D-AKNS族的换位表示*

乔志军

（辽宁大学数学系，沈阳110036）

提要 本文根据曹策问教授的想法[1],[2]，求得了与D-AKNS族发展方程相联系的特征值之泛函梯度与Lenard算子对；并由此得到了D-AKNS族非线性发展方程的换位表示。文末还讨论了换位表示与定态D-AKNS方程之间的关系。

关键词：D-AKNS族；Lenard算子对；换位表示

1 特征值的泛函梯度与Lenard算子对

与D-AKNS族方程相联系的保谱问题是[4]

$$\psi_x = U\psi,\quad U=\begin{pmatrix}-\lambda+s(x) & q(x)\\ r(x) & \lambda-s(x)\end{pmatrix},\tag{1.1}$$

或者

$$L\psi=\lambda\psi,\quad L(u)=\begin{pmatrix}-\partial+s(x) & q(x)\\ -r(x) & \partial+s(x)\end{pmatrix},\tag{1.2}$$

这里，$\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$，$\psi_x=\partial\psi/\partial x$，$\partial=\partial/\partial x$；$\lambda$是特征值；$\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$是相应于特征值$\lambda$的特征函数。向量值函数$u(x)\triangleq(q(x),r(x),s(x))^T$称为位势。依赖区间$\Omega$为$(-\infty,+\infty)$或$(0,T)$；$u(x)$在无穷远处衰减为零或以$T$为周期。让$u\longmapsto u+\varepsilon\delta u$，定义$\partial/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}$为“$\cdot$”。

此外，本文涉及的微分算子∂，∂^{-1}分别是指

$$\partial=\partial/\partial x;\ \partial^{-1}=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x}\cdot-\int_{x}^{\infty}\cdot\right)\quad 或\quad \partial^{-1}=\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{x}\cdot-\int_{x}^{T}\cdot\right).$$

其中，∂^{-1}是偏微分算子∂的逆。以后不再申明。

在(1.2)中，$L: u\longmapsto L(u)$代表位势到微分算子的映射。

定义1.1[2] 映射L的微分定义为

$$L_*|_u(\xi)=\mathrm{d}/\mathrm{d}\varepsilon|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\xi).$$

引理1.2 对于D-AKNS族，$L(u)$如(1.2)所示；L的微分为

$$L_*(\xi)=\begin{pmatrix}\xi_3 & \xi_1\\ -\xi_2 & \xi_3\end{pmatrix},\quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T.\tag{1.3}$$

本文1989年6月30日收到。
*辽宁省教委青年科研基金资助项目。

且 L_*是单同态。通常定义1.1中的 $L_*|_u$可简记为 L_*。

命题1.3　(1.1)式之特征值 λ 的泛函梯度 $\nabla\lambda$ 为

$$\nabla\lambda=\mathrm{grad}\,\lambda\triangleq\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta q\\ \delta\lambda/\delta r\\ \delta\lambda/\delta s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_2^2\\ -\psi_1^2\\ 2\psi_1\psi_2\end{pmatrix}\cdot\left(\int_\Omega 2\psi_1\psi_2\,dx\right)^{-1}, \tag{1.4}$$

其中，ψ_1，ψ_2是相应于 λ 的特征函数

$$\begin{cases}\psi_{1x}=(-\lambda+s)\psi_1+q\psi_2;\\ \psi_{2x}=r\psi_1+(\lambda-s)\psi_2.\end{cases} \tag{1.5}$$

证明　在文[1]节Ⅱ里，选择

$$m_{11}=-\lambda+s,\quad m_{12}=q,\quad m_{21}=r,$$

则有

$$\int_\Omega[-\dot r\psi_1^2+2(-\dot\lambda+\dot s)\psi_1\psi_2+\dot q\psi_2^2]dx=0.$$

故

$$\delta\lambda/\delta q=\psi_2^2\cdot\left(\int_\Omega 2\psi_1\psi_2\,dx\right)^{-1};\quad \delta\lambda/\delta r=-\psi_1^2\cdot\left(\int_\Omega 2\psi_1\psi_2\,dx\right)^{-1};$$

$$\delta\lambda/\delta s=2\psi_1\psi_2\cdot\left(\int_\Omega 2\psi_1\psi_2\,dx\right)^{-1}.$$

定理1.4　若 λ 是(1.2)的一个特征值，那么 gradλ 满足线性方程

$$K\,\mathrm{grad}\lambda=\lambda\cdot J\,\mathrm{grad}\lambda, \tag{1.6}$$

其中，微分算子K、J 分别为

$$K=\begin{pmatrix}q\partial^{-1}(q\partial+2qs) & \partial-2s+q\partial^{-1}(r\partial-2rs) & q\\ \partial+2s-r\partial^{-1}(q\partial+2qs) & -r\partial^{-1}(r\partial-2rs) & -r\\ (q\partial+2qs)/2 & (r\partial-2rs)/2 & 0\end{pmatrix}; \tag{1.7}$$

$$J=\begin{pmatrix}0 & -2 & q\\ 2 & 0 & -r\\ -q & r & \partial\end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

K，J 称为 D-AKNS 族的 Lenard 算子对。

证明　把(1.7)和(1.8)及(1.4)的右端分别代入 (1.6)，直接验证，并结合方程 (1.1) 即知(1.6)式是成立的。验证过程中利用到等式

$$\partial(\psi_1\psi_2)=q\psi_2^2+r\psi_1^2. \tag{1.9}$$

2　D-AKNS 向量场的换位表示

引理2.1　设V，W 是任意两个2×2 矩阵，则 Lie 括号$[V,W\partial]$、$[V\partial,W\partial]$ 分别为(其中 $V_x=\partial V/\partial x$；$W_x=\partial W/\partial x$)

$$[V,W\partial]=[V,W]\partial-WV_x; \tag{2.1$_1$}$$

$$[V\partial,W\partial]=[V,W]\partial^2+(VW_x-WV_x)\partial. \tag{2.1$_2$}$$

引理2.2　对任意2×2矩阵V，S，L，有

$$[VS,L]=V[S,L]+[V,L]S,\tag{2.2}$$

推论2.3 若$[S,L]=0$，则$[VS,L]=[V,L]S$，

特别

$$[VL^n,L]=[V,L]L^n.\tag{2.3}$$

$$L(u)=\begin{pmatrix}-\partial+s & q\\ -r & \partial+s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\partial+\begin{pmatrix}s & q\\ -r & s\end{pmatrix}=L_2\partial+L_1,\tag{2.4}$$

其中，$L_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$L_1=\begin{pmatrix}s & q\\ -r & s\end{pmatrix}$.

由(2.4)可知

$$\partial=L_2^{-1}(L-L_1).\tag{2.5}$$

令

$$V=\begin{pmatrix}A+E\partial & B\\ C & -A+E\partial\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}\partial+\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}=V_2\partial+V_1,\tag{2.6}$$

这里，$V_1=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}$，$V_2=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$，$A$，$B$，$C$和$E$均是待定的函数.

考虑V与$L(u)$的换位子$[V,L]$，由引理2.1及(2.5)式，有

$$[V,L]=[V_1,L_1]+V_2L_{1x}-L_2V_{1x}+([V_1,L_2]-L_2V_{2x})L_2^{-1}(L-L_1).\tag{2.7}$$

经计算可知

$$[V_1,L_1]+V_2L_{1x}-L_2V_{1x}=\begin{pmatrix}-Br-Cq+A_x+Es_x & 2Aq+B_x+Eq_x\\ 2Ar-C_x-Er_x & Cq+Br+A_x+Es_x\end{pmatrix};$$

$$([V_1,L_2]-L_2V_{2x})L_2^{-1}=\begin{pmatrix}-E_x & 2B\\ 2C & -E_x\end{pmatrix};$$

$$-([V_1,L_2]-L_2V_{2x})L_2^{-1}L_1=\begin{pmatrix}2Br+E_xs & -2Bs+E_xq\\ -2Cs-E_xr & -2Cq+E_xs\end{pmatrix},$$

故

$$[V,L]=\begin{pmatrix}Br-Cq+(A+Es)_x & 2Aq-2Bs+(B+Eq)_x\\ 2Ar-2Cs-(C+Er)_x & Br-Cq+(A+Es)_x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}E_x & -2B\\ -2C & E_x\end{pmatrix}\cdot L.\tag{2.8}$$

以上，$(\cdot)_x$均指$(\cdot)_x=\partial(\cdot)/\partial x$.

我们希望

$$[V,L]=L_*(KG)-L_*(JG)\cdot L,\tag{2.9}$$

这里，$G(x)=(G^{(1)}(x),G^{(2)}(x),G^{(3)}(x))^T$，$G^{(1)}(x)$、$G^{(2)}(x)$、$G^{(3)}(x)$是$\Omega$上任意的光滑函数，且$\partial G^{(3)}=2qG^{(1)}-2rG^{(2)}$；$K$，$J$为D-AKNS族的Lenard算子对.

为此，选取

$$\left.\begin{aligned}
A(x)&=\frac{1}{2}\partial^{-1}(q\partial+2qs)G^{(1)}+\frac{1}{2}\partial^{-1}(r\partial-2rs)G^{(2)}-\frac{1}{2}sG^{(3)}+\frac{1}{2}G^{(3)};\\
B(x)&=G^{(2)}-\frac{1}{2}qG^{(3)};\\
C(x)&=G^{(1)}-\frac{1}{2}rG^{(3)};\\
E(x)&=\frac{1}{2}G^{(3)},
\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

从而，有

命题2.4 设 $G^{(1)}(x)$、$G^{(2)}(x)$、$G^{(3)}(x)$是 Ω 上任意的光滑函数；$G=(G^{(1)},G^{(2)},G^{(3)})^{T}$，且 $\partial G^{(3)}=2qG^{(1)}-2rG^{(2)}$，让

$$V=\begin{pmatrix}A+E\partial & B\\ C & -A+E\partial\end{pmatrix},$$

$A(x)$，$B(x)$，$C(x)$，$E(x)$如(2.10)式所示。那么

$$[V,L]\triangleq VL-LV=L_*(KG)-L_*(JG)\cdot L, \tag{2.11}$$

其中，K，J 为 Lenard 算子对；L_* 是 L 的微分。

证明 把(2.10)代入(2.8)的右端，经详细计算，不难发现(2.8)右端的第一项就是 $L_*(KG)$，第二项就是 $-L_*(JG)\cdot L$。

若 $JG=0$，则

$$\begin{cases}-2G^{(2)}+qG^{(3)}=0,\\ 2G^{(1)}-rG^{(3)}=0,\\ -qG^{(1)}+rG^{(2)}+\partial G^{(3)}=0,\end{cases}\quad 亦即\quad \begin{cases}G^{(1)}=c\cdot 2r,\\ G^{(2)}=c\cdot 2q,\\ G^{(3)}=c\cdot 4,\end{cases}$$

其中，c 为任意的实常数。

所以，算子 J 的核 $\mathrm{Ker}J=\{c\cdot(2r,2q,4)^{T}\mid\forall c\in\mathbf{R}\}$。

定义 Lenard 梯度递推序列$\{G_j\}$：$G_{-1}=(2r,2q,4)^{T}$；$JG_{j+1}\triangleq KG_j(j=-1,0,1,\cdots)$，$K$、$J$ 为 Lenard 算子对。诸 G_j 是 $q(x)$，$r(x)$，$s(x)$ 及其各阶导数的多项式[4]；并且当常数项取为零时，是唯一的。$X_m\triangleq JG_m(m=0,1,\cdots)$称为 D-AKNS 族的向量场。向量场 X_0 计算结果如下

$$X_0=\begin{pmatrix}2q_x-4sq+2q^2r\\ 2r_x+4sr-2r^2q\\ (qr)_x\end{pmatrix},\quad G_0=\begin{pmatrix}r_x+2sr\\ -q_x+2sq\\ 2qr\end{pmatrix}.$$

按递推关系 $JG_{j+1}=KG_j$，可以依次解出第 $m+1$ 个向量场 X_m 和 Lenard 梯度序列 G_m。D-AKNS 族方程中的第 $m+1$ 个由向量场 X_m 产生，即 $u_t=(q,r,s)^{T}_t=X_m(m=0,1,\cdots)$。其中，$X_0$产生 D-AKNS 族的第一个方程[3]

$$u_t=\begin{pmatrix}q\\ r\\ s\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}2q_x-4sq+2q^2r\\ 2r_x+4sr-2r^2q\\ (qr)_x\end{pmatrix}=X_0.$$

附注2.5 按上述过程得到的向量场 $X_m=JG_m(m=0,1,\cdots)$与文[3]中求得的 D-AKNS 向量场是一致的。

证明 由文[3]知

$$\begin{pmatrix}c_{n+1}\\ b_{n+1}\\ 2a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial/2 & 0 & r/2\\ 0 & -\partial/2 & -q/2\\ \partial^{-1}q\partial & \partial^{-1}r\partial & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_n\\ b_n\\ 2a_n\end{pmatrix}.$$

记上式的矩阵算子为 Q，则文[3]中的 D-AKNS 向量场是（其中算子 K，J 为 Lenard 算子对）

$$J\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 2a_{n+1} \end{pmatrix} = JQ\begin{pmatrix} c_n \\ b_n \\ 2a_n \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} c_n \\ b_n \\ 2a_n \end{pmatrix}, \quad (n=-1,0,1,\cdots), \qquad (*)$$

上式运算过程中用到恒等式：$K=JQ$。

只要在(*)式中取 $(c_{-1}, b_{-1}, 2a_{-1})^T = G_{-1} = (2r, 2q, 4)^T$，则由(*)式产生的向量场便是 X_m。

引理2.6 算子 J 是辛算子[3]，且其逆为：

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}r\partial^{-1}r & \frac{1}{4}(r\partial^{-1}q+2) & \frac{1}{2}r\partial^{-1} \\ \frac{1}{4}(q\partial^{-1}r-2) & \frac{1}{4}q\partial^{-1}q & \frac{1}{2}q\partial^{-1} \\ \frac{1}{2}\partial^{-1}r & \frac{1}{2}\partial^{-1}q & \partial^{-1} \end{pmatrix} \qquad (2.12)$$

引理2.7 对于 Leard 梯度递推序列$\{G_j\}$，$G_j = (G_j^{(1)}, G_j^{(2)}, G_j^{(3)})^T$，总成立

$$\partial G_j^{(3)} = 2qG_j^{(1)} - 2rG_j^{(2)}, \quad (j=-1, 0, 1, \cdots). \qquad (2.13)$$

证明 对于任意的 $j\in\{-1, 0, 1, \cdots\}$，有

$$G_{j+1} = J^{-1}KG_j.$$

将(2.12)和(1.7)代入上式，经计算整理得

$$G_{j+1}^{(1)} = \frac{1}{2}[(\partial+2s-r\partial^{-1}(q\partial+2qs))G_j^{(1)} - r\partial^{-1}(r\partial-2rs)G_j^{(2)} - rG_j^{(3)}]$$
$$+\frac{1}{2}r\partial^{-1}[(q\partial+2qs)G_j^{(1)} + (r\partial-2rs)G_j^{(2)}];$$
$$G_{j+1}^{(2)} = -\frac{1}{2}[q\partial^{-1}(q\partial+2qs)G_j^{(1)} + (\partial-2s+q\partial^{-1}(r\partial-2rs))G_j^{(2)} + qG_j^{(3)}]$$
$$+\frac{1}{2}q\partial^{-1}[(q\partial+2qs)G_j^{(1)} + (r\partial-2rs)G_j^{(2)}];$$
$$G_{j+1}^{(3)} = \partial^{-1}(q\partial+2qs)G_j^{(1)} + \partial^{-1}(r\partial-2rs)G_j^{(2)},$$

故

$$2q\cdot G_{j+1}^{(1)} - 2rG_{j+1}^{(2)} = (q\partial+2qs)G_j^{(1)} + (r\partial-2rs)G_j^{(2)} = \partial G_{j+1}^{(3)}, \quad (j=-1, 0, 1, \cdots).$$

另外，对 $G_{-1}=(2r, 2q, 4)^T$，(2.13)式亦成立，故引理2.7正确。

定理2.8 设 $G_j = (G_j^{(1)}, G_j^{(2)}, G_j^{(3)})^T$ 是 Lenard 递推序列，让

$$V_j = \begin{pmatrix} A_j + E_j\partial & B_j \\ C_j & -A_j + E_j\partial \end{pmatrix}, \quad (j=-1,0,1,\cdots),$$

其中，函数 $A_j(x)$，$B_j(x)$，$C_j(x)$，$E_j(x)$依次为

$$A_j(x) = \frac{1}{2}\partial^{-1}(q\partial+2qs)\ G_j^{(1)} + \frac{1}{2}\partial^{-1}(r\partial-2rs)\ G^{(2)} - \frac{1}{2}sG_j^{(3)} + \frac{1}{2}G_j^{(3)};$$

$$B_j(x) = G_j^{(2)} - \frac{1}{2}qG_j^{(3)};$$

$$C_j(x) = G_j^{(1)} - \frac{1}{2}rG_j^{(3)};$$

$$E_j(x)=\frac{1}{2}G_j^{(1)}.$$

那么
$$[W_m,L]=L_*(X_m),\quad (m=0,1,\cdots),\tag{2.14}$$

这里，
$$W_m\triangleq\sum_{k=0}^{m}V_{k-1}L^{m-k}.\tag{2.15}$$

证明 由推论2.3、引理2.7及命题2.4，有

$$[W_m,L]=\sum_{k=0}^{m}[V_{k-1},L]\cdot L^{m-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{m}L_*(JG_k)\cdot L^{m-k}-L_*(JG_{k-1})\cdot L^{m-k+1}$$
$$=L_*(JG_m)=L_*(X_m).$$

推论2.9 D-AKNS方程 $u_t=(q,r,s)_t^T=X_m$ 成立的充要条件是
$$L_t=[W_m,L],\quad (m=0,1,\cdots),\tag{2.16}$$
即(2.16)是D-AKNS方程 $u_t=X_m$ 的换位表示（或Lax表示），其中，W_m 由(2.15)给出。

证明

$$L_t=\begin{pmatrix}s_t & q_t\\ -r_t & s_t\end{pmatrix}=L_*(u_t),$$

故 $L_t-[W_m,L]=L_*(u_t)-L_*(X_m)=L_*(u_t-X_m)$。由引理1.2，$L_*$ 是单射，所以推论2.9成立。

推论2.10 位势 $u(x)=(q(x),r(x),s(x))^T$ 满足定态的D-AKNS系统：
$$X_N+a_1X_{N-1}+\cdots+a_NX_0=0\tag{2.17}$$
的充分必要条件是
$$[W_N+a_1W_{N-1}+\cdots+a_NW_0,L]=0.\tag{2.18}$$
诸 $a_k(k=1,\cdots,N)$ 为常数；$W_j(j=0,\cdots,N)$ 由(2.15)给出。

证明

$$[W_N+a_1W_{N-1}+\cdots+a_NW_0,L]=L_*(X_N)+a_1L_*(X_{N-1})+\cdots+a_NL_*(X_0)$$
$$=L_*(X_N+a_1X_{N-1}+\cdots+a_NX_0),$$

而 L_* 为单射，故本推论正确。

致谢：完成此文过程中，导师曹策问教授给予热心的关怀与帮助，对此，表示衷心的感谢。同时也非常感谢屠规彰先生对本文的指点。

参 考 文 献

1 曹策问. AKNS族的Lax方程组的非线性化. 中国科学A辑, 1989(7):701～707

2 曹策问. 保谱方程的换位表示. 科学通报1989, 34(10):723～724

3 Tu Guizhang, Meng Dazhi, The Trace Identity, a Powerful Tool to Hamitonian Structure of Integrable System Ⅱ. to appear in Acta Math. Appl Sinica.

4 Lax P D, Almost Periodic Solutions of The KdV Equation, SIAM Rev., 1976, 18(3), 351～375

Commutator Representation of D-AKNS Hierarchy

Qiao Zhijun
(*Department of Math. Liaoning Univ.* 110036)

Abstract

According to professor Cao Cewen's thought [1-2], in this paper we present the functional gradient of eigenvalue and the pair of Lenard's operators which are related to D-AKNS evolution equations. Furthermore, commutator representation of nonlinear D-AKNS evolution equations is obtained. In the end of this paper, we discuss the relation between commutator representation and stationary D-AKNS equations.

Keywords: D-AKNS hierarchy; Lenard's operators; Commutator representation

中南地区模糊数学和系统成果交流会在湖南大庸召开

经中国系统工程学会模糊数学和系统专业委员会同意，由长沙水电师院数学系具体筹办，于1991年7月23日至29日，在湖南省大庸市冶金职工休养所召开了中南地区模糊数学和系统成果交流会。会议共收到来自全国25个省、市、自治区模糊界同仁寄来的论文170余篇，并正式出版一本会议专刊。大会收到了中国工业与应用数学学会副理事长，武汉市副市长郭友中教授派专人送来的贺信。出席会议的正式代表64人，他们分别来自祖国的14个省、市、自治区。大会在隆重的开幕式之后，进行了8个专题报告，然后再分理论和应用二个大组，共12个方向进行了交流。会议安排紧凑，与会代表发言踊跃，讨论热烈，大家一致认为，模糊数学已在中南地区以至全国各条战线结出了丰硕的成果。会议期间，代表们推选了中南地区联络员，并就中南区恢复模糊数学与系统分会进行了认真的讨论。本次会议执委会和联络员会议初步拟定于适当的时候，在海南省召开中南地区模糊数学与系统学术会并进行分会改选。现阶段，长沙水电师院作为挂靠单位，并推选该院数学系曹炳元同志负责分会联络工作。

在郭友中教授贺信的鼓舞下，在与会同志的通力合作下，本次会议已获圆满成功，大家深信，在本次会议东风的推动下，模糊数学和系统的理论与应用，必将在中南乃至全国各地硕果累累。

（曹炳元）