$, $0 < y \leq x$
δ) $x < y < 5$, $1 < x < 4$

5. Να σχηματισετε σχεσεις εγκλεισμου για τα συνολα:
$A = \{x \in N, x < 5 \text{ η } x \geq 10\}$, $B = \{x \in N, 4 < x \leq 7\}$
$\Gamma = \{y \in N, 12 \leq y \leq 17\}$, $\Delta = \{y \in N, 3 < y \leq 7 \text{ η } 12 \geq y\}$

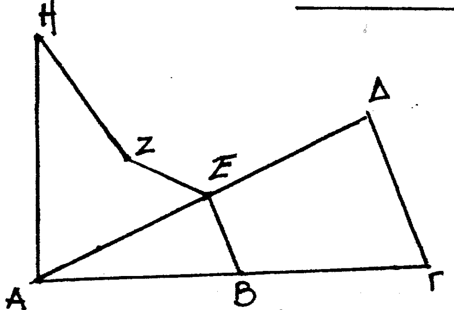
6. Να βρειτε την τομη και την ενωση των παρακατω συνολων
$A = \{x \in N, 6 \leq x < 11 \text{ η } 16 < x \leq 19 \text{ η } 20 < x < 25\}$
$B = \{y \in N, y \leq 5 \text{ η } 10 \leq y < 15 \text{ η } 20 \leq y < 30\}$

ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

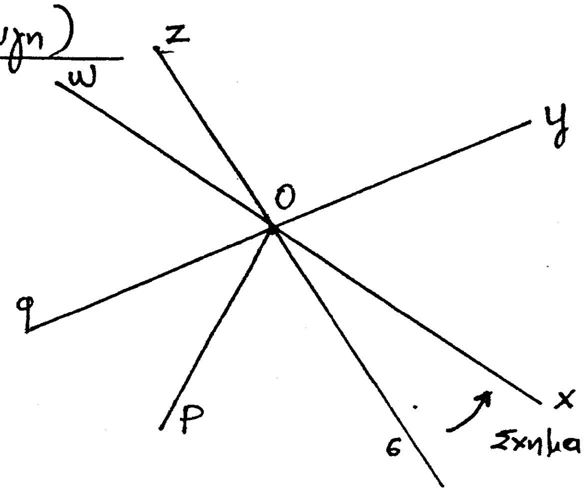
+ (1) Τι ονομάζεται επιπεδο; Ποσες ειναι οι διαστασεις του; Πως οριζεται;
+ (2) Τι ονομαζουμε επιπεδη γραμμη; — Διαστασεις
+ (3) Τι ονομαζουμε ευθ. τμημα;
+ (4) Τι ονομαζεται ευθεια; Ποια η διαφορα απο το ευθ. τμημα;
Απο δυο σημεια ποσες ευθειες περνουν;
+ (5) Πως οριζεται ενα ημιεπιπεδο; Τι ονομαζεται ακμη του;
+ (6) Πως οριζεται η ημιευθεια; Ποια η διαφορα της απο την ευθεια;
Τι ονομαζουμε αντικειμενες ημιευθειες;
(7) Πως οριζεται η γωνια; Τι ονομαζουμε κορυφη και τι πλευρες της;
Ποια ειναι η κυρτη γωνια και ποια η μη κυρτη;
+ (8) Τι γωνιες οριζουν 2 ημιευθειες με κοινη αρχη; Να ονομασθουν
+ (9) Τι ονομαζονται διαδοχικα ευθ. τμηματα;
+ (10) Τι ονομαζουμε τεθλασμενη γραμμη; Ποια ειναι τα στοιχεια της;
Οριστε τη διαφορα κυρτης και μη κυρτης τεθλ. γραμμης.
Ποια ειναι η κλειστη τεθλασμενη γραμμη;
(11) Να δοθει ο ορισμος του πολυγωνου. Ποια ειναι τα στοιχεία του;
(12) Ποτε 2 σχηματα λεγονται ισα;
(13) Ποτε 2 ευθ. τμηματα λεγονται ισα; Πως τα συγκρινουμε;
(14) Ποια η ιδιότητα του μεσου ενα ευθ. τμηματος; Ποσα μεσα εχει ενα ευθ. τμημα; Να βρεθει το μεσον ενος ευθ. τμηματος με κανονα και διαβητη
(15) Ποτε 2 γωνιες ειναι ισες; Να γινει η συγκριση (με κανονα και διαβητη)
(16) Τι ονομαζουμε διχοτομο μια γωνιας; Ποσες διχοτομους εχει μια γωνια; Να γινει η κατασκευη της (με κανονα και διαβητη)
(17) Ποια ειναι τα ειδη των γωνιων;
(18) Τι ιδιοτητα εχουν οι ορθες γωνιες; Πως κατασκευαζουμε μια ορθη;
(19) Τι ονομαζεται κυκλος; Ποια τα στοιχεια του;
(20) Ποια η διαφορα κυκλου και κυκλ. δισκου;
(21) Ποτε 2 κυκλοι ειναι ισοι;
(22) Τι ονομαζουμε διαμετρο ενος κυκλου; —Ιδιότητες
(23) Τι ονομαζουμε χορδη κυκλου; Τι τοξο; Τι κυκλικο τμημα;
(24) Τι λεγεται επικεντρη γωνια; Ποιο ειναι το αντιστοιχο τοξο της;
(25) Τι ονομαζουμε κυκλικο τομεα;
(26) Ποια η βασικη προυποθεση για να συγκρινουμε 2 τοξα; — Πιθανες σχεσεις
(27) Ποια η σχεση επικεντρων γωνιων, αντιστ. τοξων και χορδων σ'εναν κυκλο;
(28) Τι ιδιοτητα εχει η διχοτομος μιας επικεντρης γωνιας;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

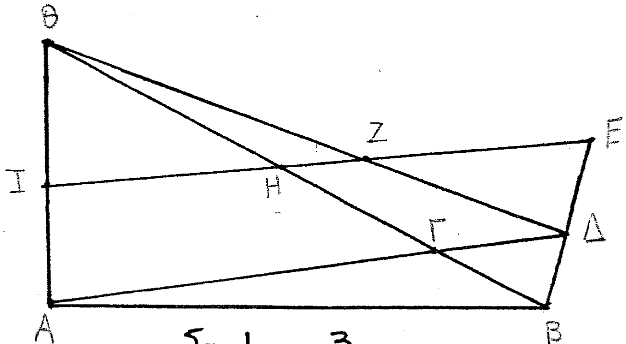
(Εισαγωγη)



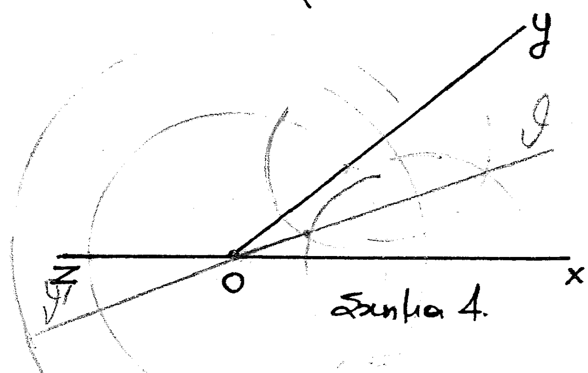
Σχημα 1



Σχημα 2



Σχημα 3



Σχημα 4.

① Στο σχημα 1 να γραψετε : α) τα ευθ. τμηματα που εχουν χαραχθει β) Οσα ευθ. τμηματα μπορει να οριζουν απο τα σημεια του σχηματος

② Στο σχημα 2 να γραφουν ολες οι κυρτες, μη κυρτες και ευθειες γωνιες (Η ονομασια των γωνιων θα γινει συμφωνα με το βελος

③ Στο σχημα 3 να βρεθουν και να ονομασθουν ολα τα τριγωνα που υπαρχουν

④ Σε τυχαιο τριγωνο $\hat{ΑΒΓ}$, να κατασκευασθουν οι διχοτομοι των γωνιων $\hat{Α}, \hat{Β}, \hat{Γ}$ (με κανονα και διαβητη) Τι παρατηρειτε για την τομη τους;

⑤ Σε τυχαιο τριγωνο $\hat{ΑΒΓ}$, να κατασκευασθουν οι μεσοκαθετοι των πλευρων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ (με κανονα και διαβητη). Τι παρατηρειτε για την τομη τους;

⑥ Στο σχημα 4 να κατασκευασθει η διχοτομος Οδ της γωνιας $x\hat{O}y$ και η διχοτομος Οδ΄ της γωνιας $y\hat{O}z$ (με κανονα και διαβητη). Τι παρατηρειτε για την γωνια $δ\hat{O}δ'$;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

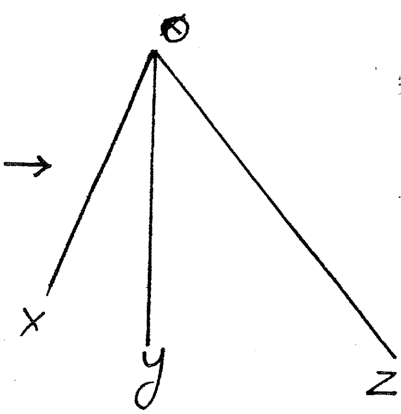
① Στις πλευρες Οx και Oy μιας γωνιας $x\hat{O}y$ παιρνουμε τα σημεια Α, Β αντιστοιχα ετσι ωστε ΟΑ=ΟΒ. Να κατασκευασετε τις διχοτομους των γωνιων $O\hat{A}B$ και $O\hat{B}A$ που τεμνουν τις πλευρες Ox κα Oy στα σημεια Γ και Δ αντιστοιχα.
Να συγκρινετε: α) τα τμηματα ΑΔ και ΒΓ, β) τις γωνιες $O\hat{A}B$ και $O\hat{B}A$

② Δινεται γωνια $x\hat{O}y$. Κατασκευαζουμε την διχοτομο της Οδ. Παιρνουμε στις πλευρες Οx, Oy τα σημεια Λ, Μ αντιστοιχα ωστε: ΟΛ = ΟΜ, και ενα τυχαιο σημειο Κ της Οδ. Να συγκριθουν οι γωνιες $O\hat{\Lambda}K$, $O\hat{M}K$ καθως και τα ευθ. τμηματα ΛΚ, ΜΚ

③ Δινεται τριγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ οπου $\hat{A}=90^\circ \left(=\frac{\pi}{2}\right)$ Να βρειτε το μεσο Μ της πλευρας ΒΓ. Μετα να φερετε την ΑΜ και να την συγκρινετε με την ΒΓ

④ Δινεται τυχαιο τριγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ Να βρειτε τα μεσα Λ και Μ των πλευρων ΑΒ και ΑΓ αντιστοιχα. Να συγκρινετε τα τμηματα ΛΜ, ΒΓ

⑤ Να κατασκευασετε τις διχοτομους Οδ και Οδ' των γωνιων $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$ αντιστοιχα.
Να συγκρινετε τις γωνιες $\delta\hat{O}\delta'$ και $x\hat{O}z$. →



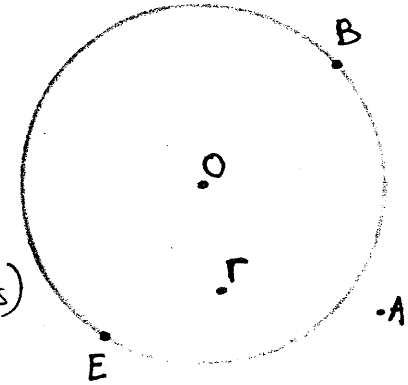
⑥ Δινεται τυχαιο τριγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. Να βρειτε τα μεσα Κ, Λ, Μ των πλευρων ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντιστοιχα. Μετα να φερετε τα ευθ. τμηματα ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ. Τι παρατηρειτε;

⑦ Στην προηγουμενη ασκηση να ονομασετε Σ το σημειο απο οπου διερχονται ταυτοχρονα οι ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ. Να συγκρινετε μετα τα τμηματα ΑΣ και ΣΚ, ΒΣ και ΣΛ, ΓΣ και ΣΜ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (συνεχεια)

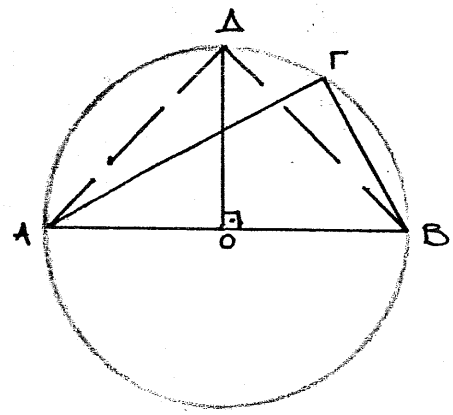
① Δινεται η γωνια $x\hat{O}y$. Πανω στις πλευρες της Ox και Oy παιρνουμε τα σημεια Α, Β αντιστοιχα ωστε: $OA = OB$.
Να συγκρινετε τις γωνιες $O\hat{A}B$ και $O\hat{B}A$. Μετα να συγκρινετε τις γωνιες $O\hat{A}B$ και $O\hat{B}A$ με την ορθη.
Να κανετε το ιδιο και για αλλη γωνια xOy. Τι παρατηρειτε;

② Στο διπλανο σχημα, ονομαζουμε Λ το συνολο των σημειων του κυκλου και Μ το συνολο των σημειων του κυκλικου δισκου.
Ποιες απο τις παρακατω σχεσεις ειναι σωστες και ποιες λαθος; (→ να διορθωθουν οι λανθασμενες)



a) $A \in \Lambda$, $A = M$, $B \in M$, $B \notin \Lambda$,
β) $\Gamma \notin M$, $\Gamma \in \Lambda$, $E = M$, $E \notin M$, $E \in \Lambda$
γ) $M \subset \Lambda$, $\Lambda = M$, $M \not\subset \Lambda$, $O \in \Lambda$, $O \in M$

③ Δινεται το παρακατω σχημα:
Το ευθ. τμημα ΟΔ σχηματιζει ορθη γωνια με την ΟΑ.
Να συγκρινετε α) τα τοξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, β) $\overset{\frown}{A\Delta}$, ΔB
Επισης να συγκρινετε τις χορδες ΑΔ, ΔΒ και ΑΓ, ΒΓ



④ Δινεται κυκλος κεντρου Ο και ακτινας ρ. Να γραψετε δευτερο κυκλο κεντρου Ο και ακτινας οση η διαμετρος του πρωτου. Στον δευτερο κυκλο να παρετε τα διαδοχικα και ισα τοξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$.
Οι ακτινες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ του δευτερου κυκλου, τεμνουν τον πρωτο στα σημεια Α′ Β′, Γ′. Να συγκρινετε τα τοξα $\overset{\frown}{A'B'}$ και $\overset{\frown}{B'\Gamma'}$ και τα τοξα $\overset{\frown}{A'\Gamma'}$, και $\overset{\frown}{A'B'}$.
Μπορειτε να συγκρινετε και τα τοξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A'\Gamma'}$;

0,58 της υπηρεσίας

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΑΠΟ 2,3,5

1) Να γινουν οι μετατροπες:

2m σε dm, 0,4 km σε m, 8,4 km σε m

0,05 km σε cm, 4,3 dm σε mm, 0,0030 km σε mm

5.300 mm σε m, 7.205 km σε cm, 13.360 dm σε km

0,005 km^2 σε στρεμματα, 3h 3min 33sec σε h

8.000 mm^3 σε lt, 6,3 tn* σε gr*

2) Να γινουν οι μετατροπες:

363.000.000 dm^3 σε km^3, 0,00053 km^3 σε dm^3

13,34 dm^3 σε lt, 6,07 m^3 σε lt, 13.600 lt σε m^3

$32^\circ\ 52'\ 20''$ σε μοιρες, 7h 6min 56sec σε min

$8^\circ\ 5'\ 29''$ σε πρωτα λεπτα, $3^\circ\ 24'\ 10''$ σε δευτερα λεπτα

3) Επισης οι μετατροπες:

23 min, 30 sec σε h, 7.300 gr* σε kgr*, 35.000 gr* σε tn*

3 στρεμματα σε m^2, 132.000 m^2 σε στρεμματα

$5400' = 90^\circ$ $324000'' = 90^\circ$

4) Ομοιες οι μετατροπες:

$3^\circ\ 25'$ σε μερη ορθης, $32'\ 65''$ σε μερη ορθης

$15'$ σε μερη ορθης, $125''$ σε μερη ορθης

180° σε μερη ορθης, 360° σε μερη ορθης, 270° σε μερη ορθης

$\frac{7}{9}$ μερη ορθης σε μοιρες, $\frac{12}{5}$ μερη ορθης σε μοιρες, πρ. λεπτα, δευτ. λεπτα

5) Μερικες απο τις παρακατω ισοτητες ειναι λανθασμενες. Να διορθωθουν:

10m 8dm = 10,8 m, 6m 3cm = 6,03 m, $4m^2\ 2dm^2 = 4,2cm^2$

$2^\circ\ 7' = \left(2\frac{7}{3600}\right)^\circ$, $3^\circ\ 2' = (3,2)^\circ$, $10^\circ\ 15' = \left(10\ \frac{15}{60}\right)^\circ$,

$12^\circ\ 7'' = (12,07)^\circ$, 3h, 45min = 3,45 h, 5h 30min = 2,5 h

$10^\circ = (0,310)^\circ$, $7'\ 20' = \left(\frac{7}{60} + \frac{20}{3600}\right)^\circ$, 3tn* 5kgr = 35tn*

Ορθόκεντρο - υψος
Περικεντρο - καθετοι
Εγκεντρο - διαμεσοι

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΝ

1. Ποιες ειναι οι σχετικες θεσεις δυο ευθειων ενος επιπεδου;
2. Τι ονομαζουμε κατα κορυφην γωνιες; Τι ιδιοτητα εχουν;
3. Ποτε δυο τεμνομενες λεγονται καθετες; Τι γωνιες σχηματιζουν;
4. Απο ενα σημειο ποσες καθετες μπορουμε να φερουμε προς μια ευθεια;
5. Τι ονομαζουμε αποσταση σημείου απο ευθεία; Τι ιδιότητα έχει;
6. Πως συγκρινουμε δυο πλαγια ευθ. τμήματα;
7. Ποια ειναι τα ειδη των τριγωνων αναλογα με τις γωνιες;
8. Ποια ειναι τα στοιχεια του ορθ. τριγωνου;
9. Ποια ειναι τα ειδη των τριγώνων σε σχέση με τίς πλευρες;
10. Τι ονομαζουμε διαμεσο ενος τριγωνου; Τι υψος; Τι διχοτόμος; Ποσα υψη εχει ενα τριγωνο; Ποσες διαμεσους; Ποσες διχοτομους;
11. Ποιες ειναι οι σχετικες θεσεις μιας ευθειας και ενος κυκλου;
12. Πως φερνουμε εφαπτομενη σ' ενα σημειο του κυκλου;
13. Ποσα το πολυ κοινα σημεια μπορουν να εχουν δυο κυκλοι;
14. Τι ονομαζουμε διακεντρο; Τι κοινη χορδη δυο κυκλων; Ποια ειναι η σχεση μεταξυ τους;
15. Ποιες ειναι οι δυνατες θέσεις δυο κυκλων οταν δεν τεμνονται;
16. Τι ονομαζουμε ομοκεντρους κυκλους;
17. Δινεται $\hat{ΑΒΓ}$ ισοσκελες (ΑΒ=ΑΓ) Να φερετε τα υψη ΒΔ, ΓΖ. Να τα συγκρινετε
18. Δινεται $\hat{ΑΒΓ}$ ισοσκελες (ΑΒ=ΑΓ) Να φερετε τις διχοτόμους ΒΚ, ΓΛ Να τις συγκρινετε
19. Δινετε $\hat{ΑΒΓ}$ ισοσκελες (ΑΒ=ΑΓ) Να φερετε τις διαμεσους ΒΜ, ΓΝ. Να τις συγκρινετε.
20. Δινεται ισοσκελες $\hat{ΑΒΓ}$ (ΑΒ=ΑΓ) Να κατασκευασετε εξωτερικα τα ισοπλευρα $\hat{ΑΒΚ}$, $\hat{ΑΓΛ}$ Να τα συγκρινετε.
Να φερετε τα ευθ. τμηματα ΚΓ, ΒΛ και να τα συγκρινετε.
21. Να γραψετε ενα ευθ. τμημα ΑΒ με μηκος 3cm και τους κυκλους (Α, 3cm) και (Β, 3cm) Αν οι κυκλοι αυτοι τεμνονται στα σημεία Γ και Δ, α) να γραψετε και να συγκρινετε τα τμηματα ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ και ΔΒ, β) να βρειτε πως τεμνονται τα τμηματα ΑΒ και ΓΔ.
22. Να γραψετε με κανονα και διαβητη εναν κυκλο, που να εχει διαμετρο ενα δεδομενο ευθ. τμημα ΑΒ
23. Γραψτε μια γωνια $x\hat{O}y$ και τη διχοτομο της Οz. Παρτε ενα σημειο Α στη διχοτομο και φερτε τις αποστασεις του ΑΒ και ΑΓ απο τις πλευρες της γωνιας $x\hat{O}y$. Να συγκρινετε τα τμηματα ΑΒ και ΑΓ.
24. Στην ασκηση 23 να γραψετε τον κυκλο (Α, ΑΒ) α) Απο ποιο αλλο σημειο θα περασει ο κυκλος; β) Ποια ειναι η θεση του κυκλου ως προς τις πλευρες της $x\hat{O}y$; (Να δικαιολογηθουν οι απαντησεις).

(25) Γραψτε κυκλο με κεντρο O και παρτε μια χορδη του AB. Γραψτε αμεσως τον κυκλο (A, AB) ο οποιος τεμνει τον πρωτο κυκλο στο Γ. Δικαιολογειστε οτι η AO ειναι μεσοκαθετος του τμηματος ΒΓ

(26) Γραψτε ενα ευθ. τμημα (AB) = 5cm. Να βρειτε τεσσερα σημεια Γ, Δ, Ε, Ζ, που το καθενα τους απεχει εξισου απο το A και B και αμεσως να ειναι (ΔΓ) = (ΔΕ) = (ΕΖ) = 3cm.

(27) Γραψτε ενα τριγωνο $\hat{ΑΒΓ}$ και μετα τους κυκλους (Β, ΒΑ), (Γ, ΓΑ). Οι κυκλοι αυτοι τεμνονται σ' ενα δευτερο σημειο A'. Αν $AA' \cap ΒΓ = \{Δ\}$, να δικαιολογησετε οτι η ΑΔ ειναι υψος του $\hat{ΑΒΓ}$.

(28) Σε τριγωνο $\hat{ΑΒΓ}$ να κατασκευασετε τις διχοτομους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Τι παρατηρειτε; Ονομαζουμε I το σημειο τομης των διχοτομων.
Το I θα λεγεται ΕΓΚΕΝΤΡΟ του τριγωνου $\hat{ΑΒΓ}$. Να φερετε την αποσταση του I απο την ΒΓ εστω ΙΚ, απο την ΑΒ εστω ΙΛ, απο την ΑΓ εστω ΙΜ και να συγκρινετε τις αποστασεις. Τι παρατηρειτε; Γραψτε μετα τον κυκλο (Ι, ΙΚ). Ο κυκλος αυτος θα λεγεται ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ του $\hat{ΑΒΓ}$.

(29) Σε τριγωνο $\hat{ΑΒΓ}$, να κατασκευασετε τις μεσοκαθετους των πλευρων (xx', yy', zz'). Τι παρατηρειτε;
Ονομαζουμε O το σημειο τομης των μεσοκαθετων
Το O θα λεγεται ΠΕΡΙΚΕΝΤΡΟ του $\hat{ΑΒΓ}$. Να φερετε τις ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ και να τις συγκρινετε. Τι παρατηρειτε; Γραψτε τον κυκλο (Ο, ΟΑ).
Ο κυκλος αυτος θα λεγεται ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ του $\hat{ΑΒΓ}$.

(30) Σε τριγωνο $\hat{ΑΒΓ}$ τυχαιο, να φερετε τα υψη ΑΖ, ΒΘ, ΓΡ. Τι παρατηρειτε;
Ονομαζουμε Η το σημειο τομης των υψων.
Το Η θα λεγεται ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ του $\hat{ΑΒΓ}$

- ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Το ορθοκεντρο ενος τριγωνου δεν ειναι κεντρο κυκλου.

(31) Σε τριγωνο $\hat{ΑΒΓ}$, να κατασκευασετε τις διαμεσους ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ.
Τι παρατηρειτε;
Ονομαζουμε G το σημειο τομης των διαμεσων
Το G θα λεγεται ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ή ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ του $\hat{ΑΒΓ}$.

- ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Το βαρυκεντρο δεν ειναι κεντρο κυκλου.

Να συγκρινετε τα τμηματα AG και GM, BG και GN, ΓG και GP.
Να βγαλετε δικο σας συμπερασμα.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

(1) Ποτε δυο ευθειες ειναι παραλληλες;
(2) Ποσες παραλληλες μπορουμε να φερουμε προς μια ευθεια απο ενα σημειο εξω απο αυτην; Να γινει η κατασκευη.
(3) Τι ιδιοτητα εχουν τα παραλληλα ευθ. τμηματα που βρισκονται μεταξυ παραλληλων ευθειων; ΙΙ Ειναι ισα
(4) Τι ονομαζουμε αποσταση παραλληλων ευθειων;
(5) Τι ονομαζουμε μεσοπαραλληλο;
(6) Οταν δυο παραλληλες ευθειες τεμνονται απο μια αλλη ευθεια ποιες ειναι οι σχεσεις των γωνιων που σχηματιζονται;
Πως ονομαζονται οι γωνιες αυτες;
(7) Με τι ισουται το αθροισμα των γωνιων ενος τριγωνου;
(8) Να υπολογισθει το αθροισμα των γωνιων ενος τετραπλευρου.
(9) Ποια ειναι τα στοιχεια του τραπεζιου;
(10) Τι ονομαζουμε παραλληλογραμμο; Ποτε ενα τετραπλευρο ειναι παραλληλογραμμο. Ιδιοτητες.
(11) Τι ονομαζουμε ορθ. παραλληλογραμμο; Ποτε ενα τετραπλευρο ειναι ορθ. παραλληλογραμμο. Ιδιοτητες.
(12) Τι ονομαζουμε ρομβο; Ποτε ενα τετραπλευρο ειναι ρομβος; Ιδιοτητες.
(13) Τι ονομαζουμε τετραγωνο. Ποτε ενα τετραπλευρο ειναι τετραγωνο; Ιδιοτητες.
(14). Ενα παραλληλογραμμο ειναι ρομβος;
(15) Ενας ρομβος ειναι παραλληλογραμμο;
(16) Ενα τετραγωνο εχει τις ιδιοτητες του ορθ. παραλληλογραμμου;
(17) Ενα τετραγωνο εχει τις ιδιοτητες του ρομβου;
(18) Ενα ορθ. παραλληλογραμμο εχει τις ιδιοτητες του παραλληλογραμμου
(19) Ενας ρομβος εχει ολες τις ιδιοτητες του τετραγωνου;
(20) Ενας ρομβος εχει ολες τις ιδιοτητες του ορθογωνιου;

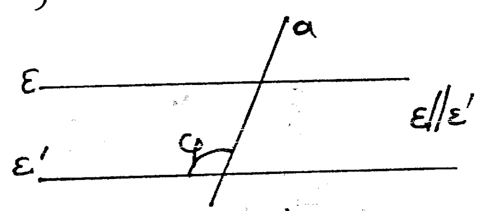
(1) Δινονται δυο ισοι κυκλοι (O,ρ) (K,ρ) που τεμνονται στα A, B. Τι ειδους τετραπλευρο ειναι το AOBK και γιατι; Ποτε το τετραπλευρο αυτο γινεται τετραγωνο;

(2) Δινονται δυο ομοκεντροι κυκλοι (O,ρ_1), (O,ρ_2) οπου $\rho_1 < \rho_2$. Αν AB, ΓΔ ειναι δυο τυχαιες διαμετροι των δυο κυκλων τι ειδους τετραπλευρο ειναι το AΔBΓ και γιατι;
Αν $AB \perp \Gamma\Delta$ τι ειδους ειναι το AΔBΓ;

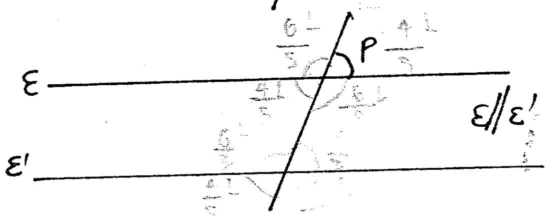
(3) Δινεται ισοσκελες τριγωνο $\widehat{AB\Gamma}$ (οπου $AB = A\Gamma$). Προεκτεινουμε την βαση BΓ και απο το A φερνουμε $xx' \parallel B\Gamma$. Απο τυχαιο σημειο Δ της προεκτασεως της BΓ φερνουμε παραλληλη προς την AB που τεμνει την xx' στο E. Τι ειδους τετραπλευρο ειναι το ABΔE και γιατι; Τι ειδους ειναι το τετραπλευρο AΓΔE και γιατι;

(4) Δινεται τυχαιο τριγωνο $\widehat{AB\Gamma}$. Εστω M το μεσον της AB. Απο το M φερνουμε παραλληλη Mx προς την BΓ, και απο το Γ φερνουμε παραλληλη Γy προς την AB. Αν $Mx \cap \Gamma y = \{\Delta\}$, τι ειδους ειναι το τετραπλευρο MBΓΔ και γιατι;
Ομοιως το AMΓΔ.

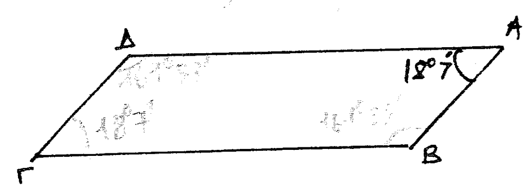
(5) Στο διπλανο σχημα η $\hat{\varphi} = 140^\circ 20' 40''$
Να υπολογισθουν οι αλλες γωνιες σε μοιρες (οχι συμμιγεις)



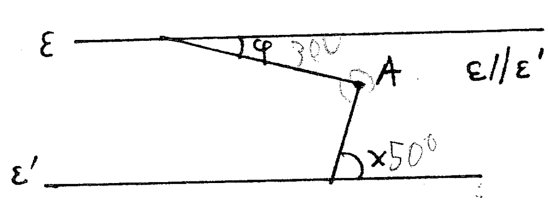
(6) Η $\hat{\rho}$ ισουται με $\frac{4}{5}$ μερη ορθης
Να υπολογισθουν οι αλλες γωνιες σε μερη ορθης.



(7) Η γωνια $\hat{A}$ του παρ/μου ABΓΔ ισουται με $18^\circ 7'$. Να υπολογισθουν οι $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$ (σαν συμμιγεις).



(8) Στο διπλανο σχημα να υπολογισθουν οι $\hat{A}$, η κυρτη $\hat{A}$ σε μερη ορθης οταν $\varphi = 30^\circ$ και $x = 50^\circ$



① Να δικαιολογήσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές. Να διορθώσετε τις λανθασμένες.

α) Σε ΑΒΓΔ είναι $ΑΓ \perp ΒΔ \Rightarrow$ ρόμβος

β) Σε ΑΒΓΔ είναι $ΑΒ = ΓΔ$ και $ΒΓ = ΑΔ \Rightarrow$ #

γ) Σε ΑΒΓΔ είναι $\hat{Α} = \hat{Γ}$ και $\hat{Β} = \hat{Δ} \Rightarrow$ ορθ. #

δ) Σε ΑΒΓΔ είναι $ΑΓ = ΒΔ \Rightarrow$ ορθογ. #

ε) Σε ΑΒΓΔ είναι $ΑΟ = ΟΓ$ και $ΒΟ = ΟΔ$ και $ΑΓ = ΒΔ \Rightarrow$ ορθ. #

στ) Σε ΑΒΓΔ είναι $\hat{Α} = \hat{Γ}$ και $\hat{Β} = \hat{Δ}$ και $ΑΓ \perp ΒΔ \Rightarrow$ ρόμβος

ζ) Σε ΑΒΓΔ είναι ΑΓ, ΒΔ διχοτ. των γωνιών $\Rightarrow$ ρόμβος.

② Ομοίως:

α) Σε ΑΒΓΔ $υ_1 = υ_2 \Rightarrow$ ρόμβος

β) Σε ΑΒΓΔ είναι $ΑΒ = ΓΔ$ και $ΒΓ = ΑΔ$ και $\hat{Α} = 90^\circ \Rightarrow$ ορθ. #

γ) Σε ΑΒΓΔ είναι $ΟΑ = ΟΓ$ και $ΟΒ = ΟΔ$ και $υ_1 = υ_2 \Rightarrow$ ρόμβος

δ) Σε ΑΒΓΔ είναι $ΑΟ = ΟΓ$ και $ΑΓ = ΒΔ \Rightarrow$ ορθογ. #

ε) Το ΑΒΓΔ είναι # και $ΑΓ = ΒΔ \Rightarrow$ τετράγωνο

στ) Το ΑΒΓΔ είναι # και $\hat{Α} = 90^\circ$ και $ΑΓ \perp ΒΔ \Rightarrow$ τετράγωνο

ζ) Το ΑΒΓΔ έχει $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΑΓ \perp ΒΔ \Rightarrow$ τετράγωνο

η) Το ΑΒΓΔ έχει $ΑΟ = ΟΓ$ και $ΟΒ = ΟΔ \Rightarrow$ ρόμβος

③ Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τα μέσα Μ, Ν, Ρ, Σ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.
Τι σχήμα είναι το ΜΝΡΣ;

④ Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ έστω Μ μέσον της ΑΒ και Ν μέσον της ΑΓ.
Να φέρετε την ΜΝ και να την συγκρίνετε με την ΒΓ

⑤ Να δικαιολογήσετε την άσκηση ③ με βοήθεια της ④

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

(1) Τι ονομαζουμε αθροισμα 2 ευθ. τμηματων;
Ποια ειναι η απαραιτητη προϋποθεση που πρεπει να ισχυει για να γινει η προσθεση
(2) Ποιες γωνιες λεγονται εφεξης; Ποιες λεγονται διαδοχικες;
(3) Ποια η προϋποθεση για να προσθεσουμε 2 γωνιες;
(4) Τι ονομαζουμε αθροισμα 2 εφεξης γωνιων;
(5) Ποιες γωνιες λεγονται συμπληρωματικες;
Ποιες παραπληρωματικες;
(6) Ποια η βασικη προϋποθεση για να προσθεσουμε ή να συγκρινουμε 2 τοξα;
(7) Τι ονομαζουμε αθροισμα 2 τοξων;
(8) Τι ιδιοτητες ισχυουν στην προσθεση των γεωμετρικων μεγεθων
(9) Με τι ισουται το αθροισμα των γωνιων ενος τριγωνου;
(10) Τι ονομαζουμε διαφορα δυο ευθ. τμηματων;
(11) Πως σχηματιζεται;
(12) Ομοιως για τη διαφορα δυο γωνιων
(13) Ομοιως για τη διαφορα δυο τοξων
(14) Τι ονομαζουμε γινομενο ενος γεωμ. μεγεθους α, με εναν φυσικο αριθμο λ;
(15) Τι ονομαζουμε μηδενικο ευθ. τμημα;
(16) Να γινει απο μια κατασκευη για καθε περιπτωση!
(17) Σε μια ευθεια ε παιρνουμε διαδοχικα τα τμηματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΖ, ωστε να ειναι ΑΒ = ΓΔ και ΒΓ = ΔΕ.
Να βρειτε τα αθροισματα i) ΑΒ + ΔΕ ii) ΒΓ + ΕΖ, iii) ΑΒ + ΔΖ
(18) Να σχηματισετε πεντε διαδοχικες γωνιες $\widehat{ΑΟΒ}$, $\widehat{ΒΟΓ}$, $\widehat{ΓΟΔ}$, $\widehat{ΔΟΕ}$ και $\widehat{ΕΟΖ}$, ωστε καθε μια να ειναι μικροτερη απο $70°$, και να ειναι $\widehat{ΑΟΒ} = \widehat{ΕΟΖ}$ και $\widehat{ΒΟΓ} = \widehat{ΔΟΕ}$
Να βρειτε τα αθροισματα: i) $\widehat{ΑΟΒ} + \widehat{ΔΟΕ}$ ii) $\widehat{ΒΟΓ} + \widehat{ΕΟΖ}$, iii) $\widehat{ΓΟΖ} + \widehat{ΔΟΕ}$
(19) Να γραψετε εναν κυκλο και να παρετε τα διαδοχικα τοξα $\widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΓΔ}$, $\widehat{ΔΕ}$, ωστε καθ'ενα να ειναι μικροτερο απο $90°$ και να ειναι $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$ και $\widehat{ΒΓ} = \widehat{ΔΕ}$. Να βρειτε τα αθροισματα: i) $\widehat{ΑΒ} + \widehat{ΔΕ}$, ii) $\widehat{ΑΒ} + \widehat{ΑΒΓ}$, iii) $\widehat{ΑΒΔ} + \widehat{ΒΓ}$

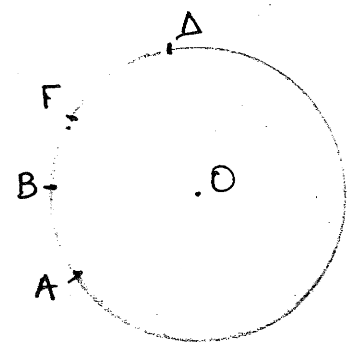
(1) Σε μια ευθεια ε παιρνουμε διαδοχικα τα τμηματα AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE και EZ, ωστε να ειναι $AB = \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = \Delta E$.
Να βρειτε τις διαφορες: α) $A\Gamma - \Delta E$, β) $B\Delta - AB$, γ) $BZ - \Delta E$

(2) Να σχηματισετε το σκαληνο τριγωνο $AB\Gamma$, ωστε $AB < B\Gamma < A\Gamma$. Να βρειτε τις διαφορες
α) $A\Gamma - B\Gamma$, β) $B\Gamma - AB$, γ) $A\Gamma - AB$

(3) Να σχηματισετε τις διαδοχικες γωνιες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}E$ και $E\hat{O}Z$ ετσι, ωστε $B\hat{O}\Gamma = \Delta\hat{O}E$ και $\Gamma\hat{O}\Delta = E\hat{O}Z$, και καθε μια γωνια να ειναι μικροτερη απο $70°$.
Να βρειτε τις διαφορες:
α) $A\hat{O}\Gamma - \Delta\hat{O}E$, β) $B\hat{O}\Delta - A\hat{O}E$, γ) $B\hat{O}\Delta - E\hat{O}Z$, δ) $A\hat{O}\Delta - E\hat{O}Z$

(4) Να γραψετε εναν κυκλο και να παρετε τα διαδοχικα τοξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$ ετσι, ωστε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Delta E}$ και καθε τοξο να ειναι μικροτερο απο $90°$
Να βρειτε τις διαφορες:
α) $\overset{\frown}{AB\Gamma} - \overset{\frown}{\Delta E}$, β) $\overset{\frown}{\Gamma\Delta E} - \overset{\frown}{AB}$, γ) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Delta E} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, δ) $\overset{\frown}{A\Gamma E} - \overset{\frown}{B\Gamma}$

(5) Στον κυκλο Ο του διπλανου σχηματος παιρνουμε κατα σειρα τα σημεια A, B, Γ, Δ, ετσι, ωστε $\overset{\frown}{AB} = 38°40'$, $\overset{\frown}{AB\Gamma} = 63°15'$ και $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = 57°25'$
Να βρεθουν τα μετρα των τοξων $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma\Delta}$.



Λυση: $\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{AB\Gamma} - \overset{\frown}{AB} = (63°15') - (38°40') = 24°35'$
$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} =$
$\overset{\frown}{A\Gamma\Delta} =$

ΓΩΝΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1) Σε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η $\hat{B}$ ειναι διπλασια της $\hat{A}$ και η $\hat{\Gamma}$ τριπλασια της $\hat{A}$. Να υπολογισθουν οι $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$

2) Σε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η $\hat{A} = \frac{1}{3}\hat{B}$ και $\hat{B} = \frac{1}{4}\hat{\Gamma}$. Να υπολογισθουν οι $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$

3) Σε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η $\hat{A} = \frac{1}{3}\hat{B}$ ενω η $\hat{\Gamma} = \frac{1}{2}\hat{B}$. —״—

4) Σε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η $\hat{A}$ ειναι διπλασια της $\hat{B}$ και η $\hat{\Gamma}$ διπλασια της $\hat{A}$. Να υπολογισθουν οι $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

5) Μια γωνια ειναι διπλασια της συμπληρωματικης της. Να βρεθουν και οι δυο

6) Μια γωνια ειναι μεγαλυτερη απο τη συμπληρωματικη της κατα $18°$. Να βρεθουν και οι δυο.

7) Μια γωνια ειναι μικροτερη απο τη συμπληρωματικη της κατα $24°$. Να βρεθουν

8) Μια γωνια ειναι το $\frac{1}{6}$ της ορθης. Να βρεθει η διαφορα της απο τη συμπληρωμ.

9) Δινεται $x\hat{O}y = 60°$ Απο σημειο Δ της Οx φερνουμε παραλληλη προς την Οy που τεμνει την διχοτομο της $x\hat{O}y$ στο Ε. Να βρεθει η $O\hat{E}\Delta$ σε μοιρες και μερη ορθης

10) Απο τυχαιο σημειο Α γωνιας $x\hat{O}y = 50°$ φερνουμε παραλληλες προς τις πλευρες της γωνιας. Οι γωνιες που σχηματιζονται να βρεθουν σε μοιρες και μερη ορθης

11) Να υπολογισθουν οι εξωτ. γωνιες τριγωνου $\hat{A}=45°$, $\hat{B}=65°$

12) Να υπολ. οι γωνιες ισοσκελους τριγ. αν η γωνια κορυφης ειναι $72°$

13) Σε ορθ. τριγ. μια οξεια γωνια ειναι τριπλασια της αλλης Να βρεθουν οι $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

14) Σε ορθ. τριγωνο η μια οξεια γωνια ειναι μεγαλ. απο την αλλη κατα $24°$. —״—

15) Σε ορθ. τριγ. η μια οξεια γωνια ειναι μικροτ. απο την αλλη κατα $10°$. —״—

16) Να υπολ. οι γωνιες τριγ. αν η $\hat{A}$ ειναι διπλασια της $\hat{B}$ και η $\hat{\Gamma}$ τετραπλ. της $\hat{B}$

17) Μια γωνια τριγ. ειναι τριπλασια της αλλης. Αν η τριτη ειναι 72, να βρεθουν οι γωνιες.

18) Αν η $\hat{A}=60°$ και η $\hat{B}$ μεγαλυτ. της $\hat{\Gamma}$ κατα $20°$ να βρεθουν οι $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$

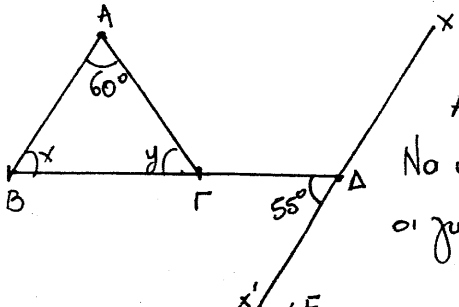
19) Αν $\hat{A}=70°$, $\hat{B}=50°$ σε τριγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ να βρεθει α) η γωνια των διχοτομων $\hat{A}$ και $\hat{B}$

β) Η γωνια των διχοτομων των γωνιων $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$

γ) —״— —״— —״— $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

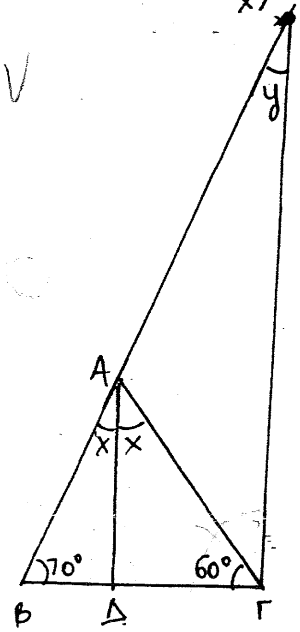
ΓΩΝΙΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1)



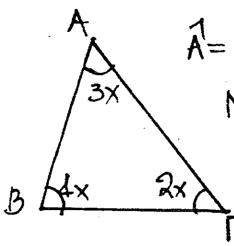
AB // xx'
Να υπολογισθούν οι γωνίες x, y

2)



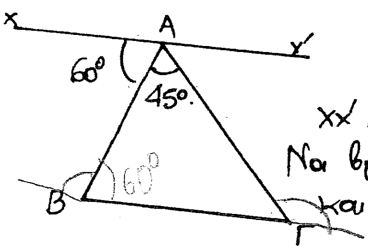
AΔ : διχοτόμος της $\hat{A}$
ΓΕ // AΔ.
Να υπολογισθούν οι γωνίες x, y

3)



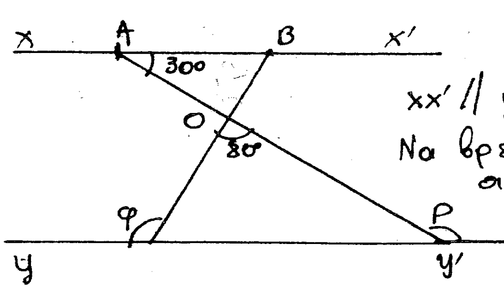
$\hat{A} = 3x \quad \hat{B} = 4x \quad \hat{\Gamma} = 2x$
Να υπολ. οι $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$
και οι εξωτ. $\hat{A}$, εξ. $\hat{B}$, εξωτ. $\hat{\Gamma}$

4)



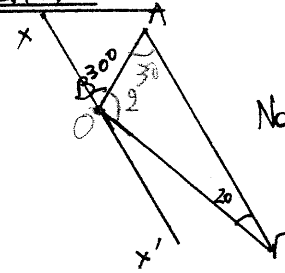
xx' // BΓ
Να βρεθούν οι $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$
και οι εξ$\hat{A}$, εξ$\hat{B}$, εξ$\hat{\Gamma}$.

5)



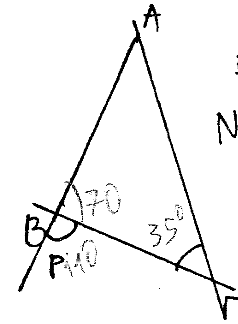
xx' // yy'
Να βρεθούν οι $\hat{\varphi}$, $\hat{\rho}$.

6)



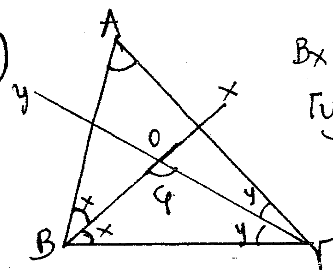
xx' // AΓ
Να βρεθούν οι $\hat{A}$, $\hat{B}$, εξ$\hat{A}$, εξ $\hat{B}$, εξ$\hat{\Gamma}$.

7)



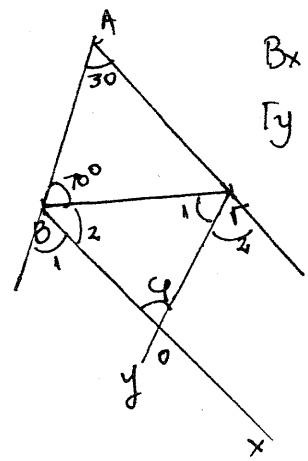
$\hat{\rho} = 110° \;;\; \hat{\Gamma} = 35°$
Να βρεθούν οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{A}$ του τριγώνου και οι εξ $\hat{A}$, εξ$\hat{\Gamma}$.

8)



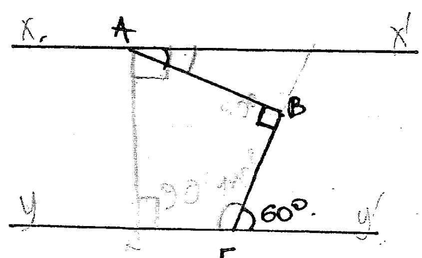
Bx διχοτόμος της $\hat{B}$
Γy -״- -״- $\hat{\Gamma}$
$\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 85°$
Να βρείτε την $\hat{\varphi}$.

9)



Bx διχοτόμος της εξ$\hat{B}$
Γy -״- -״- εξ$\hat{\Gamma}$
$\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 70°$
Να βρείτε την $\hat{\varphi}$.

10)



xx' // yy'
$\hat{B} = 90°$, $\hat{\Gamma} = 60°$ Να βρεθεί η $\hat{A}$.

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Ζ

① Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(+5)+(-3)+(-2)$, $(-1)-(-7)$, $(-3)+(-4)$

β) $(-10)-(-3)$, $(+1)-(-4)+(-2)+(+4)$, $(-2)+(-1)+(-5)+(+8)$

γ) $(-6)+(-4)+(-3)+(+6)-(-3)$, $(-2)-(+6)+(+3)-(-1)+(-1)$

δ) $(-3)+(-1)+(+3)+(-1)+(-2)-(-2)$, $(-3)+(-1)-(-2)+(-3)$

② Να γίνουν οι πράξεις:

α) $5-(+3)-(-7)-1+3$, $-2+(-3)-(-1)+2$

β) $-2-(+3)+(-4)+5-7-2$ γ) $-2+(-2)-(-2)+(-4)+1-7$

δ) $-2+5+(-4)-3-2-(+1)$, ε) $(-2)+(-4)+5-(-2)-(+5)-(-4)$

③ Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-1+2-7+8-5+7-4$, $-2+5-6-2+4+2-1$

β) $2-5+8-1+4-2-6$, $-1-2+3-5+4-1-2+7$, $-1+3-4+5-7-2$

④ Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-3+2-4-5+1+3-2+7$ β) $-4+3-2+1-4-20-2-8$

γ) $-4+3-2+1-3+8-5$ δ) $3-2-5+6-7+1$ ε) $-2+3-5+1-8-6-9-8-3$

στ) $3-(2+1-3+4)-5+3$ ζ) $-(-2+1-4)+(3-2+5)-(3+2-1)-7$

η) $4-3-(2-1+3-2)-(3+1-2)-(2-1)$ θ) $-2+3-(4-1+2)-(3+1-4)-5-2$

ι) $2-[4-(3+2-1)-2]-3+(2-7)$ κ) $-[-(3+2-1)+(4-7)-1]-2$

λ) $2-[4-(3-8+1)-5]-[3-(2-7-1)+4]-1$

μ) $2+[4-3+(2-5-1)-11-3]-1$

Η άσκηση θ να λυθεί με 2 τρόπους:

1. $-2+3-(4-1+2)-(3+1-4)-5-2 = -2+3-(6-1)-\cancel{(4-4)}-5-2 =$
   $= 1-5-5-2 = 1-12 = -11$
2. $-2+3-(4-1+2)-(3+1-4)-5-2 = -2+3-4+1-2-3-1+4-5-2 =$
   $= -19+8 = -11$

Να γίνει το ίδιο για τις ασκήσεις ι, κ, λ, μ.

⑤ Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $(-1-3+7)-[(-1+2-3)-5]-1$

β) $(1-3-5)-[6-(8-3-5)-2-(1-7)]-(-1-2)+3$

γ) $-(1-2+7)-[-(6-3+2)-(-5-1+3)]-(1-3)-2$

δ) $1-\{4-[6-3-(1-2-7)]-[4-(3-2-5)-6]+8\}-(11-7)+1$

ε) $-\{[2-[-(-3-4)-2]+8]-3-(7-1)\}+2$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

στ) $2+\{3-(7-9)+[4-3-(1-2)]\}+(1-4)$
ζ) $4-[6-(7-1)-(1-2-3)]-6$
η) $-(6-1-3)-\{2-[1-(2-3-5)+(1-4)]-(1-2-7)\}+8$

(6) Να γίνουν οι πράξεις:
α) $2-\{4-[3-(2+1-7)-1]-4-3\}-(1-3-4)+2$
β) $3+\{-[4-(3-8)+1]-[2-(3-7-1)+2]-1$
γ) $2-\{3-[4-3+(7-8-1)]-1\}+2$
Με 2 τρόπους

(7) Αν $\alpha=-1+(-1+2)-3$, $\beta=-2+[1-(1-3)-2]-1$, $\gamma)-3-[-1+(2-1-4)-3]$
να υπολογισθούν οι παραστάσεις:
1. $\alpha-(\beta+\gamma)$ 2. $-\alpha+[\beta-(\gamma+\alpha)]-\beta$

(8) Αν $\alpha=-(1-3-2)+2$, $\beta=-\delta+(\gamma-1)$, $\gamma=-3+(-\delta-1)$, $\delta=-3+(\alpha-2)$
να υπολογισθούν οι παραστάσεις:
1. $-\alpha+\{1-[\alpha+(\beta-\gamma-\delta)]-3\}$ 2. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$

(9) Αν $\alpha=\beta+\gamma+\delta$, $\beta=-1+(\gamma-\delta)$ $\gamma=-3+(\delta-3)$, $\delta=-1+[-(-1+3)+2]$
να υπολογισθούν οι παραστάσεις:
1. $\alpha-(\beta+\gamma)-\delta$ 2. $-[\alpha-(\beta-\delta)+(\gamma-\delta)]$ 3. $(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(3-\delta)$

(10) Αν $\alpha=-1+(-3+2)$, $\beta=2+(\alpha-\gamma)$, $\gamma=\alpha-(1-3+\delta)$, $\delta=-1+(3-2-4)$ και
$A=-(\alpha+\beta-\gamma)$, $B=\alpha-\delta+\beta$, $\Gamma=\beta+\gamma-\delta$
να υπολογισθούν οι παραστάσεις:
1. $A+B+\Gamma$ 2. $A-B-\Gamma$ 3. $-(A-B)-(\Gamma+A)$

(11) Να επιλυθούν στο Z οι εξισώσεις:
α) $x+7=2$, β) $x+5=0$ γ) $4-x=1-7+8$, δ) $2+x=1$
ε) $4-x=-(1-x)-x+10$, στ) $4+x=-(x-4)+x$, ζ) $7+y=7$,
η) $13+y=-1$, θ) $12-y=7-8$ ι) $2-3-(1-\alpha+7)=1-3-(\alpha-5)-(1-\alpha-7)$
κ) $4-(6-\omega)=0$ λ) $2-[-(\omega-1-3)-(1-2)]=-(1-3-2)+3$

(12) Να λυθούν στο Z οι εξισώσεις:
α) $2x+x+4x=70$, $x+2x+x=64$, $x+5x+2x+x=90$
β) $5x-2x+x=44$, $7x-5x+2x=60$, $3\alpha-\alpha+3\alpha=105$
γ) $2x-4x-10=6x+2x-20$, $-2x-5x-x-8=10x+10$
δ) $-6\omega+4\omega+3\omega=14$, $3\varphi-10\varphi+6\varphi=-2$, $3x-5x=-20$

■ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

(13) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $-(2x-5)+(x-7)=12$

β) $-2+[-(4-3x)+x]-(3x-6)=100$

γ) $3t+[-2-(4t-10)-1]=13-(2t-10)$

δ) $-2t+\{2-[2t-(10-4t+2t)]\}=20-(11t-10)+6$

(14) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(-2)\cdot(-5)\cdot(-1)$ β) $(-2)\cdot(+3)\cdot(-1)\cdot(+2)$ γ) $-2\cdot(-3)(-1)\cdot(-5)(-6)$

δ) $(-2)\cdot(+1)\cdot(-5)$ ε) $(-5)\cdot(-3)(+2)$ στ) $-7(-3)(+5)\cdot(-6)\cdot(-1)$

ζ) $-2\cdot(-5)(-4)\cdot(-1)\cdot(+3)(-2)$

(15) Να γίνουν με 2 τρόπους:

α) $50-3(4-5)-2(-6+7)+3(-4+1)+2(3-4)$

β) $2\cdot(6-3)-30-2\cdot(5-8)+4\cdot(10-5)$

γ) $60\cdot(3-4)-2\cdot(10-9)+7\cdot(15-60)-83$

δ) $35-64\cdot(5-7)-2\cdot(-3+1)+3$

ε) $(3-2)\cdot 2-2\cdot(4-8)+5(5-3)-8(4-1-2)$

π.χ. $50-3\cdot(4-5)-2(-6+7)+3\cdot(-4+1)+2(3-4)=$

$=50-3\cdot(-1)-2\cdot(+1)+3\cdot(-3)+2\cdot(-1)=$

$=50+3-2-9-2=53-13=40$

$50-3\cdot(4-5)-2(-6+7)+3\cdot(-4+1)+2\cdot(3-4)=$

$=50-3\cdot 4+3\cdot 5+2\cdot 6-2\cdot 7-3\cdot 4+3\cdot 1+2\cdot 3-2\cdot 4=$

$=50-\cancel{12}+15+\cancel{12}-14-12+3+6-8=$

$=74-34=40$

(16) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(-2)(-5)(-1)+(3-2+1)\cdot(-3-2)$

β) $(-2-1)+(-5+3-1)\cdot(-3)(-1)$

γ) $(-3)\cdot(-7)+(-3)(-1)+(2-3-7)\cdot(-5+3+1)-1$

δ) $-3\cdot(-1-5)+(3-2)\cdot(-2)+1$

ε) $-(-3)\cdot 2+(3-5-1)\cdot(-2)-2(-3-5)+1$

στ) $3-(2-5)\cdot(-3)+(-3-2)-1$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

(17) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-2-(-3-1)+3\cdot[-3\cdot(-2+1)-3]$

β) $1-[4-(3-1)\cdot(-2)-1]\cdot(-2)$

γ) $-2+3\cdot[-2+(-3-2+1)\cdot(-2-7)+1]-1$

δ) $-3-2\cdot[1-3\cdot(1-7)+3\cdot(-1)]-1$

ε) $-1-3\cdot\{-[-3\cdot(-2+1)-(-7)\cdot(-3-5)]\}-3$

στ) $-3-2\cdot\{[3-(1-7):(-2)]-1\}$

ζ) $4-2\cdot\{3-2\cdot[-4\cdot(-1+2)-3]-3\}-(4-7)+1$

η) $3-\{2\cdot(-4+1)-2\cdot[-3-(2-1)\cdot(-3)]-2\}-1$

θ) $4-\{3\cdot(-3-7)-3\cdot[-1-(3-7)+1]-3\}-2\cdot[-2\cdot(-3-1)-1]$

ι) $-2-[3-(1-3)-1]-\{[-(-3-1-2)-1]-1\}$

(18) Αν $\alpha=-3$, $\beta=-2$, $\gamma=+5$
να υπολογισθεί η τιμή της παραστάσεως
$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\alpha$

(19) Αν $\alpha=2-3+5$, $\beta=-(1-3+4)$, $\gamma=[-(2+6)-5]$, $\delta=-[1-(2-3)]$
να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

1. $\alpha\cdot\beta-\gamma-3\delta$
2. $2\alpha+3\beta+4\gamma\cdot\delta$
3. $-(\gamma-\delta)-3+\alpha+2\beta$

(20) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $(+32):(-1)$ β) $(-20):(-4)$ γ) $(-32):(+4)$

δ) $[(-8):(+4)]:(-2)$ ε) $(-5):[5:(-1)]$ στ) $[8:(-8)]:(-1)$

(21) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $7+(5+3):(-2+1)$

β) $[(-9)+(+3)]:(+2)$, γ) $[(+12)-(-6)]:(+3)$

δ) $[(-4)+(+9)+(-15)]:(+5)$ ε) $[(+8)-(-6)-(+2)]:(-4)$

στ) $[(-12)\cdot(+7)\cdot(-2)]:(-6)$

(22) Ομοίως οι πράξεις:

α) $[(+8)-(-7)]:[(-12)-(+3)]$

β) $[(-36):(-12)]:[(+48):(-16)]$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. α) $3\cdot(x-4)=-15$ β) $2\cdot(x-4)=8$ γ) $(x-2)\cdot 2=-8$
   δ) $-2\cdot(x-1)=-10$ ε) $3\cdot(x-4)+2\cdot(1-x)=-2$
   στ) $3\cdot(x-1)-2\cdot(x-5)=-10$
   ζ) $2\cdot(x-1)+4\cdot(x-5)=6+2\cdot(x-3)$

2. α) $3\cdot(x+4)+4\cdot(x-2)-2\cdot(x-5)=-(3-4x)$
   β) $-2\cdot(x-2)+4\cdot(x-1)=2\cdot(x-3)-(x-1)$
   γ) $-2\cdot(x-4)+3\cdot(x+2)-4=-2\cdot(x-1)+2\cdot(x+4)$
   δ) $3\cdot(x-4)-2\cdot(x-1)-10=4\cdot(x-2)-4\cdot(3+x)$
   ε) $3\cdot(x-2)-4\cdot(x-1)-4=-4\cdot(x-3)-6$

3. α) $-2\cdot(x-1)-3\cdot(x-4)-1=-6\cdot(x-2)-4$
   β) $-3\cdot(x-1)+2\cdot(x-4)-10=+3\cdot(x-1)+3\cdot(1+x)$
   γ) $-3\cdot(2x-1)+3=0$ δ) $4\cdot(x-1)=3\cdot(2x-4)$ ε) $2\cdot(3x-5)-2=0$

4. α) $2\cdot(x-1)+4\cdot(x-2)-2\cdot(x-4)=-16$
   β) $3\cdot(2x-1)+2\cdot(x-1)=3x-4$
   γ) $3\cdot(x-2)+4\cdot(x-1)=-2\cdot(x-1)+4\cdot(x-2)-10$
   δ) $6\cdot(x-1)-2\cdot(x-3)-4\cdot(x+2)=-2\cdot(x-3)-4\cdot(x-2)-1$

5. α) $-2\cdot[3\cdot(x-1)-2]-4=0$ β) $3\cdot[-2\cdot(x-3)-2]=0$
   γ) $4\cdot[1-2\cdot(x-1)]-3(x-2)=0$
   δ) $-3\cdot[2-6\cdot(-x+2)-3x]=-1$

6. α) $2\cdot(x-4)-6\cdot(x-2)=4\cdot(x-8)-3\cdot(2x-1)$
   β) $3\cdot(x-2)+4\cdot(x-1)-2\cdot(x-1)=3\cdot(x-8)-12$

$x^2+y^2-(x+y)^2+2xy$ $x^2+y^2-(x+y)^2=-2xy$

$a^2-(a+b)^2+b^2+2ab=$

$x^2+y^2-(x+y)^2=-2xy$

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{Q}$

Να γίνουν οι πράξεις:

① α) $\left(-1\frac{3}{4}\right)+\left(-2\frac{5}{6}\right)$ β) $8+\left(-9\frac{1}{8}\right)$ γ) $-3\frac{1}{6}+\left(-2\frac{5}{8}\right)$

δ) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$ ε) $-1\frac{1}{5}-2+3\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-13$

② Να υπολογιστεί ο x, όταν $x=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

και: $\alpha=-4$, $\beta=1\frac{3}{4}$, $\gamma=-3\frac{2}{5}$, $\delta=-5{,}6$

③ Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+1\frac{5}{6}\right)$ β) $-1-\left(-1\frac{2}{3}\right)$ γ) $(-3{,}75)-\left(-\frac{3}{5}\right)$

④ Να υπολογιστεί ο x, όταν $x=\alpha-\beta$ και:

α) $\alpha=-2$, $\beta=-\frac{1}{2}$ β) $\alpha=+5$, $\beta=-\frac{1}{3}$ γ) $\alpha=-3\frac{2}{9}$, $\beta=1\frac{1}{12}$

⑤ Να υπολογιστεί ο x, όταν $x=\alpha-\beta-\gamma+\delta$ και:

$\alpha=\frac{5}{6}$, $\beta=0{,}6$, $\gamma=-1\frac{3}{4}$, $\delta=-2\frac{7}{9}$

⑥ Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\dfrac{-1\frac{1}{2}+2}{3\frac{2}{3}+1\frac{1}{2}}$ β) $\dfrac{2}{-\frac{1}{2}+1}$ γ) $\dfrac{1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}}-2\frac{1}{2}$

⑦ $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{8}\right)-\left\{-\frac{3}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)-\left[-\frac{1}{3}-\left(-2+\frac{1}{4}\right)\right]\right\}-(-1)$

⑧ α) $-\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$

β) $-2:\left[-\frac{1}{3}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right)-1\right]+1\frac{1}{2}-3$

γ) $-\frac{1}{2}+3:\left(1-\frac{1}{2}\right)+1\frac{2}{3}$

⑨ α) $\dfrac{-\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}}:\left(-\frac{4}{5}\right)$ β) $\left(-\frac{2}{5}\right)(+3)+\left[6:(-2)\right]-\frac{8}{5}+\frac{29}{5}$

γ) $-3\cdot\left(\frac{7}{2}+6-\frac{1}{3}\right)-4\cdot\left(5-\frac{3}{4}\right)\left(-1+\frac{1}{2}\right)+19$

⑩ α) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot(-6)+2$ β) $\left(-4+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-8+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right)$

⑪ α) $\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right):\left(\frac{3}{5}-1\right)$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Να υπολογισθούν οι παρακάτω δυνάμεις:

1) α) 3^2 β) 4^2 γ) 3^3 δ) 2^3 ε) $(-2)^3$, στ) $(-3)^2$ ζ) $(-3)^3$

2) α) -3^3 β) -4^2 γ) $(-2)^2$ δ) -3^4 ε) -1^3 στ) $(-1)^5$

3) α) $(-3)^0$ β) -2^0 γ) $(-4)^0$ δ) $(-3^5)^0$ ε) $[(-3)^2]^2$

4) α) $-[(-3)^2]^0$ β) -1^{13} γ) $(-1)^{40}$ δ) $(-1)^{509}$

5) α) -3^0 β) $(-2^0)^{14}$ γ) $[(-2)^0]^3$ δ) $-(-1)^3$ ε) $(-4^0)^0$

6) α) $[(+3)^2]^0$ β) $(-2^4)^0$ γ) $-(-3)^0$ δ) $[(-2^0)^0]^3$ ε) $-[-(-2)^0]^{14}$

7) α) $(-4^0)^1$ β) $-(-2)^0$

8) α) $(2^2\cdot 3^2)^0$ β) $[-(2^{15}\cdot 3^2)^0]\cdot[-(-1)^{15}]$ γ) $[-(-1)^3]^0+(-2)^0+1$
δ) $[(-3)^{15}]^0+[-(+2)^7]^0$ ε) $[-(-2)^3]^0+(-2^3)^0-1$

9) α) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ β) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ γ) $\left(\frac{4}{5}\right)^1$ δ) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ε) $\left(\frac{4}{3}\right)^1$ στ) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ ζ) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

10) α) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ β) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ γ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ ε) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ στ) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$
ζ) $-\left(\frac{1}{2}\right)^2$ η) $\left(-\frac{2}{5}\right)^1$

11) α) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ β) $\left(-\frac{2}{5}\right)^0$ γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ δ) $-\left(-\frac{3}{5}\right)^0$ ε) $-\left(-\frac{2}{5}\right)^2$
στ) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$ ζ) $-\left(-\frac{1}{2^2}\right)$ η) $-\left(-\frac{2}{4^2}\right)$

12) α) $-\frac{2^2}{3^3}$ β) $-\frac{-2^2}{3^3}$ γ) $-\frac{(-2)^3}{(-3)^2}$ δ) $-\frac{-2^2}{-4^2}$ ε) $-\frac{-1^{10}}{-2^0}$
στ) $-\frac{(+2)^3}{(-4)^2}$ ζ) $-\frac{-2^2}{(-4)^0}$ η) $-\left(-\frac{3^2}{3^3}\right)^0$ θ) $-\frac{-2^3}{-5^0}$ ι) $\frac{-4^2}{(-4)^2}$
κ) $-3^0+\frac{-1^3}{(-2)^2}+(-2)^0-1$

13) α) $(0,02)^2$ β) $(-0,3)^2$ γ) $-0,2^2$ δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(-0,3)^3$, ε) $(-0,01)^2\cdot(-0,1)^3$
στ) $(0,1)^0:(-1,3)^0+4^0$ ζ) $(-1,2)^0+(0,02)^1+0,1^2$

14) $-2^0+3^1-(-2)^0+1$ β) $(-3)^0-(-2)^0-(-1)^0+2^0$ γ) $(-2)^3:(-2)^2+7^0$
δ) $-[(-2)^4\cdot(-2)^8]^0:(-1)^3$ ε) $-2\cdot 3^2:(-9)^1+1$ στ) $-[2\cdot 3^3:(-2)]:(-3)^2$
ζ) $(-2)^2:(-3)^0+2$ η) $-(2\cdot 3^2\cdot 5)^0:(-3)^0$ θ) $-2^3:(-2)^2+(-3)^2:(-3)$

15) α) $-2^4:(-2)^2+3^0$ β) $(-2)^5:(-2)^3+(-3)^2:(-9)^1$
γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(+\frac{1}{3}\right)^2:\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ δ) $[(-2^3):(-2)]:(-2)^2+1$
ε) $-[(-3)^2:(-3)]^2+2^0$

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{Q}$ (Συνεχεια)

Να υπολογισθουν οι δυναμεις :

1) α) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(\frac{4}{3}\right)^2$, $\left(\frac{2}{5}\right)^0$ $\left(\frac{3}{7}\right)^1$

β) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(-\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

γ) $-\frac{1}{2^2}$, $-\frac{3^2}{2}$, $-\frac{4^2}{3}$, $-\frac{(-2)^2}{3}$

2) α) $-\left(-\frac{3}{2}\right)^2$, $-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^0\right]^2$, $\left(-\frac{1}{30}\right)^2$

β) $-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{3}$, $-\left(-\frac{1}{3}\right)^0$, $-\left(-\frac{1}{30}\right)^0$

3) α) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^2$, $-\left[-\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^2$

β) $-\frac{(-1)^2}{(-2)3}$, $-\frac{-2^2}{-32}$, $-\frac{(-2)^2}{(-3)^2}$

Να υπολογισετε τις αριθμητικες παραστασεις :

1) α) $-2^2\cdot\left[-3\cdot(3^2-2^2)^2:(2^2+1)-4\right]-2^3$

β) $3\cdot(1-2^2\cdot 3)^2-(1-3)^2\cdot(2-1)^2$

γ) $(-3^2-4^2):(3^2-2^2)^2-(2^2-3)^2-1$

δ) $-2^3\cdot(3^2-2^2):(3^2-2^3)+4^0$

2) α) $\left[(4^2-2^3):(3^2-14)\right]^2-(3^2-2^2)^2$

β) $2^2\cdot(3^2-4^2):2^2-1$

γ) $-3^2\cdot\left[(2^3-4^2)-1\right]:(-3)^2-(1-3)^0$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Να υπολογισετε τις παρακατω παραστασεις

1. α) $-2\cdot(-3+4-1)+4\cdot(2-1+3)-4\cdot(6-3+2-5)-1$

   β) $2\cdot(3-4\cdot 6-7)-5\cdot(2-1\cdot 3-4)-3\cdot(2-1\cdot 3-2\cdot 4-1)-4$

   γ) $(-2)^2\cdot[-3\cdot(1-2-3\cdot 4)-1]-1$

   δ) $-2^2\cdot[3-2\cdot(1-3-5)+1]-2$

   ε) $-(-2)^2\cdot[-3-4^2\cdot(1-3^2-5)-2^2]-3^3\cdot(1-2\cdot 7)$

   στ) $-2\cdot(-1)^3\cdot(-2)^2\cdot[3\cdot(-2)^0\cdot(-1)-4]-(-2)^2$

2. α) $-3^3\cdot(1-3^2\cdot 2)\cdot(1-3^2-4\cdot 3^2)-3$

   β) $-2^2\cdot(-3)^2\cdot[1-2\cdot(1-3^2-1)+4^0]$ γ) $-3^2\cdot(1-2^3-7^1)\cdot(1-3^0)-1$

   δ) $-2^2\cdot(-3^2+2^3+1)-4^0$ ε) $-(-2)^0+4^0-1^0-3\cdot(1-2+1^3)^0$

   στ) $-2\cdot(-3)^3\cdot(1-2+1)^4\cdot[1-3-4\cdot(1-3^2)]^2$

3. α) $-1+2\cdot 3+4\cdot(1-3)-2\cdot(1-3)-2$

   β) $-(-2)\cdot(-3)\cdot(-1)(-1+3)+1$ γ) $-1+(2^2-3+4)^2+(1-3-2)^2-1^3$

   δ) $(-1)^2-(-1)^2\cdot(-1)^3\cdot(1-2)^0-(-1)^4$

   ε) $-1^3\cdot(-1)^2\cdot(-1)^3-14+1^0$

$36 - 8 = 34$

4. α) $-(-3^4-8^2-7^3\cdot 2^4)^0-(-1)^0$

   β) $-2\cdot(-3+4^2-2\cdot 7^2-1)^0-(-2+4-3^4)^0+2$

Να λυθουν οι εξισωσεις:

1. α) $2\cdot(x-1)-2^2\cdot(x-3)=-4$

   β) $(-3)^2\cdot(x+1)+x-11=-2\cdot(3-5x)-(x-1^2)^1$

   γ) $2^2\cdot(x-3^2)-3^2\cdot(x+2)-3=-2\cdot(3x-1)-2^3$

   δ) $-3^2\cdot(x-1)+18=3^3-9$

   ε) $-2\cdot(x-3)+(x-1)-4^2=(2x-6)^0$

[redacted]

Να λυθουν στο Ζ οι εξισωσεις:

1 α) $-2^2\cdot(x-3)-(3-4x)-2 = 2\cdot(x-1)-3\cdot(2+x)$

β) $4\cdot(x-2)+2^3\cdot(3-x)-6^2 = -2\cdot(1+x)-3^2+1$

γ) $(-3)^2\cdot(2x-1)-3^2+1 = -4\cdot(-5x+2)-2^3$

δ) $-3\cdot[2^2\cdot(3x-1)+8]-12 = -5\cdot(12+7x)-4$

2 α) $(4x-8):2=16$ β) $(8-x):2=4$

γ) $(4x-6):3=x-5^2$ δ) $(5^2\cdot x-10):5=-50$

ε) $2\cdot(x-5):2=7$ στ) $4\cdot(x-3):(-2)^2=8$

Να υπολογιστουν οι παραστασεις:

1) $\alpha\cdot\beta-\gamma-3\delta$

2) $2\alpha+3\beta+4\gamma\cdot\delta$

3) $-\alpha+(\beta-\gamma)^2-(\delta+\alpha)^2-1$, οταν

$\alpha=-2^2:(3^2-2^3)^2-1$, $\beta=-4^0\cdot(3^2-4^2):(2^3-1)-1$

$\gamma=(4^2-2\cdot3)^2:(7^2+1)-2$, $\delta=-(3-2^2)+(4-3^2)^0$

Να υπολογιστουν οι παραστασεις:

1) $\alpha+2\beta-(\gamma-\text{[illegible]})^{\beta}-3$

2) $(-2\beta)^{\alpha}-4\cdot(\beta\cdot\gamma-1)^2-8$

3) $\beta^{\alpha}+\alpha^{\alpha}+\gamma^{\alpha}-2(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^{\alpha}$

4) $2\cdot\alpha-(\beta+\gamma)^{\alpha\cdot\gamma}-2$

5) $-3\cdot\alpha^{\gamma}+\gamma^{\alpha}-3\cdot[-3\cdot\beta+(-\beta)^2]$, οταν

$\alpha=3^2-2^3+1$, $\beta=(4-3^2):(2^2+1)$, $\gamma=(-1)^0+4^0$

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

- Ενας φυσικος αριθμος διαιρειται ακριβως με 10, 100, 1000, ... αν τελειωνει αντιστοιχως τουλαχιστο σε ενα, δυο, τρια, ... μηδενικα
- καθε αρτιος αριθμος διαιρειται με το 2 π.χ. 30, 672
- Ενας φυσικος αριθμος διαιρειται ακριβως με το 5, αν τελειωνει σε μηδεν ή σε πεντε π.χ. 125, 610
- Ενας φυσικος αριθμος διαιρειται με το 9 η με το 3, αν το αθροισμα των ψηφιων του διαιρειται με το 9 η με το 3 αντιστοιχως

ΠΡΟΣΟΧΗ! Ενας φυσικος αριθμος που διαιρειται με το 9 διαιρειται και με το 3 αλλα δεν ισχυει παντα το αντιστροφο

- Ενας φυσικος αριθμος διαιρειται ακριβως με το 4, αν τελειωνει σε δυο μηδενικα η σε διψηφιο αριθμο που διαιρειται με το 4 π.χ. 7200, 7300, 620, 6580

Πρωτοι λεγονται οι αριθμοι που διαιρουνται μονο με τον εαυτό τους και με τη μοναδα π.χ. 7, 3, 11, 17, 31, 149

1. Να βρειτε ποιοί απο τους αριθμους 48, 410, 256, 635, 729, 1500, 18612 διαιρουνται ακριβως με το 10, 100, 2, 5, 3, 9, 4.
2. Να αντικαταστησετε το α με καταλληλο ψηφιο, ωστε ο αριθμος που θα προκυψει απο τον 325α να διαιρειται με το 2 και το 3
3. Σε ποιο ψηφιο πρεπει να τελειωνει ενας αριθμος, για να διαιρειται με το 2 και το 5 συγχρονως;
4. Να αντικαταστησετε τα γραμματα x και y με καταλληλα ψηφια, ωστε ο αριθμος 5x7y να ειναι πολλαπλασιο των 5 και 9
5. Να αντικαταστησετε τα γραμματα x και y με καταλληλα ψηφια, ωστε ο αριθμος 650x και 67y4 να ειναι πολλαπλασιο του 4.

- Ενας φυσικος αριθμος διαιρει διαιρει τα πολλαπλασια του και μονον αυτα
- Αν ενας φυσικος αριθμος διαιρει εναν αλλο, θα διαιρει και τα πολλαπλασιά του
- Αν ενας φυσικος αριθμος διαιρει δυο αλλους θα διαιρει και το αθροισμα και τη διαφορα τους
- Αν ενας φυσικος αριθμος διαιρει δυο αλλους θα διαιρει και το υπολοιπο της διαιρέσεως τους.

1. Χωρις να κανετε πραξεις να δικαιολογησετε οτι οι διαφορες 288-63, 2610-684 διαιρουνται με το 9.
2. Ομοιως οτι οι διαφορες 80+32, 80-32, 48+8 διαιρουνται με το 4.

Μ.Κ.Δ. – Ε.Κ.Π.

Α)
- Κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται κατά ένα μόνο τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
- Κάθε φυσικός αριθμός που είναι συγχρόνως πολλαπλάσιο δύο άλλων φυσικών αριθμών λέγεται κοινό πολλαπλάσιό τους. Το σύνολο των κοινών πολλαπλασίων δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών:
  1. Είναι ένα απειροσύνολο
  2. Έχει ένα μικρότερο στοιχείο <u>διαφορετικό</u> από το μηδέν που λέγεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών αυτών (Ε.Κ.Π.)
  3. Όλα τα στοιχεία του είναι πολλαπλάσια του Ε.Κ.Π.

Β)
- Ένας φυσικός αριθμός $\delta \neq 0$ λέγεται διαιρέτης ή παράγοντας του φυσικού αριθμού α, όταν τον διαιρεί ακριβώς. Οι διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού σχηματίζουν ένα πεπερασμένο σύνολο, το σύνολο των διαιρετών του.
  Κάθε φυσικός αριθμός $\delta \neq 0$, ο οποίος διαιρεί ακριβώς δύο ή περισσότερους φυσικούς αριθμούς, λέγεται κοινός διαιρέτης των αριθμών αυτών.
- Το σύνολο των κοινών διαιρετών 2 ή περισσότερων φυσικών αριθμών
  1. Είναι ένα πεπερασμένο σύνολο
  2. Έχει ένα μεγαλύτερο στοιχείο που λέγεται μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών (Μ.Κ.Δ.)
  3. Οι κοινοί διαιρέτες δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι διαιρέτες του Μ.Κ.Δ. τους.

- Ο Μ.Κ.Δ δύο* αριθμών δεν μεταβάλλεται: *ή περισσότερων
  1. αν αντικαταστήσουμε έναν απ' αυτούς με το υπόλοιπο της διαιρέσεως του μ' έναν από τους άλλους
  2. Αν παραλείψουμε έναν απ' αυτούς, ο οποίος διαιρείται μ' έναν από τους άλλους.
  3. ~~Ο Μ.Κ.Δ~~ Αν αντικαταστήσουμε έναν από αυτούς με τη διαφορά ενός άλλου απ' αυτών.
- Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται <u>πρώτοι μεταξύ τους</u>, αν ο Μ.Κ.Δ. τους είναι η μονάδα.
  π.χ. α) 7, 9   β) 9, 4   γ) 125, 244, 147

- Ένα κλάσμα λέγεται ανάγωγο όταν οι όροι του είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους
  π.χ. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{625}{1053}$

- Για να τρέψουμε ένα κλάσμα σε ανάγωγο διαιρούμε τους όρους του με τον Μ.Κ.Δ. τους

Μ.Κ.Δ – Ε.Κ.Π.

Α' τροπος

Μ.Κ.Δ.

- Κανουμε την αναλυση των αριθμων σε γινομενο πρωτων παραγοντων
- Παιρνουμε μονο τους κοινους παραγοντες των αριθμων με τον μικροτερο εκθετη

Ε.Κ.Π.

- Κανουμε την αναλυση των αριθμων σε γινομενο πρωτων παραγοντων
- Παιρνουμε κοινους και μη κοινους παραγοντες των αριθμων με τον μεγαλυτερο εκθετη

π.χ Να βρεθει ο Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των αριθμων 15, 60, 90

15	3
5	5
1	

$\Rightarrow 15 = 3 \cdot 5$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$\Rightarrow 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\Rightarrow 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$Μ.Κ.Δ(15,60,90) = Μ.Κ.Δ.(3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$Ε.Κ.Π(15,60,90) = Ε.Κ.Π.(3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Β' τροπος

Μ.Κ.Δ. : Γραφουμε τους αριθμους στη σειρα και κατεβαζουμε τον μικροτερο. Κατω απο καθενα απο τους αλλους γραφουμε το υπολοιπο της διαιρεσεως του με τον μικροτερο. Στη νεα σειρα συνεχιζουμε με τον ιδιο τροπο. Οταν καταληξουμε σε μια σειρα που εχει ολους τους αριθμους 0 εκτος απο ενα, αυτος ειναι ο Μ.Κ.Δ.

1422	2358	1296
126	1062	1296
126	54	36
18	18	36
18	0	0

$\Rightarrow$ Μ.Κ.Δ (1422, 2358, 1296) = 18

Ε.Κ.Π. : Γραφουμε τους αριθμους σε μια σειρα και δεξια απο τον τελευταιο χαραζουμε μια κατακορυφη γραμμη. Βρισκουμε τον μικροτερο πρωτο αριθμο που διαιρει τουλαχιστον εναν απ' αυτους και τον γραφουμε στην ιδια γραμμη με τους αριθμους δεξια απο την κατακορυφη. Κατω απο καθε αριθμο γραφουμε το πηλικο της διαιρεσεως του με τον παραγοντα που βρηκαμε, αν διαιρειται ακριβως, ή τον ιδιο τον αριθμο, αν δε διαιρειται ακριβως. Στη νεα σειρα εφαρμοζουμε ομοιως. Συνεχιζουμε μεχρι να φτασουμε σε μια σειρα απο μοναδες. Το Ε.Κ.Π. βρισκεται αν σχηματισουμε το γινομενο των πρωτων αριθμων που βρισκονται δεξια απο την καταk. γραμμη.

70	90	135	2
35	45	135	3
35	15	45	3
35	5	15	3
35	5	5	5
7	1	1	7
1	1	1	

$\Rightarrow$ ΕΚΠ(70, 90, 135) $= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 1890$

1. Να βρεθει ο Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των αριθμων
   α) (400, 350) β) (58, 145, 203), γ) (72, 120, 180), δ) (36, 27, 45) ε) (125, 244, 147)
2. Τα παρακατω κλασματα να τραπουν σε αναγωγα
   α) $\frac{320}{1024}$, β) $\frac{625}{750}$, γ) $\frac{3636}{7308}$, δ) $\frac{624}{1054}$

Μοιρογνωμόνιο, Διαβήτης, γνώμονας κανόνας

Ⓐ

Να γίνουν οι πράξεις:

① α) $5+8-3-2$, β) $3-2-6+10$, γ) $10-3+8-5$
δ) $50.000-10.014+900-520$, ε) $2076-477+711-48$ στ) $361+407-36$

② α) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}$ β) $\frac{4}{5}+\frac{1}{8}+\frac{2}{20}$ γ) $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$ δ) $\frac{3}{8}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$
ε) $\frac{5}{6}-\frac{2}{7}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$

③ α) $\frac{4}{9}+15$ β) $6+\frac{3}{5}$ γ) $100-\frac{3}{12}$ δ) $53-\frac{7}{19}$

④ $18\frac{3}{8}+35\frac{7}{9}$ β) $26\frac{3}{8}+12\frac{5}{12}-3\frac{3}{4}$, γ) $12\frac{2}{3}+8$
δ) $2\frac{1}{2}+\frac{11}{3}$ ε) $14\frac{4}{6}-10+\frac{213}{2}$ στ) $100\frac{1}{8}-53$ ζ) $12-7\frac{3}{14}$
η) $7\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$ θ) $10\frac{1}{3}-\frac{8}{9}$ ι) $10\frac{6}{8}-11\frac{4}{8}$ κ) $36\frac{4}{5}-20\frac{2}{7}$
λ) $50\frac{7}{8}-45\frac{4}{9}$ μ) $12\frac{2}{6}-9\frac{8}{10}$

⑤ α) $10,75+3,6+0,45+8$ β) $245,70+156,50+38+0,90$
γ) $48,30+12+1,80+123$ δ) $604,25-98,70$
ε) $2376-456,125$ στ) $915,15-48$, ζ) $13608,25-9346,5$

- Όταν έχουμε πράξεις μεταξύ δεκαδικών και κλασμάτων, τρέπουμε πρώτα τους δεκαδικούς σε κλάσματα. Το ίδιο για τους μικτούς
π.χ. $\frac{3}{2}+0,25=\frac{3}{2}+\frac{25}{100}=\frac{150}{100}+\frac{25}{100}=\frac{175}{100}=\ldots$

⑥ α) $8+\frac{5}{8}-0,5$ β) $1\frac{1}{2}-1,5$ γ) $3-1\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ δ) $2-1,5+\frac{3}{5}$

⑦ $5\cdot2\cdot10$ β) $63\cdot2\cdot300$ γ) $12\cdot14\cdot13$ δ) $\frac{2}{3}\cdot4$ ε) $\frac{3}{5}\cdot10$,
στ) $8\frac{3}{5}\cdot2$ ζ) $35\frac{2}{3}\cdot3$ η) $46\cdot\frac{2}{3}$, θ) $23\cdot\frac{2}{3}$
ι) $\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}$ ια) $\frac{1}{20}\cdot\frac{30}{50}$ ιβ) $6\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}$ ιγ) $15\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8}$ ιδ) $12\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
ιε) $5\cdot3\frac{2}{9}$ ιστ) $100\cdot3\frac{2}{3}$ ιζ) $10\frac{5}{10}\cdot1\frac{1}{8}$ ιη) $5\frac{6}{7}\cdot3\frac{1}{9}$
ιθ) $9\frac{5}{12}\cdot6\frac{1}{11}$ κ) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{5}$, κα) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}$

(B)

Να γίνουν οι πράξεις:

κβ) $\frac{2}{3} \cdot 0,5$ κγ) $3 \cdot 0,2$, κδ) $0,2 \cdot \frac{1}{2}$ κε) $0,25 \cdot \frac{1}{4}$ κστ) $1\frac{1}{2} \cdot 0,2$

κζ) $2\frac{2}{3} \cdot 0,1$ κη) $0,12 \cdot 1\frac{1}{12}$ κθ) $9,35 \cdot 8,5$ κι) $70,6 \cdot 0,46$

(8) α) $125 : 15$ β) $468 : 13$ γ) $625 : 10$ δ) $125,25 : 0,5$ ε) $0,84 : 4$
στ) $675 : 0,3$ ζ) $1335 : 4,45$ η) $68 : 1,45$ θ) $154,10 : 23$
ι) $149,856 : 4,2$ ια) $347 : 4$ ιβ) $9,66 : 0,3$ ιγ) $563 : 14$
ιδ) $45,7 : 10$ ιε) $1564,5 : 1000$ ιστ) $50,10 : 10$ ιζ) $0,25 : 100$

(9) α) $\frac{7}{3} : 0,3$ β) $0,25 : \frac{1}{4}$ γ) $0,75 : \frac{1}{3}$ δ) $3\frac{1}{2} : 0,2$ ε) $7\frac{1}{5} : 0,36$

στ) $3\frac{1}{8} : 0,1$

(10) α) $7 : \frac{5}{5}$ β) $12 : \frac{5}{9}$ γ) $\frac{6}{7} : \frac{4}{9}$ δ) $\frac{7}{18} : \frac{2}{11}$ ε) $9\frac{5}{7} : 6$

στ) $18\frac{4}{5} : 8$ ζ) $4\frac{1}{2} : \frac{9}{11}$ η) $5\frac{3}{7} : \frac{6}{9}$ θ) $5\frac{3}{7} : 2\frac{1}{3}$ ι) $6\frac{4}{5} : 3\frac{2}{7}$

(11) α) $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}}$ β) $\dfrac{\frac{5}{9}}{\frac{1}{3}}$ γ) $\dfrac{7}{\frac{4}{9}}$ δ) $\dfrac{8}{\frac{3}{4}}$ ε) $\dfrac{\frac{3}{8}}{9}$,

στ) $\dfrac{\frac{4}{5}}{6}$ ζ) $\dfrac{3\frac{1}{4}}{5}$ η) $\dfrac{5}{3\frac{1}{4}}$ θ) $\dfrac{2\frac{2}{3}}{4\frac{5}{7}}$

ι) $\dfrac{2\frac{1}{5}}{3\frac{2}{6}}$ ια) $\dfrac{7}{\frac{2}{8}} + \dfrac{9}{\frac{1}{2}}$ ιβ) $5 - \dfrac{1\frac{2}{3}}{3\frac{1}{5}}$

ιγ) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \cdot \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{7}}$ ιδ) $\dfrac{\frac{4}{9} + \frac{7}{8}}{\frac{9}{10} - \frac{3}{5}}$ ιε) $\dfrac{3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}}{8\frac{1}{3} - 2\frac{1}{9}}$

Γ

- Όταν σε μια αριθμητική παράσταση υπάρχουν πολ/μοί, διαιρέσεις, προσθέσεις και αφαιρέσεις, τότε η σειρά με την οποία κάνουμε τις πράξεις είναι:

1. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις
2. Προσθέσεις και αφαιρέσεις

π.χ. $3\cdot5+2-2\cdot3+15 = 15+2-6+15 = 15+15+2-6 = 32-6=26$

(12) Να γίνουν οι πράξεις:

1. $15\cdot3-2\cdot6+12-3-2\cdot5$
2. $6\cdot8-20+32\cdot2$
3. $635-2\cdot60+30\cdot4-15$
4. $\frac{5}{8}-2\cdot\frac{4}{5}+\frac{10}{20}$
5. $60-2\cdot\frac{4}{5}+8\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$
6. $7\cdot0{,}5+3\cdot2-6\cdot0{,}1$
7. $30-2\cdot6{,}7+2\cdot3{,}1+13$
8. $6-3\frac{1}{8}+2\cdot0{,}5-\frac{1}{4}$
9. $\frac{7}{8}+5\cdot2{,}5-3\cdot\frac{6}{9}+18$
10. $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-6{,}5\cdot0{,}5+8\cdot2$

- Όταν σε μια αριθμητική παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις, τότε κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις.

π.χ α) $400-(2\cdot5-3)\cdot(4-1)-7\cdot(2\cdot8-2)+3\cdot(4\cdot5)-(6-4)\cdot2=$
$=400-(10-3)\cdot3-7\cdot(16-2)+3\cdot20-2\cdot2=$
$=400-7\cdot3-7\cdot8+3\cdot20-2\cdot2=$
$=400-21-56+60-4=400+60-56-4-21=379$

β) $500-(9-6):3+2\cdot(5\cdot2-3):(2\cdot3+1)=$
$=500-3:3+2\cdot(10-3):(6+1)=$
$=500-1+2\cdot7:7=500-1+14:7=500-1+2=501$

(13) Να γίνουν οι πράξεις:

α) $400+(5-3)\cdot2-3(4\cdot3-2\cdot4)+(8-5)$
β) $500-(3\cdot4)\cdot3-(9\cdot5)\cdot3-(5\cdot3-2\cdot1)\cdot3$
γ) $300+3\cdot(5\cdot3-2)\cdot4-5\cdot(9-3)\cdot2+5\cdot(9-2)$
δ) $4\cdot3-2+(8-3)\cdot4-2$
ε) $8:(3\cdot1-1)+7\cdot(5-1)-(8-2):3$
στ) $60:(10-2\cdot2)-4\cdot(8-6):2$
ζ) $(5\cdot7+1):(2\cdot3)-4\cdot(6-3):(2\cdot6)$
η) $(1{,}5+2\cdot3):0{,}5-4\cdot(1{,}5-0{,}5):2$

Δ

θ) $(13-2{,}5):1{,}5-6\cdot(2\cdot1{,}5-2)$

ι) $(12\cdot2-3\cdot1{,}5):0{,}5+6:(2\cdot1{,}5-1)$

ια) $\left(\overset{2}{\frac{4}{5}}+\overset{1}{\frac{3}{10}}\right)\cdot\frac{3}{7}=\left(\frac{8}{10}+\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{3}{7}=\frac{11}{10}\cdot\frac{3}{7}=\frac{33}{70}$

ιβ) $\left(9-2\frac{1}{2}\right):3=\left(9-\frac{5}{2}\right):3=\left(\frac{18}{2}-\frac{5}{2}\right):3=\frac{13}{2}:3=\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{6}$

ιγ) $\left(20\frac{2}{5}+45\frac{7}{9}-56\frac{1}{15}\right)-29\frac{54}{90}$

ιδ) $\left(4\frac{1}{4}+16\frac{2}{3}+18\frac{1}{12}\right)-\left(2\frac{1}{2}-8\frac{1}{4}+15\frac{5}{8}\right)$

ιε) $\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}$ ιστ) $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right):2$

ιζ) $\left(3\frac{6}{8}+8\right)+\left(4\frac{1}{2}:2\right)$ ιη) $\left(6\cdot3\frac{1}{3}\cdot2\right)-\frac{7}{8}$

ιθ) $120-\left(2\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{2}{12}\right):\frac{1}{12}-2\cdot\left(\frac{5}{4}-1\frac{1}{4}\right)$

κ) $35-\left(7\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}\right):\frac{1}{6}+7\cdot\left(2-\frac{6}{7}\right)$

κα) $12-\left(3\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot(3-1)+4\cdot\left(5\cdot1-\frac{1}{3}\right)$

κβ) $37-\left(3\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right):12+2\cdot(7\cdot3-10):\frac{1}{3}$

S.O.S **ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ** (Ε)

1) Δινονται τα συνολα:
$A=\{a,b,\gamma,\delta\}$, $B=\{b,\gamma\}$, $\Gamma=\{\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$, $\Delta=\{\delta,\zeta\}$
Να βρεθουν οι σχεσεις εγκλεισμου για τα παραπανω συνολα.
Να γινουν τα διαγραμματα του Venn και για τα 4 συνολα συγχρονως
Ποια συνολα ειναι ξενα μεταξυ τους;
Να βρεθουν οι τομες $A\cap B\cap\Gamma\cap\Delta$, $A\cap\Gamma\cap\Delta$, $A\cap\Delta$.
Να βρεθουν οι ενωσεις $A\cup B\cup\Gamma\cup\Delta$, $A\cup B$, $A\cup\Gamma$, $A\cup B\cup\Gamma$

2) Να αποδειχθουν οι ισοτητες:
α) $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$, β) $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$
γ) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ δ) $(A\cup B)'=A'\cap B'$
Οταν $A=\{a,b,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $B=\{\gamma,\delta,\zeta,\eta\}$, $\Gamma=\{a,b,\gamma,\eta,\theta\}$.
Τα συμπληρωματα οπου υπαρχουν να βρεθουν ως προς το συνολο $\Omega=\{a,b,\gamma,\dots,\eta\}$

3) Ποιες απο τις παρακατω σχεσεις ειναι σωστες και ποιες λαθος;
(Να διορθωθουν οι λανθασμενες).
α) $\emptyset\subset\{\emptyset\}$, β) $\emptyset\in\{\emptyset\}$, γ) $\{a,b,\gamma\}\subseteq\{\{a,b,\gamma\}\}$,
δ) $\{0,1,2\}\in\{0,1,2,3\}$, ε) $\{1,3\}\subset\{1,3\}$, ζ) $\{5,3,2\}\subseteq\{2,3,5\}$
η) $\{6\}\subset\{\{6\},7,8\}$, θ) $\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$, ι) $\{1,2\}\in\{1,2,3,4\}$

4) Να διορθωθουν οι σχεσεις (οποιες ειναι λαθος)
α) $N^*\subseteq N$, $N^*=N$, $N^*\in N$, $N^*\neq N$, $N\subseteq N$
β) $\{0,1,2,\dots,100\}\subseteq N$, $\{0,1,2,\dots,100\}\subseteq N^*$,
γ) $\{0\}\subseteq N$, $\{0\}\subset N^*$, $\{0\}\not\subset(N^*\cap N)$,
δ) $(N^*\cap N)\subset N$, $(N^*\cap N)\subset N^*$

5) Τα παρακατω συνολα να γραφουν με αναγραφη
$A=\{x\in N,\ x\le 5\}$, $B=\{x\in N,\ 5\le x\le 8\}$
$\Gamma=\{y\in N^*,\ y\le 1\}$ $\Delta=\{x\in N,\ x>11\}$
$E=\{x\in N,\ y\le 4$ η $y\ge 2\}$
$Z=\{y\in N,\ y<5$ η $y\ge 8\}$

SOS

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΤ

(6) Αν $A = \{$φυσικοι που ικανοποιουν τη σχεση $0 \le x \le 6\}$
$B = \{x \in N,\ 0 \le x \le 3\}$
$\Gamma = \{x \in N,\ 1 < x < 4\}$,
$\Delta = \{x \in N,\ 2 \le x < 5\}$
να βρεθουν τα συνολα:
$A \cap B$, $B \cap \Gamma$, B', Γ', $(A \cap \Gamma) \cup B$, $(A \cup B) \cap \Gamma$, $B' \cap \Gamma'$, $(\Delta \cap B)'$,
$(\Gamma \cup \Delta)'$, $(A \cup B)'$, $(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta)'$
Τα συμπληρωματα (οπου υπαρχουν) να βρεθουν ως προς το συνολο Α.

(7) Να δειχθει οτι: $(A \cup B) \cap (B \cup \Gamma) \cap (\Gamma \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cup (\Gamma \cap A)$
(οποια Α, Β, Γ θελετε)

(8) Αν $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ να βρεθει το συνολο Γ
για το οποιο να ισχυουν οι σχεσεις: $A \cup \Gamma = A \cup B$ και $A \cap \Gamma = \emptyset$

(9) Να γινουν τα διαγραμματα του Venn για τα παρακατω συνολα
$A = \{$φυσικοι μεταξυ 1 και 9$\}$
$B = \{$φυσικοι αρτιοι μικροτεροι ή ισοι του 7$\}$
$\Gamma = \{x \in N,\ x$ περιττος, $x \le 11\}$
$\Delta = \{$ψηφια του 1234567123$\}$

(10) Δινεται τυχαιο τριγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. Εστω ΑΔ η διχοτομος της $\hat{A}$.
Πανω στη διχοτομο παιρνουμε τα σημεια Ε, Ζ ετσι ωστε:
$AE = AB$ και $AZ = A\Gamma$. Να συγκριθουν τα τμηματα ΒΖ και ΓΕ.

(11) Δινεται τριγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και ΑΜ η διαμεσος απο την κορυφη Α.
Να συγκριθουν οι αποστασεις των Β, Γ απο την ΑΜ.

(12) Δινεται τριγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ τυχαιο, και ενα σημειο Ο εντος του τριγωνου. Στις προεκτασεις των ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ παιρνουμε τμηματα
$OA' = OA$, $OB' = OB$ και $O\Gamma' = O\Gamma$
Να συγκρινετε τα τριγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

(13) Γραψτε δυο ομοκεντρους κυκλους και παρτε ενα σημειο Α στον εσωτερικο κυκλο. Φερτε την εφαπτομενη του εσωτερικου κυκλου στο σημειο Α και ονομαστε Β και Γ τα σημεια στα οποια τεμνει τον εξωτερικο κυκλο. Να δικαιολογησετε οτι $AB = A\Gamma$

(14) Γραψτε εναν κυκλο και φερτε δυο τυχαιες διαμετρους. Αν ενωσετε τα ακρα τους, τι σχημα θα προκυψει;