应用数学和力学，第18卷 第7期（1997年7月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

发展方程族Lax表示的广义结构*

乔志军[1]

（戴天民推荐，1995年11月17日收到，1996年10月5日收到修改稿）

摘 要

本文给出非线性发展方程族的一个生成格式（该格式包含了保谱族与非保谱族作为其两个特殊情况），并提供该格式下发展方程族Lax表示的广义结构。最后，作为应用，我们讨论了Levi族发展方程。

关键词 生成格式 广义结构 Levi族

发展方程族、广义结构 Lax表示、

一、引 言

在孤子理论中，寻求非线性发展方程的Lax表示，并探讨Lax算子代数结构等性质是非常有趣的课题。马文秀在文[1，2]中曾研究过等谱、非等谱发展方程族的Lax表示结构。为讨论方便，现将[1，2]的有关结果统一如下：

设位势向量函数$u=(u_1,\ \cdots,\ u_m)^T$。则与$N\times N$谱问题

$$L(u)y=\lambda y,\quad \lambda_t=a\lambda^m\qquad(m\geqslant 0,\ a=\mathrm{const})\tag{1.1}$$

相联系的非线性发展方程族（等谱情形，$a=0$；非等谱情形$a\neq 0$）

$$u_t=J\mathscr{L}^mG_0\qquad(m\geqslant 0)\tag{1.2}$$

具有Lax表示

$$L_t=[W_m,\ L]+aL^m,\ W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}L^{m-j}\qquad(m\geqslant 0)\tag{1.3}$$

的条件是：

(i) (1.2)中的G_0及(1.3)中的V_{-1}由算子方程

$$[V_{-1},\ L]=L_*(JG_0)-aI\qquad(I\text{为恒同算子})\tag{1.4}$$

决定；

(ii) (1.3)中的$V_j=V(G_j)=V(\mathscr{L}^jG_0)\ (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$由算分方程

$$[V(G),\ L]=L_*(KG)-L_*(JG)L\qquad(\forall G=(G_1,\ \cdots,\ G_M)^T)\tag{1.5}$$

的算子解$V=V(G)$代以$G=\mathscr{L}^jG_0$给出，这里 $K=J\mathscr{L}$，$L_*(\xi)\triangleq\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\xi)$。

---

* 国家自然科学基金资助项目。

1 辽宁大学，沈阳 110036；复旦大学数学研究所，上海 200433

根据这一过程，一些非等谱($\alpha\neq0$)发展方程族、等谱($\alpha=0$)发展方程族及其相应的 Lax 表示被导出[2,3]。

对于谱问题(1.1)，要想产生方程族(1.2)、则关键须解出使(1.4)成立的G_0及V_{-1}；要想让方程族(1.2)具有Lax表示(1.3)，则关键须解出(1.5)的算子解$V=V(G)$。关于后者，我们已有一些讨论[4]，限于篇幅，本文不拟涉及；关于前者，我们发现对某些谱问题(比如Levi谱问题，Kaup-Newell 谱问题等)而言，(1.4)不易求解或即使能解出，其表达式也较复杂，这将不利于非线性发展方程族(1.2)的生成，针对这一问题，本文将提出方程族(1.2)新的生成格式，推广并简化(1.4)的运算，继而给出在新的生成格式下非线性发展方程族 Lax 表示的广义结构。

二、非线性方程族的生成及Lax表示的广义结构

现考察一般的$N\times N$谱问题：

$$Ly=L(u)y=\lambda y \tag{2.1}$$

其中 $L=L(u)$是$N\times N$谱算子，$u=(u_1,\ \cdots,\ u_l)^T$是位势向量函数，λ为谱参数，$y=(y_1,\ \cdots,\ y_N)^T$。

依谱梯度法[5]，我们总可以找到所谓 Lenard 算子对$K=K(u,\ \partial,\ \partial^{-1})$，$J=J(u,\partial,\partial^{-1})$，($\partial=\partial/\partial x$，$\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1$)，使得

$$K\nabla_u\lambda=\lambda^c\cdot J\nabla_u\lambda \tag{2.2}$$

这里 $\nabla_u\lambda\triangleq\dfrac{\delta\lambda}{\delta u}$是(2.1)的谱梯度，可按一定的方法[6,7]去求得；c为某固定的常数，一般来说，由(2.1)的具体形式而定。算子$\mathscr{L}\triangleq J^{-1}K$就是通常的递推算子或强对称算子。通常，$K$，$J$反称且二者至少有一是Hamilton算子。

现在来阐述(2.1)的发展方程族之生成过程。仍记$L_*(\xi)\triangleq\dfrac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\xi)$。对于任意给定的$N\times N$矩阵算子$M=(m_{ij})_{N\times N}$，我们建立如下由(2.1)的Lenard算子$J$以及算子$L_*$生成的关于未知函数向量$G_{-1}\triangleq(G_{-1}^{(1)},\ \cdots,\ G_{-1}^{(l)})^T$的算子方程

$$L_*(JG_{-1})=M \tag{2.3}$$

记(2.3)的解集合为$\mathscr{B}$（一般非空）。设$\mathscr{B}\neq\phi$，任取$G_{-1}\in\mathscr{B}$，构造 Lenard 递推叙列$\{G_j\}$如下：

$$G_j=J^{-1}KG_{j-1}=\mathscr{L}^{j+1}G_{-1}\qquad(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.4}$$

由向量场$X_m(u)\triangleq JG_m=J\mathscr{L}^{m+1}G_{-1}$产生的非线性方程

$$u_{t_m}=X_m(u)\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.5}$$

称为(2.1)的非线性发展方程族。至此，靠新格式(2.3)，(2.1)的发展方程族(2.5)得以生成，而且新格式(2.3)比(1.4)简化些。下文可知(2.3)包含了(1.4)

定理 设$M=(m_{ij})_{N\times N}$是一个任意给定的$N\times N$矩阵算子，对给定的谱问题(2.1)，作如下假设：

(i) $L=L(u)$沿ξ方向的Gateaux导数算子$L_*(\xi)$是单射；

(ii) (2.3)的解集合$\mathscr{B}\neq\phi$；

(iii) 对任意$G=(G^{(1)},\ \cdots,\ G^{(l)})^T$，由Lenard算子对$K$，$J$生成的算子方程

$$[V(G),\ L]=L_*(KG)-L_*(JG)L \tag{2.6}$$

有算子解$V=V(G)$。那么(2.1)的非线性发展方程族(2.5)具有下述Lax表示

$$\left.\begin{aligned} &L_{t_m}=[W_m,\ L]+ML^{m+1}\\ &W_m=\sum_{j=0}^{m}V(G_{j-1})L^{m-j}\end{aligned}\right\}\ (m\geqslant 0) \tag{2.7}$$

其中 G_{j-1}由Lenard递推叙列(2.4)决定。

证明 $[W_m,\ L]=\sum_{j=0}^{m}[V(G_{-1}),\ L]L^{m-j}\overset{(\mathrm{iii})}{=\!=}\sum_{j=0}^{m}(L_*(KG_{j-1})-L_*(JG_{j-1})L)L^{m-j}\overset{(2.4)}{=\!=}$

$$\sum_{j=0}^{m}(L_*(JG_j)L^{m-j}-L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1})$$

$$=L_*(JG_m)-L_*(JG_{-1})L^{m+1}\overset{(2.3)}{=\!=}L_*(JG_m)-ML^{m+1}=L_*(X_m)-ML^{m+1}.$$

因而 $$[W_m,\ L]+ML^{m+1}=L_*(X_m) \tag{2.8}$$

又$L_*(u_{t_m})=L_{t_m}$，故

$$L_*(u_{t_m}-X_m(u))=L_{t_m}-([W_m,\ L]+ML^{m+1})$$

但L_*为单射，故而(2.7)与(2.5)等价。

由(2.8)及(i)，我们易得到

推论 位势向量函数u满足定态系统

$$C_0X_N(u)+C_1X_{N-1}(u)+\cdots+C_NX_0(u)=0\qquad (C_0,\cdots,C_N=\mathrm{const}) \tag{2.9}$$

的充要条件是

$$\left[\sum_{k=0}^{N}C_{N-k}W_k,\ L\right]=-M\left(\sum_{k=0}^{N}C_{N-k}L^{k+1}\right) \tag{2.10}$$

注1 若取$M=0$，则(2.3)变为$L_*(JG_{-1})=0$，此即$JG_{-1}=0$。此时产生的发展方程族(2.5)即是(2.1)的保谱族($\lambda_t=0$)，其Lax表示(2.7)恰好是文[8]的结构。

注2 若取$M=aI$(I为$N\times N$单位矩阵算子，$a=\mathrm{const}$)，则由定理，此时产生的发展方程族(2.5)的Lax表示结构为：$L_{t_m}=[W_m,L]+aL^{m-1}$，$W_m=\sum_{j=0}^{m}V(G_{j-1})L^{m-j}$。这刚好是谱问题(2.1)在非等谱条件$\lambda_t=a\lambda^{m+1}$下产生的非保谱发展方程族的Lax表示结构[9]。但此时(2.3)的形式：$L_*(JG_{-1})=aI$比(1.4)简单，较易计算。

注3 在Lax表示(2.7)中，令$m=0$，则(2.7)变为：$L_{t_0}=[W_0,\ L]+ML$，这便是Manakov[10]提出的L-A-B表示，方程$u_{t_0}=X_0(u)$具有这种表示。马文秀[11]讨论了这种L-A-B表示的代数结构。本文利用M的任意性及(2.7)式可构造相应发展方程$u_{t_0}=X_0(u)$的Manakov算子对[11]。从而回答了文[11]末的第一个问题。从这个意义上讲，Lax表示(2.7)是可积系L-A-B表示的推广，自然我们想到Lax表示(2.7)所生成的算子代数结构，这将在另一文中详细讨论。

注4 对于给定的谱问题(2.1)，定理中条件(i)、(ii)容易验证，因此要想得到方程族(2.5)的Lax表示，关键在于寻求算子方程(2.6)的算子解$V=V(G)$。而这一问题在以前的文章中[12~14]均有一定的解答。

注5 由推论中的(2.8)式，我们还可以产生定态系统的算子Lie代数结构[15]。

由注1及注2，故我们不妨称(2.7)是发展方程族(2.5)的Lax表示的广义结构。下边我们以Levi谱问题[16]说明方程族(2.5)的生成及其相应的Lax表示之广义结构，其方法可应用到

其它形如(2.1)的谱问题上.

三、具体实例

Levi谱问题[16]

$$Ly=\frac{\lambda}{2}y,\quad L=L(u,\ v)=\begin{pmatrix}-\partial+\frac{u-v}{2} & u\\ -v & \partial+\frac{u-v}{2}\end{pmatrix},\quad \partial=\partial/\partial x \tag{3.1}$$

的Lenard算子对K, J为[17]

$$K=\begin{pmatrix}-u\partial-\partial u & -\partial^2-v\partial+\partial u\\ \partial^2-\partial v+u\partial & v\partial+\partial v\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & \partial\\ \partial & 0\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

显然 $L_*(\xi)=\begin{pmatrix}(\xi_1-\xi_2)/2 & \xi_1\\ -\xi_2 & (\xi_1-\xi_2)/2\end{pmatrix}$, $\xi=(\xi_1,\ \xi_2)^T$, 且L_*是单态.

由文[13]知, 对于Levi谱问题(3.1)相应的算子方程(2.6)有算子解

$$V=V(G)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(G^{(1)}+G^{(2)})_x+(G^{(2)}-G^{(1)})\partial & -G_x^{(1)}\\ G_x^{(1)} & \frac{1}{2}(G^{(1)}+G^{(2)})_x+(G^{(2)}-G^{(1)})\partial\end{pmatrix},$$

$$(\forall G=(G^{(1)},\ G^{(2)})^T) \tag{3.3}$$

在(2.3)中, 若取$M=0$, 则(2.3)变为$JG_{-1}=0$, 即$G_{-1}\in\mathrm{Ker}J$. 此时由(2.5)产生的发展方程族即是(3.1)的保谱族（见[17], 节2）, 其Lax表示(2.7)与文[13]结果一致.

在(2.3)中, 若取$M=aI$($a\neq 0$, $a=$const, I为2×2单位算子), 则(2.3)无解（相当于(1.4)不易求解）. 但若取

$$M=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix},\quad a=\text{const} \tag{3.4}$$

则(2.3)变为

$$\begin{pmatrix}(G_{-1,x}^{(2)}-G_{-1,x}^{(1)})/2 & G_{-1,x}^{(2)}\\ -G_{-1,x}^{(1)} & (G_{-1,x}^{(2)}-G_{-1,x}^{(1)})/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix},\quad G_{-1}=\begin{pmatrix}G_{-1}^{(1)}\\ G_{-1}^{(2)}\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

解得 $G_{-1}=\begin{pmatrix}ax+d_1\\ ax+d_2\end{pmatrix}$, 其中$d_1$, d_2是任意选取的常数.

故此时产生的发展方程族(2.5)为:

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}_{t_m}=J\mathscr{L}^{m+1}\begin{pmatrix}ax+d_1\\ ax+d_2\end{pmatrix}=J(J^{-1}K)^{m+1}\begin{pmatrix}ax+d_1\\ ax+d_2\end{pmatrix}\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.6}$$

其中 K, J由Levi谱问题(3.1)的Lenard算子对(3.2)式给出. 按定理, (3.6)具有下述Lax表示的广义结构:

$$L_{t_m}=[W_m,\ L]+\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}\cdot 2^m L^{m+1}$$

$$W_m=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(G_{-1}^{(1)}+G_{-2}^{(2)})_x+(G_{j-1}^{(2)}-G_{j-1}^{(1)})\partial & -G_{j-1,x}^{(2)}\\ G_{j-1,x}^{(1)} & \frac{1}{2}(G_{j-1}^{(1)}+G_{j-1}^{(2)})_x+(G_{j-1}^{(2)}-G_{j-1}^{(1)})\partial\end{pmatrix}(2L)^{m-j}\Bigg\} \quad (3.7)$$

这里，$G_{j-1}=(G_{j-1}^{(1)},G_{j-1}^{(2)})^T$由Levi谱问题(3.1)的Lenard递推叙列$\{G_j\}$：$G_{j-1}=J^{-1}KG_{j-2}=(J^{-1}K)^j\begin{pmatrix}ax+d_1\\ax+d_2\end{pmatrix}$，$j=0,1,2,\cdots$，决定．(3.6)与(3.7)是两个全新的结果．下边考虑$M=(m_{ij})_{2\times2}$的一般情况．

设$A=A(x,t)$，$B=B(x,t)$是两个任意的光滑函数（当然它们也可以是位势u，v的函数）．对Levi谱问题(3.1)，当且仅当取$M=\begin{pmatrix}\frac{A+B}{2} & B\\ A & \frac{A+B}{2}\end{pmatrix}$时，(2.3)有解：$G_{-1}=(-\partial^{-1}A+d_1,\ \partial^{-1}B+d_2)^T$，其中$\partial^{-1}$表示$\partial=\partial/\partial x$的逆算子．$\forall d_1,d_2=\text{const}$．故此时产生的方程族

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_{t_m}=J\mathscr{L}^{m+1}\begin{pmatrix}-\partial^{-1}A+d_1\\ \partial^{-1}B+d_2\end{pmatrix}=J(J^{-1}K)^{m+1}\begin{pmatrix}-\partial^{-1}A+d_1\\ \partial^{-1}B+d_2\end{pmatrix}\quad(m=0,1,2,\cdots) \quad (3.8)$$

具有Lax表示的广义结构：

$$L_{t_m}=[W_m,\ L]+\begin{pmatrix}\frac{A+B}{A} & B\\ A & \frac{A+B}{2}\end{pmatrix}\cdot 2^mL^{m+1} \quad (3.9)$$

其中 W_m的形式如(3.7)中第二式所示，只不过W_m中的$G_{j-1}=(G_{j-1}^{(1)},\ G_{j-1}^{(2)})^T$ 由 $G_{j-1}=(J^{-1}K)^j\begin{pmatrix}-\partial^{-1}A+d_1\\ \partial^{-1}B+d_2\end{pmatrix}$ $(j=0,1,2,\cdots)$ 给出．

至此，Levi谱问题产生的每一族发展方程及其相应的Lax表示的广义结构均包含在(3.8)与(3.9)两式之中．对不同的A，B，由(3.8)产生的方程族也不一样，那么发展方程族之间有怎样的关系呢？尚需进一步讨论．

致谢 作者衷心感谢导师谷超豪院士与胡和生院士的热情指导及支持．

参 考 文 献

[1] Ma Wenxiu. Lax representations and Lax operator algebras of isospectral and nonisospectral hierarchies of evolution equations. *J. Math. Phys.*, 33 (1992), 2464—2480.

[2] Ma Wenxiu. *An approach for constructing nonisospectral hierarchies of evolution equations. J. Phys. A, Math. Gen.*, 25 (1992), 719—723.

[3] Ma Wenxiu. The algebraic structure of zero curvature representations and ap-

plication to coupled KdV systems, *J. Phys. A., Math. Gen.*, 26 (1993), 2573—2585.

[4] 乔志军, 孤子族的生成及换位表示的一般结构, 应用数学学报, 18 (1995), 287—301.

[5] A. S. Fokas and R. L. Andersen, On the use of isospectral eigenvalue problem for obtaining hereditary symmetries for Hamiltonian systems, *J. Math. Phys.*, 23 (1982), 1066—1082.

[6] Tu Guizhang, An extension of a theorem on gradients of conserved densities of integrable systems, *Northeastern Math. J.*, 6 (1990), 26—34.

[7] Cao Cewen, Nonlinearization of the Lax equation groups for the AKNS hierarchy, *Sci. China A.*, 33 (1990), 528—536.

[8] 曹策问, 保谱方程的换位表示, 科学通报, 34 (1989), 723—725.

[9] 郭福奎, Lax表示的变形与Hamilton方程族的Lax表示, 数学学报, 37 (1994), 515—525.

[10] S. V. Manakon, L-A-B representation of integrable systems, *Usp. Mat. Nauk*, 31 (1976), 245—250.

[11] 马文秀, 可积系L-A-B表示相关的代数结构, 科学通报, 37 (1992), 8—12.

[12] 乔志军, D-AKNS族的换位表示, 应用数学, 4(4) (1991), 64—70.

[13] 乔志军, Levi族的Lax表示, 科学通报, 35 (1990), 1353—1354.

[14] 马文秀, 杨族可积发展方程的换位表示, 科学通报, 35 (1990), 1843—1847.

[15] Qiao Zhijun, Lie algebraic structure of operator related to the stationary systems, *Phys. Lett. A.*, 206 (1995), 347—358.

[16] D. Levi, G. Neugebauer and R. Meinal, A new nonlinear Schrodinger equation, its hierarchy and N-soliton solutions, *Phys. Lett. A.*, 102 (1984), 1—8.

[17] Qiao Zhijun, A Bargmann system and involutive representations of solutions of the Levi hierarchy, *J. Phys. A., Math. Gen.*, 26 (1993), 4407—4417.

Generalized Structure of Lax Representations for Nonlinear Evolution Equation

Qiao Zhijun

(Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110063, and Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433 P. R. China)

Abstract

A new production form for a hierarchy of nonlinear evolution equations (NLEEs) is given in this paper. The form contains productions of isospectral and non-isospectral hierarchy. Under this form a generalized structure of Lax representations for the hierarchy of NLEEs is thus presented. As a concrete example, the Levi-hierarchy of evolution equations are discussed at the end of this paper.

Key words production form, generalized structure, Levi hierarchy