Levi 族，Lax 组，非线性化，特征值

应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
1993, Vol. 6 No. 4: 472~475

(18)

Levi 族的 Lax 组非线性化*

472-475

O175.2

乔志军
（辽宁大学数学系 沈阳 110036）

文[1]研究 Levi 族的 Lax 表示. 今进一步讨论其 Lax 组的非线性化.

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ 是 Levi 特征值问题的 N 个不同的特征值，那么

$$L\psi_j=\frac{\lambda_j}{2}\cdot\psi_j,\qquad L\triangleq\begin{pmatrix}-\partial+(q-r)/2 & q\\ -r & \partial+(q-r)/2\end{pmatrix}, \tag{1}$$

$\psi_j\triangleq(\psi_{1j},\psi_{2j})^T$ 是相应于特征值 λ_j 的特征函数，$j=1,\cdots,N$. $\partial=\partial/\partial x$, q、r 为势函数，x 在所论区间 Ω 内变化.

浓缩(1)为向量形式：

$$\begin{cases}\psi_1'=(-\frac{1}{2}\Lambda+\frac{q-r}{2}I_N)\psi_1+q\psi_2,\\ \psi_2'=r\psi_1+(\frac{1}{2}\Lambda+\frac{r-q}{2}I_N)\psi_2,\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\psi_k=(\psi_{k1},\cdots,\psi_{kN})^T\quad(k=1,2)$; $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$; I_N 为 $N\times N$ 单位矩阵.

由[1]知、特征值 λ_j 的泛函梯度：$\mathrm{grad}\lambda_j=\begin{pmatrix}(\psi_{1j}+\psi_{2j})\psi_{2j}\\ -(\psi_{1j}+\psi_{2j})\psi_{1j}\end{pmatrix}\cdot\left(\int_\Omega\psi_{1j}\psi_{2j}\mathrm{d}x\right)^{-1}$; Lenard 序列 $\{G_j\}_{j=-1}^{\infty}$ 中的 $G_0=\begin{pmatrix}r\\ q\end{pmatrix}$.

令
$$G_0=\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\cdot\mathrm{grad}\lambda_j,\qquad(\gamma_j\triangleq\int_\Omega\psi_{1j}\psi_{2j}\mathrm{d}x), \tag{3}$$

则(3)产生 Bargmann 约束

$$\begin{cases}r=\langle\psi_1+\psi_2,\psi_2\rangle;\\ q=-\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1\rangle.\end{cases} \tag{4}$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 R^N 中之标准内积.

在 Bargmann 约束(4)下，(2)被非线性化为一个三次系统

$$\begin{cases}\psi_1'=-\frac{1}{2}\Lambda\psi_1-\frac{1}{2}\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1+\psi_2\rangle\psi_1-\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1\rangle\psi_2.\\ \psi_2'=\frac{1}{2}\Lambda\psi_2+\frac{1}{2}\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1+\psi_2\rangle\psi_2+\langle\psi_1+\psi_2,\psi_2\rangle\psi_1.\end{cases} \tag{5}$$

---

* 收稿日期：1990-10-05
辽宁省教委青年自然科学基金项目.

于是，有

定理1　在B-约束(4)下，方程(2)可表示为Hamilton形式：

$$(H):\begin{cases}\psi_1' = -\dfrac{\partial H}{\partial \psi_2};\\ \psi_2' = \dfrac{\partial H}{\partial \psi_1}.\end{cases}\tag{6}$$

其中，$$H = \frac{1}{2}\langle \Lambda \psi_1,\psi_2\rangle + \frac{1}{2}\langle \psi_1+\psi_2,\psi_1+\psi_2\rangle\langle\psi_1,\psi_2\rangle + \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\langle\psi_1,\psi_1\rangle & \langle\psi_1,\psi_2\rangle\\ \langle\psi_1,\psi_2\rangle & \langle\psi_2,\psi_2\rangle\end{vmatrix}\tag{7}$$

称为(6)的Hamilton函数.

关于(6)的可积性，将另文专门讨论.

定理2　设(ψ_1,ψ_2)是(2)的非线性化(5)的一个解，那么，$q=-\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1\rangle$，$r=\langle\psi_1+\psi_2,\psi_2\rangle$是一个定态Levi方程

$$X_N + \alpha_1 X_{N-1} + \cdots + \alpha_N X_0 = 0\tag{8}$$

的解. 其中，$\alpha_1,\cdots,\alpha_N$是适当选取的常数；$X_0,X_1,\cdots,Z_N$是Levi向量场[1].

定理1的证明　将(7)式分别对ψ_1、ψ_2求偏导数，再进行整理，即得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial \psi_1} = \dfrac{1}{2}\Lambda\psi_2 + \dfrac{1}{2}\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1+\psi_2\rangle\psi_2 + \langle\psi_1+\psi_2,\psi_2\rangle\psi_1;\\ \dfrac{\partial H}{\partial \psi_2} = \dfrac{1}{2}\Lambda\psi_1 + \dfrac{1}{2}\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1+\psi_2\rangle\psi_1 + \langle\psi_1+\psi_2,\psi_1\rangle\psi_2,\end{cases}$$

上两式结合(5)立知(6)式成立.

定理2的证明　已知

$$G_0 = \begin{pmatrix} r\\ q\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\langle\psi_1+\psi_2,\psi_2\rangle\\ -\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1\rangle\end{bmatrix},\tag{9}$$

又由[1]，对Lenard算子对K、J，有

$$J^{-1}K:\quad \begin{aligned}&\mathrm{grad}\lambda_j \longrightarrow \lambda_j\cdot\mathrm{grad}\lambda_j,\quad (j=1,\cdots,N),\\ &G_j\longrightarrow G_{j+1}+\alpha G_{-1}+\beta G_{-2},\quad (j=-2,-1,\cdots),\end{aligned}$$

$$k = \begin{bmatrix}-q\partial-\partial q & -\partial^2-r\partial+\partial q\\ \partial^2-\partial r+q\partial & r\partial+\partial r\end{bmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&\partial\\ \partial&0\end{pmatrix},$$

$\mathrm{grad}\lambda_j$是λ_j的泛函梯度；$\{G_j\}$是Lenard递推序列；$G_{-2}=(-1,0)^T$，$G_{-1}=(0,1)^T$是空间$\ker J$的基；α，β为任意的常数.

$J^{-1}K$作用(9)式k次，得

$$\begin{bmatrix}\langle\psi_1+\psi_2,\ \Lambda^k\psi_2\rangle\\ -\langle\psi_1+\psi_2,\ \Lambda^k\psi_1\rangle\end{bmatrix} = G_k + \beta_2 G_{k-2} + \cdots + \beta_k G_0 + \beta_{k+1}G_{-1} + \beta_{k+2}G_{-2},$$

β_2，β_3，$\cdots$，β_{k+2}是任意的常数；$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$.

考察多项式

$$P(z)\triangleq(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_N) = z^N + p_1 z^{N-1} + \cdots + p_N \triangleq \sum_{k=0}^{N} p_{N-K}z^k,$$

这里$p_0=1$，p_1，$\cdots$，p_N由λ_1，$\cdots$，λ_N确定.

所以

$$0 = \begin{bmatrix}\langle\psi_1+\psi_2,P(\Lambda)\psi_2\rangle\\ -\langle\psi_1+\psi_2,P(\Lambda)\psi_1\rangle\end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{N} p_{N-k}\begin{bmatrix}\langle\psi_1+\psi_2,\ \Lambda^k\psi_2\rangle\\ -\langle\psi_1+\psi_2,\ \Lambda^k\psi_1\rangle\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{k=0}^{N}p_{N-k}(G_k+\beta_2G_{k-2}+\cdots+\beta_kG_0+\beta_{k+1}G_{-1}+\beta_{k+2}G_{-2}),$$

辛算子 J 作用上式，整理立得($JG_j=X_j$)：

$$X_N+\alpha_1X_{N-1}+\cdots+\alpha_NX_0=0,$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 是由 $p_1,\cdots,p_N$ 与 $\beta_2,\cdots,\beta_N$ 所决定的常数.

Levi 向量场 $X_m=JG_m(m=0,1,\cdots)$. 前几个计算结果如下：

$$G_0=\begin{pmatrix}r\\q\end{pmatrix},\qquad X_0=\begin{pmatrix}q'\\r'\end{pmatrix},$$

$$G_1=\begin{pmatrix}r'+2qr-r^2\\-q'-2qr+q^2\end{pmatrix},\qquad X_1=\begin{pmatrix}-q''-2(qr)'+2q'q\\r''+2(qr)'-2r'r\end{pmatrix},$$

$$G_2=\begin{pmatrix}r_{xx}+3r_xq-3rr_x+r^3+3rq^2-6r^2q\\q_{xx}+3q_xr-3qq_x+q^3+3qr^2-6q^2r\end{pmatrix},$$

$$X_2=\begin{pmatrix}(q_{xx}+3q_xr-3qq_x+q^3+3qr^2-6q^2r)_x\\(r_{xx}+3r_xq-3rr_x+r^3+3rq^2-6r^2q)_x\end{pmatrix}.$$

Levi 向量场 X_1 产生耦合 Burgers 方程

$$\begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix}_t=X_1=\begin{pmatrix}-q''-2(qr)'+2qq'\\r''+2(qr)'-2rr'\end{pmatrix}. \tag{10}$$

当 $r=0$[2]时，(10)即是 Burgers 方程.

(10)的 Lax 对是

$$\psi_x=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{2}+\frac{q-r}{2} & q\\ r & \frac{\lambda}{2}+\frac{r-q}{2}\end{pmatrix}\psi,$$

$$\psi_t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{(q-r)^2-(q+r)'}{2} & q\lambda-q'+(q-r)q\\ r\lambda+r'+(q-r)r & \frac{1}{2}\lambda^2-\frac{(q-r)^2-(q+r)'}{2}\end{pmatrix}\psi.$$

考虑 $2N\times 2N$ 阶矩阵

$$U(q,r)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\Lambda+\frac{1}{2}(q-r)I_N & qI_N\\ rI_N & \frac{1}{2}\Lambda+\frac{1}{2}(r-q)I_N\end{pmatrix},$$

$$W_1(q,r)$$
$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\Lambda^2+\frac{1}{2}[(q-r)^2-(q+r)']I_N & q\Lambda+[-q'+(q-r)q]I_N\\ r\Lambda+[r'+(q-r)r]I_N & \frac{1}{2}\Lambda^2-\frac{1}{2}[(q-r)^2-(q+r)']I_N\end{pmatrix}.$$

通过一些计算，有 $U_t-W_{1,x}+[U,W_1]=$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}[q_t-r_t+q_{xx}+4(qr)_x-2qq_x-2rr_x+r_{xx}]I_N & [q_t+q_{xx}+2(qr)_x-2qq_x]I_N\\ [r_t-r_{xx}-2(qr)_x+2rr_x]I_N & \frac{1}{2}[r_t-q_t-r_{xx}-q_{xx}-4(qr)_x+2qq_x+2rr_x]I_N\end{pmatrix},$$

假设 $(q,r)^T=f(\psi)$，由(4)给出：$q=-\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1\rangle$，$r=\langle\psi_1+\psi_2,\psi_2\rangle$，设 ψ 是 $\psi_t=S_1(\psi)\triangleq W_1(f(\psi))\psi$ 的一个解析解，在 $(q,r)^T=f(\psi)$ 下，令 $F=\psi_x-U(f(\psi))\psi$，$\psi\triangleq(\psi_1,\psi_2)^T$. 经过一系列计算，就可得到　$q_t+q_{xx}+2(qr)_x-2qq_x=\sum_F^1$；　$r_t-r_{xx}-2(qr)_x+2rr_x=\sum_F^2$.

此处，$\sum_F^1$、$\sum_F^2$ 是若干项关于 $F,F_x,F_{xx}\cdots$ 的分量的不低于一次的齐次多项式的和. 因此，由曹策问文中的定理 4.1(见[3]，节 4)，有如下结果

定理 3　对于 Levi 向量场 X_1，$\psi_t=S_1(\psi)\equiv W_1(f(\psi))\psi$ 是 Lax 组时间部分的非线性化方程，假设 $\psi(x,t)$ 是 $\psi_t=S_1(\psi)$ 的一个解析解，那么

(i)如果 $\psi(x,0)$ 满足(5)，则对任意时间 t，$\psi(x,t)$ 也满足(5)；

(ii)$q=-\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1\rangle$，$r=\langle\psi_1+\psi_2,\psi_2\rangle$ 是(10)的一个解；

(iii)$f_*|_\psi(S_1(\psi))=X_1(f(\psi))$，

这里 f_* 定义为：$f_*|_\psi(\xi)=\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}f(\psi+\varepsilon\xi)$.

注记　根据定理 3，我们看到非线性化方程(5)的解析解簇 $\mathfrak{n}$ 是时间 S_1一流的不变集. 进一步，f_* 把 $\mathfrak{n}$ 上的向量场 $S_1(\psi)$ 映到 $\mathfrak{m}\triangleq f(\mathfrak{n})$ 上的 Levi 向量场 $X_1(q,r)$.

此外，Levi 向量场 X_2 产生耦合方程

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = X_2 = \begin{pmatrix} (q_{xx}+3q_xr-3qq_x+q^3+3qr^2-6q^2r)_x \\ (r_{xx}+3r_xq-3rr_x+r^3+3q^2r-6r^2q)_x \end{pmatrix}. \tag{11}$$

当 $q=r$[2]时，(11)即 MKdV 方程.

和定理 3 的证明方法类似，可以证明

定理 4　对于 Levi 向量场 X_2，$\psi_t=S_2(\psi)\equiv W_2(f(\psi))\psi$ 是 Lax 组时间部分的非线性化方程，其中，W_2就是文[1]中所述的$W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}(2L)^{m-j}$，只不过$m=2$. 假设$\psi(x,t)$是$\psi_t=S_2(\psi)$的一个解析解，那么

(i)如果 $\psi(x,0)$ 满足(5)，则对任意时间 t，$\psi(x,t)$ 也满足(5).

(ii)$q=-\langle\psi_1+\psi_2,\psi_1\rangle$，$r=\langle\psi_1+\psi_2,\psi_2\rangle$ 是(11)的一个解.

(iii)$f_*|_\psi(S_2(\psi))=X_2(f(\psi))$.

注记　方程(5)的解析解族 $\mathfrak{n}$ 是时间 S_2一流的不变集，并且映射 f_* 将 $\mathfrak{n}$ 上的向量场 $S_2(\psi)$ 映到 $\mathfrak{m}\triangleq f(\mathfrak{n})$ 上的 Levi 向量场 $X_2(q,r)$. 对于一般情况. f_* 能否将向量场 $S_m(\psi)$ 映到 Levi 向量场 $X_m(q,r)$，则需进一步讨论.

感谢导师曹策问教授对本文的热情指导.

参　考　文　献

1　乔志军. Levi 族的 Lax 表示. 科学通报，1990，35(17)：1353～1354.

2　Levi D，Neugebauer G，Meinel R. A New Nonlinear Schrödinger Equation，Its Hierarchy and N-solitons. Physics Letters. 1984，102A(12)：1～6

3　曹策问. AKNS 族的 Lax 方程组的非线性化. 中国科学，1989，7：701～707

乔志军，1964 年 8 月生，男，副教授，研究方向：孤立子与可积系统.