# 孤子族的生成及换位表示的一般结构

乔志军
(辽宁大学数学系，沈阳 110036)

**摘　要**　本文通过对谱问题 $\psi_x = U(u,\lambda)\psi$ 的直接研究，利用谱梯度提供一条获得孤子方程族的途径. 进一步，我们给出孤子方程换位表示的一般结构，同时我们还将看到同一个谱问题可产生两族不同的孤子发展方程.

**关键词**　谱梯度，算子方程，换位表示

## 一、引言和一般理论

假设 $u=(u_1,\cdots,u_N)^T$ 是一个 $N$ 维位势向量，$\lambda$ 为谱参数，那么下列线性谱问题

$$\psi_x = U\psi = U(u,\lambda)\psi, \tag{1.1}$$

$$\psi_t = V^{(n)}\psi = V^{(n)}(u,\lambda)\psi, \qquad n\geq 0 \tag{1.2}$$

的零曲率方程族 $U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0, n\geq 0$ 所确定的 Liouville 发展方程族

$$u_t = J\phi^n f_0, \qquad n\geq 0 \tag{1.3}$$

通常是靠使用代数格式和关于谱参数 $\lambda$ 的幂级数展开方法 (以下简称为 $\lambda$ 展开法) 而导出 [1,2]. 这里 $J$ 、$\phi$ 为依赖于位势向量 $u$ 的微分积分算子，且 $J$ 常是 Hamilton 算子.

如果 (1.1) 中的关于 $U(u,\lambda)$ 关于 $\lambda$ 是线性的，那么 (1.1) 可改写为下述谱问题

$$L\psi = L(u)\psi = \lambda\psi, \tag{1.4}$$

其中算子 $L=L(u)$ 依赖于 $u$, 与谱参数 $\lambda$ 无关. 比如 AKNS 谱问题， Levi 谱问题， Li-Chen 谱问题， D-AKNS 谱问题等等均可化为 (1.4) 的形状.

对于形如 (1.4) 的谱问题，曹策问 [3] 曾阐明其演化方程族具有换位表示的理论框架，并且已有许多应用 [4-6]. 我们知道，(1.4) 的演化方程族具有换位表示其关键在于寻求一个算子 $V=V(G)$ 使得下述算子方程成立：

$$[V,L] = L*(KG) - L*(JG)L. \tag{1.5}$$

其中 $K\triangleq J\phi, J$ 为 (1.4) 的 Lenard 算子对；$G=(G^{(1)},\cdots,G^{(N)})^T$ 是一个给定的函数向量；$L*(\xi)\triangleq \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\xi)$.

本文 1992 年 4 月 2 日收到. 1993 年 7 月 8 日收到修改稿.

当 (1.1) 中的 $U(u,\lambda)$ 关于 $\lambda$ 是非线性的时，我们假设 $U(u,\lambda)$ 中诸元素为系数依赖于 $u$ 的、关于 $\lambda,\lambda^{-1}$ 的多项式，那么 (1.1) 可改写为

$$L\psi = L(u,\lambda)\psi = \lambda^{\gamma}\psi, \tag{1.6}$$

这里，$\gamma$ 是 $U(u,\lambda)$ 中 $\lambda$ 的最高次幂；$L = L(u,\lambda)$ 为依赖于 $u,\lambda$ 的微分算子.

一个基本问题是：对于形如 (1.6) 的谱问题，其保谱谱演化方程族具有换位表示的条件是什么？再有，可否发展 $\lambda$ 展开法，使 (1.1) 的演化方程族的导出变得更直截了当？下面就来回答上述问题.

基于文 [3, 7, 8]，本文通过对谱问题的直接研究，使用谱对位势的泛函数梯度求得所谓 Lenard 算子对 $K$ 、$J$，给出一种由同一个谱问题生成两族不同的孤子方程之新途径. 进而建立 (1.6) 的演化方程族换位表示的一般结构，为发展方程之 Lax 算子代数的研究奠定基础.

众所周知，对于谱问题 (1.1)(特别是零迹谱 $TrU = 0$)，我们总可以按文 [7,8] 介绍的手法求出谱 $\lambda$ 对位势向量函数 $u$ 的泛函梯度 $\nabla\lambda \triangleq \frac{\delta\lambda}{\delta u} = (\frac{\delta\lambda}{\delta u_1},\cdots,\frac{\delta\lambda}{\delta u_N})^T$，$\nabla\lambda$ 与谱 $\lambda$ 、位势 $u$ 及特征函数 $\psi$ 有关. 考察使下述线性关系式成立的微分积分算子 $K$ 、$J$:

$$K\nabla\lambda = \lambda^{c}\cdot J\nabla\lambda, \tag{1.7}$$

其中，$c$ 是某固定的常数；$N\times N$ 阶算子 $K$ 、$J$ 依赖于位势 $u$ 、算子 $\partial$ 及 $\partial^{-1}$，与谱参数 $\lambda$ 及特征函数 $\psi$ 无关. $\partial = \partial/\partial x, \partial\partial^{-1} = \partial^{-1}\partial = 1$.

**定义 1.1.** 设 $\nabla\lambda$ 为 (1.1) 的泛函梯度，使 (1.7) 式成立的、仅依赖于位势 $u$ 、算子 $\partial$ 及 $\partial^{-1}$ 的 $N\times N$ 阶微分积分算子 $K$ 、$J$ 称为谱问题 (1.1) 的 Lenard 算子对.

通常，使 (1.7) 式成立的算子对 $K$ 、$J$ 并不唯一(比如用 $\partial$ 作用 (1.7) 的两端，可得另一算子对 $\partial K$ 、$\partial J$) 但可猜想到：当要求二者之一为辛算子或 Hamilton 算子且其阶数 (即：出现在该算子中 $\partial$ 的最高次幂) 为最低时，$K$ 、$J$ 是唯一的. $K$ 、$J$ 的获得主要依靠 (1.1) 式、$\nabla\lambda$ 的具体表达式、$K$ 、$J$ 的性质以及某些计算技巧 “凑” 出来.

记 Lenard 算子对 $J$ 、$K$ 的核为 Ker $J$ 、Ker $K$，设 dim ker $J \geq 2$ 或 dim Ker $K \geq 2$. 现递推定义 (1.1) 的两串 Lenard 梯度叙列：

(i) 第一 Lenard 叙列 $\{G_j\}$ : $G_{-1} \in \text{Ker } J = \{\widetilde{G}|J\widetilde{G} = 0\}, KG_{j-1} = JG_j$, $j = 0,1,2,\cdots$, $X_j \triangleq JG_j$ 称为 (1.1) 的第一向量场，由向量场 $X_j(u)$ 产生的非线性发展方程 $u_t = X_j(u)$, $j = 0,1,2,\cdots$, 称为 (1.1) 的第一演化方程族.

(ii) 第二 Lenard 叙列 $\{\widehat{G}_j\}$ : $\widehat{G}_{-1} \in \text{Ker } K = \{\widehat{G}|K\hat{G} = 0\}, J\widehat{G}_{j-1} = K\hat{G}_j$, $j = 0,1,2,\cdots, \widehat{X}_j \triangleq K\widehat{G}_j$ 称为 (1.1) 的第二向量场，由向量场 $\widehat{X}_j(u)$ 产生的非线性发展方程 $u_t = \widehat{X}_j(u)$, $j = 0,1,2,\cdots$, 称为 (1.1) 的第二演化方程族.

值此，我们使用谱梯度 $\nabla\lambda$ 给出 (1.1) 的 Lenard 算子对 $K$ 、$J$ 继而通过计算向量场 $X_j(u),\widehat{X}_j(u)$ 产生 (1.1) 的两个演化方程族 $u_t = X_j(u), u_t = \widehat{X}_j(u)$. 由于 (1.7) 中含有 $\nabla\lambda$，所以我们不妨称此种获得演化方程族的方法为 “谱梯度” 法 [9,10]. 关于谱梯度法，Fokas[9] 、Fuchssteiner[10] 等人最早于 80 年代初期使用过，他们只是用来获得发展方程的遗传对称及 Hamilton 公式. 一般地说，对于用 $\lambda$ 展开法所获得的演化方程 (1.3) 而言，我们只要令算子 $K = J\phi$，则 (1.7) 式必能成立. 因此，凡是用 $\lambda$ 展开法能获得演化方程的谱问题 (1.1)，用谱梯度法也必然能获得演化方程族；反之情况有些不同. 例如对于 AKNS 谱问题的特款 $\psi_x = \begin{pmatrix} -i\lambda & u \\ u & i\lambda \end{pmatrix}\psi$，若按 $\lambda$ 展开法关于 $\lambda$ 展开，则不可能产生保谱演化方程族；若按谱梯度法，则其演分方程族恰好是 MKdV 族. 但在 $\lambda$ 展开法中若按 $\lambda^2$ 展开，则仍可产生其保谱族一 MKdV 族. 此时，是按 $\lambda$ 展开还是按 $\lambda^2$ 展开必

须做出选择. 所以从这个意义上讲，谱梯度法比 $\lambda$ 展开法更直截了当些，二者相互补充，相辅相成，均可用来产生发展方程族，特别是对于谱梯度法，(1.7) 在近来讨论较为热烈的"非线性化"所产生的可积系统中起着至关重要的作用 [11].

对于谱问题 (1.6), 本文考虑一个比 (1.5) 更广泛的关于算子 $V = V(G)$ 的算子方程:

$$[V, L] = L*(KG)L^{\beta} - L*(JG)L^{\alpha}, \tag{1.8}$$

其中，$L = L(u,\lambda), K$ 、$J$ 是由 (1.7) 式所决定的 Lenard 算子对，$G = (G^{(1)}, \cdots, G^{(N)})^T$ 是一个给定的函数向量，$L*(\xi) \triangleq \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} L(u+\varepsilon\xi, \lambda), \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N)^T, \alpha, \beta$ 为固定的常数 (依 (1.6) 的不同而不同), 且 $\beta < \alpha$.

令 $\eta = \alpha - \beta$, 设 $G_{-\eta}, \widehat{G}_{-\eta}$ 分别是 Ker $J$ 、Ker $K$ 的生成元，则 (1.6) 的第一 Lenard 递推叙列和第二 Lenard 递推叙列分别定义为 $\{G_{j\eta}\}$ : $KG_{(j-1)\eta} = JG_{j\eta}$ 及 $\{\widehat{G}_{j\eta}\}$ : $J\widehat{G}_{(j-1)\eta} = K\widehat{G}_{j\eta}$, $j = 0, 1, 2, \cdots$. 第一向量场 $X_j \triangleq JG_{j\eta}$ 和第二向量场 $\widehat{X}_j \triangleq K\widehat{G}_{j\eta}$ 分别产生 (1.6) 的第一演化方程族 $u_t = X_j(u)$ 及第二演化方程族 $u_t = \widehat{X}_j(u)$.

下面两条定理揭示了 (1.6) 的两族保谱演化方程 $u_t = X_m(u)$, $u_t = \widehat{X}_m(u)$, $m = 0, 1, 2, \cdots$. 具有换位表示的条件.

**定理 1.2.** 设 $\{G_{j\eta}\}_{j=-1}^{\infty}$ 、$\{\widehat{G}_{j\eta}\}_{j=-1}^{\infty}$ 分别为 (1.6) 的第一、第二 Lenard 递推叙列，且对任一 $G_{j\eta}, \widehat{G}_{j\eta}$ 算子方程 (1.8) 分别有算子解 $V_j = V(G_{j\eta}), \widehat{V}_j = V(\widehat{G}_{j\eta})$. 那么算子 $W_m = \sum\limits_{j=0}^{m} V_{j-1}L^{(m-j)\eta-\beta}, \widehat{W}_m = \sum\limits_{j=0}^{m} \widehat{V}_{j-1}L^{(-m+j)\eta-\alpha}$ 分别满足

$$[W_m, L] = L*(X_m), \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.9$_1$}$$

$$[L, \widehat{W}_m] = L*(\widehat{X}_m), \quad m = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.9$_2$}$$

证.

$$\begin{aligned}
[W_m, L] &= \sum_{j=0}^{m} [V_{j-1}, L] L^{(m-j)\eta-\beta} \\
&= \sum_{j=0}^{m} L*(KG_{(j-1)\eta})L^{(m-j)\eta} - L*(JG_{(j-1)\eta})L^{(m-j+1)\eta} \\
&= L*(JG_{m\eta}) = L*(X_m).
\end{aligned}$$

类似可证 $(1.9)_2$ 式.

**注.** (1.9) 中的算子 $W_m, \widehat{W}_m$ 就是相应向量场 $X_m, \widehat{X}_m$ 的 Lax 算子 [12]. 由此可见 (1.8) 是寻求 Lax 算子的关键性方程. 当然，我们还可进一步讨论其 Lax 算子代数性质、对称及强对称等问题.

**定理 1.3.** 设定理 1.2 中的条件成立，且 $L$ 的微分映射 $L*: \xi_1 \mapsto L*(\xi)$ 为单态，则 (1.6) 的二保谱演化方程族 $u_t = X_m(u)$, $u_t = \widehat{X}_m(u)$ 分别具有换位表示

$$L_t = [W_m, L], \qquad m = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.10$_1$}$$

$$L_t = [L, \widehat{W}_m], \qquad m = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.10$_2$}$$

证. 注意 $L_t = \frac{\partial L}{\partial t} = L*(u_t)$. 又由定理 1.2 有

$$L_t - [W_m, L] = L*(u_t) - L*(X_m) = L*(u_t - X_m),$$
$$L_t - [L, \widehat{W}_m] = L*(u_t) - L*(\widehat{X}_m) = L*(u_t - \widehat{X}_m).$$

而 $L*$ 为单射，故由上二式立知本定理成立.

定态线性系统

**推论 1.4.** 位势 $u=(u_1,\cdots,u_N)^T$ 满足二定态非线性系统 $\sum\limits_{k=0}^{l}\alpha_k X_{l-k}=0$, $\sum\limits_{k=0}^{l}\beta_k\widehat{X}_{l-k}=0$ 的充要条件分别是

$$\left[\sum_{k=0}^{l}\alpha_k W_{l-k}, L\right]=0,\qquad \left[\sum_{k=0}^{l}\beta_k\widehat{W}_{l-k}, L\right]=0,$$

其中，诸 $\alpha_k,\beta_k$ 是常数， $l$ 为非负整数.

## 二、应用举例

**1. 考察谱问题** (WKI 谱问题 [13] 的特款)

$$\psi_x=U\psi,\qquad U=\begin{pmatrix}-i\lambda & (u-1)\lambda\\ -\lambda & i\lambda\end{pmatrix},\qquad \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\qquad i^2=-1. \tag{2.1}$$

其谱 $\lambda$ 对位势 $u$ 的泛函梯度 $\nabla\lambda$ 为

$$\nabla\lambda=\lambda\psi_2^2\left(\int_\Omega(2i\psi_1\psi_2-u\psi_2^2-\psi_1^2)dx\right)^{-1}, \tag{2.2}$$

利用关系式 $\partial^{-1}u\partial\psi_2^2=2i\psi_1\psi_2+\psi_2^2-\psi_1^2$ 及 (2.1) 式，我们只要选取算子 $K,J$ 为: $K=\partial^3, J=-2(\partial u+u\partial)$ 就有

$$K\nabla\lambda=\lambda^2\cdot J\nabla\lambda. \tag{2.3}$$

取 $G_{-2}=\frac{1}{\sqrt{u}}\in\operatorname{Ker}J$, 定义 (2.1) 的第一 Lenard 叙列 $\{G_{2j}\}:KG_{2(j-1)}=JG_{2j}$, $j=0,1,2,\cdots$, $X_j\triangleq JG_{2j}$ 产生 (2.1) 的第一演化方程族 $u_t=X_j(u)$. 族中第一个方程是著名的 Harry-Dym 方程 $u_t=KG_{-2}=(\frac{1}{\sqrt{u}})_{xxx}$. 故 (2.1) 的第一演化方程族给出 Harry-Dym 族. 由此可见按谱梯度法获得的 $HD$ 族在形式上比文 [13] 简单得多.

改写 (2.1) 为

$$L\psi=\lambda\psi,\quad L=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}i & 1-u\\ 1 & -i\end{pmatrix}\partial, \tag{2.4}$$

$L$ 的微分映射 $L*$ 是 ($L*$ 为单态):

$$L_*(\xi)=\frac{\xi}{u^2}\begin{pmatrix}-i & -1\\ -1 & i\end{pmatrix}\partial=\frac{\xi}{u}\begin{pmatrix}0 & -i\\ 0 & -1\end{pmatrix}L. \tag{2.5}$$

设 $G(x)$ 是任意给定的光滑函数，考虑下述关于微分算子 $V=V(G)$ 的算子方程:

$$[V,L]=L*(KG)L^{-1}-L*(JG)L, \tag{2.6}$$

这相当于在 (1.8) 中令 $\alpha=1,\beta=-1$.

(2.6) 有算子解

$$V=V(G)=G_{xx}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+G_x\begin{pmatrix}1 & -2i\\ 0 & -1\end{pmatrix}L+(-2G)\begin{pmatrix}i & 1-u\\ 1 & -i\end{pmatrix}L^2. \tag{2.7}$$

事实上，令 $W=\begin{pmatrix}-i & u-1\\ -1 & i\end{pmatrix}$，$V_0=G_{xx}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$V_1=G_x\begin{pmatrix}1&-2i\\0&-1\end{pmatrix}$，$V_2=-2G\begin{pmatrix}i&1-u\\1&-i\end{pmatrix}$. 我们不难算得 $V=V_0+V_1L+V_2L^2$ 与 $L$ 的换位子 (注意 $L=W^{-1}\partial$)：

$$\begin{aligned}[V,L]=&-W^{-1}V_{0x}+(V_0-W^{-1}V_0W-W^{-1}V_{1x})L\\&+(V_1-W^{-1}V_1W-W^{-1}V_{2x})L^2+(V_2-W^{-1}V_2W)L^3\end{aligned}$$

代入各表达式，经计算即知上式右端的结果等于 (2.6) 的右端.

值此，定理 1.2, 定理 1.3 的条件均成立，故 Harry-Dym 族 $u_t=X_m(u)$ 具有换位表示

$$\begin{cases}L_t=[W_m,L],\quad m=0,1,2,\cdots,\\ W_m=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\left(G_{2(j-1),xx}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+G_{2(j-1),x}\begin{pmatrix}1&-2i\\0&-1\end{pmatrix}\right.\\ \qquad\left.-2G_{2(j-1)}\begin{pmatrix}i&1-u\\1&-i\end{pmatrix}L^2\right)L^{2(m-j)+1}.\end{cases}$$

取 $\widehat{G}_{-2}=\alpha x^2+\beta x+\gamma\in\operatorname{Ker}K$, 其中，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 均为常数. (2.1) 的第二 Lenard 叙列 $\{\widehat{G}_{2j}\}$ 定义为：$J\widehat{G}_{2(j-1)}=K\widehat{G}_{2j}$, $j=0,1,2,\cdots$. $\hat{X}_j\triangleq K\widehat{G}_{2j}$ 产生 (2.1) 的第二演化方程族 $u_t=\hat{X}_j(u)$, 其代表有

$$u_t=\widehat{X}_1=2u\partial^{-1}u+u_x\partial^{-2}u\qquad\left(\text{此时取 }\alpha=\beta=0,\ \gamma=\frac14\right),$$

这是一个微分积分方程，经变换 $\partial^{-2}u=v$ 可化为 $v_{xt}=\frac12v_x^2+vv_{xx}$.

(2.1) 的第二演化方程族 $u_t=\hat{X_m}(u)$ 具有换位表示

$$\begin{cases}L_t=[L,\widehat{W}_m],\qquad m=0,1,2,\cdots,\\ \widehat{W}_m=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\left(\widehat{G}_{2(j-1),xx}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\widehat{G}_{2(j-1),x}\begin{pmatrix}1&-2i\\0&-1\end{pmatrix}L\right.\\ \qquad\left.-2\widehat{G}_{2(j-1)}\begin{pmatrix}i&1-u\\1&-i\end{pmatrix}L^2\right)L^{2(-m+j)-1}.\end{cases}$$

**2. Boiti-Tu 谱 [14] 问题**

$$\psi_x=U\psi,\qquad U=\begin{pmatrix}-i\lambda+i\dfrac{s}{\lambda} & u+i\dfrac{v}{\lambda}\\ u-i\dfrac{v}{\lambda} & i\lambda-i\dfrac{s}{\lambda}\end{pmatrix},\qquad i=\sqrt{-1},\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\nabla\lambda\triangleq\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta u\\ \delta\lambda/\delta v\\ \delta\lambda/\delta s\end{pmatrix}=&\begin{pmatrix}-\psi_1^2+\psi_2^2\\ i\lambda^{-1}(\psi_1^2+\psi_2^2)\\ 2i\lambda^{-1}\psi_1\psi_2\end{pmatrix}\\&\cdot\left(\int_\Omega(i\lambda^{-2}v\psi_1^2+2i\psi_1\psi_2+2i\lambda^{-2}s\psi_1\psi_2+i\lambda^{-2}v\psi_2^2)\,dx\right)^{-1},\end{aligned}\tag{2.9}$$

选取 Lenard 算子对

$$K=\begin{pmatrix}\partial&2s&2v\\-2s&0&0\\-2v&0&0\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&-\partial&2u\\0&-2u&\partial\end{pmatrix}\tag{2.10}$$

就有

$$K\nabla\lambda = \lambda^2 \cdot J\nabla\lambda. \tag{2.11}$$

$G_{-2} = (u,0,1)^T \in \operatorname{Ker} J$, $KG_{2(j-1)} = JG_{2j}$, $j = 0,1,\cdots$, (2.8) 的第一演化方程族 $(u,v,s)_t^T = X_j(u,v,s) \triangleq JG_{2j}$, $j = 0,1,\cdots$, 给出 Boiti-Tu 族方程其代表方程是

$$\begin{cases} u_t = u_x + 2v, \\ v_t = -2us, \\ s_t = -2vu, \end{cases} \tag{2.12}$$

(2.8) 与

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad L = \begin{pmatrix} i\partial + \lambda^{-1}s & -iu + \lambda^{-1}v \\ iu + \lambda^{-1}v & -i\partial + \lambda^{-1}s \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

等价. $L*(\xi) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}\xi_3 & -i\xi_1 + \lambda^{-1}\xi \\ i\xi_1 + \lambda^{-1}\xi_2 & \lambda^{-1}\xi_3, \end{pmatrix}, \forall\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T$, 且 $L*$ 为单态. 设 $G(x) = (G^{(1)}(x), G^{(2)}(x), G^{(3)}(x))^T$ 是任意给定的光滑函数向量，则下述算子方程 (相当于 (1.8) 中令 $\alpha = 2, \beta = 0$):

$$[V, L] = L*(KG) - L*(JG)L^2 \tag{2.14}$$

有算子解

$$V = V(G) = \begin{pmatrix} 0 & G^{(1)} \\ G^{(1)} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -iG^{(3)} & iG^{(2)} \\ -iG^{(2)} & iG^{(3)} \end{pmatrix} L. \tag{2.15}$$

事实上, $L = L_0 + L_{-1}\lambda^{-1} + L_1\partial$, $L_0 = \begin{pmatrix} 0 & -iu \\ iu & 0 \end{pmatrix}$; $L_{-1} = \begin{pmatrix} s & v \\ v & s \end{pmatrix}$; $L_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. 令 $V_0 = \begin{pmatrix} o & G^{(1)} \\ G^{(1)} & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} -iG^{(3)} & iG^{(2)} \\ -iG^{(2)} & iG^{(3)} \end{pmatrix}$, 我们做算子 $V = V_0 + V_1L$ 与 $L$ 和换位运算得 (注意 $\partial = L_1^{-1}(L - L_0 - L_{-1}\lambda^{-1})$):

$$\begin{aligned} [V,L] = {} & ([V_0, L_{-1}] - [V_0, L_1]L_1^{-1}L_{-1})\lambda^{-1} + [V_0, L_0] - L_1V_{0x} - [v_0, L_1]L_1^{-1}L_0 + [V_0, L_1]L_1^{-1}L \\ & + ([V_1, L_{-1}] - [V_1, L_1]L_1^{-1}L_{-1})\lambda^{-1}L + ([V_1, L_0] - L_1V_{1x} - [V_1, L_1]L_1^{-1}L_0)L + [V_1, L_1]L_1^{-1}L^2, \end{aligned}$$

上式中 $\lambda^{-1}$ 以 $L^{-1}$ 来代 (在考虑换位表示时，这是允许的), 则有

$$\begin{aligned} [V,L] = {} & ([V_0, L_{-1}] - [V_0, L_1]L_1^{-1}L_{-1})L^{-1} + ([V_0, L_0] - L_1V_{0x} - [V_0, L_1]L_1^{-1}L_0 \\ & + [V_1, L_{-1}] - [V_1, L_1]L_1^{-1}L_{-1})L^0 + ([V_0, L_1]L_1^{-1} \\ & + [V_1, L_0] - L_1V_{1x} - [V_1, L_1]L_1^{-1}L_0)L + [V_1, L_1]L_1^{-1}L^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

另一方面,

$$L*(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -i\xi_1 \\ i\xi_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix} L^{-1},$$

$$KG = \begin{pmatrix} G_x^{(1)} + 2sG^{(2)} + 2vG^{(3)} \\ -2sG^{(1)} \\ -2vG^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad JG = \begin{pmatrix} 2G^{(2)} \\ -2G^{(1)} - G_x^{(2)} + 2uG^{(3)} \\ -2uG^{(2)} + G_x^{(3)} \end{pmatrix},$$

将它们代入 (2.14) 的右端，不难发现其结果等于 (2.16) 式右端的计算结果.

Boiti-Tu 族方程 $w_t \equiv (u,v,s)_t^T = X_m(w)$ 具有换位表示：

$$\begin{cases} L_t = [W_m, L], \qquad m = 0,1,2,\cdots, \\ W_m = \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} 0 & G_{2(j-1)}^{(1)} \\ G_{2(j-1)}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} L^{2(m-j)} \\ \qquad + \begin{pmatrix} -iG_{2(j-1)}^{(3)} & iG_{2(j-1)}^{(2)} \\ -iG_{2(j-1)}^{(2)} & iG_{2(j-1)}^{(3)} \end{pmatrix} L^{2(m-j)+1}. \end{cases}$$

取 $\widehat{G}_2 = (0,v,-s)^T \in \mathrm{Ker}\, K, J\widehat{G}_{2(j-1)} = K\widehat{G}_{2j}, j = 0,1,2,\cdots$，第二向量场 $\hat{X}_j \triangleq K\hat{G}_{2j}$ 给出 (2.8) 的第二演化方程族 $(u,v,s)_t^T = \widehat{X}_j(u,v,s)$, $j = 0,1,2,\cdots$，其代表有 $(u_t,v_t,s_t)^T = \widehat{X}_0 = (2v, -v_x - 2us, -2uv)^T$.

(2.8) 的第二演化方程族 $(u,v,s)_t^T = X_m(u,v,s)$ 具有换位表示

$$\begin{cases} L_t = [L, \hat{W}_m], \qquad m = 0,1,2,\cdots, \\ \widehat{W}_m = \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} 0 & \widehat{G}_{2(j-1)}^{(1)} \\ \widehat{G}_{2(j-1)}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} L^{2(-m+j-1)} \\ \qquad + \begin{pmatrix} -i\widehat{G}_{2(j-1)}^{(3)} & i\widehat{G}_{2(j-1)}^{(2)} \\ -i\widehat{G}_{2(j-1)}^{(2)} & i\widehat{G}_{2(j-1)}^{(3)} \end{pmatrix} L^{2(-m+j)-1}, \end{cases}$$

其中 $\widehat{G}_{2(j-1)} = (\widehat{G}_{2(j-1)}^{(1)}, \widehat{G}_{2(j-1)}^{(2)}, \widehat{G}_{2(j-1)}^{(3)})^T$ 为 (2.8) 的第二 Lenard 叙列.

**3. Tu 谱问题**[15]:

$$\psi_x = U\psi, \qquad U = \begin{pmatrix} -\lambda - \varepsilon\lambda^{-1}v & u - \lambda^{-1}v \\ u + \lambda^{-1}v & \lambda + \varepsilon\lambda^{-1}v \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{2.17}$$

$$\nabla\lambda \triangleq \begin{pmatrix} \delta\lambda/\delta u \\ \delta\lambda/\delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_1^2 + \psi_2^2 \\ -\lambda^{-1}(\psi_1 + \varepsilon\psi_2)^2 \end{pmatrix} \cdot \left( \int_\Omega (-\lambda^{-2}v\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 - 2\lambda^{-2}\varepsilon v\psi_1\psi_2 - \lambda^{-2}v\psi_2^2)dx \right)^{-1} \tag{2.18}$$

注意到关系式 $\delta\lambda/\delta u = -\frac{1}{2}(\delta\lambda/\delta v)_x + u\varepsilon\delta\lambda/\delta v$, 我们选择

$$K = \begin{pmatrix} -\partial & -2v\varepsilon \\ 2v\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} -2\partial^{-1} & 2\varepsilon\partial^{-1}u \\ 2u\varepsilon\partial^{-1} - 1 & -2u\partial^{-1}u + \varepsilon u \end{pmatrix},$$

就有

$$K\nabla\lambda = \lambda^2 \cdot J\nabla\lambda. \tag{2.19}$$

$G_{-2} = (-u, -\varepsilon)^T \in \mathrm{Ker}\ J$, $KG_{2(j-1)} = JG_{2j}$, $j = 0,1,2,\cdots$. Tu 族方程由 $w_t \equiv (u,v)_t^T = X_j(w) \triangleq JG_{2j}$ 给出，其代表方程有

$$\begin{cases} u_t = u_x + 2v, \\ v_t = -2\varepsilon uv, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{1}{2}v_{xx} - \left(\frac{3}{2}u^2 + \varepsilon v\right)u_x - \varepsilon uv_x - u^2v - 2v^2\varepsilon, \\ v_t = -\frac{1}{2}\varepsilon vu_{xx} - \varepsilon vv_x + \varepsilon vu^3 + 2uv^2. \end{cases}$$

(2.17) 与

$$L\psi=\lambda\psi,\qquad L=\begin{pmatrix}-\partial-\varepsilon\lambda^{-1}v & u-\lambda^{-1}v\\ -u-\lambda^{-1}v & \partial-\varepsilon\lambda^{-1}v\end{pmatrix}\tag{2.20}$$

等价. $L*(\xi)=\begin{pmatrix}0 & \xi_1\\ -\xi_1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\varepsilon\xi_2 & \xi_2\\ \xi_2 & \varepsilon\xi_2\end{pmatrix}L^{-1},\forall\xi=(\xi_1,\xi_2)^T$ 且 $L*$ 为单态.

令 $L=L_0+L_{-1}\lambda^{-1}+L_1\partial$, $V(G)=V_0+V_1L$, 其中

$$L_0=\begin{pmatrix}0 & u\\ -u & 0\end{pmatrix},\qquad L_{-1}=\begin{pmatrix}\varepsilon v & -v\\ -v & -\varepsilon v\end{pmatrix},\qquad L_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$V_0=\begin{pmatrix}0 & -G^{(1)}\\ -G^{(1)} & 0\end{pmatrix};\qquad V_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\varepsilon G^{(2)} & -\frac{1}{2}G^{(2)}\\ \frac{1}{2}G^{(2)} & -\frac{1}{2}\varepsilon G^{(2)}\end{pmatrix};$$

$G\triangleq\left(G^{(1)},G_T^{(2)}\right)^T$, $G^{(1)}(x)$, $G^{(2)}(x)$ 是任意给定的光滑函数且满足 $G^{(1)}=-\frac{1}{2}G_x^{(2)}+\varepsilon uG^{(2)}$. 那么我们使用与 2 类似的手法，可算出 $V(G)$ 与 $L$ 的换位子 $[V(G),L]$ 即是 $L*(KG)-L*(JG)L^2$. 故算子方程

$$[V,L]=L*(KG)-L*(JG)L^2\tag{2.21}$$

有解

$$V=V(G)=\begin{pmatrix}0 & -G^{(1)}\\ -G^{(1)} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\varepsilon G^{(2)} & -\frac{1}{2}G^{(2)}\\ \frac{1}{2}G^{(2)} & -\frac{1}{2}\varepsilon G^{(2)}\end{pmatrix}L.\tag{2.22}$$

对于 Tu 谱 (2.17) 的 Lenard 叙列 $\{G_{2j}\}_{j=-1}^{\infty}$, $G_{2j}\triangleq(G_{2j}^{(1)},G_{2j}^{(2)})^T$. 必有

$$G_{2j}^{(1)}=-\tfrac{1}{2}G_{2j,x}^{(2)}+\varepsilon uG_{2j}^{(2)}.\tag{2.23}$$

事实上，为了解出 $G_{2j}$ 让算子 $\widehat{J}=\begin{pmatrix}u\partial^{-1}u-\partial/4 & \varepsilon u\partial^{-1}-1/2\\ \varepsilon\partial^{-1}u+1/2 & \partial^{-1}\end{pmatrix}$ 作用 $KG_{2(j-1)}=J(G_{2j})$ 的两边得

$$\widehat{J}KG_{2(j-1)}=\widehat{J}JG_{2j}=\begin{pmatrix}1-2\varepsilon u\partial^{-1} & 2u\partial^{-1}u-\varepsilon u\\ -2\partial^{-1} & 2\varepsilon\partial^{-1}u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_{2j}^{(1)}\\ G_{2j}^{(2)}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}A_j\\ B_j\end{pmatrix},\tag{2.24}$$

故有 $A_j=-\frac{1}{2}B_{j,x}+\varepsilon uB_j$, $A_j-G_{2j}^{(1)}=\varepsilon u(B_j-G_{2j}^{(2)})$, $B_j=2\partial^{-1}(-G_{2j}^{(1)}+\varepsilon uG_{2j}^{(2)})$. 因此使上三式成立的 $A_j,B_j$ 应为： $A_j=G_{2j}^{(1)}$, $B_j=G_{2j}^{(2)}$. 所以从 (2.24) 式可求出 Lenard 叙列 $\{G_{2j}\}_{j=-1}^{\infty}$ 并且满足 (2.23).

Tu 族方程 $w_t\equiv(u,v)_t^T=X_m(w)$ 具有换位表示

$$\begin{cases}L_t=[W_m,L], \qquad m=0,1,2,\cdots,\\ W_m=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}0 & -G_{2(j-1)}^{(1)}\\ -G_{2(j-1)}^{(1)} & 0\end{pmatrix}L^{2(m-j)}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\varepsilon G_{2(j-1)}^{(2)} & -\frac{1}{2}G_{2(j-1)}^{(2)}\\ \frac{1}{2}G_{2(j-1)}^{(2)} & -\frac{1}{2}\varepsilon G_{2(j-1)}^{(2)}\end{pmatrix}L^{2(m-j)+1}.\end{cases}$$

其中， $G_{2(j-1)}^{(1)}=-\frac{1}{2}G_{2(j-1),x}^{(2)}+\varepsilon uG_{2(j-1)}^{(2)}$, $j=0,1,2,\cdots,m$.

取 $\widehat{G}_{-2}=(0,0)^T\in \mathrm{Ker}\ K$, 令 $(\varepsilon\partial^{-1}u-\partial^{-1})0=\frac{1}{2}$, 定义 (2.17) 的第二 Lenard 叙列 $\{\widehat{G}_{2j}\}: K\widehat{G}_{2j}=J\widehat{G}_{2(j-1)}$, $j=0,1,2,\cdots$. (2.17) 的第二演化方程族由 $(u,v)_t^T=\widehat{X}_j(u,v)\triangleq K\widehat{G}_{2j}$ 给出，其代表方程有

$$(u,v)_t^T=\hat{X}_1(u,v)\equiv\left(\frac{1}{2}\partial^{-1}\frac{u}{v}\partial\frac{u}{v},\ \frac{1}{4}\frac{u}{v}\partial\frac{u}{v}-\frac{1}{2}\varepsilon u\partial^{-1}\frac{u}{v}\partial\frac{u}{v}\right)^T.$$

(2.17) 的第二演化方程族 $(u,v)_t^T=\widehat{X}_m(u,v)$ 具有换位表示：

$$\begin{cases} L_t=[L,\widehat{W}_m], \qquad m=0,1,2,\cdots, \\ \widehat{W}_m=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}0 & -\widehat{G}^{(1)}_{2(j-1)}\\ -\widehat{G}^{(1)}_{2(j-1)} & 0\end{pmatrix}L^{2(-m+j-1)} \\ \qquad\quad +\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\varepsilon\widehat{G}^{(2)}_{2(j-1)} & -\frac{1}{2}\widehat{G}^{(2)}_{2(j-1)}\\ \frac{1}{2}\widehat{G}^{(2)}_{2(j-1)} & -\frac{1}{2}\varepsilon\widehat{G}^{(2)}_{2(j-1)}\end{pmatrix}L^{2(-m+j)-1}, \end{cases}$$

其中， $\widehat{G}^{(1)}_{2(j-1)}=\frac{1}{2}\widehat{G}^{(2)}_{2(j-1),x}-\varepsilon u\widehat{G}^{(2)}_{2(j-1)}$, $j=0,1,2,\cdots,m$.

**4. Geng 谱问题**[16]

$$\psi_x=U\psi,\qquad U=\begin{pmatrix}\lambda^2+u & \lambda v+\lambda^{-1}\\ \varepsilon(\lambda w+\lambda^{-1}) & -\lambda^2-u\end{pmatrix},\qquad \varepsilon=\pm1, \tag{2.25}$$

$$\nabla\lambda=\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta u\\ \delta\lambda/\delta v\\ \delta\lambda/\delta w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\psi_1\psi_2\\ \lambda\psi_2^2\\ -\varepsilon\lambda\psi_1^2\end{pmatrix}\cdot\left(\int_\Omega(\varepsilon w\psi_1^2-\lambda^{-2}\varepsilon\psi_1^2-4\lambda\psi_1\psi_2-v\psi_2^2+\lambda^{-2}\psi_2^2)\,dx\right)^{-1}, \tag{2.26}$$

利用关系式 $(\psi_1\psi_2)_x=(\lambda v+\lambda^{-1})\psi_2^2+\varepsilon(\lambda w+\lambda^{-1})\psi_1^2$ 及 (2.25), 选取

$$K=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & \varepsilon\partial-2\varepsilon u\\ -1 & \varepsilon\partial+2\varepsilon u & 0\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\partial & v & -w\\ -v & 0 & 2\varepsilon\\ w & -2\varepsilon & 0\end{pmatrix}$$

就有

$$K\nabla\lambda=\lambda^2\cdot J\nabla\lambda. \tag{2.27}$$

$G_{-1}=(2\varepsilon,w,v)^T\in\mathrm{Ker}\ J$, $KG_{j-1}=JG_j$, $j=0,1,2,\cdots$. (2.25) 的第一演化方程族由 $(u,v,w)_t^T=X_j(u,v,w)\triangleq JG_j$ 给出. 第一个方程是 $u_t=v-w, v_t=2\varepsilon+2\varepsilon v_x-2\varepsilon uv, w_t=-2\varepsilon+\varepsilon w_x+2\varepsilon uw$.

(2.25) 与

$$L\psi=\lambda^2\psi,\qquad L=\begin{pmatrix}-u+\partial & -\lambda^{-1}-v\lambda\\ \varepsilon(\lambda^{-1}+w\lambda) & -u-\partial\end{pmatrix} \tag{2.28}$$

等价. $L*(\xi)=\begin{pmatrix}-\xi_1 & 0\\ 0 & -\xi_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\xi_2\\ \varepsilon\xi_3 & 0\end{pmatrix}L^{\frac{1}{2}}, \forall\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T$. 且 $L*$ 为单态.

设 $G=(G^{(1)}(x),G^{(2)}(x),G^{(3)}(x))$ 是任意给定的函数向量，则算子方程 (相当于 (1.8) 中 $\alpha=\frac{1}{2},\beta=-\frac{1}{2}$).

$$[V,L]=L*(KG)L^{-\frac{1}{2}}-L*(JG)L^{\frac{1}{2}} \tag{2.29}$$

有算子解：

$$V=V(G)=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon G^{(3)}\\ G^{(2)} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}G^{(1)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}G^{(1)}\end{pmatrix}L^{\frac{1}{2}}. \tag{2.30}$$

事实上，令 $L=L_{-1}\lambda^{-1}+L_0+L_1\lambda+L_2\partial$, $V=V_1+V_2L^{\frac{1}{2}}$. 其中

$$L_{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}, L_0=\begin{pmatrix}-u & 0\\ 0 & -u\end{pmatrix},\qquad L_1=\begin{pmatrix}0 & -v\\ \varepsilon w & 0\end{pmatrix},\qquad L_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$V_1=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon G^{(3)}\\ G^{(2)} & 0\end{pmatrix},\qquad V_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}G^{(1)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}G^{(1)}\end{pmatrix}.$$

则我们可算得 (注意 $\partial=L_2^{-1}(L-L_{-1}L^{-\frac{1}{2}}-L_0-L_1L^{\frac{1}{2}})$):

$$\begin{aligned}[V,L]=&([V_1,L_{-1}]-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_{-1})L^{-\frac{1}{2}}+([V_1,L_0]-L_2V_{1x}-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_0+[V_2,L_{-1}]\\&-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_1)L^0+([V_1,L_1]-[V_1,L_2]L_2^{-1}L_1+[V_2,L_0]-L_2V_{2x}\\&-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_0)L^{\frac{1}{2}}+([V_1,L_2]L_2^{-1}+[V_2,L_1]-[V_2,L_2]L_2^{-1}L_1)L+[V_2,L_2]L_2^{-1}L^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

上式运算中， $\lambda^{-1},\lambda$ 分别以 $L^{-\frac{1}{2}},L^{\frac{1}{2}}$ 来代.

将各表示式逐一代入上式，经详细计算就可知道其结果为 (2.29) 的右端.

(2.25) 的第一演化方程族 $(u,v,w)_t^T=X_m(u,v,w)$ 具有换位表示

$$\begin{cases}L_t=[W_m,L], \qquad m=0,1,2,\cdots,\\ W_m=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}0 & \varepsilon G_{j-1}^{(3)}\\ G_{j-1}^{(2)} & 0\end{pmatrix}L^{(m-j)+\frac{1}{2}}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}G_{j-1}^{(1)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}G_{j-1}^{(1)}\end{pmatrix}L^{m-j+1}.\end{cases}$$

$\widehat{G}_{-1}=(2\varepsilon u,1,1,)^T\in\operatorname{Ker}K$, $J\widehat{G}_{j-1}=K\widehat{G}_j$, $j=0,1,2,\cdots$. $(u,v,w)_t^T=\hat{X}_j(u,v,w)$ $\triangleq K\hat{G}_j$ 给出 (2.25) 的第二演化方程族，其代表方程有 $(u,v,w)_t^T=\hat{X}_0(u,v,w)\equiv(-\varepsilon u_x+v-w,-2\varepsilon uv+2\varepsilon,2\varepsilon uw-2\varepsilon)^T$.

(2.25) 的第二演化方程族 $(u,v,w)_t^T=\widehat{X}_m(u,v,w)$ 具有换位表示

$$\begin{cases}L_t=[L,\widehat{W}_m], \qquad m=0,1,2,\cdots,\\ \widehat{W}_m=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}0 & \varepsilon \widehat{G}_{j-1}^{(3)}\\ \widehat{G}_{j-1}^{(2)} & 0\end{pmatrix}L^{(-m+j)-\frac{1}{2}}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\widehat{G}_{j-1}^{(1)} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\widehat{G}_{j-1}^{(1)}\end{pmatrix}L^{-m+j}.\end{cases}$$

### 5. Cao-Geng 谱 [17] 问题

$$\psi_x=U\psi,\qquad U=\begin{pmatrix}\lambda u & \lambda v+\lambda^2\\ \varepsilon(\lambda v-\lambda^2) & -\lambda u\end{pmatrix},\qquad \varepsilon=\pm1, \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}\nabla\lambda&=\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta u\\ \delta\lambda/\delta v\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\lambda\psi_1\psi_2\\ \lambda\psi_2^2-\varepsilon\lambda\psi_1^2\end{pmatrix}\cdot\left(\int_\Omega(\varepsilon v\psi_1^2-2\varepsilon\lambda\psi_1^2-2u\psi_1\psi_2-v\psi_2^2-2\lambda\psi_2^2)dx\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

注意到关系式 $(\psi_1^2+\varepsilon\psi_2^2)_x=2(2\lambda v\psi_1\psi_2-\varepsilon\lambda u\psi_2^2+\lambda u\psi_1^2)$, 我们只要选取

$$K=\begin{pmatrix}\varepsilon\partial & 0\\ 0 & \partial\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}4v\partial^{-1}v & 2\varepsilon-4\varepsilon v\partial^{-1}u\\ -2\varepsilon-4\varepsilon u\partial^{-1}v & 4u\partial^{-1}u\end{pmatrix}$$

就有

$$K\nabla\lambda = \lambda^2 \cdot J\nabla\lambda. \tag{2.33}$$

$G_{-1} = (\varepsilon u, v)^T \in \mathrm{Ker}\ J, KG_{j-1} = JG_j, j = 0,1,2,\cdots$, (2.31) 的第一演化方程族 $(u,v)_t^T = X_j(u,v) \triangleq JG_j$ 给出 $C-G$ 方程族，其代表方程有：

$$(u,v)_t^T = X_1(u,v) \equiv (-v_{xx} + (\varepsilon u^3 + uv^2)_x, \varepsilon u_{xx} + (\varepsilon u^2 v + v^3)_x)^T.$$

(2.31) 与

$$L\psi = \lambda^2\psi, \qquad L = \begin{pmatrix} \lambda v & -\varepsilon\lambda u - \varepsilon\partial \\ -\lambda u + \partial & -\lambda v \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

等价. $L*(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_2 & -\varepsilon\xi_1 \\ -\xi_1 & -\xi_2 \end{pmatrix}$, $\forall\xi = (\xi_1,\xi_2)^T$, 且 $L*$ 为单态.

设 $G(x) = (G^{(1)}(x), G^{(2)}(x))^T$ 是任意给定的函数向量，那么算子方程

$$[V,L] = L*(KG)L^{-\frac{1}{2}} - L_*(JG)L^{\frac{1}{2}} \tag{2.35}$$

有算子解 (其证明方法同 4):

$$\begin{aligned} V = V(G) = &\begin{pmatrix} \varepsilon G^{(1)} & G^{(2)} \\ \varepsilon G^{(2)} & -\varepsilon G^{(1)} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 2\partial^{-1}(uG^{(2)} - \varepsilon vG^{(1)}) \\ -2\varepsilon\partial^{-1}(uG^{(2)} - \varepsilon vG^{(1)}) & 0 \end{pmatrix} L^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

$C-G$ 方程族 $(u,v)_t^T = X_m(u,v)$ 具有换位表示

$$\begin{cases} L_t = [W_m, L], \qquad m = 0,1,2,\cdots, \\ W_m = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} \varepsilon G_{j-1}^{(1)} & G_{j-1}^{(2)} \\ \varepsilon G_{j-1}^{(2)} & -\varepsilon G_{j-1}^{(1)} \end{pmatrix} L^{m-j+\frac{1}{2}} \\ \qquad + \begin{pmatrix} 0 & 2\partial^{-1}(uG_{j-1}^{(2)} - \varepsilon vG_{j-1}^{(1)}) \\ -2\varepsilon\partial^{-1}(uG_{j-1}^{(2)} - \varepsilon vG_{j-1}^{(1)}) & 0 \end{pmatrix} L^{m-j+1}. \end{cases}$$

$\widehat{G}_{-1} = (0,0)^T \in \mathrm{Ker}\ K$, 令 $(\partial^{-1}v - \varepsilon\partial^{-1}u)0 = \frac{1}{4}\varepsilon$, 定义 (2.31) 的第二 Lenard 叙列 $\{\hat{G}_j\}$ : $J\hat{G_{j-1}} = K\hat{G}_j$, $j = 0,1,2,\cdots$. (2.31) 的第二演化方程族由 $(u,v)_t^T = \hat{X}_j(u,v) \triangleq K\hat{G}_j$ 给出，其代表方程有 $(u_t,v_t)^T = \hat{X}_1(u,v) \equiv (4v(\partial^{-1}v\partial^{-1}v + \varepsilon\partial^{-1}u\partial^{-1}u) - 2\varepsilon\partial^{-1}u,\ -4\varepsilon u(\partial^{-1}v\partial^{-1}v + \varepsilon\partial^{-1}u\partial^{-1}u) - 2\varepsilon\partial^{-1}v)^T$. 这一方程经变换 $\partial^{-1}u = \tilde{u}, \partial^{-1}v = v$ 可化为

$$\widetilde{u}_{xt} = 2\widetilde{v}_x(\widetilde{u}^2 + \varepsilon\widetilde{u}^2) - 2\varepsilon\widetilde{u}, \qquad \widetilde{v}_{xt} = -2\varepsilon\widetilde{u}_x(\widetilde{v}^2 + \varepsilon\widetilde{u}^2) - 2\varepsilon\tilde{v}.$$

(2.31) 的第二演化方程族 $(u,v)_t^T = X_m(u,v)$ 具有换位表示

$$\begin{cases} L_t = [L, \widehat{W}_m], \quad m = 0,1,2,\cdots, \\ \widehat{W}_m = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} \varepsilon\widehat{G}_{j-1}^{(1)} & \widehat{G}_{j-1}^{(2)} \\ \varepsilon\widehat{G}_{j-1}^{(2)} & -\varepsilon\widehat{G}_{j-1}^{(1)} \end{pmatrix} L^{-m+j-\frac{1}{2}} \\ \qquad + \begin{pmatrix} 0 & 2\partial^{-1}(u\widehat{G}_{j-1}^{(2)} - \varepsilon v\widehat{G}_{j-1}^{(1)}) \\ -2\varepsilon\partial^{-1}(u\widehat{G}_{j-1}^{(2)} - \varepsilon v\widehat{G}_{j-1}^{(1)}) & 0 \end{pmatrix} L^{-m+j}. \end{cases}$$

**6. Kaup-Newell 谱问题**[18]

$$\psi_x = U\psi, \qquad U = \begin{pmatrix} -i\lambda^2 & \lambda u \\ \lambda v & i\lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad i = \sqrt{-1}. \tag{2.37}$$

李忠定[19]等人曾给出 Kaup-Newell 族方程的换位表示，他们的计算过程比较长．但若按本文提供的框架，下面可以看到其计算能简洁一些．

$$\nabla\lambda = \begin{pmatrix} \delta\lambda/\delta u \\ \delta\lambda/\delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\psi_2^2 \\ -\lambda\psi_1^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\int_\Omega (v\psi_1^2 + 4i\psi_1\psi_2 - u\psi_2^2)dx\right)^{-1}, \tag{2.38}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial u\partial^{-1}u\partial & \frac{1}{2}i\partial^2 + \frac{1}{2}\partial u\partial^{-1}v\partial \\ -\frac{1}{2}i\partial^2 + \frac{1}{2}\partial v\partial^{-1}u\partial & \frac{1}{2}\partial v\partial^{-1}v\partial \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix},$$
$$K\nabla\lambda = \lambda^2 \cdot J\nabla\lambda. \tag{2.39}$$

$G_{-1} = (1,0)^T \in \operatorname{Ker} J, KG_{j-1} = JG_j,\ j = 0,1,2,\cdots$. Kaup=Newell 方程族由 $(u,v)_t^T = X_j(u,v) \triangleq JG_j$ 给出，其代表方程有

$$(u,v)_t^T = X_1(u,v) \equiv \left(\frac{1}{2}iu_{xx} + \frac{1}{2}(u^2v)_x, v_t = -\frac{1}{2}iv_{xx} + \frac{1}{2}(v^2u)_x\right)^T.$$

当 $v = u^*$ 时，上述方程便是著名的导数 Schrödinger 方程 $u_t = \frac{1}{2}iu_{xx} + \frac{1}{2}(u|u|^2)_x$.

(2.37) 与

$$L\psi = \lambda^2\psi, \quad L = \begin{pmatrix} i\partial & -i\lambda u \\ i\lambda v & -i\partial \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

等价． $L*(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & -i\xi_1 \\ i\xi_2 & 0 \end{pmatrix} L^{\frac{1}{2}}$, $\forall\xi = (\xi_1,\xi_2)^T$, 且 $L*$ 为单态．

设 $G(x) \triangleq (G^{(1)}(x), G^{(2)}(x))^T$, 那么算子方程

$$[V, L] = L*(KG)L^{-\frac{1}{2}} - L*(JG)L^{\frac{1}{2}} \tag{2.41}$$

有算子解 (其证明方法类似于 4)

$$V = V(G) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}iG_x^{(2)} + \frac{1}{2}u\partial^{-1}(uG_x^{(1)} + vG_x^{(2)}) \\ -\frac{1}{2}iG_x^{(2)} + \frac{1}{2}v\partial^{-1}(uG_x^{(1)} + vG_x^{(2)}) & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i\partial^{-1}(uG_x^{(1)} + vG_x^{(2)}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}i\partial^{-1}(uG_x^{(1)} + vG_x^{(2)}) \end{pmatrix} L^{\frac{1}{2}}. \tag{2.42}$$

Kuap-Newell 族 $(u,v)_t^T = X_m(u,v)$ 具有换位表示

$$\begin{cases} L_t = [W_m, L], & m = 0,1,2,\cdots, \\ W_m = \sum\limits_{j=0}^{m} V(G_{j-1})L^{m-j+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

其中 $V(G_{j-1})$ 由 (2.42) 来确定．

**7. Geng 谱**[16] **问题**

$$\psi_x = U\psi, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & \lambda u + 1 \\ \lambda u - 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

$$\nabla\lambda = \delta\lambda/\delta u = \lambda(\psi_1^2 - \psi_2^2)\left(\int_\Omega u(\psi_2^2 - \psi_1^2)dx\right)^{-1}, \tag{2.44}$$

利用关系式 $\partial^2\nabla\lambda = -2\lambda\cdot u\partial\nabla\lambda$, 选取 $K = \partial^3, J = \partial u\partial$, 就有

$$K\nabla\lambda = -2\lambda\cdot J\nabla\lambda. \tag{2.45}$$

取 $G_{-1} = \partial^{-1}u^{-1} \in \operatorname{Ker} J$, 定义 (2.43) 的第一 Lenard 叙列 $\{G_j\}: KG_{j-1} = JG_j, j = 0,1,2,\cdots$. 向量场 $X_j \triangleq JG_j$ 产生 (2.43) 的第一演化方程族 $u_t = X_j(u), j = 0,1,2,\cdots$, 其代表方程有

(i) $u_t = X_0(u) \equiv -(u^{-2}u_x)_x$; (ii) $u_t = X_1(u) \equiv \frac{1}{2}(\frac{1}{u^2})_{xxx}$.

第一个方程是著名的非线性扩散方程，在塑性力学、固体物理 [20,21] 等领域中有着重要的作用.

(2.43) 等价于

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad L = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} -1 & \partial+1 \\ \partial-1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

$L*(\xi) = -\frac{\xi}{u}L$, $\forall\,\xi$, 且 $L*$ 为单态.

设 $G(x)$ 为任意的光滑函数，那么算子方程

$$[V, L] = L*(KG)\cdot(2L)^{-1} - L*(JG) \tag{2.47}$$

有算子解

$$V = V(G) = \begin{pmatrix} G_x & -\frac{1}{2}G_{xx} - G_x \\ -\frac{1}{2}G_{xx} + G_x & -G_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -uG_x \\ -uG_x & 0 \end{pmatrix} L. \tag{2.48}$$

因而第一演化方程族 $U_t = X_m(u)$ 具有换位表示

$$\begin{cases} L_t = [W_m, L], \\ W_m = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} G_{j-1,x} & -\frac{1}{2}G_{j-1,x} - G_{j-1,xx} \\ -\frac{1}{2}G_{j-1,xx} + G_{j-1,x} & -G_{j-1,x} \end{pmatrix}(2L)^{m-j+1} \\ \qquad + \begin{pmatrix} 0 & -uG_{j-1,x} \\ -uG_{j-1,x} & 0 \end{pmatrix} 2^{m-j+1}L^{m-1+2}. \end{cases}$$

选取 $\widehat{G}_{-1} = \alpha x^2 + \beta x + y \in \operatorname{Ker} K$, 这里 $\alpha, \beta, \gamma$ 为常数，定义第二 Lenard 叙列 $\{\widehat{G}_j\}: K\widehat{G}_j = J\widehat{G}_{j-1}$, $j = 0,1,2,\cdots$. 第二向量场 $\widehat{X}_j \triangleq K\widehat{G}_j$ 产生 (2.43) 的第二演化方程族 $u_t = \widehat{X}_j(u)$, 其代表方程有

$$u_t = \widehat{X}_0(u) \equiv 2\alpha(xu)_x + \beta u_x; \qquad u_t = \widehat{X}_1(u) \equiv (2\alpha x + \beta)u^2 + 2\alpha u_x\partial^{-1}xu + \beta u_x\partial^{-1}u.$$

令 $\alpha = 0, \beta = 1$, 那么 $u_t = \widehat{X}_1(u)$ 经变换 $v = \partial^{-1}u$ 可化为半经典极限型的 KdV 方程 $u_t = v_xv$.

第二演化方程族 $u_t = \widehat{X}_m(u)$ 具有换位表示：

$$L_t = [L, \widehat{W}_m], \qquad m = 0,1,2,\cdots,$$

$$\widehat{W}_m=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}\widehat{G}_{j-1,x} & -\frac{1}{2}\widehat{G}_{j-1,xx}-\widehat{G}_{j-1,x}\\ -\frac{1}{2}\widehat{G}_{j-1,xx}+\widehat{G}_{j-1,x} & -\widehat{G}_{j-1,x}\end{pmatrix}(2L)^{-m+j}+\begin{pmatrix}0 & -u\widehat{G}_{j-1,x}\\ -u\widehat{G}_{j-1,x} & 0\end{pmatrix}2^{-m+j}L^{-m+j+1}.$$

**注.** 本文方法所得到的诸 Lax 算子 $W_m,\widehat{W}_m$ 为今后 Lax 算子代数的讨论打下一定的基础，当然我们也会想到这些谱问题非线性化后所产生的可积系统，关于这些问题的探讨，我们将在以后的课题中讨论.

**致谢** 作者对审稿人的宝贵意见表示衷心的感谢.

## 参 考 文 献

[1] Tu G.Z., Trace Identity — A Powerful Tool to Hamiltonian Structure of Integrable Systems (I) *J. Math. Phys.*, 1989, 30 (2): 330–338.

[2] Tu G.Z. and Meng D.Z. Trace Identity — A Powerful Tool to Hamiltonian Structure of Integrable Systems (II) *Acta Math. Appl. Sinica*, 1989, 5 (1): 89–96.

[3] 曹策问，保谱方程的换位表示 科学通报, 1989, 34 (10): 723–724.

[4] 许太喜，顾祝全，高阶 Heisenberg 旋转链方程的 Lax 表示， 科学通报, 1989, 34 (18): 1437.

[5] 乔志军， Levi 族的 Lax 表示， 科学通报, 1990, 35 (17): 1353-1354.

[6] 马文秀，杨族可积发展方程的换位表示， 科学通报, 1990, 35 (24): 1843–1846.

[7] Tu G.Z. An Extension of a Theorem on Gradients of Conserved Densities of Integrable Systems, *Northeastern Math. J.*, 1990, 6 (1): 26–32.

[8] Cao C.W., Nonlinearization of the Lax Equation Group for the AKNS Hierarchy, *Sci. China* A, 1990, 33 (5): 528–536.

[9] Fokas A.S. and Anderson R. L., On the Use of Isospectral Eigenvalue Problems for Obtaining Hereditary Symmetries for Hamiltonian Systems, *J. Math. Phys.*, 1982, 23 (6): 1066–1073.

[10] Fuchssteiner B., Application of Spectral-Gradient Methods to nonlinear soliton equations, preprint.

[11] Cao C.W. and Geng X.G., Nonlinear Physics, (Research Reports in Physics), Springer-Verlag, Berlin, 1990, 68–78.

[12] 马文秀，中国博士后论文集 (四), 北京：北京大学出版社， 1991, 1–13.

[13] Boiti M., Pempinelli F. and Tu G.Z., The Nonlinear Evolution Equations Related to the Wadati-Konno-Ichikawa Spectral Problem, *Prog of Theor. Phys.*, 1983, 69 (1): 48–64.

[14] Boiti M. and Tu G.Z., A Simple Approach to the Hamiltonian Structure of Soliton Equation III — A New Hierarchy, *IL Nuovo Cimento*, 1983, 75B (2): 145–160.

[15] Tu G.Z., A New Hierarchy of Coupled Degenerate Hamiltonian Equation, *Phys, Lett.* 1983, 94A (8): 340–342.

[16] Geng X.G., Four New Hierarchies of Nonlinear Evolution Equations, *Phys. Lett.* 1990, 147A (8): 491–494.

[17] Cao C.W. and Geng X.G., A Nonconfocal Generator of Involutive Systems and Three Associated Soliton Hierarchies, *J. Math. Phys.*, 1991, 32 (9): 2323–2328.

[18] Kaup D.J. and Newell A.C., An Exact Solution for a Derivative Nonlinear Schrödinger Equations, *J. Math. Phys.*, 1978, 19 (4): 798–801.

[19] 李忠定，张保才， Kaup-Newell 族方程的换位表示， 数学物理学报, 1992, 12 (1): 68–74.

[20] Berrymann J.G. and Holland C., Nonlinear Diffusion Problem Arising in Plasma Physics, *J., Phys. Rev. Lett.*, 1978, 40: 1720.

[21] Baeri P., Campisano S.U., Foti G. and Rimini E., A Melting Model for Pulsing-laser Annealing of Implanted Semiconductors, *J. Appl. Phys.*, 1979, 50: 788–797.

# GENERATION OF SOLITON HIERARCHY AND GENERAL STRUCTURE OF ITS COMMUTATOR REPRESENTATONS

QIAO ZHIJUN

(*Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang* 110036)

**Abstract** In this paper , through some direct studies of the spectral problem $\psi_x = U(u,\lambda)\psi$, an approach for obtaining the hierarchy of soliton equations is presented by the use of spectral gradient. Moreover, a general structure of commutator representations for the soliton hierarchy is constructed. Meanwhile, it is revealed that the same spectral problem can produce two different hierarchies of soliton evolution equations.

**Key words** Spectral gradient, operator equation, commutator representation.