数 学 年 刊
14A: 1 (1993), 31—38.

三族保谱方程的换位表示

乔 志 军
(辽宁大学数学系, 沈阳 110036)

提 要

基于曹的框架, 本文提供三族新的保谱方程的换位表示; 并且阐明与同一个特征值问题可联系着两族不同的非线性保谱演化方程.

§1. 引言和一般理论

寻求保谱方程的换位表示或 Lax 表示是一项十分有意义的课题, 其关键在于求解一个微分算子 W_m, 使得 $L_t=[W_m, L]$. 曹策问曾在文[1]中提供了这个问题的正确框架, 并且阐述了换位表示的意义和用途. 我们已看到换位表示的研究对于 Lax 组非线性化、Liouville 完全可积系的探讨起着奠基石的作用[2,3]. 目前, 关于保谱方程的换位表示已有不少结果[4—7]. 本文就三族新的非线性演化方程[8]而言, 利用曹的框架解答它们的换位表示, 所用方法与文[4—7]稍有不同. 至于它们 Lax 组的非线性化所产生的可积系统, 我们已得到一些结论, 限于篇幅, 将在另一文中讨论.

考虑谱问题

$$y_x=Uy=U(\lambda, w)y, \tag{1.1}$$

其中, λ 是谱参数; $w=w(x)$ 为位势函数向量(一般要求 $w(x)$ 在无穷远处衰减为零或为周期函数); $y_x=\frac{\partial y}{\partial x}$; 自变量 x 在所论区间 $\Omega(\Omega=(-\infty, +\infty)$ 或 $\Omega=(0, T))$ 内变化; $U(\lambda, w)$ 的诸元素是 λ、$w(x)$ 及其导数的函数.

按[9, 10]的手法, 考虑(1.1)的辅助谱问题

$$y_t=V^{(n)}y=V^{(n)}(\lambda, w)y, \quad n\geqslant 0, \tag{1.2}$$

则(1.1)与(1.2)的零曲率方程族 $U_t-V_x^{(n)}+[U, V^{(n)}]=0$, $n\geqslant 0$, 可确定非线性可积演化方程族

$$w_t=J\mathscr{L}^n f_0, \quad n\geqslant 0, \tag{1.3}$$

其中 J 与 $\mathscr{L}$ 均是依赖于位势向量 w 的微分积分算子, 且 J 通常是 Hamilton 算子, $\phi=\mathscr{L}^*$ 是(1.3)的公用递归算子.

定义 1.1 (1.3)中的微分算子 J 以及微分积分算子 $K=J\mathscr{L}$ 称为相应于谱(1.1)的 Lenard 算子对.

取 $G_{-1}\in \operatorname{Ker} J\triangleq\{G\,|\,JG=0\}$, 规定 $KG_{j-1}=JG_j$, $j=0, 1, 2, \cdots$. 这样得出的一串

本文 1991 年 1 月 8 日收到, 1992 年 1 月 24 日收到修改稿.

序列 $\{G_j\}_{j=-1}^{\infty}$ 称为(1.1)的 Lenard 递推叙列；通常诸 G_j 是 w 及其各阶导数的多项式，并且当常数项为零时是唯一的. $X_j \triangleq JG_j = KG_{j-1}$ 称为(1.1)的向量场；由向量场 X_j 产生的孤子方程族 $w_t = X_j(w)$ 称为(1.1)的非线性演化方程族.

改写(1.1)为

$$L(w)y = \lambda y. \tag{1.4}$$

定义 1.2[1] $L_{*w}(\xi) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} L(w+\varepsilon\xi), \quad \forall \xi.$

为方便起见，L_{*w} 简记为 L_*.

考察 Lenard 算子对 K、J 生成的关于微分算子 $V=V(G)$ 的算子方程

$$[V,\ L] = L_*(KG) - L_*(JG)\cdot L, \tag{1.5}$$

其中 G 是给定的向量函数；L 是 $L(w)$ 的简写；L_* 如定义 1.2 中所述；$[\cdot,\ \cdot]$表示 Lie 括号.

定理 1.1 设 $\{G_j\}_{j=-1}^{\infty}$ 是(1.1)的 Lenard 递推叙列，对任一 $G_j(j=-1,\ 0,\ 1,\ \cdots)$ 算子方程(1.5)均有算子解 $V_j = V(G_j)$，则

$$[W_m,\ L] = L_*(X_m) \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots), \tag{1.6}$$

这里，
$$W_m = \sum_{j=0}^{m} V_{j-1} L^{m-j}.$$

证

$$\begin{aligned}[W_m,\ L] &= \sum_{j=0}^{m} [V_{j-1},\ L] L^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} L_*(KG_{j-1})\cdot L^{m-j} - L_*(JG_{j-1})\cdot L^{m-j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{m} L_*(JG_j) L^{m-j} - L_*(JG_{j-1}) L^{m-j+1} = L_*(JG_m) - L_*(JG_{-1}) L^{m+1} = L_*(X_m).\end{aligned}$$

定理 1.2 设定理 1.1 的条件成立，且 L_* 为单态，则(1.1)的演化方程族 $w_t = X_m(w)$ 具有换位表示

$$L_t = [W_m,\ L], \tag{1.7}$$

其中，W_m 如定理 1.1 中所述.

证 $L_t = L_*(w_t)$,

$$L_t - [W_m,\ L] = L_*(w_t) - L_*(X_m) = L_*(w_t - X_m),$$

而 L_* 为单射，故本定理成立.

推论 1.1 非线性保谱演化方程 $w_t = X_m(w)$ 是 $Ly=\lambda y$ 与 $y_t = W_m y$ 的自然相容性条件.

推论 1.2 位势向量函数 $w(x)$ 满足由(1.1)所确定的定态的非线性系统

$$X_N + a_1 X_{N-1} + \cdots + a_N X_0 = 0 \tag{1.8}$$

之充要条件是

$$[W_N + a_1 W_{N-1} + \cdots + a_N W_0,\ L] = 0, \tag{1.9}$$

此处，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ 为常数.

证

$$\begin{aligned}[W_N + a_1 W_{N-1} + \cdots + a_N W_0,\ L] &= L_*(X_N) + a_1 L_*(X_{N-1}) + \cdots + a_N L_*(X_0) \\ &= L_*(X_N + a_1 X_{N-1} + \cdots + a_N X_0),\end{aligned}$$

又 L_* 为单射，因此本推论正确.

§2. 三族方程的换位表示

本文所研究的三个形如 $y_x=Uy$ 的谱问题均能写成

$$Ly\equiv(L_1+L_2\partial)y=\lambda y, \tag{2.1}$$

其中，2×2 矩阵微分算子 $L=L_1+L_2\partial$, $\partial=\partial/\partial x$; λ 为谱参数; L_2 可逆; $y=(y_1, y_2)^T$.

令 2×2 矩阵微分算子 $V=V_1+V_2L$, 这里 V_1, V_2 是 2×2 函数矩阵. 经计算, Lie 括号 $[V, L]$ 的结果为(注意 ∂ 与 L 之间的关系 $\partial I=L_2^{-1}(L-L_1)$, I 为 2×2 单位阵):

$$\begin{aligned}[V, L]&=[V_1+V_2L, L]\\&=[V_1, L_1]-L_2V_{1x}-[V_1, L_2]L_2^{-1}L_1+([V_1, L_2]L_2^{-1}+[V_2, L_1]\\&\quad-L_2V_{2x}-[V_2, L_2]L_2^{-1}L_1)L+[V_2, L_2]L_2^{-1}L^2.\end{aligned} \tag{*}$$

下边利用(*)式来求与如下三个谱问题[8]

$$y_x=U_1y,\quad U_1=\begin{pmatrix}1 & \lambda u-1\\ \lambda u+1 & -1\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$y_x=U_2y,\quad U_2=\begin{pmatrix}1 & -\lambda+v+1\\ -\lambda+v-1 & -1\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$y_x=U_3y,\ U_3=\begin{pmatrix}1 & -\lambda^2+\lambda u+v+1\\ -\lambda^2+\lambda u+v-1 & -1\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

相联系的保谱方程之换位表示.

2.1 谱(2.2)与

$$Ly=\lambda y,\quad L=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}-1 & \partial+1\\ \partial-1 & 1\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

等价. $L=L_1+L_2\partial$, $L_1=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; $L_2=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $y=(y_1, y_2)^T$.

$L_{*u}(\xi)=-\frac{\xi}{u}L$, $\forall\xi$, 且 L_* 为单同态.

Lenard 算子对为 $K=\frac{1}{2}\ \partial u^{-1}\partial^{-1}$, $J=\partial^{-1}$, 以下 ∂^{-1} 总表示 $\partial=\partial/\partial x$ 的逆算子. $J^{-1}K=\frac{1}{2}\partial^2u^{-1}\partial^{-1}$, 定义 Lenard 递推叙列 $\{G_j\}$: $G_{-1}=0$, $G_{j+1}=J^{-1}KG_j(j=-1, 0, 1, \cdots)$. $G_j(x)$ 为 u 的倒数 $\frac{1}{u}$ 及其导数的多项式; $X_j(u)\triangleq JG_j$, $j=0, 1, 2, \cdots$. 令 $\partial^{-1}0=-2$, 则前几个计算结果为

$$X_0=u^{-2}u_x,\ X_1=\frac{1}{2}\ (u^{-3}u_x)_x,\ X_2=-\frac{1}{8}(u^{-1}(u^{-2})_{xx})_x.$$

向量场 X_j 产生的代表方程有

$$u_t=u^{-2}u_x,\quad j=0, \tag{2.6}$$

$$u_t=\frac{1}{2}(u^{-3}u_x)_x,\quad j=1. \tag{2.7}$$

前者实际上就是半典型的 MkdV 方程(只要令 $v=u^{-1}$, 立知 $u_t=u^{-2}u_x$ 可变为 $v_t=v^2v_x$),

后者便是非线性扩散方程.

设 $G(x)$ 为所论区域 Ω 上的任意光滑函数, $J=\partial^{-1}$, $K=\frac{1}{2}\partial u^{-1}\partial^{-1}$, L 如(2.5)所示. 那么算子方程

$$[V,\ L]=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}(L_*(KG)-L_*(JG)\cdot L) \tag{2.8}$$

有算子解

$$V=V(G)=\frac{1}{2}u^{-2}\partial^{-1}G\begin{pmatrix}-\partial & \partial\\ -\partial & \partial\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

事实上, 让 $A=\frac{1}{2}u^{-1}\partial^{-1}G$, 那么 $V=V(G)=\begin{pmatrix}A & -A\\ A & -A\end{pmatrix}L$. 在(*)式中, 令 $V_1=0$, $V_2=\begin{pmatrix}A & -A\\ A & -A\end{pmatrix}$; 把 L_1, L_2 的表示式代入(*)式, 经计算有

$$[V,\ L]=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\left(-\frac{A_x}{u}L+2AL^2\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}(L_*(KG)-L_*(JG)\cdot L).$$

对任一 $G_j\in\{G_j\}_{j=-1}^{\infty}$, 令 $V_j=V(G_j)=\frac{1}{2}u^{-2}\partial^{-1}G_j\begin{pmatrix}-\partial & \partial\\ -\partial & \partial\end{pmatrix}$, 根据前述, 必有

$$[W_m, L]=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}L_*(X_m), \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{2.10}$$

此处, $W_m\triangleq\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}L^{m-j}$. 于是(2.2)的向量场 $X_m(u)$ 产生的非线性方程族 $u_t=X_m(u)$ 具有换位表示

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}L_t=[W_m,\ L]. \tag{2.11}$$

从而, 在 $y_{xt}=0$、$\lambda_t=0$ 下, $u_t=X_m(u)$ 是 $Ly=\lambda y$ 与 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}y_t=W_my$ 的相容性条件. 因为

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}L_ty+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}Ly_t=\lambda W_my,$$

又 $$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}L=-L\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ LW_my=L\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}y_t=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}y_{xt}=0.$$

故 $$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}L_ty=[W_m,\ L]y.$$

§1中的推论1.2对于该向量场 $X_m(u)$ 亦成立.

2.1′ 还是针对谱问题(2.2), 如果让 Lenard 算子对 $\hat{K}$、$\hat{J}$ 为: $\hat{K}=\partial^{-1}$, $\hat{J}=\frac{1}{2}\partial u^{-2}\cdot\partial^{-1}$, 其它均不变, 则可以得到(2.2)的另一族演化方程的换位表示. 结果叙述如下, 其证明与2.1完全类似. 特别注意此时 $\hat{J}^{-1}\hat{K}=2\partial u\partial^{-2}$.

取 $\hat{G}_{-1}=u_x\in\operatorname{Ker}\hat{J}$, Lenard 递推叙列 $\hat{G}_{j+1}=\hat{J}^{-1}\hat{K}\hat{G}_j(j=-1,\ 0,\ 1,\ \cdots)$ 及向量场

$\hat{X}_m \triangleq \hat{J}\hat{G}_m (m=0, 1, \cdots)$的前两个计算结果为：$\hat{G}_0=2\partial u\partial^{-1}u$, $\hat{G}_1=4\partial u\partial^{-1}u\partial^{-1}u$; $\hat{X}_0=u$, $\hat{X}_1=2u\partial^{-1}u$. 这样定义的向量场 $\hat{X}_m$ 将产生 (2.2) 的另一族演化方程：$u_t=\hat{X}_m(u)(m=0, 1, 2, \cdots)$. 其代表有

$$u_t=2u\partial^{-1}u, \quad m=1. \tag{2.12}$$

设 $\hat{G}(x)$是 Ω 上的任意光滑函数，令 $\hat{V}=V(\hat{G})$（如(2.9)式所示），则

$$[\hat{V}, L]=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}(L_*(\hat{J}\hat{G})-L_*(\hat{K}\hat{G})\cdot L). \tag{2.13}$$

对任一 $\hat{G}_j\in\{\hat{G}_j\}_{j=-1}^{\infty}$，让 $\hat{V}_j=V(\hat{G}_j)$，那么

$$[\hat{W}_m, L]=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}L_*(\hat{X}_m), \quad m=0, 1, 2, \cdots, \tag{2.14}$$

这里，$\hat{W}_m\triangleq\sum\limits_{j=0}^{m}\hat{V}_{j-1}\cdot L^{-m+j-1}$. 于是 (2.2) 的另一向量场 $\hat{X}_m$ 产生的另一族演化方程 $u_t=\hat{X}_m(u)$具有换位表示

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}L_t=[\hat{W}_m, L]. \tag{2.15}$$

从而，在等谱意义及条件 $y_{xt}=0$ 下，$u_t=\hat{X}_m(u)$是 $Ly=\lambda y$ 与 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}y_t=\hat{W}_m y$ 的相容性条件. 推论 1.6 对向量场 $\hat{X}_m(u)$也成立.

2.2　谱(2.3)与

$$Ly=\lambda y, \quad L=\begin{pmatrix}v-1 & -\partial-1\\ -\partial+1 & v+1\end{pmatrix} \tag{2.16}$$

等价.

$$L=L_1+L_2\partial,\ L_1=\begin{pmatrix}v-1 & -1\\ 1 & v+1\end{pmatrix},\ L_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$L_{*v}(\xi)=\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \xi\end{pmatrix}, \forall\xi, \quad 且\ L_*\ 为单同态.$$

$$K=\frac{1}{2}\partial^2+\partial v,\ J=\partial,\ J^{-1}K=\frac{1}{2}\partial+v.$$

令 $G_{-1}=1$, $G_j=J^{-1}KG_{j-1}$, $X_j=JG_j=KG_{j-1}$, $(j=0, 1, \cdots)$. 前几个为

$$G_0=v,\ G_1=\frac{1}{2}v_x+v^2,\ G_2=\frac{1}{4}v_{xx}+\frac{3}{2}vv_x+v^3,$$

$$X_0=v_x,\ X_1=\frac{1}{2}v_{xx}+2vv_x,\ X_2=\frac{1}{4}v_{xxx}+\frac{3}{4}(v^2)_{xx}+3v^2v_x.$$

向量场 X_m 产生(2.3)的演化方程族 $v_t=X_m(v)$. $m=1$时，上述方程便是著名的 Burgers 方程[11]

$$v_t=\frac{1}{2}v_{xx}+2vv_x.$$

设 $G(x)$是 Ω 上的任意光滑函数，L 如(2.16)所示，那么算子方程(1.5)有解

$$V=V(G)=\begin{pmatrix} G\partial & \frac{1}{2}G_x \\ \frac{1}{2}G_x & G\partial \end{pmatrix}.$$

该解 $V=V(G)$ 是通过(*)式得到的. 从而(2.3)的演化方程族 $v_t=X_m(v)$ 具有换位表示

$$L_t=[W_m,\ L],\tag{2.17}$$

其中

$$W_m\triangleq\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}\cdot L^{m-j}=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} G_{j-1}\partial & \frac{1}{2}G_{j-1,x} \\ \frac{1}{2}G_{j-1,x} & G_{j-1}\partial \end{pmatrix}\cdot L^{m-j}.$$

§1 中的两个推论在这里亦成立.

2.3 谱(2.4)与

$$Ly=\lambda y,\qquad L=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \lambda u+v-1 & -1-\partial \\ 1-\partial & \lambda u+v+1 \end{pmatrix}\tag{2.18}$$

等价. $L=L_1+L_2\partial,\ L_1=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \lambda u+v-1 & -1 \\ 1 & \lambda u+v+1 \end{pmatrix},\ L_2=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

$$L_{*w}(\xi)=\begin{pmatrix} \xi_1+\frac{1}{\lambda}\xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_1+\frac{1}{\lambda}\xi_2 \end{pmatrix},\ \forall\xi=(\xi_1,\ \xi_2)^T, w=(u,v)^T,$$

且 L_* 为单同态.

$$K=\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \frac{1}{2}\partial^3+\partial v & 0 \end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix} \partial & 0 \\ -\partial u & \partial \end{pmatrix},\quad J^{-1}K=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\partial+v & u \end{pmatrix}.\tag{2.19}$$

$G_{-1}=(1,\ u)^T\in\mathrm{Ker}J$. $G_j=J^{-1}KG_{j-1},\ X_j=JG_j=KG_{j-1},\ j=0,\ 1,\ \cdots$ 前两个计算结果为

$$G_0=\begin{pmatrix} u \\ v+u^2 \end{pmatrix},\ G_1=\begin{pmatrix} v+u^2 \\ \frac{1}{2}u_x+2uv+u^3 \end{pmatrix};\ X_0=\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix},\ X_1=\begin{pmatrix} 2uu_x+v_x \\ \frac{1}{2}u_{xx}+(uv)_x \end{pmatrix}.$$

向量场 X_m 产生(2.4)的演化方程族 $w_t=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t=X_m(w)$. 当 $m=1$ 时, 上述方程为

$$u_t=2uu_x+v_x,\quad v_t=\frac{1}{2}u_{xx}+(uv)_x.$$

设 $A(x)$ 是 Ω 上的任意光滑函数, L、K、J 分别如(2.18)、(2.19)所示, 令 $G=(A,\ uA)^T$, 那么通过(*)式可确定出算子方程(1.5)的算子解

$$V=V(G)=\begin{pmatrix} A\partial & \frac{1}{2}A_x \\ \frac{1}{2}A_x & A\partial \end{pmatrix}.$$

设 $G_{j-1}=\begin{pmatrix}B_{j-1}\\B_j\end{pmatrix}$，那么

$$G_j=J^{-1}KG_{j-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2}\partial+v & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{j-1}\\B_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_j\\ \frac{1}{2}B_{j-1,x}+vB_{j-1}+uB_j\end{pmatrix}=\widetilde{G}_j+\hat{G}_{j-1},$$

这里
$$\widetilde{G}_j=\begin{pmatrix}B_j\\uB_j\end{pmatrix},\quad \hat{G}_{j-1}=\begin{pmatrix}0\\ \left(\frac{1}{2}\partial+v\right)B_{j-1}\end{pmatrix}.$$

若 $y(x)$ 为(2.18)的特征函数，则

$$L_*(K\hat{G}_{j-1})y=L_*(J\hat{G}_{j-1})\cdot Ly. \tag{2.20}$$

事实上
$$J\hat{G}_{j-1}=\begin{pmatrix}0\\ \left(\frac{1}{2}\partial^2+\partial v\right)B_{j-1}\end{pmatrix},\quad K\hat{G}_{j-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\partial^2+\partial v\right)B_{j-1}\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$L_*(J\hat{G}_{j-1})\cdot Ly=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}\partial^2+\partial v\right)B_{j-1}\cdot Ly=\left(\frac{1}{2}\partial^2+\partial v\right)B_{j-1}\cdot y=L_*(K\hat{G}_{j-1})y.$$

因此，在考虑(2.4)或(2.18)的演化方程之换位表示时，必有

$$L_*(K\hat{G}_{j-1})=L_*(J\hat{G}_{j-1})\cdot L. \tag{2.21}$$

令 $G_j=\begin{pmatrix}B_j\\B_{j+1}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}B_j\\ \frac{1}{2}B_{j-1,x}+vB_{j-1}+uB_j\end{pmatrix}$为(2.18)的 Lenard 递推叙列，则算子方程

$$[V_j,\ L]=L_*(KG_j)-L_*(JG_j)\cdot L \tag{2.22}$$

有解

$$V_j=V(G_j)=\begin{pmatrix}B_j\partial & \frac{1}{2}B_{j,x}\\ \frac{1}{2}B_{j,x} & B_j\partial\end{pmatrix}\quad (j=-1,\ 0,\ 1,\ \cdots). \tag{2.23}$$

事实上，$\widetilde{G}_j=G_j-\hat{G}_{j-1}$，注意 $\widetilde{G}_j=(B_j,\ uB_j)^T$，故

$$\begin{aligned}[V_j,\ L]&=L_*(K\widetilde{G}_j)-L_*(J\widetilde{G}_j)\cdot L\\ &=L_*(KG_j)-L_*(K\hat{G}_{j-1})-L_*(JG_j)L+L_*(J\hat{G}_{j-1})L\\ &=L_*(KG_j)-L_*(JG_j)\cdot L.\end{aligned}$$

所以(2.4) 的演化方程族 $w_t=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_t=X_m(w)$ $m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$具有换位表示

$$L_t=\sum_{j=0}^{m}\left[\begin{pmatrix}B_{j-1}\partial & \frac{1}{2}B_{j-1,x}\\ \frac{1}{2}B_{j-1,x} & B_{j-1}\partial\end{pmatrix}L^{m-j},\ L\right], \tag{2.24}$$

其中，L 如(2.18)所示；诸 $B_{j-1}(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$由 Lenard 递推叙列 G_{j-1} 来确定.

§1 中的两个推论对于谱(2.4)也正确.

注 1.1 §2 中的 2.1 与 2.1′ 给出了与同一个谱问题(2.2)相联系的、两族不同的非

线性发展方程之换位表示，关于这一点，我们有一些结论[12].

注 2.2 对于谱(2.4)或(2.18)，就保谱方程的换位表示而言，本文首次涉及带谱参数 λ、位势 $w=(u, v)^T$ 及 $\partial=\partial/\partial x$ 的谱算子 L，因而 L_* 也含 λ.

作者对审稿人的宝贵意见表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] 曹策问，科学通报，**34**: 10 (1989), 723—724.
[2] Cao Cewen & Geng Xianguo, Classical integrable systems generated through nonlinearization of eigenvalue problems, in Nonlinear Physics, Research Reports in Physics, edited by C. Gu et al. (Springer-Verlag Berlin, 1990), pp. 68—78.
[3] 曹策问，中国科学，A 辑，**7** (1989), 701—707.
[4] 许太喜、顾祝全，科学通报，**34**: 18 (1989), 1437.
[5] 周汝光，与一个四阶特征值问题相联系的 Lax 组非线性化，郑州大学硕士论文 (1989).
[6] 乔志军，科学通报，**35**: 17 (1990), 1353—1354.
[7] 乔志军，应用数学，**4**: 4 (1991), 64—69.
[8] Geng Xianguo, *Physics Letters A*, **147** (1990), 491—494.
[9] Tu Guizhang, *J. Math. Phys.*, **30**: 2 (1989), 330—338.
[10] Tu Guizhang & Meng Dazhi, *Acta Math. Appl. Sinica*, **5**: 1 (1989), 89—96.
[11] Stramp, W., *J. Phys. Soc. Japan*, **53** (1984), 4129.
[12] 乔志军，生成孤子方程族的新方法与换位表示的新探讨，(未发表).