第 43 卷　第 11 期　　科 学 通 报　　1998 年 6 月
研究简报

可积辛映射的 r-矩阵及代数几何解

乔志军*
(北京大学数学研究所, 北京 100871)

摘要　引入可积辛映射的新 Lax 阵, 首次得到了它的非动态(即: 常数) r-矩阵, 并且以 Toda 格为例, 系统地给出一条由 Lax 阵、r-矩阵及'非线性化理论'去构作孤子系统或非线性发展方程显式解(这里系指用 Riemann-Theta 函数表出的代数几何解)表示的有效途径, 提供的代数几何解是概周期的, 包含了周期解及有限带势解.

关键词　**辛映射　r-矩阵　代数几何解**

非线性化理论[1]是一个生成有限维完全可积系统及可积辛映射的非常有效的方法[2]. 文献[3]研究了可积辛映射的动态 r-矩阵. 本文旨在建立可积辛映射的新 Lax 矩阵和非动态(即: 常数) r-矩阵, 并且从 Lax 阵、r-矩阵及'非线性化理论'出发, 利用变量分离方法及代数几何工具, 研究如何去构作孤子系统或非线性发展方程的显式解表示.

本文约定: $(\mathbb{R}^{2N}, \mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q)$ 表示欧氏空间 $\mathbb{R}^{2N}=\{(p,q)\mid p=(p_1,\cdots,p_N),\ q=(q_1,\cdots,q_N)\}$ 里的标准辛结构, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的标准内积; $[\cdot,\cdot]$ 表示通常的矩阵换位子; 在标准辛结构 $(\mathbb{R}^{2N}, \mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q)$ 下, 两个 Hamilton 函数 F, G 的 Poisson 括号为[4]:

$$\{F,G\}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)=\left\langle\frac{\partial F}{\partial q},\frac{\partial G}{\partial p}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial F}{\partial p},\frac{\partial G}{\partial q}\right\rangle.$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ 是 N 个任意给定的、互不相同的常数; λ, μ 表示两个不同的谱参数; $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$; 实数域 $\mathbb{R}$ 上全体无穷次可微函数构成的集合记为 $C^\infty(\mathbb{R})$; 整数 n 表示空间离散变量, 所考虑的 Toda 格对 n 来说是任意的, 不限定它是有限的或周期的.

1　Toda 辛映射的新 Lax 阵及 r-矩阵

引入下述 Lax 矩阵 $L=L(\lambda,p,q)$,

$$L=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\lambda & \langle p,q\rangle\\ -1 & \frac{1}{2}\lambda\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\lambda-\lambda_j}\begin{pmatrix}-p_jq_j & p_j^2\\ -q_j^2 & p_jq_j\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}A(\lambda) & B(\lambda)\\ C(\lambda) & -A(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{1}$$

现取一个 2×2 矩阵 $M=M(\lambda,p,q)$,

$$M=\begin{pmatrix}0 & g\\ -\frac{1}{g} & \frac{\lambda-\langle q,q\rangle}{g}\end{pmatrix},\quad g^2=\langle\Lambda q,q\rangle-\langle p,q\rangle-\langle q,q\rangle^2, \tag{2}$$

那么经直接验算, 可以得到下述定理.

定理 1　离散 Lax 方程

$$L'M=ML,\quad L'=L(\lambda,p',q'), \tag{3}$$

等价于一个有限维辛映射 $H:(p,q)^{\mathrm{T}}\mapsto(p',q')^{\mathrm{T}}$

---

* E_mail: qiaozj@sxx0.math.pku.edu.cn

$$\begin{cases} p' = gq, \\ q' = \dfrac{\Lambda q - p - \langle q, q\rangle q}{g}. \end{cases} \tag{4}$$

令

$$\begin{cases} u_n = \pm(\langle \Lambda q_n, q_n\rangle - \langle p_n, q_n\rangle - \langle q_n, q_n\rangle^2)^{\frac{1}{2}}, \\ v_n = \langle q_n, q_n\rangle, \end{cases} \tag{5}$$

或简记为$f: (p_n, q_n)^{\mathrm{T}} \mapsto (u_n, v_n)^{\mathrm{T}}$，则式(4)变为著名的Toda谱问题

$$L\phi_n \equiv (E^{-1}u_n + v_n + u_n E)\phi_n = \lambda\phi_n,\ Ef_n = f_{n+1},\ E^{-1}f_n = f_{n-1}, \tag{6}$$

当$\lambda = \lambda_j$, $\phi = q_{n,j}$时的结果. 又映射H保持辛结构: $H^*(\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q) = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$，故式(4)称为Toda辛映射. 此定理说明Toda辛映射H具有离散Lax表示式(3).

式(5)是Toda谱问题(6)的一种离散Bargmann约束关系，亦见文献[2].

设I是2×2单位矩阵，$L_1(\lambda) = L(\lambda, p, q)\otimes I$，$L_2(\mu) = I\otimes L(\mu, p, q)$，$\{L_1(\lambda) \underset{,}{\otimes} L_2(\mu)\}$代表基本Poisson括号[5]，那么直接计算得到

定理2

$$\{L_1(\lambda) \underset{,}{\otimes} L_2(\mu)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), L_1(\lambda)] - [r_{21}(\mu, \lambda), L_2(\mu)], \tag{7}$$

其中，矩阵$r_{12}(\lambda, \mu)$，$r_{21}(\mu, \lambda)$为

$$r_{12}(\lambda, \mu) = \frac{2}{\mu - \lambda}P - S,\quad r_{21}(\mu, \lambda) = Pr_{12}(\mu, \lambda)P, \tag{8}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

易验证由式(8)给出的矩阵$r_{12}(\lambda, \mu)$满足经典Yang-Baxter方程(YBE): $[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}] = 0$. 因此，$r_{12}(\lambda, \mu) = \dfrac{2}{\mu - \lambda}P - S$为Toda辛映射(4)的一个$r$-矩阵.

显然，这里找到的r-矩阵与动态变量p, q无关，即它是非动态的或常数的. 此外，使基本Poisson括号(7)成立的r-矩阵$r_{12}(\lambda, \mu)$不唯一. 有趣的是：本文所得的离散Toda辛映射的r-矩阵$r_{12} = \dfrac{2}{\mu - \lambda}P - S$与连续情形下的cKdV非线性化流的$r$-矩阵[6, 7]是完全一样的.

2 可积性

考查Lax矩阵$L = L(\lambda, p, q)$的行列式$\det L$

$$\det L = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}L^2 = -\frac{1}{4}\lambda^2 - \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{E_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}, \tag{10}$$

其中

$$E_\alpha = \lambda_\alpha p_\alpha q_\alpha - p_\alpha^2 - \langle p, q\rangle q_\alpha^2 - \sum_{\beta\neq\alpha,\ \beta=1}^{N}\frac{(q_\alpha p_\beta - p_\alpha q_\beta)^2}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta},\quad \alpha = 1, \cdots, N. \tag{11}$$

由式(7)和式(10)可证得

定理 3

i)

$$\{E_\alpha, E_\beta\} = 0, \ \alpha, \beta = 1, \cdots, N. \tag{12}$$

ii) 令 $F_s = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha^s E_\alpha, \ s = 0, 1, 2, \cdots$, 则

$$F_s = \langle \Lambda^{s+1} p, q\rangle - \langle \Lambda^s p, p\rangle - \langle p, q\rangle\langle \Lambda^s q, q\rangle - \sum_{j+k=s-1} (\langle \Lambda^j p, p\rangle\langle \Lambda^k q, q\rangle - \langle \Lambda^j p, q\rangle\langle \Lambda^k q, p\rangle), \ s = 0, 1, \cdots, \tag{13}$$

且$\{F_m, F_l\} = 0, \ \forall m, l \in \mathbb{Z}^+$.

定理 4 由式(4)决定的有限维 Toda 辛映射 H 在 Liouville 意义下是完全可积的.

类似于文献[2]的证明手法, 可知下述算法过程:

$$\begin{vmatrix} p_0 \\ q_0 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_0} \begin{vmatrix} p_0(t) \\ q_0(t) \end{vmatrix} \xrightarrow{H^n} \begin{vmatrix} p_n(t) \\ q_n(t) \end{vmatrix} \xrightarrow{f} \begin{vmatrix} u_n(t) \\ v_n(t) \end{vmatrix} \tag{14}$$

产生 Toda 格

$$\dot{u}_n = u_n(v_{n+1} - v_n), \ \dot{v}_n = 2(u_n^2 - u_{n-1}^2) \tag{15}$$

的一个解. 因而经变换 $u_n = e^{x_{n+1} - x_n}, \ v_n = \dot{x}_n$ 后标准 Toda 格

$$\ddot{x}_n = 2(e^{2(x_{n+1} - x_n)} - e^{2(x_n - x_{n-1})}) \tag{16}$$

的解具有下述形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_n(t) = \langle q_n(t), q_n(t)\rangle, \ \text{i.e.} \ x_n(t) = \int \langle q_n(t), q_n(t)\rangle \mathrm{d}t. \tag{17}$$

3 代数几何解

把连续系统的变量分离方法[8]应用到离散系统-Toda 辛映射上, 利用代数几何知识具体解出式(17). 为此, 令 $C(\lambda) \equiv -\frac{Q(\lambda)}{K(\lambda)}, \ K(\lambda) = \prod_{\alpha=1}^{N}(\lambda - \lambda_\alpha)$. 取 $Q(\lambda)$ 的 N 个不同的实数零点 $\mu_1, \cdots, \mu_N$. 那么

$$Q(\lambda) = \prod_{j=1}^{N}(\lambda - \mu_j), \ \langle q, q\rangle = \sum_{\alpha=1}^{N}\lambda_\alpha - \sum_{j=1}^{N}\mu_j, \tag{18}$$

置 $\pi_j = A(\mu_j)$, 则 π_j 和 μ_j 共轭正则, 因而它们是可分离的变量[8].

记 $\det L = -\frac{P(\lambda)}{K(\lambda)}$, 其中 $P(\lambda)$ 是首项系数为$\frac{1}{4}$, λ的$N+2$ 次多项式. 则 $\pi_j^2 = \frac{P(\mu_j)}{K(\mu_j)}, \ j = 1, \cdots, N$. 现取生成函数

$$W = \sum_{j=1}^{N} W_j(\mu_j, \{E_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}) = \sum_{j=1}^{N}\int_{\mu_j(0)}^{\mu_j(n)} \sqrt{\frac{P(\lambda)}{K(\lambda)}}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{19}$$

这里, $\mu_j(0)$ 是任一给定的常数. 视 $E_j (j = 1, \cdots, N)$ 为作用变量, 那么角坐标 Q_j 为 $Q_j = \frac{\partial W}{\partial E_j}, \ j = 1, \cdots, N$, 亦即

$$Q_j = \sum_{k=1}^{N}\int_{\mu_k(0)}^{\mu_k(n)} \tilde{\omega}_j, \quad \tilde{\omega}_j = \frac{\prod_{\alpha\neq j, \alpha=1}^{N}(\lambda - \lambda_\alpha)}{2\sqrt{K(\lambda)P(\lambda)}}\mathrm{d}\lambda, \ j = 1, \cdots, N. \tag{20}$$

于是，取 Hamilton 函数 $F_0=\sum_{\alpha=1}^{N}E_\alpha$ 在$(\mathrm{R}^{2N},\ \mathrm{d}E_\alpha\wedge\mathrm{d}Q_\alpha)$上的线性化流

$$\left|\begin{aligned}&\dot{Q}_j=\frac{\partial F_0}{\partial E_j},\\&\dot{E}_j=0,\end{aligned}\right.\tag{21}$$

那么

$$\left|\begin{aligned}&Q_j(n)=Q_j^0+t+c_jn,\quad c_j=\sum_{k=1}^{N}\int_{\mu_k(n)}^{\mu_k(n+1)}\widetilde{\omega}_j,\\&E_j(n)=E_j(n-1),\end{aligned}\right.\tag{22}$$

其中，c_j 依赖于作用变量$E_1,\ \cdots,\ E_N$，与 t 无关；Q_j^0 是任意的常数.

选定带 N 个把柄的 Riemann 面 Γ：$\mu^2=P(\lambda)K(\lambda)$的正则闭链基 $\alpha_i,\ \beta_i,\ i=1,\ \cdots,\ N$. 将 $\widetilde{\omega}_j$ 正则规范化为 $\omega_j=\sum_{l=1}^{N}r_{jl}\widetilde{\omega}_l$，即 ω_j 满足$\oint_{\alpha_i}\omega_j=\delta_{ij}$，$\oint_{\beta_i}\omega_j=B_{ij}$，其中，$B=(B_{ij})_{N\times N}$对称且 B 的虚部 $\mathrm{Im}B$ 正定.

由 Riemann 定理[9]经一个冗长的计算，可以得到

$$\langle q_n(t),\ q_n(t)\rangle=\sum_{\alpha=1}^{N}\lambda_\alpha-\widetilde{C}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\ln\frac{\Theta(\phi(n,\ t)+K+\eta_+)}{\Theta(\phi(n,\ t)+K+\eta_-)}\right|,\tag{23}$$

其中 $\widetilde{C}$ 是与 $\phi(n,\ t)$ 无关的常数[10]，Θ 是 Riemann 面 Γ 上的 Riemann-Theta 函数，$\phi(n,\ t)=(\phi_1(n,\ t),\ \cdots,\ \phi_N(n,\ t))^{\mathrm{T}}\equiv\left|\sum_{l=1}^{N}r_{1,\ l}(Q_l^0+t+c_ln),\ \cdots,\ \sum_{l=1}^{N}r_{N,\ l}(Q_l^0+t+c_ln)\right|^{\mathrm{T}}$，$K\in C^N$ 是 Riemann 常数向量，$\eta_\pm$的第 j 个分量为 $\eta_{\pm,\ j}=\int_{\infty_\pm}^{P_0}\omega_j$，这里 $\infty_\pm=(0,\ \pm\sqrt{P(z^{-1})K(z^{-1})}\ |_{z=0})$，$P_0$ 是 Riemann 面 Γ 上任取的定点. 故标准 Toda 格(16)有显式解表示(称为代数几何解)：

$$x_n(t)=\ln\frac{\Theta(Un+Vt+Z)}{\Theta(U(n+1)+Vt+Z)}+Cn+Rt+\mathrm{const.}\tag{24}$$

其中 $U=RC$，$V=RJ$，$Z=RQ^0+K+\eta_+$，这里 $C=(c_1,\ \cdots,\ c_N)^{\mathrm{T}}$，$J=(1,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}$，$Q^0=(Q_1^0,\ \cdots,\ Q_N^0)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $R=(r_{j,\ l})_{N\times N}$由关系式$\sum_{l=1}^{N}r_{j,\ l}\oint_{\alpha_i}\widetilde{\omega}_l=\delta_{ij}$ 来定，Θ 函数中的对称矩阵 $B=(B_{ij})_{N\times N}$由$\sum_{l=1}^{N}r_{j,\ l}\oint_{\beta_i}\widetilde{\omega}_l=B_{ij}$ 给出；$R=\sum_{\alpha=1}^{N}\lambda_\alpha-\widetilde{C}$，$C$ 是某个常数，它可由 Riemann 面 Γ 上的代数几何性质来确定[11].

于是，Toda 格(15)的代数几何解为

$$\left|\begin{aligned}&u_n(t)=e^{x_{n+1}-x_n}=e^c\frac{\Theta^2(U(n+1)+Vt+Z)}{\Theta(U(n+2)+Vt+Z)\,\Theta(Un+Vt+Z)},\\&v_n(t)=\dot{x}_n=R+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\Theta(Un+Vt+Z)}{\Theta(U(n+1)+Vt+Z)}.\end{aligned}\right.\tag{25}$$

显然，$u_n(t)$与 $v_n(t)$是概周期函数，它们是周期的当且仅当 $U=\dfrac{M}{N}$，这里 M 是一个N 维整数列向量. 它们为式(15)的有限带势解是比较明显的.

本文方法还可应用到其他孤子系统中去获得代数几何解.

致谢 衷心感谢谷超豪和胡和生院士的热情指导与帮助. 本工作为国家自然科学基金(批准号: 19501019)、中国博士后科学基金及辽宁省教委高等学校科学研究基金资助项目.

参 考 文 献

1 Cao C W. Nonlinearization of Lax system for the AKNS hierarchy. Sci Sin A, 1990, 33: 528~ 536
2 Ragnisco O, Cao C W, Wu Y T. On the relations of the stationary Toda equation and the symplectic map. J Phys A, 1995, 28: 573~ 584
3 Ragnisco O. Dynamical r-matrix for the integrable symplectic map. Phys Lett A, 1995, 198: 295~ 305
4 Arnol' d V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Berlin: Springer_Verlag, 1978
5 Faddeev L D, Takhtajan L A. Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. Berlin: Springer_Verlag, 1987
6 Qiao Z J. Non-dynamical r-matrix structure of cKdV model and separation variables. Preprint, 1995
7 Qiao Z J, Zhou R G. Discrete and continuous systems sharing the common non_dynamical r_matrix. Phys Lett A, 1997, 235: 35~ 40
8 Sklyanin E K. Separation of Variables. Prog Theor Phys Suppl, 1995, 118: 35~ 60
9 Griffiths P, Harris J. Principles of Algebraic Geometry. New York: Wiley, 1978
10 Dickey L A. Soliton Equations and Hamiltonian Systems. Singapore: World Scientific, 1991
11 Deift P, Kriecherbauer T, Venakides S. On Toda lattice (Ⅱ). Comm Pure Appl Math, 1995, 128: 1 251~ 1 290

(1997-12-29 收稿)

铁磁性薄板在静磁场中的屈曲

杨文涛 潘 灏 郑大立 蔡其巩
(冶金部钢铁研究总院, 北京 100081)

摘要 提出了铁磁性薄板在横向静磁场中弹性屈曲的能量理论, 应用变分法, 得到了薄板屈曲时的临界磁场值的解析解。分析表明, 铁磁性薄板在静磁场中屈曲不仅与厚度/长度比有关, 而且还与宽度, 总长度及磁化率有关. 理论与实验相当符合.

关键词 **静磁场 铁磁性 薄板 屈曲 能量理论**

铁磁性薄板在横向静磁场中的弹性屈曲问题曾由 Moon 和 Pao 从磁场力对薄板的作用角度作过理论研究[1], 理论预计的临界磁场强度约高出实验一倍. 此后的主要研究工作都在数值计算方面, 如利用有限元法计算磁场分布的边缘效应[2], 用有限元_有限差分法计算临界磁场强度[3]. 在理论分析上近 30 年来未有任何进展.

众所周知, 从能量观点来看, 弹性屈曲问题本质上是一状态失稳问题. 薄板总是趋于使自身能量最小的状态, 因此屈曲问题可以表达为能量极值问题. 本文就从这一思路来分析静磁场致铁磁性薄板屈曲问题. 分析中假定材料各向同性, 忽略磁致伸缩效应. 本文研究的对象是置于均匀磁场中的以悬臂梁方式固定的薄板, 如图 1 所示. 分析所用的坐标系取得使 X_Z 坐标平面同变形前薄板的中平面重合, 如图 2 所示. 令 l_0 为试样总长, l 为臂部分长, h 为板厚.