非线性Schrödinger方程的换位表示

乔志军*　赵秀云

摘要　本文根据曹策问教授的想法[1]和[2]，求得了非线性Schrödinger方程的梯度与Lenard对，并由此得到了其换位表示。讨论了与定态系统的关系。

§1　梯度、Lenard对

与非线性Schrödinger方程：

$$iu_t+u_{xx}+\frac{\alpha}{1-p^2}|u|^2u=0 \tag{1.1}$$

相联系的特征值问题是[3]：

$$\begin{cases} i(1+p)\phi_{1x}+u^*\phi_2=\lambda\phi_1 \\ i(1-p)\phi_{2x}+u\phi_1=\lambda\phi_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

这里$u_t=\partial u/\partial t$　$u_{xx}=\partial^2u/\partial x^2$．$u^*$是$u$的共轭．$\lambda$是特征值．$\phi_1$、$\phi_2$是$\lambda$相应的特征函数。$0<p<1$．$x\in(-\infty,+\infty)$，$u(x)\to 0$ $(x\to\infty)$或$x\in(0,T)$，$u(x+T)=u(x)$。以下让Ω代表$(-\infty,+\infty)$或$(0,T)$。

简记(1.2)为：

$$L\phi=\lambda\phi. \tag{1.3}$$

$$L=\begin{pmatrix} i(1+p) & 0 \\ 0 & i(1-p)\end{pmatrix}\partial+\begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0\end{pmatrix}\triangleq L_1\partial+L_2$$

$\phi=(\phi_1,\phi_2)^T$　$\partial=\partial/\partial x$.

引理1.1：$L=L^*$．从而特征值$\lambda\in R$.

证明：$L_2=L_2^*$.　　$(L_1\partial)^*=-L_1^*\partial=L_1\partial$

命题1.2：特征值问题(1.3)的梯度gradλ：

$$\mathrm{grad}\lambda\triangleq\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta u^* \\ \delta\lambda/\delta u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_1^*\phi_2 \\ \phi_1\phi_2^*\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

证明：让符号“．”代表泛函导数。对(1.3)两边求泛函导数得：

$$\dot{L}\phi+L\dot{\phi}=\dot{\lambda}\phi+\lambda\dot{\phi}$$

上式两边与ϕ作内积有：

* 辽宁大学　1989年12月5日收稿

$$<\dot{L}\phi,\phi>+<L\dot{\phi},\phi>=<\dot{\lambda}\phi,\phi>+<\lambda\dot{\phi},\phi>$$

又L共轭，故

$$<\dot{L}\phi,\phi>=<\dot{\lambda}\phi,\phi>.$$

取特征函数ϕ，使$<\phi,\phi>=1$，从而：$\dot{\lambda}=<\dot{L}\phi,\phi>=\dot{u}^*\phi_2\phi^*{}_1+\dot{u}\phi_1\phi_2^*$

由上式知本命题成立。

此题中，内积是指：$<f,g>=\int_\Omega(f_1g_1^*+f_2g_2^*)dx$，$f=(f_1,f_2)^T$，$g=(g_1,g_2)^T$.

命题1.3：梯度gradλ满足下面的关系式：

$$k\,\mathrm{grad}\lambda=2p\lambda J\,\mathrm{grad}\lambda \tag{1.5}$$

这里：

$$k=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}2u^*Iu^* & -(1-p^2)\partial-2u^*Iu\\ -(1-p^2)\partial-2uIu^* & 2uIu\end{pmatrix}\qquad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\partial=\partial/\partial x\qquad I=\partial^{-1}=\int_\Omega^{*}\cdot dc$$

证明：其命题1.2结果代入(1.5)式，通过一系列仔细地运算，不难证明(1.5)的正确性。

命题1.3中的算子K与J是特征值问题(1.3)的Lenard对。

§2 换位表示

引理2.1：任意2×2矩阵V、W，有：

$$[V,W\partial]=[V,W]\partial-WV_x \tag{2.1}$$

引理2.2：任意2×2矩阵V、S、L有：

$$[VS,L]=V[S,L]+[V,L]S \tag{2.2}$$

推论2.3：若$[S,L]=0\Rightarrow[VS,L]=[V,L]S$，特别：$[VL^n,L]=[V,L]L^n$.

引理2.4：对(1.3)中的算子L有：

$$L_*\begin{pmatrix}\xi^*\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\xi^*\\ \xi&0\end{pmatrix}\qquad \text{且}L_*\text{是单射。} \tag{2.4}$$

这里L_*定义为：$L_*\underline{u}\triangleq\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}L(\underline{u}+\varepsilon\underline{\xi})$.

这些引理是很显然的，就不加以证明了。

$$L=L_1\partial+L_2\Rightarrow\partial=L_1^{-1}L-L_1^{-1}L_2$$

令

$$V=\begin{pmatrix}A&B\\C&-A\end{pmatrix}\qquad A\text{、}B\text{、}C\text{均是特定的函数。}$$

则：（(2.5)的演算过程中用到引理2.1和$\partial=L_1^{-1}L-L_1^{-1}L_2$）

$$[V,L]=[V,L_2]-[V,L_1]L_1^{-1}L_2-L_1V_x+[V,L_1]L_1^{-1}L \tag{2.5}$$

把L_1、L_2与V分别代入(2.5)通过一系列计算知：

$$[V,L]=\begin{pmatrix}\frac{1+p}{1-p}uB-u^*C-i(1+p)A_x & 2Au^*-i(1+p)B_x\\ -2uA-i(1-p)C_x & \frac{1-p}{1+p}Cu^*-uB+i(1-p)A_x\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & (1/1-p)\cdot B \\ (-1/1p+1)\cdot C & 0 \end{pmatrix}\cdot 2p\cdot L \qquad (2.6)$$

我们希望：$[V,L]=L_*(KG)-L_*(JG)\cdot 2P\cdot L$。$G\triangleq(c(x),-c^*(x))^T$。$c(x)$是$\Omega$上任意的光滑函数。为此，我们选取：$A=-iI(uc^*+u^*c)$，$B=(1-P)c^*$，$C=-(1+P)c$ 故，有如下命题：

命题2.5：选取矩阵V：

$$V=\begin{pmatrix} -iI(uc^*+u^*c) & (1-p)c^* \\ -(1+p)c & i\cdot I(uc^*+u^*c) \end{pmatrix}$$

$c(x)$是Ω上任意的光滑函数，则： $[V,L]=L_*(KG)-L_*(JG)\cdot 2PL$ (2.7)

$G\triangleq(c,-c^*)^T$。K、J，L_*、L如前所述。

证：把G代入(2.7)的右端，详细计算即知与(2.6)的左端是一样的。

定义Lenard序列：$KG_j=JG_{j+1}$，（$j=-1,0,1\cdots$）

$G_j\triangleq(C_j,\ -C_j^*)$是Lenard梯度序列；$K$、$J$是Lenard算子对。

令$G_{-1}=0$（即$C_{-1}=0$）

选 $A_{-1}=\frac{1}{2}i\cdot(1-P^2)^{-2}$ 即 $V_{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}i & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}(1-p^2)^{-2}$。

则：$[V_{-1},L]=\begin{pmatrix}0 & iu^*\\ -iu & 0\end{pmatrix}\cdot(1-p^2)^{-2}$。

$$G_0=J^{-1}KG_{-1}=\begin{pmatrix}-iu\\ -iu^*\end{pmatrix}\cdot(1-p^2)^{-2} \qquad X_0=\begin{pmatrix}iu^*\\ -iu\end{pmatrix}\cdot(1-p^2)^{-2}$$

$$G_1=J^{-1}KG=\begin{pmatrix}u_x\\ -u_x^*\end{pmatrix}(1-p^2)^{-1} \qquad X_1=\begin{pmatrix}u_x^*\\ u_x\end{pmatrix}\cdot(1-p^2)^{-1}$$

$$G_2=J^{-1}KG_1=\begin{pmatrix}iu_{xx}+2ui|u|^2/1-p^2\\ iu_{xx}^*+2u^*i|u|^2/1-p^2\end{pmatrix} \qquad X_2=\begin{pmatrix}-iu_{xx}^*-2u^*i|u|^2/1-p^2\\ iu_{xx}+2ui|u|^2/1-p^2\end{pmatrix}$$

向量场X_2即产生非线性Schrödinger方程。

定义非线性Schrödinger向量场

$$X_m\triangleq JG_m \quad (m=0,1,2,\cdots)$$

$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。$G_m$是Lenard梯度序列。

命题2.6：令

$$V_j\triangleq\begin{pmatrix}-iI(uc_j^*+u^*c_j) & (1-p)c_j^*\\ -(1+p)c_j & iI(uc_j^*+u^*c_j)\end{pmatrix} \quad (i=-1,0,1,\cdots)$$

$G_j=(c_j,-c_j^*)^T$是Lenard梯度序列。

则：$[V_jL]=\begin{pmatrix}0 & c_{j+1}^*\\ c_{j+1} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & c_j^*\\ c_j & 0\end{pmatrix}\cdot(2PL)$ (2.8)

证明：由命题2.5：

$$[V_j,\ L]=L_*(KG_j)-L_*(JG_j)\cdot 2PL=L_*(JG_{j+1})-L_*(JG_j)\cdot 2PL$$

$$=\begin{pmatrix}0 & c^*_{j+1}\\ c_{j+1} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & c^*_j\\ c_{j+1} & 0\end{pmatrix}\cdot 2PL$$

命题2.7：设$W_m \triangleq \sum_{j=0}^{m} V_{j-1}(2PL)^{m-j}$。（$V_{j-1}$和命题2.6中的一样），则$W_m$与$L$的换位运算为：

$$[W_m, L]=L_* Z_m \tag{2.9}$$

证明：由推论2.3与命题(2.5)：

$$[W_m,L]=\sum_{j=0}^{m}[V_{j-1}(2PL)^{m-j},\ L]=\sum_{j=0}^{m}[V_{j-1},\ L](2PL)^{m-j}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}L_*(JG_j)\cdot(2PL)^{m-j}-L_*(JG_{j-1})\cdot(2PL)^{m-(j-1)}=L_*(JG_m)=L_*X_m$$

定理2.8：换位表示$Lt=[W_m,L]$成立$\Longleftrightarrow$非线性Schrödinger族$\begin{pmatrix}u^*\\ u\end{pmatrix}_t=X_m$。

$(m=0,1,\cdots)$

证明：由命题(2.7)：$L_t-[W_m,L]=L^*\begin{pmatrix}u^*_t\\ u_t\end{pmatrix}-L_*X_m=L_*\left[\begin{pmatrix}u^*\\ u_t\end{pmatrix}_t-X_m\right]$

又由引理2.4即知本定理成立。

命题2.9：若$X_m=\Phi^m X_o$，$\Phi=kJ^{-1}$是强对称，$X_o=\begin{pmatrix}iu^*\\ -iu\end{pmatrix}(1-P^2)^{-2}$，则$u$满足定态系统

$$X_N+\sum_{j=1}^{N-1}a_{N-j}X_j=0\Longleftrightarrow\left[\sum_{j=1}^{N-1}a_{N-j}W_j+W_N,L\right]=0$$

证明：由命题(27)。

$$\left[\sum_{j=1}^{N-1}a_{N-j}W_j+W_N,\ L\right]=\sum_{j=1}^{N-1}a_{N-j}L_*Z_j+L_*Z_N=L_*\left(X_N+\sum_{j=1}^{N}a_{N-j}X_j\right)$$

又由引理2.4即知本命题成立。

参考文献

〔1〕Cao Cewen, Nonlinearezation of the Lax systerm for AKNS hierarchy, to appear in Scientia Sinica.

〔2〕曹策问.《孤立子与反散射理论》第五章.

COMMUTATOR REPRESENTATION OF NON—LINEARIZATION SCHRÖDINGER EGUATIONS

Qiao Zhijun Chao xiuyun

ABSTRACT

According to professor Cao Cewen's thought [1]and[2], we obtained the gradient and Lenard pair of non-linearization Schrödinger eguations. And commutator representation of it was gained. The relation betwten it and stationary system of non-linearization Schrödinger eguations was discussed.