研究通讯

WKI 族的换位表示

考虑 WKI 特征值问题[1]:

$$\phi_x = U\phi,\ U = \begin{pmatrix} -i\lambda & \lambda q \\ \lambda r & i\lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

引理 1 WKI 特征值问题等价于谱问题:

$$L(u)\phi = \lambda\phi,\ L(u) = \frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix} i & -q \\ -r & -i \end{pmatrix}\partial, \tag{2}$$

其中 λ 为谱参数;$u=(q,r)^T$ 是位势,

$$\phi = (\phi_1,\phi_2)^T,\ \partial = \frac{\partial}{\partial x}.$$

引理 2 映射 L: $u \longmapsto L(u)$ 的微分为[2]

$$L_{*u}(\xi) = \frac{1}{1-qr}\begin{pmatrix} q\xi_2 & -i\xi_1 \\ i\xi_2 & r\xi_1 \end{pmatrix} L(u) \tag{3}$$

且 L_{*u}(以下简记为 L_*)是单同态. $\xi=(\xi_1,\xi_2)^T$.

命题 1 (1) 式的特征值 λ 的泛函梯度为

$$\nabla\lambda \triangleq \begin{pmatrix} \delta\lambda/\delta q \\ \delta\lambda/\delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\phi_2^2 \\ -\lambda\phi_1^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\int_\Omega (r\phi_1^2 + 2i\phi_1\phi_2 - q\phi_2^2)dx\right)^{-1}, \tag{4}$$

这里 Ω 是 x 的变化范围.

命题 2 $\nabla\lambda$ 满足线性方程:

$$K\nabla\lambda = \lambda\cdot J\nabla\lambda, \tag{5}$$

其中 K, J 分别为(∂^{-1} 表示 ∂ 的逆)

$$K = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial^2\frac{q}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 & \partial^3 + \frac{1}{2}\partial^2\frac{q}{p}\partial^{-1}\frac{r}{p}\partial^2 \\ \partial^3 + \frac{1}{2}\partial^2\frac{r}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 & -\frac{1}{2}\partial^2\frac{r}{p}\partial^{-1}\frac{r}{p}\partial^2 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\partial^2 \\ \partial^2 & 0 \end{pmatrix},\ p = \sqrt{1-qr}. \tag{6}$$

算子 K、J 称为 WKI 谱问题的 Lenard 算子对.

定理 1 设 $G^{(1)}(x)$、$G^{(2)}(x)$ 为 Ω 上的两个任意光滑函数,$G \triangleq (G^{(1)}, G^{(2)})^T$,让

$$W = W(G) = \begin{pmatrix} 0 & F(G) \\ E(G) & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-qr} \times \begin{pmatrix} iA(G) - rB(G) & 0 \\ 0 & iA(G) - qC(G) \end{pmatrix}\partial, \tag{7}$$

其中
$$A(G) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{p}\partial^{-1}\left(\frac{q}{p}\partial^2 G^{(1)} - \frac{r}{p}\partial^2 G^{(2)}\right);$$

$$B(G) = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p}\partial^{-1}\left(\frac{q}{p}\partial^2 G^{(1)} - \frac{r}{p}\partial^2 G^{(2)}\right);$$

$$C(G) = \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{p}\partial^{-1}\left(\frac{q}{p}\partial^2 G^{(1)} - \frac{r}{p}\partial^2 G^{(2)}\right);$$

$$E(G) = \frac{1}{2i}\left(\partial^2 G^{(1)} + \frac{1}{2}\partial\frac{r}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 G^{(1)}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\partial\frac{r}{p}\partial^{-1}\frac{r}{p}\partial^2G^{(1)}\Big);$$

$$F(G)=\frac{1}{2i}\Big(\partial^2G^{(2)}$$

$$+\frac{1}{2}\partial\frac{q}{p}\partial^{-1}\frac{r}{p}\partial^2G^{(2)}$$

$$-\frac{1}{2}\partial\frac{p}{q}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2G^{(1)}\Big).$$ 则

$$[W,L]\triangleq WL-LW=L_*(KG)\cdot L^{-1}-L_*(JG),\tag{8}$$

这里,K、J 如 (6)式为 Lenard 算子对;L 是 $L(u)$ 的简写.

定义 Lenard 递推叙列 $\{G_j\}$:

$$G_{-1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},G_0=\begin{pmatrix}i\frac{r}{p}\\ i\frac{q}{p}\end{pmatrix},$$

$$KG_{j-1}=JG_j(j=0,1,2,\cdots).$$

$X_m\triangleq JG_m(m=0,1,2,\cdots)$ 称为 WKI 向量场. WKI 族方程由向量场 X_m 产生,即 $u_t\equiv(q,r)_t^T=X_m(m=0,1,2,\cdots)$,特别指出,当 $r=-1$ 时,令 $1+q=s$,那么 $u_t=X_1$ 便化为著名的 Harry-Dym 方程

$$S_t=-\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)_{xxx}.$$

定理 2 假设 $G_j=(G_j^{(1)},G_j^{(2)})^T$ 为 Lenard 递推叙列,令 $W_j=W(G_j)$,

$$V_{m-1}=\sum_{j=0}^{m-1}W_{j-1}\cdot L^{m-j},m=1,2,\cdots.$$

那么,

$$[V_{m-1},L]=L_*(X_{m-1})(m=1,2,\cdots).\tag{9}$$

定理 3 WKI 族方程

$$u_t\equiv\begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix}_t=X_{m-1}(m=1,2,\cdots)$$

成立的充要条件是

$$L_t=[V_{m-1},L](m=1,2,\cdots),\tag{10}$$

即 (10) 式是 WKI 族的换位表示.

推论 位势 $u=(q,r)^T$ 满足定态的非线性 WKI 系统: $X_N+a_1X_{N-1}+\cdots+a_NX_0=0$ 之充要条件为

$$[V_N+a_1V_{N-1}+\cdots+a_NV_0,L]=0,\tag{11}$$

其中,$a_k(k=1,\cdots,N)$ 为常数.

致谢: 感谢曹策问教授的精心指导.

参 考 文 献

[1] Boitr, M., Pempimell, F. and Tu Guizhang, *Prog. of Theoretical Phys.*, **69**(1983), 1: 48—64.
[2] 曹策问,科学通报,**34**(1989),10:723—724.

乔志军
(辽宁大学数学系,沈阳 110036)

非均匀耦合映射中的行波状 Pattern*

在高维动力系统的研究中,近年来人们用耦合映射模型 (CML) 来研究时空复杂性,它的特点是研究的系统本身是 Chaos 的,故可考虑低维的 Chaos 对高维结构的影响.

文献 [1—4] 研究的是均匀的耦合映射,为更好地研究系统的扩散现象,有必要对非均匀耦合映射进行研究.

非均匀耦合映射模型为

$$x_{n+1}(i)=(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)f(x_n(i))+\varepsilon_1f(x_n(i+1))+\varepsilon_2f(x_n(i-1)),$$

其中 n 为时间, i 为空间点 ($i=1,2,\cdots,N$), ε_1、ε_2 为耦合强度, $f(x)$为 logistic 映射: $f(x)=1-ax^2$.

* 国家自然科学基金资助项目.