辽宁大学学报
自然科学版
第21卷 第3期 1994年

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.21 No.3 1994

29—32

# 一类特征值问题的迹公式

李梦如 乔志军
（郑州大学） （辽宁大学）

O175.9

**摘 要** 本文利用文献〔2〕的结果，得到了一类特征值问题$Y_x = MY$的迹公式，其中$M$为含特征参数的$2\times2$矩阵.

**关键词** 特征值；迹公式，微分方程

在孤子理论中，Lax方程组起着重要作用，其空间部分是一个常微分方程的特征值问题. 研究这种特征值问题的迹公式具有重要意义，文〔1〕中有较详细的阐述. 最近文〔1〕作者又发现了迹公式在可积系统中的一个重要应用，即由它获得一种位势的约束，进而可以构造出新的Liouville完全可积系统.

文〔2〕研究了下述Jaulent—Miodik特征值问题的迹公式，

$$y'' + \{\lambda^2 - [\lambda v(x) + u(x)]\} y = 0,\quad y \in L_2(R)\ . \tag{1}$$

例如有

$$2i\sum_{1}^{N}(\lambda_j - \lambda_j^*) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{v^2}{4} + u\right)dx\ , \tag{2}$$

$$2i\sum_{1}^{N}(\lambda_j^2 - \lambda_j^{*2}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{v^3}{4} + uv\right)dx\ . \tag{3}$$

目前研究的Lax组中的特征值问题$Y_x = MY$中，$M$大都是$2\times2$矩阵，有相当一部分可转化为（1），因而可以利用（1）的迹公式直接得到它们的迹公式，这比从反散射问题去求迹公式要容易得多. 下面讨论一些常见的特征值问题的迹公式.

## 1

$$Y_x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\lambda - u) & -v \\ 1 & -\frac{1}{2}(\lambda - u) \end{pmatrix} Y,\qquad Y \in L_2(R) \tag{1.1}$$

这是c—Kdv方程Lax对的空间部分，其中$u$、$v$及其导数当$|x|\to\infty$时速降为零. 考虑：

$$y_{xx} = \frac{1}{4}\lambda^2 y - \frac{1}{2}u\lambda y + \left(\frac{1}{4}u^2 - v - \frac{1}{2}u_x\right)y,\qquad y \in L_2(R)\ . \tag{1.2}$$

**引理** （1.1）与（1.2）的特征值重合.

本文1993年10月4日收到

**证明** 设$\lambda_0$为（1.1）的特征值，由$u$, $v$的光滑性知$y_2(x,\lambda_0)$有二阶导数. 将$Y(x,\lambda_0)$满足的第二个式子求导，然后将第一，二式代入，整理后可得$y_2(x,\lambda_0)$满足（1.2），即$\lambda_0$也是（1.2）的特征值. 反之，设$\lambda_0$为（1.2）的特征值，由（1.2）可知$y_{xx}(x,\lambda_0)$和$y(x,\lambda_0)$属于$L_2(R)$，从而$y_x(x,\lambda_0)\in L_2(R)$. 记$y(x,\lambda_0)=y_2(x,\lambda_0)$，令$y_1(x,\lambda_0)=y_{2x}(x,\lambda_0)-\frac{1}{2}(\lambda_0-u)y_2(x,\lambda_0)$，则$y_1(x,\lambda_0)$满足（1.1）的第二式，且属于$L_2(R)$. 将上式两端求导，注意$y_2(x,\lambda_0)$满足（1.2），化简后即知$y_1(x,\lambda_0)$，$y_2(x,\lambda_0)$又满足（1.1）的第一式，故$\lambda_0$也是（1.1）的特征值.

**定理1** 特征值问题（1.1）在左半平面有有限个特征值$\zeta_j$，$j=1,2,\cdots,N$，且有以下迹公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v\,dx=-2i\sum_1^N(\zeta_j-\zeta_j^*),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} uv\,dx=-2\sum_1^N(\zeta_j^2-\zeta_j^{*2}).$$

**证明** 令$\zeta=\frac{1}{2}i\lambda$，$\widetilde{v}=iu$，$\widetilde{u}=\frac{1}{4}u^2-v-\frac{1}{2}u_x$，则（1.2）的方程成为

$$y_{xx}+\{\zeta^2-(\zeta\widetilde{v}+\widetilde{u})\}y=0.$$

由（2），（3）立即得到所证.

以下2～3情形与1类似，只列出结果.

**2**

$$Y_x=\begin{pmatrix}\lambda-\frac{1}{4}u & -\frac{1}{4}(w+u_x)\\ 1 & -(\lambda-\frac{1}{4}u)\end{pmatrix}Y,\quad Y\in L_2(R). \tag{2.1}$$

这是Boussinesq—Burgers方程的Lax对的空间部分，$u$, $w$及其导数，当$|x|\to\infty$时速降为零. 考虑

$$y_{xx}+(i\cdot\lambda)^2y-i\lambda\cdot\frac{iu}{2}y-\left(\frac{1}{16}u^2-\frac{1}{4}w\right)y=0,\quad y\in L_2(R). \tag{2.2}$$

（2.1）与（2.2）的特征值重合. 比较（2.2）和（1）可得以下定理.

**定理2** 特征值问题（2.1）在左半平面有有限个特征值$\zeta_j$，$j=1,2,\cdots,N$，且有以下迹公式：

$$\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} w\,dx=\sum_1^N(\zeta_n+\zeta_n^*),$$

$$\frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty} uw\,dx=\sum_{1}^{N}(\zeta_n^2-\zeta_n^{*2}).$$

**3**

$$y_x=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\lambda+u+v) & -\lambda v \\ 1 & \frac{1}{2}(\lambda+u+v) \end{pmatrix} y,\quad y\in L_2(R). \tag{3.1}$$

这是Levi方程的Lax对的空间部分．$u$, $v$及其导数，当$|x|\to\infty$时速降为零．考虑

$$y_{xx}+\left(\frac{i\lambda}{2}\right)^2 y-\frac{i\lambda}{2}\left((u+v)i\right)y-\left(\frac{1}{4}(u+v)^2+\frac{1}{2}(u+v)_x\right)y=0;$$

$$y\in L_2(R) \tag{3.2}$$

（3.1）与（3.2）的特征值重合．比较（3.2）和（1）可得以下定理．

**定理3** 特征值问题（3.1）在左半平面有有限个特征值$\zeta_j$，$j=1,2,\cdots,N$，并有以下迹公式：

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} uv\,dx=\sum_{1}^{N}(\zeta_n+\zeta_n^*).$$

**4**

$$y_x=\begin{pmatrix} -\lambda+\frac{1}{2}u & v \\ v & \lambda-\frac{1}{2}u \end{pmatrix} y,\quad y\in L_2(R) \tag{4.1}$$

这是TD方程的Lax对的空间部分，设$u$及其导数当$|x|\to\infty$时速降为零，$v\neq 0$且当$|x|\to\infty$时渐近于$x^{-\alpha}$，$\alpha>2$．由（4.1）消去$y_1$，得

$$y_{2\,xx}=\lambda^2 y_2-\lambda\left(u+\frac{v_x}{v}\right)y_2+\left(v^2-\frac{1}{2}u_x+\frac{1}{4}u^2+\frac{uv_x}{2v}\right)y_2+\frac{v_x}{v}y_{2\,x} \tag{4.2}$$

而令$zv^{\frac{1}{2}}=y_2$，则上式可化为：

$$z_{xx}=\lambda^2 z-\lambda\left(u+\frac{v_x}{v}\right)z+\left(v^2-\frac{1}{2}u_x+\frac{1}{4}u^2+\frac{uv_x}{2v}+\frac{3}{4}\frac{v_x^2}{v^2}-\frac{1}{2}\frac{v_{xx}}{v}\right)z \tag{4.3}$$

在上面对$v$作的假设下，若$y_2$是（4.1）的对应于特征值$\lambda_0$的特征函数，由反散射理论，当$|x|\to\infty$时$y_2$按指数衰减为零，故$z$也属于$L_2(R)$，即$\lambda_0$也是（4.3）的特征值．反之，若$z\in L_2(R)$，则$y_2\in L_2(R)$．因此（4.2）与（4.3）的特征值重合．仿1中证明，可知（4.1）又与（4.2）的特征值重合．因而可得如下定理．

**定理4** 特征值问题（4.1）在左半平面有有限个特征值$\zeta_j$，$j=1,2,\cdots,N$，且有迹公式：

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2\,dx=\sum_{1}^{N}(\zeta_n+\zeta_n^*),$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} uv^2\,dx=\sum_{1}^{N}(\zeta_n^2-\zeta_n^{*2}) .$$

以下5～6的情形与4类似，只列出结果.

5 $$y_x=\begin{pmatrix} -\lambda+v & u+v \\ u-v & \lambda-v \end{pmatrix} y,\quad y\in L_2(R),\tag{5.1}$$

这是李翊神方程的Lax对的空间部分. 设$u$, $v$及其导数速降为零，$u+v\neq 0$，当$|x|\to\infty$时，$u+v$渐近于$x^{-\alpha}$，$\alpha>2$.

**定理5** 特征值问题（5.1）在左半平面有有限个特征值$\zeta_j$，$j=1, 2,\cdots, N$，且有迹公式：

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(u^2-v^2)dx=\sum_{n=1}^{N}(\zeta_n+\zeta_n^*)$$

6 $$y_x=\begin{pmatrix} \lambda+v & u \\ \lambda u & -(\lambda+v) \end{pmatrix} y,\quad y\in L_2(R) .\tag{6.1}$$

这是胡星标方程的Lax对的空间部分. 假设$u$及其导数当$|x|\to\infty$时速降为零，$u\neq 0$，当$|x|\to\infty$时$u$渐近于$x^{-\alpha}$，$\alpha>2$.

**定理6** 特征值问题（6.1）在左半平面有有限个特征值$\zeta_j$，$j=1, 2,\cdots, N$，且有迹公式：

$$\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}(u^4+4vu^2)dx=\sum_{1}^{N}(\zeta_n+\zeta_n^*) .$$

## 参 考 文 献


1 曹策问. 微分算子的迹，数学进展，1989；18（2）：4

2 Cao Cewen, Zhuang Dawei, Some trace formulas for the Schrödinger equation with energy—dependent potential, Acta mathematica Scientia, 1985；5（2）：5


# Some Trace Formulas of the Same Class Eigevalue Problems


**Li Mengru**

*Departwent of Mathematics, Zhengzhou University*

**Qiao Zhijun**

*Department of Mathematics, Liaoning University*



**ABSTRACT** Some trace formulas of the Same class eigenvalue problems $y_x=MY$ are obtained, where M is $2\times 2$ matrix which contain spectrum pavrameter.



**KEY WORDS** Eigenvalue, Trale formula.