辽宁大学学报
自然科学版
第20卷 第3期 1993年

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.20 № 3 1993

Dirac特征值问题的特征展开定理的一个证明

李梦如　　乔志军
（郑州大学）　（辽宁大学）

摘　要　本文用留数方法讨论了有限区间上Dirac特征值问题的一些基本问题，证明了函数向量按特征函数向量展开为广义富氏级数的定理.

关键词　Dirac特征值问题；留数方法；特征展开.

Dirac方程组是量子力学的基本方程之一，研究它的特征值问题具有重要意义. 文献〔1〕对它的一种形式在有限区间上的特征函数展开定理给出了两种证明，一种用的是差分方程的方法，一种用的是积分方程的方法. 本文对Dirac另一种形式在有限区间上的特征函数展开定理给出一个证明，用的是留数方法. 这种方法的优点在于便于进一步讨论非自伴情形下的特征函数展开定理和获得特征值的迹公式，我们将另文讨论此二问题.

下述方程组称为Dirac方程组：

$$y_2' + p(x)y_1 + q(x)y_2 = \lambda y_1,\quad -y_1' + q(x)y_1 - p(x)y_2 = \lambda y_2 \qquad (1)$$

本文始终假设 $p(x)$、$q(x)\in C^1[0,\pi]$，并研究（1）在以下自伴条件下的特征值问题

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0,\quad y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0, \qquad (2)$$

其中 α，β 为常数. 为简便计，引入以下记号：

$$L \equiv \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix},\quad D \equiv \frac{d}{dx},\quad Y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$l_1 Y \equiv y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha,\quad l_2 Y \equiv y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta,$$

问题（1）+（2）可简写为

$$(E):\ LY = \lambda Y,\quad l_1 Y = 0,\quad l_2 Y = 0.$$

再记 $F = \{ f = (f_1(x), f_2(x))^T \mid f_1(x), f_2(x) \in C^1[0,\pi],\ l_1 f = 0,\ l_2 f = 0 \}$，本文证明 (E) 有可列个特征值，F 中的元素都可按 (E) 的特征函数展开为广义富氏级数.

本文1992年10月19日收到

1 Cauchy问题解的估计

考虑Cauchy问题：

$$(C_0):\ L\varphi=\lambda\varphi,\quad \varphi_1(0)=\cos\alpha,\quad \varphi_2(0)=-\sin\alpha; \tag{1.1}$$

$$(C_\pi):\ L\chi=\lambda\chi,\quad \chi_1(\pi)=\cos\beta,\quad \chi_2(\pi)=-\sin\beta, \tag{1.2}$$

其中 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^T$，$\chi=(\chi_1,\chi_2)^T$.

命题1.1 (C_0)和(C_π)的解φ和χ的分量为λ的整函数.

证明 以φ为例，关于χ的证明可类似进行.

$\varphi(x,\lambda)$由下面与（1.1）等价的积分方程确定：

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos\alpha+\int_0^x\{q(t)\varphi_1(t,\lambda)-[p(t)+\lambda]\varphi_2(t,\lambda)\}dt,$$

$$\varphi_2(x,\lambda)=-\sin\alpha+\int_0^x\{q(t)\varphi_2(t,\lambda)+[p(t)-\lambda]\varphi_1(t,\lambda)\}dt.$$

用通常的迭代法容易证明它的解存在、唯一，由迭代序列的一致收敛性知 φ_1、φ_2为λ的整函数.

命题1.2 当$|\lambda|\to\infty$时，φ和χ分别有以下渐近估计：

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos(\lambda x-\alpha)+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\tau|x}\right)$$

$$\varphi_2(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha)+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\tau|x}\right), \tag{1.3}$$

$$\chi_1(x,\lambda)=\cos[\lambda(\pi-x)+\beta]+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\tau|(\pi-x)}\right), \tag{1.4}$$

$$\chi_2(x,\lambda)=-\sin[\lambda(\pi-x)+\beta]+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\tau|(\pi-x)}\right),$$

其中 $\lambda=\sigma+i\tau$.

证明 以φ为例.

（1.1）与下面积分方程等价：

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos(\lambda x-\alpha)+\int_0^x\{[q(t)\varphi_1(t,\lambda)-p(t)\varphi_2(t,\lambda)]\cos\lambda(x-t)$$
$$+[q(t)\varphi_2(t,\lambda)+p(t)\varphi_1(t,\lambda)]\sin\lambda(x-t)\}dt, \tag{1.5}$$

$$\varphi_2(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha)+\int_0^x\{[q(t)\varphi_1(t,\lambda)-p(t)\varphi_2(t,\lambda)]\sin\lambda(x-t)$$
$$-[q(t)\varphi_2(t,\lambda)+p(t)\varphi_1(t,\lambda)]\cos\lambda(x-t)\}dt \tag{1.6}$$

令 $\varphi_1=\psi_1e^{-i\lambda x}$，$\varphi_2=\psi_2e^{-i\lambda x}$，则上述方程化为：

$$\psi_1=\frac{1}{2}[e^{i(2\lambda x-\alpha)}+e^{i\alpha}]+\frac{1}{2}\int_0^x(q+ip)(\psi_1+i\psi_2)dt+\frac{1}{2}\int_0^x(q-ip)$$
$$(\psi_1-i\psi_2)e^{2i\lambda(x-t)}dt,$$

$$\psi_2=\frac{-i}{2}(e^{i(2\lambda x-\alpha)}-e^{i\alpha})+\frac{i}{2}\int_0^x(q+ip)(\psi_1+i\psi_2)dt+(-\frac{i}{2})\int_0^x(q-ip)$$
$$(\psi_1-i\psi_2)e^{2i\lambda(x-t)}dt.$$

再令 $\overline{\psi}_1=\psi_1-i\psi_2$，$\overline{\psi}_2=\psi_1+i\psi_2$，则有

$$\overline{\psi}_1=e^{i\alpha}+\int_0^x(q+ip)\overline{\psi}_2\,dt$$
$$\overline{\psi}_2=e^{i(2\lambda x-\alpha)}+\int_0^x(q-ip)\overline{\psi}_1\,e^{2i\lambda(x-t)}dt$$

先设 $\lambda=\sigma+i\tau$、$\tau\geqslant0$．则 $|e^{i2\lambda x}|\leqslant|e^{-2\tau x}|\leqslant1$，故

$$|\overline{\psi}_1|\leqslant1+\int_0^x M|\overline{\psi}_2|dt,$$
$$|\overline{\psi}_2|\leqslant1+\int_0^x M|\overline{\psi}_1|dt.$$

这里，$M=\max|q+ip|$．

从而 $|\overline{\psi}_1|+|\overline{\psi}_2|\leqslant2+M\int_0^x(|\overline{\psi}_1|+|\overline{\psi}_2|)dt$．由Bellman引理[2]．$|\overline{\psi}_1|+|\overline{\psi}_2|$有界，$|\overline{\psi}_1|$、$|\overline{\psi}_2|$也都有界．由此 $\varphi_1=0(e^{\tau x})$，$\varphi_2=0(e^{\tau x})$．

对（1.5）、（1.6）进行分部积分便得所要证明的（1.3）．对于$\tau<0$，φ 的共轭 φ^*必满足

$$\begin{cases}\varphi_2^{*\prime}+p\,\varphi_1^*+q\,\varphi_2^*=\lambda^*\,\varphi_1^*, & \varphi_1^*(0)=\cos\alpha,\\ -\varphi_1^{*\prime}+q\,\varphi_1^*-p\,\varphi_2^*=\lambda^*\,\varphi_2^*, & \varphi_2^*(0)=-\sin\alpha.\end{cases}$$

此时 $\lambda^*=\sigma+i(-\tau)$，$-\tau>0$．对 φ_1^*有

$$\varphi_1^*=\cos(\lambda^*x-\alpha)+0(\frac{1}{|\lambda|}e^{-\tau x})$$

从而

$$\varphi_1=\cos(\lambda x-\alpha)+0(\frac{1}{|\lambda|}e^{-\tau x}).$$

总之无论τ如何一定有

$$\varphi_1=\cos(\lambda x-\alpha)+0(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\tau|x}).$$

其它三式证明类似．

命题1.3 记φ与χ的Wronski行列式$W(\varphi,\chi)=\varphi_1\chi_2-\varphi_2\chi_1\equiv\omega(\lambda)$，$\lambda$是$(E)$的特征值的充要条件是$\lambda$为$\omega(\lambda)$的零点．

证明 由于L的第二项矩阵的迹为零，故$W(\varphi,\chi)$与x无关，只与λ无关，可记为$\omega(\lambda)$．若λ_0是$\omega(\lambda)$的零点．则$\varphi(x,\lambda_0)$与$\chi(x,\lambda_0)$线性相关，因而

$l_1\varphi(x,\lambda_0)=l_2\varphi(x,\lambda_0)=0$，$\varphi(x,\lambda_0)$与$\chi(x,\lambda_0)$都是$\lambda_0$对应的特征函数，$\lambda_0$是特征值.

反之，设λ_0是(E)的特征值，$\psi(x,\lambda_0)$为相应的特征函数．由于$l_1\varphi(x,\lambda_0)=0$，$l_1\psi(x,\lambda_0)=0$．所以$W(\varphi(0,\lambda_0),\psi(0,\lambda_0))=0$，从而$W(\varphi(x,\lambda_0),\psi(x,\lambda_0))=0$，即$\varphi(x,\lambda_0)$与$\psi(x,\lambda_0)$线性相关．同样由$l_2\psi(x,\lambda_0)=0$，$l_2\chi(x,\lambda_0)=0$可知$\psi(x,\lambda_0)$与$\chi(x,\lambda_0)$线性相关，因而$\varphi(x,\lambda_0)$与$\chi(x,\lambda_0)$线性相关，$\omega(\lambda_0)=0$.

命题1.4 当 $|\lambda|\to\infty$时，$\omega(\lambda)$有以下渐近估计：

$$\omega(\lambda)=-\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)+0\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\tau|\pi}\right). \tag{1.7}$$

证明 将(1.3)与(1.4)两式代入$\omega(\lambda)$的定义式即得所证.

2 特征值与特征函数的性质

引理2.1 设 $f=(f_1,f_2)^T$，$g=(g_1,g_2)^T$，$f,g\in C^1$，
则

$$\int_0^\pi g^T Lf\,dx=\int_0^\pi f^T Lg\,dx+W(f,g)\Big|_0^\pi \tag{2.1}$$

证明 直接计算即可验证.

引理2.2 设$\varphi(x,\lambda)$和$\varphi(x,\lambda')$分别是(C_0)对应于λ和λ'的解，则

$$(\lambda-\lambda')\int_0^\pi \varphi^T(x,\lambda)\varphi(x,\lambda')dx=\frac{-1}{\cos\beta}\begin{vmatrix}\varphi_1(\pi,\lambda) & \varphi_1(\pi,\lambda')\\ \omega(\lambda) & \omega(\lambda')\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-1}{\sin\beta}\begin{vmatrix}\omega(\lambda) & \omega(\lambda')\\ \varphi_2(\pi,\lambda) & \varphi_2(\pi,\chi)\end{vmatrix} \tag{2.2}$$

证明 在(2.1)中 令 $f=\varphi(x,\lambda)$，$g=\varphi(x,\lambda')$，注意到$W(\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda))|_{x=0}=0$，$L\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda)$，$L\varphi(x,\lambda')=\lambda'\varphi(x,\lambda')$，不妨设$\cos\beta\neq0$（如果$\cos\beta=0$，则$\sin\beta\neq0$，可证(2.2)的第二个等式成立），

$$(\lambda-\lambda')\int_0^\pi \varphi^T(x,\lambda)\varphi(x,\lambda')dx=\begin{vmatrix}\varphi_1(\pi,\lambda) & \varphi_1(\pi,\lambda')\\ \varphi_2(\pi,\lambda) & \varphi_2(\pi,\lambda')\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\cos\beta}\begin{vmatrix}\varphi_1(\pi,\lambda) & \varphi_1(\pi,\lambda')\\ \varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta+\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta & \varphi_2(\pi,\lambda')\sin\beta+\varphi_2(\pi,\lambda')\cos\beta\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\cos\beta}\begin{vmatrix}\varphi_1(\pi,\lambda)\\ -\varphi_1(\pi,\lambda)\chi_2(\pi,\lambda)+\varphi_2(\pi,\lambda)\chi_1(\pi,\lambda)\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \varphi_1(\pi,\lambda') \\ \cdots & -\varphi_1(\pi,\lambda')\chi_2(\pi,\lambda')+\varphi_2(\pi,\lambda')\chi_1(\pi,\lambda') \end{vmatrix} = \frac{-1}{\cos\beta}\begin{vmatrix} \varphi_1(\pi,\lambda) & \varphi_1(\pi,\lambda') \\ \omega(\lambda) & \omega(\lambda') \end{vmatrix}$$

后一等式可类似进行证明.

命题2.1 (E)只有实特征值. 相应于不同特征值的特征函数彼此正交，即：若λ_i与λ_j为不同特征值，$\psi(x,\lambda_i)$和$\psi(x,\lambda_j)$为相应的特征函数，

则 $\int_0^\pi \psi^T(x,\lambda_i)\,\psi(x,\lambda_j)\,dx=0$.

证明 L 可视为定义域是F的算子，由引理2.1，L 是对称的，即：若定义内积：

$(f,g)=\int_0^\pi f^T g\,dx$，

则 $(Lf,g)=(f,Lg)$.

由泛函知识知L的特征值必为实数，且对应于不同特征值的特征函数正交.

引理2.3 设$\lambda=\sigma+i\tau$，$R_n=n+\frac{1}{2}+\gamma$，$n\in Z$，$\gamma=(\alpha-\beta)/\pi$，则

$e^{|\tau|\pi}/|\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)|<2$，当 $\sigma=R_n$，

$e^{|\tau|\pi}/|\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)|\leqslant 2/(1-e^{-\pi})$，当 $|\tau|\geqslant\frac{1}{2}$.

证明 $|\sin(x+iy)|^2=\sin^2x+\mathrm{sh}^2y$，当$\sigma=R_n$时，$|\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)|^2=1+\mathrm{sh}^2(\tau\pi)=\mathrm{ch}^2(\tau\pi)$，所以

$$e^{|\tau|\pi}/|\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)|=e^{|\tau|\pi}/\mathrm{ch}(\tau\pi)<2.$$

当$|\tau|\geqslant\frac{1}{2}$时 $|\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)|^2=\sin^2(\sigma\pi+\beta-\alpha)+\mathrm{sh}^2\tau\pi\geqslant\mathrm{sh}^2(\tau\pi)$，

$$e^{|\tau|\pi}/|\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)|\leqslant\frac{e^{|\tau|\pi}}{|\mathrm{sh}(\tau\pi)|}=\frac{2}{1-e^{-2|\tau|\pi}}\leqslant\frac{2}{1-e^{-\pi}}.$$

命题2.2 (E) 有可列个离散的特征值.

证明 记$\Omega(\lambda)=-\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)$，由（1.7）对大$|\lambda|$有

$$\frac{\omega(\lambda)}{\Omega(\lambda)}=1+0\left(\frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{e^{|\tau|\pi}}{|\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)|}\right).$$

记 l_n为一矩形，其四个顶点为：$R_n(1\pm i)$，$R_{-n}(1\pm i)$，$n\in Z^+$. 由引理2.3在l_n上

$$\omega(\lambda)/\Omega(\lambda)=1+0\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2.3)$$

由复变函数中的Rouche定理，在l_n内$\omega(\lambda)$与$\Omega(\lambda)$有相同个数的零点．如果$\omega(\lambda)$仅有单重零点，则$\omega(\lambda)$在l_n内有$2n+1$个零点，让$n\to\infty$可知$\omega(\lambda)$有可列个零点．又因$\omega(\lambda)$为整函数，不恒等于零，故$\omega(\lambda)$的零点没有有限极限点（否则由解析函数唯一性定理$\omega(x)\equiv 0$）．下面证明$\omega(\lambda)$仅有单重零点．事实上，由引理2.2

$$\int_0^\pi \varphi^T(x,\lambda)\varphi(x,\lambda')\,dx=\frac{1}{\cos\beta}\begin{vmatrix}\varphi_1(\pi,\lambda) & \dfrac{\varphi_1(\pi,\lambda')-\varphi_1(\pi,\lambda)}{\lambda'-\lambda}\\ \omega(\lambda) & \dfrac{\omega(\lambda')-\omega(\lambda)}{\lambda'-\lambda}\end{vmatrix}$$

令$\lambda'\to\lambda$得

$$\int_0^\pi \varphi^T(x,\lambda)\varphi(x,\lambda')\,dx=\frac{1}{\cos\beta}\begin{vmatrix}\varphi_1(\pi,\lambda) & \varphi'_{1\lambda}(\pi,\lambda)\\ \omega(\lambda) & \omega'(\lambda)\end{vmatrix} \tag{2.4}$$

此处$\varphi'_{1\lambda}(\pi,\lambda)=\dfrac{\partial\varphi_1(\pi,\lambda)}{\partial\lambda}$，$\omega'(\lambda)=\dfrac{d\omega(\lambda)}{d\lambda}$．若$\lambda_0$是$\omega(\lambda)$的$k$重零点，$k\geqslant 2$，则$\omega(\lambda_0)=\omega'(\lambda_0)=0$，上式左端大于零，右端等于零，矛盾．综上所述．即知命题成立．

命题2.3 设λ_n是(E)的特征值，则存在K_n，使

$$\chi(x,\lambda_n)=K_n\varphi(x,\lambda_n),$$

$$K_n^{-1}=\omega'(\lambda_n)^{-1}\int_0^\pi \varphi^T(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\,dx \tag{2.5}$$

证明 λ_n是特征值，故$\omega(\lambda_n)=0$，$\varphi(x,\lambda_n)$与$\chi(x,\lambda_n)$线性相关，因而存在K_n，使

$$\chi(x,\lambda_n)=K_n\varphi(x,\lambda_n).$$

将$\lambda=\lambda_n$代入（2.4）中，注意

$$\varphi_1(\pi,\lambda_n)=K_n^{-1}\chi_1(\pi,\lambda_n)=K_n^{-1}\cos\beta \tag{2.6}$$

即得（2.5）．

3 特征展开定理

定义(E)的Green矩阵如下：

$$G(x,y,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}\varphi_1(y,\lambda)\chi_1(x,\lambda) & \varphi_2(y,\lambda)\chi_1(x,\lambda)\\ \varphi_1(y,\lambda)\chi_2(x,\lambda) & \varphi_2(y,\lambda)\chi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}, & y<x,\\[2ex] \dfrac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\chi_1(y,\lambda) & \varphi_1(x,\lambda)\chi_2(y,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\chi_1(y,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda)\chi_2(y,\lambda)\end{pmatrix}, & y>x.\end{cases} \tag{3.1}$$

定理3.1 设λ不是(E)的特征值，则对任一$f\in C[0,\pi]$，问题

$$\begin{cases} y_2'+py_1+qy_2-\lambda y_1=-f_1, & -y_1'+qy_1-py_2-\lambda y_1=f_2, \\ l_1 y=0, \; l_2 y=0 \end{cases} \tag{3.2}$$

在 F 中有唯一解

$$\Phi(x,\lambda,f)=\int_0^\pi G(x,y,\lambda)f(y)dy \tag{3.3}$$

证明 可直接验证 Φ 满足（3.2）．事实上，

$$\Phi(x,\lambda,f)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^x \begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)(\varphi^T f)(y)\\ \chi_2(x,\lambda)(\varphi^T f)(y)\end{pmatrix}dy+\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi \begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)(\chi^T f)(y)\\ \varphi_2(x,\lambda)(\chi^T f)(y)\end{pmatrix}dy$$

记 $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$，$l_1\Phi=\Phi_1(0)\sin\alpha+\Phi_2(0)\cos\alpha=\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^\pi(\chi^T f)(y)dy\cdot$ $(\varphi_1(0,\lambda)\sin\alpha+\varphi_2(0)\cos\alpha)=0$，同样可知 $l_2\Phi=0$．

$$\Phi_2'=\frac{1}{\omega(\lambda)}\{\chi_2'(x,\lambda)\int_0^x(\varphi^T f)(y)dy+\chi_2(x,\lambda)(\varphi^T f)(x)$$

$$+\varphi_2'(x,\lambda)\int_x^\pi(\chi^T f)(y)dy-\varphi_2(x,\lambda)(\chi^T f)(x)\}$$

$$=\frac{1}{\omega(\lambda)}\{(\lambda\chi_1-p\chi_1-q\chi_2)\int_0^x(\varphi^T f)(y)dy+(\lambda\varphi_2-p\varphi_1-q\varphi_2)$$

$$\int_x^\pi(\chi^T f)(y)dy\}+\frac{1}{\omega(\lambda)}(\chi_2(\varphi_1 f_1+\varphi_2 f_2)-\varphi_2(\chi_1 f_1+\chi_2 f_2))$$

$$=\lambda\Phi_1-p\Phi_1-q\Phi_2-f_1$$

即 $\Phi_2'+p\Phi_1+q\Phi_2-\lambda\Phi_1=-f_1$，同样可得另一等式．

假设（3.2）有两个解 Φ 和 Ψ，则 $\Phi-\Psi$ 满足 (E)，因 λ 不是特征值，故 $\Phi-\Psi\equiv 0$，即 $\Phi\equiv\Psi$，唯一性成立．

命题3.2 当 $f\in F$ 时，若 $\lambda\neq 0$，则有

$$\Phi(x,\lambda,f)=\frac{1}{\lambda}f+\frac{1}{\lambda}\Phi(x,\lambda,Lf). \tag{3.4}$$

证明 注意到引理2.1，$L\varphi=\lambda\varphi$，$L\chi=\lambda\chi$，$f\in F$，

$$\Phi(x,\lambda,Lf)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)\int_0^x(\varphi^T Lf)(y)dy+\varphi_1(x,\lambda)\int_x^\pi(\chi^T Lf)(y)dy\\ \chi_2(x,\lambda)\int_0^x(\varphi^T Lf)(y)dy+\varphi_2(x,\lambda)\int_x^\pi(\chi^T Lf)(y)dy\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)\int_0^x(f^T L\varphi)(y)dy+\varphi_1(x,\lambda)\int_x^\pi(f^T L\chi)(y)dy\\ \chi_2(x,\lambda)\int_0^x(f^T L\varphi)(y)dy+\varphi_2(x,\lambda)\int_x^\pi(f^T L\chi)(y)dy\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)W(f,\varphi)\big|_0^x+\varphi_1(x,\lambda)W(f,\chi)\big|_x^\pi\\ \chi_2(x,\lambda)W(f,\varphi)\big|_0^x+\varphi_2(x,\lambda)W(f,\chi)\big|_x^\pi\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\lambda}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}\chi_1(x,\lambda)\int_0^x[\varphi^T f](y)dy+\varphi_1(x,\lambda)\int_x^\pi[\chi^T f](y)dy\\ \chi_2(x,\lambda)\int_0^x[\varphi^T f](y)dy+\varphi_2(x,\lambda)\int_x^\pi[\chi^T f](y)dy\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{\omega(\lambda)}\begin{pmatrix}[\chi_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\chi_2(x,\lambda)]f_1(x)\\ [\chi_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\chi_2(x,\lambda)]f_2(x)\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\,\Phi(x,\lambda,f)-(f_1(x),f_2(x))^T.$$

从而（3.4）成立.

命题3.3 $\Phi(x,\lambda,f)$是λ的亚纯函数，其极点λ_n恰为(E)的特征值，都是单重的. 在λ_n处的留数为

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}\Phi(x,\lambda,f)=f_n\,\psi_n(x), \tag{3.5}$$

其中，$f_n=(f,\psi_n)=\int_0^\pi f^T(x)\psi_n(x)dx$, $\psi_n(x)=\dfrac{\sqrt{K_n}}{\sqrt{\omega'(\lambda_n)}}\varphi(x,\lambda_n)$, K_n意义如命题2.3中所述.

证明 由Φ的定义式，φ, χ和ω都是λ的整函数，故Φ为λ的亚纯函数，其极点与$\omega(\lambda)$的零点重合，恰为(E)的特征值，$\omega(\lambda)$的零点均为单重，故Φ的极点也为单重. 注意到$\omega(\lambda_n)=0$，$\chi(x,\lambda_n)=K_n\varphi(x,\lambda_n)$，有

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}\Phi_1(x,\lambda,f)=\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{\lambda-\lambda_n}{\omega(\lambda)-\omega(\lambda_n)}\Big\{\chi_1(x,\lambda)\int_0^x\varphi^T(y,\lambda)f(y)dy$$

$$+\varphi_1(x,\lambda)\int_x^\pi\chi^T(y,\lambda)f(y)dy\Big\}$$

$$=[K_n\varphi_1(x,\lambda_n)/\omega'(\lambda_n)]\int_0^\pi f^T(y)\varphi(y,\lambda_n)dy$$

$$=\psi_{1n}(x)\int_0^\pi f^T(y)\psi_n(y)dy=f_n\psi_{1n}(x).$$

同样可证 $\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}\Phi_2(x,\lambda,f)=f_n\psi_{2n}(x)$. 总之（3.5）成立.

命题3.4 设$f(x)\in C[0,\pi]$，对于$\lambda\in l_n$，当$|\lambda|\to\infty$时，$\Phi(x,\lambda,f)==0(\frac{1}{n})$. l_n的意义如命题2.2所述.

证明 注意到 $|\sin(\lambda x-\alpha)|\leqslant e^{|\tau|x}$，$|\cos(\lambda x-\alpha)|\leqslant e^{|\tau|x}$，

$$|\cos[\lambda(\pi-x)+\beta]|\leqslant e^{|\tau|(\pi-x)},\ |\sin[\lambda(\pi-x)+\beta]|\leqslant e^{|\tau|(\pi-x)}.$$

可知

$$\Big|\int_0^x\varphi_1(y,\lambda)f_1(y)dy\Big|\leqslant M_1\int_0^x|\varphi_1(y,\lambda)|dy,\ M_1\text{为}|f(x)|\text{的上界}.$$

再由（1.3）式知 $\int_0^x\varphi_1(y,\lambda)f_1(y)dy=0\left(\frac{1}{|\tau|}e^{|\tau|x}\right)$，同样可知

$$\int_0^x \varphi_2(y,\lambda)\, f_2(y)dy = 0\left(\frac{1}{|\tau|}\, e^{|\tau| x}\right),$$

$$\int_x^\pi \chi_1(y,\lambda)\, f_1(y)dy = 0\left(\frac{1}{|\tau|}\, e^{|\tau|(\pi-x)}\right),$$

$$\int_x^\pi \chi_2(y,\lambda)\, f_2(y)dy = 0\left(\frac{1}{|\tau|}\, e^{|\tau|(\pi-x)}\right).$$

将上面估计式及 $\omega(\lambda)$ 在 l_n 上的估计式（参见命题2.2的证明）

$$\frac{1}{\omega(\lambda)} = \frac{1}{\Omega(\lambda)+(1+0(\frac{1}{|\lambda|}))} = e^{-|\tau|\pi}\cdot\frac{e^{|\tau|\pi}}{-\sin(\lambda\pi+\beta-\alpha)}\cdot$$

$$\cdot\left(1+0\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right) = 0\left(e^{-|\tau|\pi}\right)$$

一起代入 $\Phi_1(x,\lambda,f)$ 的定义式可得：

$$\Phi_1(x,\lambda,f) = 0\left(e^{-|\tau|\pi}\cdot\frac{1}{|\tau|}\, e^{|\tau|\pi}\right) = 0\left(\frac{1}{|\tau|}\right).$$

在 l_n 上 $0\left(\frac{1}{|\tau|}\right) = 0\left(\frac{1}{n}\right)$，同样可证 $\Phi_2(x,\lambda,f) = 0\left(\frac{1}{n}\right)$.

定理3.5 设 $f\in F$，则 f 可按 ψ_n 展开为一致收敛的级数：

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\psi_n(x),\quad f_n=\int_0^\pi f^T(y)\,\psi_n(y)dy. \tag{3.6}$$

证明 当 $\lambda\in l_n$ 时，对于大 n，有

$$\Phi(x,\lambda,Lf) = 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\oint_{l_n}\frac{1}{\lambda}\Phi(x,\lambda,Lf)\,d\lambda = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

对于（3.4）式两边沿 l_n 积分，对于大 n，有

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k}\Phi(x,\lambda,Lf) = f(x)+0\left(\frac{1}{n}\right)$$

再由命题3.3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} f_k\psi_k(x) = f(x)+0\left(\frac{1}{n}\right)$. 取 $n\to\infty$，即得所证.

注：可按通常方法证明 $f\in L_2$ 时的 L_2 展开，由于篇幅所限，不再讨论.

参 考 文 献

1 B. M. Levitan and I. S. Sargsjan, Introduction to Spectral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operator, American Mathematical Society Providence, Rhode Island 1975

2 E. C. 梯茨玛希. 与二阶微分方程相联系的本征函数展开. 上海：上海科技出版社. 1965：126

A Proof of Eigenexpansion Theorem for Dirac Eigenvalue Problem

Li Mengru

Department of Mathematics, Zhengzhou University

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

ABSTRACT Some essential properties of Dirac eigenvalue problem on a finite interval are discussed with residue method. The theorem which function vector is expanded to become a generalized fourier series is proved according to eigenfuction vector.

KEY WORDS Dirac eigenvalue problem, Residue method, eigenexpansion.