辽宁大学学报
自然科学版
第19卷 第2期 1992年

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.19 №2 1992

Levi方程族的换位表示

乔志军 李淑霞
（数学系） （化学系）

摘 要 本文使用特征值问题的泛函梯度方法，给出levi向量场的Lenard算子对，建立Levi方程族的换位表示：文末还讨论了位势与定态Levi系统之间的关系.

关键词 Levi族；Lenard算子对；换位表示；微分映射L_φ.

1 泛函梯度与Lenard算子对

我们考虑Levi特征值问题[1]：

$$\psi_x=\hat{U}\psi,\qquad \hat{U}=\begin{pmatrix}0 & q\\ r & \lambda+r-q\end{pmatrix}\tag{1.1}$$

命题1.1 特征值问题（1.1）与下述谱问题：

$$\varphi'=U\varphi,\qquad U=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{2}+\frac{q-r}{2} & q\\ r & \frac{\lambda}{2}+\frac{r-q}{2}\end{pmatrix}\tag{1.2}$$

等价. $\varphi'=\varphi_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$.

证明 作变换

$$\psi=\varphi\cdot\exp\left(\frac{\lambda}{2}x+\partial^{-1}\frac{r-q}{2}\right)\tag{1.3}$$

其中，∂^{-1} 表示偏微分算子∂ 的逆，$\partial=\partial/\partial x$，$\partial^{-1}$ 为：$\partial^{-1}=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x}\cdot-\int_{x}^{\infty}\cdot\right)$ 或$\partial^{-1}=\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{x}\cdot-\int_{x}^{0}\cdot\right)$. 下文涉及的$\partial$、$\partial^{-1}$ 均指上述形式，以后不再申明.

将（1.3）代入（1.1）中，注意到$\psi'=\left[\varphi'+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{r-q}{2}\right)\varphi\right]\exp\left(\frac{\lambda}{2}x+\partial^{-1}\frac{r-q}{2}\right)$，我们即知（1.2）的正确性.

本文1991年3月29日收到

反过来，谱问题（1.2）通过变换（1.3）的逆：

$$\varphi=\psi\cdot\exp\left(-\frac{\lambda}{2}x+\partial^{-1}\frac{q-r}{2}\right) \tag{1.4}$$

注意到$\varphi'=\left[\psi'+\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{q-r}{2}\right)\psi\right]\cdot\exp\left(-\frac{\lambda}{2}x+\partial^{-1}\frac{q-r}{2}\right)$，我们立知（1.2）通过变换（1.4）变为（1.1）.

因此，（1.1）与（1.2）等价.

根据命题（1.1）及文献〔2〕，可知由谱（1.2）产生的保谱发展方程族与特征值问题（1.1）产生的Levi方程族是完全一样的（文献〔2〕给出了相应于谱问题$\psi'=\widetilde{U}\psi$，$\widetilde{U}=\begin{pmatrix}\beta_1\lambda+u_1 & q\\ r & \beta_2\lambda+u_2\end{pmatrix}$，的非线性保谱发展方程族的一般形式：其中$\beta_1\neq\beta_2$，$\beta_1=\beta_2=\text{const}, u_1, u_2, q, r$均为势函数）.

鉴于上述事实，以下我们考虑保谱问题（1.2）.

在（1.2）中，λ是特征值；向量值函数$u(x)\triangleq(q(x),\ r(x))^T$称为（1.2）的位势依赖区间$\Omega$为$(-\infty,+\infty)$或$(0,T)$；$u(x)$在无穷远处衰减为零或以T为周期；$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^T$. 让$u\to u+\varepsilon\delta u$，定义$\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$为“$\cdot$”.

命题1.2 （1.2）之特征值λ的泛函梯度gradλ为：

$$\text{grad}\,\lambda\triangleq\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta q\\ \delta\lambda/\delta r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_2\\ -(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_1\end{pmatrix}\cdot\left(\int_\Omega\varphi_1\varphi_2\,dx\right)^{-1} \tag{1.5}$$

这里，φ_1，φ_2是对应于λ的特征函数：

$$\begin{cases}\varphi_1'=\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{q-r}{2}\right)\varphi_1+q\varphi_2\\ \varphi_2'=r\varphi_1+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{r-q}{2}\right)\varphi_2\end{cases} \tag{1.6}$$

此外，本文中的$(\cdot)'$均指：$(\cdot)'=\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$.

证明 在文〔3〕节Ⅱ里，我们选择：

$$m_{11}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{q-r}{2},\quad m_{12}=q,\quad m_{21}=r$$

则有：

$$\int_\Omega\left(-\dot{r}\varphi_1^2+2\left(-\frac{\dot{\lambda}}{2}+\frac{\dot{q}-\dot{r}}{2}\right)\varphi_1\varphi_2+\dot{q}\varphi_2^2\right)dx=0$$

即
$$\int_\Omega\left((\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2)\delta q-(\varphi_1^2+\varphi_1\varphi_2)\delta r\right)dx=\delta\lambda\cdot\int_\Omega\varphi_1\varphi_2\,dx$$

故　$\delta\lambda/\delta q=(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_2\cdot(\int_\Omega \varphi_1\varphi_2\,dx)^{-1}$，$\delta\lambda/\delta r=-(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_1\cdot$

$\cdot(\int_\Omega \varphi_1\varphi_2\,dx)^{-1}$.

命题1.3　若λ是（1.2）的一个特征值，那么以（1.5）定义的泛函梯度$\mathrm{grad}\,\lambda$满足线性方程：

$$K\,\mathrm{grad}\,\lambda=\lambda\cdot J\,\mathrm{grad}\,\lambda \tag{1.7}$$

此处，2×2矩阵算子K，J分别为：

$$K=\begin{pmatrix}-q\partial-\partial q & -\partial^2-r\partial+\partial q\\ \partial^2-\partial r+q\partial & r\partial+\partial r\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&\partial\\ \partial&0\end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

算子K，J称为谱（1.2）的Lenard算子对．K，J均反称，且J为辛算子．

证明　只须证明　$J^{-1}K\,\mathrm{grad}\,\lambda=\lambda\cdot\mathrm{grad}\,\lambda$　　（1.9）

而　$$J^{-1}K=\begin{pmatrix}\partial+\partial^{-1}q\partial-r & \partial^{-1}r\partial+r\\ -\partial^{-1}q\partial-q & -\partial-\partial^{-1}r\partial+q\end{pmatrix}$$

以下验证（1.9）式的正确性．

$$\begin{aligned}&(\partial+\partial^{-1}q\partial-r)(\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2)-(\partial^{-1}r\partial+r)(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1^2)\\ &=\partial(\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2)-r(\varphi_1+\varphi_2)^2+\lambda\varphi_1\varphi_2\\ &=\lambda\varphi_2^2+\lambda\varphi_1\varphi_2\\ &=\lambda(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_2\end{aligned}$$

同理可证得：$-(\partial^{-1}q\partial+q)(\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2)+(\partial^2+\partial^{-1}r\partial-q)(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1^2)=-\lambda(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_1$．

在上述运算过程中，用到下述二等式：

$$\partial(\varphi_1\varphi_2)=q\varphi_2^2+r\varphi_1^2$$
$$\partial^{-1}[q\partial(\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2)-r\partial(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1^2)]=\lambda\varphi_1\varphi_2$$

故（1.9）成立．

附注1　$J^{-1}K$就是〔2〕中的递推算子L．

附注2　（1.7）式对于Levi方程之Lax组非线性化、Liouville完全可积系以及Levi方程的对合解的研究，都起着极重要的作用．

2　Levi向量场的换位表示

谱问题（1.2）可变为：

$$L(u)\varphi=\frac{\lambda}{2}\varphi,\quad L(u)=\begin{pmatrix}-\partial+\frac{q-r}{2} & q\\ -r & \partial+\frac{q-r}{2}\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

其中，$u=(q,r)^{\mathrm{T}}$；$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^{\mathrm{T}}$．

让 $L: u1 \to L(u)$ 是位势到微分算子的映射.

定义2.1 映射 L 的微分定义为:

$$L_*\Big|_u(\zeta)=\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\zeta)\,. \tag{2.2}$$

引理2.2 对于Levi族，L 的微分映射为:

$$L_*\Big|_u(\zeta)=\begin{pmatrix}(\zeta_1-\zeta_2)/2 & \zeta_1\\ -\zeta_2 & (\zeta_1-\zeta_2)/2\end{pmatrix},\quad \zeta=(\zeta_1,\zeta_2)^T \tag{2.3}$$

且 $L_*|_u$ 是单同态. 因 $L_*|_u$ 不依赖于 u, 所以 $L_*|_u$ 简记为 L_*.

证明 将(2.1)中的 $L(u)$ 代入定义2.1中，由(2.2)式立得(2.3).

记 $L(u)=L_1+L_2\partial$, $L_1=\begin{pmatrix}\frac{q-r}{2} & q\\ -r & \frac{q-r}{2}\end{pmatrix}$; $L_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 令 $V=V_1+V_2\partial$, $V_1=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A\end{pmatrix}$; $V_2=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$, 其中, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $E(x)$ 为待定的函数. 下边我们做 V 与 $L(u)$ 的换位子(为书写方便, $L(u)$ 简写为 L):

$$\begin{aligned}[V,L]&=[V_1+V_2\partial,\ L_1+L_2\partial]\\ &=[V_1,L_1]+V_2L_1'-V_2L_1'+([V_1,L_2]-L_2V_2')\,L_2^{-1}(L-L_1)\end{aligned} \tag{2.4}$$

经计算, 我们有:

$$[V_1,L_1]+V_2L'-L_2V_1'=\begin{pmatrix}-Br-Cq+A'+E\cdot(q'-r')/2\,, & 2Aq+B'+Eq'\\ 2Ar-C'-Er'\,, & Cq+Br+A'+E\cdot(q'-r')/2\end{pmatrix}$$

$$([V_1,L_2]-L_2V_2')\,L_2^{-1}=\begin{pmatrix}-E' & 2B\\ 2C & -E'\end{pmatrix}$$

$$-([V_1,L_2]-L_2V_2')L_2^{-1}L_1=\begin{pmatrix}2Br+E'\cdot(q-r)/2\,, & qE'-B(q-r)\\ -(q-r)C-E'r\,, & -2Cq+E'\cdot(q-r)/2\end{pmatrix}$$

所以

$$(*)\quad [V,L]=\begin{pmatrix}Br-Cq+\left(A+E\cdot\frac{q-r}{2}\right)'\,, & 2Aq+(B+Eq)'-B(q-r)\\ 2Ar-(q-r)C-(C+Er)'\,, & -Cq+Br+\left(A+E\cdot\frac{q-r}{2}\right)'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}E' & -B\\ -C & \frac{1}{2}E'\end{pmatrix}\cdot(2L)$$

按曹策问教授的想法，我们希望

$$[V, L] = L_*(KG) - L_*(JG) \cdot (2L) \tag{2.5}$$

这里，K, J 是（1.2）的Lenard算子对：$G=(G^{(1)}(x), G^{(2)}(x))^T$；$G^{(1)}(x)$, $G^{(2)}(x)$ 是 Ω 上的任意光滑函数.

为此，我们选取

$$\begin{cases} A(x)=-\frac{1}{2}\partial\,(G^{(1)}+G^{(2)}) \\ B(x)=-\partial\, G^{(2)} \\ C(x)=\partial\, G^{(1)} \\ E(x)=G^{(2)}-G^{(1)} \end{cases} \tag{2.6}$$

因而，我们得到

定理2.3 设 $G^{(1)}(x)$, $G(x)^{(2)}$ 是 Ω 上的任意两个光滑函数，$G=(G^{(1)}, G^{(2)})^T$；让

$$V=V(G)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial\,(G^{(2)}+G^{(1)})+(G^{(2)}-G^{(1)})\,\partial & -\partial\, G^{(2)} \\ \partial\, G^{(1)} & \frac{1}{2}\partial\,(G^{(1)}+G^{(2)})+(G^{(2)}-G^{(1)})\,\partial \end{pmatrix}$$

那么：$[V, L] \triangleq VL-LV=L_*(KG)-L_*(JG)\cdot(2L)$ （2.7）

其中，K, J 为（1.2）的Lenard算子对，$L=L(u)$ 如（2.1）中所述.

证明

$$KG=\begin{pmatrix} -q\partial\, G^{(1)}-\partial\,(qG^{(1)})-\partial^2 G^{(2)}-r\partial\, G^{(2)}+\partial\,(qG^{(2)}) \\ \partial^2 G^{(1)}-\partial\,(rG^{(1)})+q\partial\, G^{(1)}+r\partial\, G^{(2)}+\partial\,(rG^{(2)}) \end{pmatrix},\quad JG=\begin{pmatrix} \partial\, G^{(2)} \\ \partial\, G^{(1)} \end{pmatrix}$$

将 A、B、C、E 的表达式（2.6）依次代到（*）式，进行详细地计算，整理后，不难发现（*）式右端的第一项就是 $L_*(KG)$，第二项就是 $-L_*(JG)\cdot(2L)$.

定义Lenard递推叙列 $\{G_j\}$：$G_{-1}=(0,1)^T$，$KG_j=JG_{j+1}$ $(j=-1, 0, 1, \cdots)$. 诸 G_j 的分量是 $q(x)$, $r(x)$ 及其导数的多项式，并且当常数项取为零时，是唯一的[4]. $X_m \triangleq JG_m$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$ 称为Levi向量场. 前几个计算结果为：

$$X_0=\begin{pmatrix} q' \\ r' \end{pmatrix},\quad G_0=\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$$

$$X_1=\begin{pmatrix} -q''-2(qr)'+2qq' \\ r''+2(qr)'-2rr' \end{pmatrix},\quad G_1=\begin{pmatrix} r'+2qr-q^2 \\ -q'-2qr+r^2 \end{pmatrix}$$

$$X_2=\begin{pmatrix} (q''+3q'r-3qq'+q^3+3qr^2-6q^2r)' \\ (r''+3r'q-3rr'+r^3+3rq^2-6r^2q)' \end{pmatrix},$$

$$G_2=\begin{pmatrix} r''+3r'q-3rr'+r^3+3rq^2-6r^2q \\ q''+3q'r-3qq'+q^3+3qr^2-6q^2r \end{pmatrix}.$$

$m+1$阶Levi方程由Levi向量场X_m产生：$u_t=X_m$ $(m=0,1,\cdots)$．特别，当$r=0$时向量场X_1产生Burgers方程：$q_t=-q''+2qq'$；当$q=r$时，向量场X_2产生mkdv方程：$q_t=(q''-2q^3)'$，即$q_t=q'''-6q^2q^1$．

定理2.4　假设$G_j=(G_j^{(1)},G_j^{(2)})^T$是Lenard递推叙列，让$V_j=V(G_j)$ $(j=-1,0,1,\cdots)$，则：

$$[W_m, L]=L_*(X_m)\quad(m=0,1,2,\cdots)\tag{2.8}$$

其中．$W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}(2L)^{m-j}$，$X_m$是Levi向量场．

证明　因$[WL^s,L]=[W,L]L^s$，由定理2.3，我们有（注意$KG_{j-1}=JG_j$）：

$$\begin{aligned}[W_m, L]&=\sum_{j=0}^{m}[V_{j-1},L](2L)^{m-j}\\&=\sum_{j=0}^{m}L_*(KG_{j-1})\cdot(2L)^{m-j}-L_*(JG_{j-1})\cdot(2L)^{m-j+1}\\&=L_*(JG_m)-L_*(JG_{-1})\cdot(2L)^{m+1}\\&=L_*(X_m)\end{aligned}$$

推论2.5　Levi方程$u_t=(q,r)_t^T=X_m$成立的充分必要条件是

$$L_t=[W_m, L]\quad(m=0,1,\cdots)\tag{2.9}$$

亦即．Levi方程族中的每一个方程都具有换位表示形式（2.9）．

证明　$L_t=\begin{pmatrix}(q_t-r_t)/2 & q_t\\ -r_t & (q_t-r_t)/2\end{pmatrix}=L_*(u_t)$，$u=(q,r)^T$．

根据定理2.4得：

$L_t-[W_m, L]=L_*(u_t)-L_*(X_m)=L_*(u_t-X_m)$

而L_*又为单射，故推论2.5正确．

推论2.6　$u_t=X_m$是$Ly=\lambda y$与$y_t=W_m y$的自然相容条件．

证明　$L_t y+Ly_t=\lambda_t y+\lambda y_t$，而$\lambda_t=0$，$y_t=W_m y$.

故　$L_t y=\lambda W_m y-LW_m y=W_m Ly-LW_m y=[W_m, L]y$．

由推论2.5即知．本推论成立．

推论2.7　位势$u(x)=(q(x),r(x))^T$满足定态Levi系统：

$$X_N+a_1X_{N-1}+\cdots+a_NX_0=0\tag{2.10}$$

的充要条件是

$$[W_N+a_1W_{N-1}+\cdots+a_NW_0,L]=0\tag{2.11}$$

其中，诸a_K $(K=1,\cdots,N)$为常数：X_K $(K=0,\cdots,N)$是Levi向量场：W_K $(K=0,1,\cdots N)$如定理2.4中所述．

证明　由定理2.4及L_*是同构，　故

$$[W_N + a_1 W_{N-1} + \cdots + a_N W_0, L] = [W_N + \sum_{k=1}^{N} a_k W_{N-k}, L] = [W_N, L] + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot [W_{N-k}, L] = L_*(X_N) + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot L_*(X_{N-k}) = L_*(X_N + \sum_{k=1}^{N} a_k X_{N-k})$$

又L_*为单射，从而本推论得证.

参考文献

1 Levi, D., Neugebauer, G. and Meinel. R., Phys Lett. 102A,1984: 1～6

2 Tu Guizhang, J. Math. Phys., 1989; 30: 330～338

3 曹策问. 中国科学A辑. 1989: 7: 701～707

4 Lax, P. D., SIAM Rev., 1976; 18: 351～375

Commutator Representation of Levi Hierarchy

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

Li Shuxia

Department of Chemistry, Liaoning University

ABSTRACT By the functional gradient method of eigenvalue problem, we find out the Lenard operator pairs of Levi vector field and is so commutator representation of Levi equations. The relation between potential and stationary Levi system is discussed at the end of the paper.

KEY WORDS Levi hierarchy, Lenard operator pairs, Commutator representation, Differential mapping L_*.