辽宁大学学报
自然科学版
第22卷 第3期 1995年

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.22 No.3 1995

一族可积发展方程的 Lax 表示*

乔志军
(数学系)

摘 要 本文利用孤子方程的换位表示方法，给出一族与谱问题

$$y_x=Uy, U=\begin{pmatrix}\lambda^2+u & \lambda v+\lambda^{-1}\\ \varepsilon(\lambda w+\lambda^{-1}) & -\lambda^2-u\end{pmatrix}, \varepsilon=\pm 1$$

相关联的非线性发展方程的 Lax 表示.

关键词 发展方程；换位表示. 可积发展方程. 孤子方程

孤子方程换位表示理论[1]的提出给可积系 Lax 算子代数[2]以及"非线性化[3]"的研究注入了新的活力. 近年来的研究成果十分可观[4-9]. 对谱参数线性[10]或非线性[11]的谱问题已有一定的方法来寻找其演化方程族的 Lax 表示. 本文打算从谱问题[12](显然关于谱参数 λ 是非线性的，且与文[11]不同，这是一个 2×2 的特征值问题)

$$y_x=Uy, U=\begin{pmatrix}\lambda^2+u & \lambda v+\lambda^{-1}\\ \varepsilon(\lambda w+\lambda^{-1}) & -\lambda^2-u\end{pmatrix}, \varepsilon=\pm 1 \tag{1}$$

入手，利用其谱梯度选定(1)的 Lenard 算子对，尔后考虑一个关键性的算子方程，通过求解该算子方程，依据换位表示理论[1]，最后给出与(1)相联系的一族非线性发展方程的 Lax 表示.

在(1)中，λ 是谱参数；$r\triangleq(u,v,w)^T=(u(x,t),v(x,t),w(x,t))^T$ 为位势向量函数，$u(x,t),v(x,t),w(x,t)$ 在无穷远处衰减为零或以 T 为周期；$\partial=\partial/\partial x$；$y=(y_1,y_2)^T$；$y_x=\partial y/\partial x$；自变量 x 在所论区间 $\Omega(\Omega=-\infty,+\infty)$ 或 $(0,T)$)内变化.

易算得谱参数 λ 关于位势向量函数 r 的谱梯度 $\nabla\lambda$：

$$\nabla\lambda\triangleq\frac{\delta\lambda}{\delta\lambda}=\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta u\\ \delta\lambda/\delta v\\ \delta\lambda/\delta w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y_2y_2\\ \lambda y_2^2\\ -\varepsilon\lambda y_1^2\end{pmatrix}. \tag{2}$$

现选定(1)的 Lenard 算子对

本文1994年6月3日收到
*)辽宁省教委科研课题暨辽宁大学青年科学基金资助课题.

$$K=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & \varepsilon\partial-2\varepsilon u\\ -1 & \varepsilon\partial+2\varepsilon u & 0\end{pmatrix},J=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\partial & v & -w\\ -v & 0 & 2\varepsilon\\ w & -2\varepsilon & 0\end{pmatrix}\tag{3}$$

显然,K、J 均反称.不难验证谱梯度$\nabla\lambda$满足

$$K\nabla\lambda=\lambda^2\cdot J\nabla\lambda\tag{4}$$

取 $G_0=(2\varepsilon,w,v)^T\in KerJ$,递推定义 Lenard 梯度序列$\{G_j\}$如下:

$$KG_j=JG_{j+1},j=0,1,2,\cdots.\tag{5}$$

则与(1)相应的非线性发展方程族由

$$r_t\triangleq(u,v,w)_t^T=X_j(u,v,w)\triangleq JG_{j-1},j=0,1,2,\cdots.\tag{6}$$

给出.其中第一个方程为:

$$u_t=v-w,v_t=2\varepsilon+\varepsilon v_x-2\varepsilon uv,w_t=-2\varepsilon+\varepsilon w_x+2\varepsilon uw.\tag{7}$$

引理 1　谱问题(1)与

$$Ly=\lambda^2y,L=\begin{pmatrix}\partial-u & -\lambda v-\lambda^{-1}\\ \varepsilon(\lambda w+\lambda^{-1}) & -\partial-u\end{pmatrix},\partial=\partial/\partial x\tag{8}$$

等价.

引理 2　以(8)中定义的微分算子 L 在 ζ 方向上的 Gateaux 导数为:

$$L_*(\zeta)\triangleq\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}L(r+\varepsilon\zeta)=\begin{pmatrix}-\zeta_1 & 0\\ 0 & -\zeta_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\zeta_2\\ \varepsilon\zeta_3 & 0\end{pmatrix}L^{1/2}\tag{9}$$

且 L_* 是 1－1 的.这里 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)^T$,$L^{\frac{1}{2}}$理解为以 λ 所代之结果(因为 $Ly=\lambda^2y$),以下雷同.

引理 3　设 $G=(G^{(1)},G^{(2)},G^{(3)})^T$;$G^{(1)},G^{(2)},G^{(3)}$均是任意的光滑函数.那么我们有

$$\begin{aligned}L_*(KG)L^{-\frac{1}{2}}-L_*(JG)L^{\frac{1}{2}}=&\begin{pmatrix}G^{(2)}-G^{(3)} & 0\\ 0 & G^{(2)}-G^{(3)}\end{pmatrix}L^{-\frac{1}{2}}\\ &+\begin{pmatrix}0 & -G^{(1)}+\varepsilon(2uG^{(3)}-G_x^{(3)})\\ -\varepsilon G^{(1)}+2uG^{(2)}+G_x^{(2)} & 0\end{pmatrix}L^0\\ +\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}G_x^{(1)}+vG^{(2)}-wG^{(3)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}G_x^{(1)}+vG^{(2)}-wG^{(3)}\end{pmatrix}&L^{1/2}+\begin{pmatrix}0 & -vG^{(1)}+2\varepsilon G^{(3)}\\ -\varepsilon wG^{(1)}+2G^{(2)} & 0\end{pmatrix}L\end{aligned}\tag{10}$$

此处 $L^0=1$

证明　由

$$KG=\begin{pmatrix}-G^{(2)}+G^{(3)}\\ G^{(1)}-\varepsilon(G_x^{(3)}-2uG^{(3)})\\ -G^{(1)}+\varepsilon(G_x^{(2)}-2uG^{(2)})\end{pmatrix},JG=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}G_x^{(1)}+vG^{(2)}-wG^{(3)}\\ -vG^{(1)}+2\varepsilon G^{(3)}\\ wG^{(1)}-2\varepsilon G^{(2)}\end{pmatrix}$$

及(9)式,经过计算便知(10)式成立.

记 $L=L_{-1}\lambda^{-1}+L_0+L_1\lambda+L_2\partial$，其中

$$L_{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix},L_0=\begin{pmatrix}-u & 0\\ 0 & -u\end{pmatrix},L_1=\begin{pmatrix}0 & -v\\ \varepsilon w & 0\end{pmatrix},L_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

于是算子 ∂ 与 L 有关系：

$$\partial=L_2^{-1}L-L_2^{-1}L_{-1}L^{-\frac{1}{2}}-L_2^{-1}L_0-L_2^{-1}L_1L^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

定理 1 对于任意给定的函数向量 $G=(G^{(1)},G^{(2)},G^{(3)})^T$，由 Lenard 算子对 K、J 生成的关于 $V=V(G)$ 的算子方程

$$[V,L]=L_*(KG)L^{-\frac{1}{2}}-L_*(JG)L^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

有算子解

$$V=V(G)=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon G^{(3)}\\ G^{(2)} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}G^{(1)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}G^{(1)}\end{pmatrix}L^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

其中，$[\cdot,\cdot]$代表 Lie 括号.

证明 令 $V=V_1+V_2L^{\frac{1}{2}}$，则从 L 的表达式及(11)式，我们易算得

$$\begin{aligned}[V,L]&\triangleq VL-LV\\
&=([V_1,L_{-1}]-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_{-1})L^{-\frac{1}{2}}+([V_1,L_0]-L_2V_{1x}\\
&\quad-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_0+[V_2,L_{-1}]-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_{-1})L^0\\
&\quad+([V_1,L_1]-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_1+[V_2,L_0]-L_2V_{2x}-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_0)L^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+([V_1,L_2]L_2^{-1}+[V_2,L_1]-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_1)L+[V_2,L_2]L_2^{-1}L^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

于是由引理 3 及上式，有

$$\begin{cases}[V_1,L_{-1}]-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_{-1}=\begin{pmatrix}G^{(2)}-G^{(3)} & 0\\ 0 & G^{(2)}-G^{(3)}\end{pmatrix}\\
[V_1,L_0]-L_2V_{1x}-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_0+[V_2,L_{-1}]-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_{-1}=\\
\qquad=\begin{pmatrix}0 & -G^{(1)}+2\varepsilon uG^{(3)}-G_x^{(3)}\\ -\varepsilon G^{(1)}+2uG^{(2)}+G_x^{(2)} & 0\end{pmatrix}\\
[V_1,L_1]-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_1+[V_2,L_0]-L_2V_{2x}-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_0=\\
\qquad=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}G_x^{(1)}+vG^{(2)}-wG^{(3)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}G_x^{(1)}+vG^{(2)}-wG^{(3)}\end{pmatrix}\\
[V_1,L_2]L_2^{-1}+[V_2,L_1]-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_1=\begin{pmatrix}0 & -vG^{(1)}+2\varepsilon G^{(3)}\\ -\varepsilon wG^{(1)}+2G^{(2)} & 0\end{pmatrix}\\
[V_2,L_2]L_2^{-1}=0\end{cases}$$

设 $V_1=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},V_2=\begin{pmatrix}E & P\\ Q & F\end{pmatrix}$，则首先由上述方程组之首式与末式解得

$$V_1=\begin{pmatrix}A & B\\ C & A\end{pmatrix},V_2=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}\quad 及\ C=\varepsilon B+G^{(2)}-G^{(3)};$$

其次由中间三个方程联立,解得

$$E=\frac{1}{2}G^{(1)},F=-\frac{1}{2}G^{(1)},B=\varepsilon G^{(3)},C=G^{(2)},A=0.$$

从而(13)成立.定理 1 证完.

定理 2　设 $G_j=(G_j^{(1)},G_j^{(2)},G_j^{(3)})^T(j=0,1,2,\cdots)$是由(5)式所定义的 Lenard 梯度递推叙列,则算子

$$W_m=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}0 & \varepsilon G_j^{(3)}\\ G_j^{(2)} & 0\end{pmatrix}L^{m+\frac{1}{2}-j}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}G_j^{(1)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}G_j^{(1)}\end{pmatrix}L^{m+1-j} \tag{14}$$

满足关系式

$$[W_m,L]=L_*(X_m),m=0,1,2,\cdots, \tag{15}$$

亦即:W_m 是谱问题(8)的 Lax 算子[2],当然还可进一步讨论其 Lax 算子代数以及非等谱方程族的构成.

证明　由定理 1,(5)及(6),得

$$\begin{aligned}[W_m,L]&=\sum_{j=0}^{m}[V(G_j),L]L^{m+\frac{1}{2}-j}\\&=\sum_{j=0}^{m}(L_*(KG_j)L^{-\frac{1}{2}}-L_*(JG_j)L^{\frac{1}{2}})L^{m+\frac{1}{2}-j}\\&=L_*(JG_{m+1})=L_*(X_m).\end{aligned}$$

推论 1　(1)的演化方程族 $r_t=X_m(r)$具有换位表示

$$L_t=[W_m,L],m=0,1,2,\cdots, \tag{16}$$

其中 W_m 如(14)式所示.

证明　由下式 $L_t-[W_m,L]=L_*(r_t)-L_*(X_m)=L_*(r_t-X_m)$ 及 L_* 的单性即知本推论成立.

推论 2　(1)的演化方程族　$r_t=X_m(r)$　具有 Lax 表示

$$\begin{cases}Ly=\lambda^2 y\\ y_t=\sum_{j=0}^{m}\left[\begin{pmatrix}0 & \varepsilon G_j^{(3)}\\ G_j^{(2)} & 0\end{pmatrix}L^{m+\frac{1}{2}-j}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}G_j^{(1)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}G_j^{(1)}\end{pmatrix}L^{m+1-j}\right]y\end{cases}$$

其中,$G_j=(G_j^{(1)},G_j^{(2)},G_j^{(3)})^T$ 是 Lenard 梯度递推叙列.

推论 3　设 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 为常数,那么 $r=(u,v,w)^T$ 是定态方程　$X_N+a_1X_{N-1}+\cdots+a_NX_0=0$　的解之充要条件是$[W_N+a_1W_{N-1}+\cdots+a_NW_0,L]=0$.

参考文献

1 曹策问,科学通报,1989;34;10:723
2 Ma Wenxiu, J. Phys. A: Math. Gen. 1992;25:5329
3 Cao Cewen, Sci. China A, 1990;33:528
4 许太喜,顾祝全,科学通报,1989(34);18:1437
5 乔志军,科学通报,1990(35);17:1353
6 马文秀,科学通报,1990(35);24:1843
7 乔志军,应用数学,1991(4);4:64
8 乔志军,科学通报,1992(37);8:763
9 乔志军,数学年刊,1993(14A);1:31
10 Ma Wenxiu, J. Math. Phys. 1992(33);2464
11 马文秀,复旦学报,1991(30);3:304
12 Geng Xianguo, Phys. Lett. A, 1990(147);491

Lax Representstions for a Hierarchy of Integrable Evolution Equations

Qiao Zhijun

Department of Maths, Liaoning University

ABSTRACT In this paper, by the method of commutator representation for the soliton equation, the Lax representations are given for a hierarchy of nonlinear evolution equations associated with the spectral problem $y_x = Uy$, $U = \begin{pmatrix} \lambda^2 + u & \lambda v + \lambda^{-1} \\ \varepsilon(\lambda w + \lambda^{-1}) & -\lambda^2 - u \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$.

KEY WORDS Evolution equation, Commutator representation.