应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
1994.7(3): 320~324

11
320-324

LCZ 族发展方程的换位表示*

乔志军
(辽宁大学数学系 沈阳 110036)

O175.2

A **提要** 本文给出LCZ族非线性发展方程的换位表示.

关键词: LCZ族,Lenard算子对,换位表示
MR(1991)主题分类号: 35Q53;58F07

发展方程, 非线性
LCZ族

1 Lenard 算子对

考虑 Li Yishen, Chen Dengyuan 以及 Zeng Yunbo 在文[1]提出的谱问题(以下简称LCZ谱):

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\xi+r & q+r\\ q-r & i\xi-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

(1)即:

$$L(u)\varphi=\xi\varphi,\quad L(u)=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}r-\partial & r+q\\ r-q & r+\partial\end{pmatrix}, \tag{2}$$

这里,$u(x)=(q(x),r(x))^T$ 称为(2)的位势;$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^T$;$\partial=\frac{\partial}{\partial x}$;$\xi$ 是(2)的谱参数;依赖区间 Ω 为 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(0,T)$,自变量 x 在 Ω 内变化;$i^2=-1$,位势 $u(x)$ 在无穷远处衰减为零或以 T 为周期. 与LCZ谱问题(1)相应的非线性保谱发展方程族称为LCZ族发展方程.

让 $L:u\to L(u)$ 是位势到微分算子的映射。按映射 L 的微分之定义[2],有:

引理 对于LCZ谱,L 的微分为:

$$L_{*u}[\eta]\triangleq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}L(u+\epsilon\eta)=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}\eta_2 & \eta_2+\eta_1\\ \eta_2-\eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}, \tag{3}$$

且 L_{*u} 是单同态,以下简记 L_{*u} 为 L_*. $\eta=(\eta_1,\eta_2)^T$.

命题 若 ξ 是(2)式的一个特征值,令 $\widetilde{A}\triangleq\begin{pmatrix}\varphi_2^2+\varphi_1^2\\ \varphi_1^2-\varphi_2^2\end{pmatrix}$,那么 $\widetilde{A}$ 满足:

$$K\widetilde{A}=\xi\cdot J\widetilde{A} \tag{4}$$

其中,算子 K、J 分别为:

* 收稿日期:1991-5-10

$$K=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\partial^3+2\partial q\partial^{-1}q & \partial r-2\partial q\partial^{-1}r\\ \partial r+r\partial+2\partial r\partial^{-1}q+2qr & -\frac{1}{2}\partial^3-2\partial r\partial^{-1}r-q\partial-2r^2\end{pmatrix},\quad J=2i\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\partial\\ \frac{1}{2}\partial+q & -r\end{pmatrix},$$

K、J 称为 Lenard 算子对;∂^{-1}表示算子 ∂ 的逆;φ_1,φ_2 是对应于 ξ 的特征函数.

证明 只须证明 $$J^{-1}K\bar{A}=\xi\cdot\bar{A},\tag{5}$$

$J^{-1}K$ 为

$$J^{-1}K=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}2r+4r\partial^{-1}q & -\partial-4r\partial^{-1}r\\ -\partial+4q\partial^{-1}q & 2r-4q\partial^{-1}r\end{pmatrix}.$$

由(1),立知

$$\partial(\varphi_1\varphi_2)=(q+r)\varphi_2^2+(q-r)\varphi_1^2=q(\varphi_1^2+\varphi_2^2)+r(\varphi_2^2-\varphi_1^2),$$

故

$$\begin{aligned}&(2r+4r\partial^{-1}q)(\varphi_2^2+\varphi_1^2)+(-\partial-4r\partial^{-1}r)(\varphi_1^2-\varphi_2^2)\\ &=2r(\varphi_2^2+\varphi_1^2)+\partial(\varphi_2^2-\varphi_1^2)+4r\partial^{-1}[q(\varphi_1^2+\varphi_2^2)+r(\varphi_2^2-\varphi_1^2)]\\ &=2r(\varphi_2^2+\varphi_1^2)+2i\xi(\varphi_2^2+\varphi_1^2)-2r(\varphi_1+\varphi_2)^2+4r\varphi_1\varphi_2\\ &=2i\xi(\varphi_2^2+\varphi_1^2).\end{aligned}$$

同理可计算出

$$(-\partial+4q\partial^{-1}q)(\varphi_2^2+\varphi_1^2)+(2r-4q\partial^{-1}r)(\varphi_1^2-\varphi_2^2)=2i\xi(\varphi_1^2-\varphi_2^2).$$

因此,(5)式正确.

附注 $J^{-1}K$ 就是文[1]中的递推算子 L_2. 此外(4)式对于 LCZ 族的可积结构之研究起着很重要的作用.

2 LCZ 族方程的换位表示

令矩阵 V 为

$$V\triangleq\begin{pmatrix}A+E\partial & B\\ C & -A+E\partial\end{pmatrix},$$

其中,$A(x)$、$B(x)$、$C(x)$、$E(x)$均为 Ω 上待定的函数. 现在,考虑 V 与 $L(u)$的换位子$[V,L]$. 经计算,有("$'$"指对 x 求导数)

$$\begin{aligned}[V,L]=\frac{1}{i}&\begin{pmatrix}-B(r-q)-C(q+r)+(A+rE)' & -2rB+2A(q+r)+(B+(q+r)E)'\\ -2Cr-2A(r-q)+(-C+(r-q)E)' & -C(q+r)-B(r-q)+(A+rE)'\end{pmatrix}\\ &-\begin{pmatrix}E' & -2B\\ -2C & E'\end{pmatrix}\cdot L\end{aligned}\tag{6}$$

希望:
$$[V,L]=L_*[KG]-L_*[JG]\cdot L,\tag{7}$$

其中,K,J 为 Lenard 算子对,$G\triangleq(G^{(1)}(x),G^{(2)}(x))T$;$G^{(1)}(x)$、$G^{(2)}(x)$是 Ω 上的任意光滑函数.

为此,选择:

$$A(x) = -\frac{1}{2}\partial G^{(2)}, \tag{8.1}$$

$$B(x) = -\frac{1}{2}\partial(G^{(1)} + G^{(2)}) - qG^{(1)} + rG^{(2)}, \tag{8.2}$$

$$C(x) = -\frac{1}{2}\partial(G^{(1)} - G^{(2)}) - qG^{(1)} + rG^{(2)}, \tag{8.3}$$

$$E(x) = G^{(1)} + 2\partial^{-1}(qG^{(1)} - rG^{(2)}), \tag{8.4}$$

就可使(6)式的右端等于 $L_*[KG]-L_*[JG]\cdot L$. 因而,得到如下定理:

定理 1 设 $G^{(1)}(x)$、$G^{(2)}(x)$ 是 Ω 上的任意光滑函数,$G=(G^{(1)}(x),G^{(2)}(x))^T$,让

$$V = \begin{pmatrix} A + E\partial & B \\ C & -A + E\partial \end{pmatrix},$$

其中,A、B、C、E 如(8.1)—(8.4)式所示. 那么

$$[V,L] \triangleq VL - LV = L_*[KG] - L_*[JG]\cdot L, \tag{9}$$

这里,K、J 为 Lenard 算子对.

证明 将(8.1)—(8.4)式分别代入(6)式的右端,然后进行一系列的运算,经整理即可知所得结果为 $L_*[KG]-L_*[JG]\cdot L$(具体计算见附录).

定义 Lenard 递推序列 $\{G_j\}$: $G_0=(r,q)^T$, $KG_j=JG_{j+1}$ $(j=0,1,\cdots)$. $G_j(x)$ 的分量是 $q(x)$、$r(x)$ 及其导数的多项式. $X_m \triangleq JG_m$ $(m=0,1,\cdots)$ 称为 LCZ 向量场. 前两个计算结果为

$$G_0 = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}, X_0 = i\begin{pmatrix} q' \\ r' \end{pmatrix}; G_1 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2r^2 - q' \\ 2rq - r' \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r'' + r'q + rq' \\ -\frac{1}{2}q'' - qq' + 3rr' \end{pmatrix}.$$

第 $m+1$ 阶 LCZ 方程将由第 $m+1$ 个向量场 X_m 产生,即 $u_t \triangleq (q,r)^T_t = X_m$ $(m=0,1,\cdots)$. 特别当 $m=1$ 时,让 $q=r$,则向量 X_1 产生著名的 Burgers 方程: $q_t+\frac{1}{2}q''-2qq'=0$.

定理 2 若 $G_j=(G_j^{(1)},G_j^{(2)})^T$ 是 Lenard 递推序列,让

$$V_j = \begin{pmatrix} A_j + E_j\partial & B_j \\ C_j & -A_j + E_j\partial \end{pmatrix}, \qquad (j=-1,0,1,\cdots),$$

其中,函数 $A_j(x)$、$B_j(x)$、$C_j(x)$、$E_j(x)$ 分别为:

$$A_j(x) = -\frac{1}{2}\partial G_j^{(2)},$$

$$B_j(x) = -\frac{1}{2}\partial(G_j^{(1)} + G_j^{(2)}) - qG_j^{(1)} + rG_j^{(2)},$$

$$C_j(x) = -\frac{1}{2}\partial(G_j^{(1)} - G_j^{(2)}) - qG_j^{(1)} + rG_j^{(2)},$$

$$E_j(x) = G_j^{(1)} + 2\partial^{-1}(qG_j^{(1)} - rG_j^{(2)}),$$

则

$$[W_m,L] = L_*[X_m]. \tag{10}$$

此处,

$$W_m = \sum_{j=0}^{m} V_{j-1}\cdot L^{m-j}; V_{-1} \triangleq \begin{pmatrix} i\partial & 0 \\ 0 & i\partial \end{pmatrix}, G \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

证明

$$[W_m,L] = \sum_{j=0}^{m}[V_{j-1},L]\cdot L^{m-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{m}(L_*[KG_{j-1}]\cdot L^{m-j} - L_*[JG_{j-1}]\cdot L^{m-j+1})$$

$$= L_*[JG_m] - L_*[JG_{-1}] \cdot L^{m+1}$$
$$= L_*[JG_m] = L_*[X_m].$$

推论 1　LCZ 族方程 $u_t \equiv (q,r)_t^T = X_m$ 成立的充要条件是

$$L_t = [W_m, L].\ (m = 0,1,\cdots). \tag{11}$$

证明

$$L_t = \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{i}\begin{bmatrix} r_t & q_t + r_t \\ r_t - q_t & r_t \end{bmatrix} = L_*[u_t],$$

$$L_t - [W_m, L] = L_*[u_t] - L_*[X_m] = L_*[u_t - X_m],$$

而 L_* 为单射，故推论 1 正确.

推论 2　LCZ 族方程 $u_t \equiv (q,r)_t^T = X_m (m=0,1,\cdots)$ 是 $L\varphi = \xi\varphi$ 与 $\varphi_t = W_m\varphi$ 的自然相容条件.

推论 3　位势 $u(x) = (q(x), r(x))^T$ 满足定态 LCZ 系统　$X_N + a_1X_{N-1} + \cdots + a_NX_0 = 0$ 的充要条件是，

$$[W_N + a_1W_{N-1} + \cdots + a_NW_0, L] = 0, \tag{12}$$

其中，$a_1,\cdots,a_N$ 为常数；$X_j (j=0,\cdots,N)$ 是 LCZ 向量场.

证明　因为

$$[W_N + a_1W_{N-1} + \cdots + a_NW_0, L]$$
$$= [W_N, L] + \sum_{j=1}^{N} a_j [W_{N-j}, L]$$
$$= L_*[X_N] + \sum_{j=1}^{N} a_j L_*[X_{N-j}]$$
$$= L_*[X_N + a_1X_{N-1} + \cdots + a_NX_0],$$

又 L_* 是单射，故本推论成立.

至此，LCZ 族的每一个非线性保谱发展方程均有换位表示(11).

3　附录

以下验证(6)式的右端等于 $L_*[KG] - L_*[JG] \cdot L$.

把(8.1)—(8.4)式代入(6)式右端的每一项，经仔细计算有：

$$-B(r-q) - C(q+r) + (A + rE)'$$
$$= -(B+C)r + (B-C)q + (A+rE)'$$
$$= r\partial G^{(1)} + 2qrG^{(1)} - 2r^2G^{(2)} - q\partial G^{(2)} + \partial r(G^{(1)} + 2\partial^{-1}(qG^{(1)} - rG^{(2)})) - \frac{1}{2}\partial^2 G^{(2)}$$
$$= (r\partial + \partial r + 2\partial r\partial^{-1}q + 2qr)G^{(1)} - (\frac{1}{2}\partial^2 + 2\partial r\partial^{-1}r + q\partial + 2r^2)G^{(2)}$$
$$= (KG)^{(2)},$$

$$-2rB + 2A(q+r) + (B + (q+r)E)'$$
$$= -\frac{1}{2}\partial^2(G^{(1)} + G^{(2)}) - \partial qG^{(1)} + \partial rG^{(2)} + \partial(q+r)(G^{(1)} + 2\partial^{-1}(qG^{(1)} - rG^{(2)}))$$
$$- (q+r)\partial G^{(2)} - 2r(-\frac{1}{2}\partial(G^{(1)} + G^{(2)}) - qG^{(1)} + rG^{(2)})$$
$$= (-\frac{1}{2}\partial^2 + 2\partial(q+r)\partial^{-1}q + \partial r + r\partial + 2qr)G^{(1)}$$

$$+(-\frac{1}{2}\partial^3-2\partial(q+r)\partial^{-1}r+\partial r-q\partial-2r^2)G^{(2)}$$

$$=(KG)^{(1)}+(KG)^{(2)},$$

$$(-C+(r-q)E)'-2Cr-2A(r-q)$$

$$=(\frac{1}{2}\partial^3-2\partial(r-q)\partial^{-1}q+\partial r+r\partial+2qr)G^{(1)}$$

$$+(-\frac{1}{2}\partial^3-2\partial(r-q)\partial^{-1}r-q\partial-2r^2-\partial r)G^{(2)}$$

$$=(KG)^{(2)}-(KG)^{(1)},$$

$$E'=\partial G^{(1)}+2(qG^{(1)}-rG^{(2)})=\frac{1}{i}(JG)^{(2)},$$

$$-2B=\partial(G^{(1)}+G^{(2)})+2(qG^{(1)}-rG^{(2)})=\frac{1}{i}[(JG)^{(1)}+(JG)^{(2)}],$$

$$-2C=\partial(G^{(1)}-G^{(2)})+2(qG^{(1)}-rG^{(2)})=\frac{1}{i}[(JG)^{(2)}-(JG)^{(1)}],$$

其中，$(\cdot)^{(1)}$表示$(\cdot)$的第一分量，$(\cdot)^{(2)}$表示$(\cdot)$的第二分量；K、J 是 Lenard 算子对；$G=(G^{(1)},G^{(2)})^T$.

所以(6)式右端为：

$$[V,L]=\frac{1}{i}\begin{bmatrix}(KG)^{(2)} & (KG)^{(2)}+(KG)^{(1)}\\(KG)^{(2)}-(KG)^{(1)} & (KG)^{(2)}\end{bmatrix}$$
$$-\frac{1}{i}\begin{bmatrix}(JG)^{(2)} & (JG)^{(2)}+(JG)^{(1)}\\(JG)^{(2)}-(JG)^{(1)} & (JG)^{(2)}\end{bmatrix}\cdot L$$
$$=L_*[KG]-L_*[JG]\cdot L.$$

作者感谢审稿人提出了宝贵意见.

参 考 文 献

1 Li Yishen, Chen Dengyuan and Zeng Yunbo, Some equivalent classes of soliton equations, Proc. 1983 Beijing Symp. on Diff. Geom. and Diff. Equ's, 359~368, Science Press, Beijing, 1986.

2 曹策问，科学通报，34(1989)，10：723~724

Commutator Representation of LCZ Hierarchy of Evolution Equations

Qiao Zhijun (乔志军)

(*Department of Maths., Liaoning Univ.*)

Abstract

The commutator representations of the L-C-Z hierarchy of nonlinear evolutions equations are given in this paper.

Keywords: LCZ hierarchy; Lenard operator; Commutator representation