应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
1995,8(2):177～181

(9) # Tu 族演化方程的换位表示*

177-181

乔志军

O175.2

(辽宁大学数学系 沈阳 110036)

A

提要 本文利用特征值的泛函梯度方法，先给出 Tu 谱问题的 Lenard 算子对；尔后通过求解一个关键性的算子方程，得到 Tu 谱问题的演化方程族之换位表示.

关键词：Tu 谱问题；Lenard 算子对；换位表示 演化方程，泛函梯度
AMS(1991)主题分类：35Q53，58F07

1 泛函梯度与 Lenard 算子对

考察二阶 Tu 谱问题[1]：

$$\psi_x = U\psi,\quad U=\begin{pmatrix} 0 & 1+\frac{1}{2}(q+r)\lambda^{-1} \\ \lambda+\frac{1}{2}(q-r) & 0 \end{pmatrix},\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 λ 是(1.1)的特征参数，向量值函数 $u\triangleq(q,r)^T$ 称为(1.1)的位势，依赖区间 Ω 为$(-\infty,+\infty)$或$(0,T)$；$x\in\Omega$ 且 $u(x)$ 在无穷远处衰减为零或以 T 为周期. 让 $u\to u+\varepsilon\delta u$，则有

命题 1.1 设 λ 为(1.1)的一个特征值，$(\psi_1,\psi_2)^T$ 是相应于 λ 的特征函数，那么特征值 λ 的泛函梯度为：

$$\nabla\lambda\triangleq\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta q\\ \delta\lambda/\delta r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\psi_1^2+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\psi_2^2\\ \frac{1}{2}\psi_1^2+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\psi_2^2\end{pmatrix}\cdot\left(\int_\Omega[\psi_1^2+\frac{1}{2}(q+r)\lambda^{-2}\psi_2^2]\mathrm{d}x\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

证明 在文[2]节 I 里，我们选取 $m_{11}=0,m_{12}=1+\frac{1}{2}(q+r)\lambda^{-1},m_{21}=\lambda+\frac{1}{2}(q-r)$，则稍加整理就有

$$\int_\Omega[(-\frac{1}{2}\psi_1^2+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\psi_2^2)\delta q+(\frac{1}{2}\psi_1^2+\frac{1}{2}^{-1}\lambda\psi_2^2)\delta r]\mathrm{d}x=\delta\lambda\int_\Omega[\psi_1^2+\frac{1}{2}(q+r)\lambda^{-2}\psi_2^2]\mathrm{d}x,$$

* 本文受辽宁省教委自然科学基金和辽宁大学青年科学基金资助.
收稿日期：1991-11-08

故(1.2)式成立.

命题 1.2 设 λ 是(1.1)的一个特征值.则以(1.2)式定义的 $\nabla\lambda$ 满足算子关系式:

$$K\nabla\lambda = \lambda\cdot J\nabla\lambda, \tag{1.3}$$

其中 K,J 是两个斜称的微分算子($\partial=\partial/\partial x$),

$$K=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(2q\partial+2\partial q-\partial\frac{q}{r}\partial\frac{q}{r}\partial) & -\frac{1}{4}(2r\partial+2\partial\frac{q^2}{r}-\partial\frac{q}{r}\partial^3) \\ -\frac{1}{4}(2\frac{q^2}{r}\partial+2\partial r-\partial^3\frac{q}{r}\partial) & -\frac{1}{4}(2q\partial+2\partial q-\partial^3) \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} \partial & \partial\frac{q}{r} \\ \frac{q}{r}\partial & \partial \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

且 J 为 Hamilton 算子[1].

证明

$$J^{-1}K=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial^{-1}q\partial & -\frac{1}{2}\partial^{-1}r\partial \\ -\frac{1}{4}(2r-\partial\frac{q}{r}\partial) & -\frac{1}{4}(2q-\partial^2) \end{pmatrix}, \partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1. \tag{1.5}$$

因此,只须证明

$$J^{-1}K\nabla\lambda=\lambda\cdot\nabla\lambda. \tag{1.6}$$

将(1.5)与(1.2)直接代到(1.6)中进行验算,利用关系式 $(-\frac{1}{2}\psi_1^2+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\psi_2^2)_x=-\lambda^{-1}r\psi_1\psi_2$, $(\frac{1}{2}\psi_1^2+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\psi_2^2)_x=(2+\lambda^{-1}q)\psi_1\psi_2$ 就可知道(1.6)的正确性.

定义 1.3 使(1.3)式成立的算子对 K,J 称为 Tu 谱问题(1.1)的 Lenard 算子对.

注记 Lenard 算子对 K,J 通常不唯一,但尽可能地选择 K,J 为 Hamilton 算子(至少是斜称的).不过,$J^{-1}K$ 是唯一的,(1.4)式即是[1]中逆推算子 L.

2 演化方程族的换位表示

命题 2.1 Tu 谱问题(1.1)等价于下述特征值问题:

$$L\psi=L(u)\psi=\lambda\psi,\quad L=L(u)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(q-r) & \partial \\ -\frac{1}{2}[(q-r)\partial+q'-r'] & \partial^2-\frac{1}{2}(q+r) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中,$\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$,$u=(q,r)^T$;$A'=\frac{\partial A}{\partial x}$,$\partial=\partial/\partial x$,以后不再申明.

证明 显然

定义 2.2[3] 谱算子 L 在方向 ξ 上的 Gateaux 导数算子定义为:

$$L_*(\xi)\triangleq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\xi),\forall\ \xi. \tag{2.2}$$

引理 2.3 对特征值问题(2.1),谱算子 $L=L(u)$ 的 Gateaux 导数算子为:

$$L_*(\xi)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\xi_1-\xi_2) & 0 \\ -\frac{1}{2}(\xi_1'-\xi_2') & -\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\xi_1-\xi_2) & 0 \end{pmatrix}\partial,\forall\ \xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

且 L_* 是单态．

证明　按定义(2.2)直接计算便得(2.3)．

以下考虑算子 $V=V_1+V_2\partial$ 与 $L=L_1+L_2\partial+L_3\partial^2$ 的换位子 $[V,L]$. 其中

$$L_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(q-r) & 0\\ -\frac{1}{2}(q'-r') & -\frac{1}{2}(q+r)\end{pmatrix},L_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2}(q-r) & 0\end{pmatrix},L_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$V_1=\begin{pmatrix}E & F\\ B & -E\end{pmatrix},V_2=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{pmatrix},\tag{2.4}$$

A、B、D、E、F 均为待定的函数．

经一系列计算，得到

$$\begin{aligned}[V,L]\triangleq VL-LV=&[V_1,L_1]-L_2V_1'+V_2L_1'-L_3V_1''+([V_1,L_2]+[V_2,L_1]\\&+V_2L_2'-L_2V_2'-2L_3V_1'-L_3V_2'')\partial+([V_2,L_2]+[V_1,L_3]+V_2L_3'-2L_3V_2')\partial^2\\=&\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(q'-r')F-B'-\frac{1}{2}(q'-r')A & -rE+E'\\ E(q'-r')+rB+\frac{1}{2}(q-r)E'-\frac{1}{2}D(q''-r'')-B'' & \frac{1}{2}(q'-r')F+\frac{1}{2}(q-r)F'-\frac{1}{2}D(q'+r')+E''\end{pmatrix}\\&+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(q-r)F-B & 2E-D'\\ (q-r)E+\frac{1}{2}(A-D)(q'-r')+\frac{1}{2}(q-r)A'-\frac{1}{2}(q'-r')D-2B' & 2E'-D''+B+\frac{1}{2}(q-r)F\end{pmatrix}\partial\\&+\begin{pmatrix}0 & A-D+F\\ \frac{1}{2}(q-r)(A-D)-B & -2D'\end{pmatrix}\partial^2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

我们希望

$$[V,L]=L_*(KG)-L_*(JG)L\tag{2.6}$$

这里，K、J 是 Tu 谱问题(1.1)的 Lenard 算子对(1.4)；$G=(G^{(1)},G^{(2)})^T$ 是 Ω 上的任意光滑向量函数．

为此，选取待定的函数 A、B、D、E、F 为：

$$\left.\begin{aligned}A&=A(G)=\frac{1}{4}\left(-2G^{(1)}+\frac{1}{r}\partial\frac{q}{r}\partial G^{(1)}-2\frac{q}{r}G^{(2)}+\frac{1}{r}\partial^2G^{(2)}\right)\\B&=B(G)=\frac{q-r}{8r}\left(\partial\frac{q}{r}\partial G^{(1)}+\partial^2G^{(2)}\right)\\D&=D(G)=-\frac{1}{2}\left(G^{(1)}+\frac{q}{r}G^{(2)}\right)\\E&=E(G)=-\frac{1}{4}\left(\frac{q}{r}\partial G^{(1)}+\partial G^{(2)}\right)\\F&=F(G)=-\frac{1}{4r}\left(\partial\frac{q}{r}\partial G^{(1)}+\partial^2G^{(2)}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

从而，有

定理 2.4　设 $G^{(1)}(x)$、$G^{(2)}(x)$ 是 Ω 上的任二光滑函数，$G\triangleq(G^{(1)},G^{(2)})^T$. 那么对谱问题(2.1)而言，由其 Lenard 算子对 K、J 式生成的关于算子 $V=V(G)$ 的算子方程

$$[V,L]=L_*(KG)-L_*(JG)L\tag{2.8}$$

必有下述算子解

$$V=V(G)=\begin{pmatrix}E(G) & F(G)\\ B(G) & -E(G)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(G) & 0\\ 0 & D(G)\end{pmatrix}\partial,\tag{2.9}$$

其中 A、B、D、E、F 如(2.7)式所示．

证明 将 A、B、D、E、F 的表达式(2.7)依次代入(2.5)式的右端，经过较繁琐的计算，不难发现所得结果等于 $L_*(KG)-L_*(JG)L$.

定义 2.5 取 $G_{-1}=(-2,0)^T\in \mathrm{Ker}J$，由 $G_j=J^{-1}KG_{j-1}(j=0,1,2,\cdots)$ 所定义的序列 $\{G_j\}_{j=-1}^{\infty}$ 称为 Tu 谱问题的 Lenard 梯度递推序列；$X_m\triangleq JG_m(m=0,1,2,\cdots)$ 称为 Tu 谱问题的向量场；由向量场 X_m 产生的二阶 Tu 谱问题的非线性演化方程族 $u_t\equiv(q,r)_t^T=X_m(m=0,1,2\cdots)$ 称为 Tu 族演化方程．

前两个计算结果如下：

$$G_0=\begin{pmatrix}0\\ r\end{pmatrix},X_0=\begin{pmatrix}q_x\\ r_x\end{pmatrix};G_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}r^2\\ -\frac{1}{2}qr+\frac{1}{4}r_{xx}\end{pmatrix},X_1=\begin{pmatrix}-rr_x-qq_x+\frac{1}{4}(\frac{q}{r}r_{xx})_x\\ -qr_x-\frac{1}{2}(qr)_x+\frac{1}{4}r_{xxx}\end{pmatrix}.$$

特别指出，当 $q=\pm r$ 时，$u_t=X_1$ 便化约为著名的 KdV 型方程 $q_t=\frac{1}{4}q_{xxx}-2qq_x$.

定理 2.6 设 $\{G_j\}_{j=-1}^{\infty}$ 是 Tu 谱问题的 Lenard 递推序列；$V_{j-1}=V(G_{j-1})$（即(2.9)中的 G 代以 G_{j-1} 所得结果)，则算子 $W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}L^{m-j}$ 满足关系式

$$[W_m,L]=L_*(X_m),m=0,1,2,\cdots, \tag{2.10}$$

这里，X_m 是 Tu 谱问题的向量场.

证明 $[W_m,L]=\sum_{j=0}^{m}[V_{j-1},L]L^{m-j}=\sum_{j=0}^{m}(L_*(KG_{j-1})\cdot L^{m-j}-L_*(JG_{j-1})\cdot L^{m-j+1})=\sum_{j=0}^{m}(L_*(JG_j)L^{m-j}-L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1})=L_*(JG_m)-L_*(JG_{-1})L^{m+1}=L_*(X_m)$.

注 (2.10)中的算子 $W_m(m=0,1,2,\cdots)$ 构成向量场 X_m 的一串 Lax 算子，它们关于算子运算$[\cdot,\cdot]$组成一个算子 Lie 代数，这些结果将另文讨论．

定理 2.7 Tu 谱问题(2.1)的演化方程族 $u_t\equiv(q,r)_t^T=X_m$ 具有换位表示

$$L_t=[W_m,L],m=0,1,2,\cdots \tag{2.11}$$

其中，W_m 如(2.10)中所示．

证明

$$L_t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(q_t-r_t) & 0\\ -\frac{1}{2}(q_t'-r_t') & -\frac{1}{2}(q_t+r_t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\frac{1}{2}(q_t-r_t) & 0\end{pmatrix}\partial=L_*(u_t),$$

故

$$L_t-[W_m,L]=L_*(u_t)-L_*(X_m)=L_*(u_t-X_m).$$

又 L_* 是单射，所以 $u_t=X_m\Leftrightarrow L_t=[W_m,L]$.

推论 2.8 Tu 谱问题的演化方程族 $u_t\equiv(q,r)_t^T=X_m(m=0,1,2,\cdots)$ 是 $\psi_x=U\psi$ 与 $\psi_t=W_m\psi$ 的自然相容性条件．

推论 2.9 位势 $u\equiv(q,r)_t^T$ 满足驻定的非线性 Tu 系统

$$X_N+a_1X_{N-1}+\cdots+a_NX_0=0,N=0,1,2,\cdots \tag{2.12}$$

之充分必要条件是

$$[W_N+a_1W_{N-1}+\cdots+a_NW_0,L]=0. \tag{2.13}$$

即算子 $W_N+\sum_{j=1}^{N}a_jW_{N-j}$ 与谱算子 L 可换．其中，$a_1,\cdots,a_N$ 均为常数；$X_0,X_1,\cdots,X_N$ 为 Tu 谱问题的向量场；$W_0,W_1,\cdots,W_N$ 如(2.10)中所示．

证明 $[W_N+\sum_{j=1}^{N}a_jW_{N-j},L]=L_*(X_N)+\sum_{j=1}^{N}a_jL_*(X_{N-j})=L_*(X_N+\sum_{j=1}^{N}a_jX_{N-j})$，又由 L_* 的单性，立知本推论正确．

此外，我们自然想到 Tu 谱问题(1.1)的"非线性化"后所产生的 Liouville 完全可积系统．关于这一点，限于篇幅，将在另一文中阐述．再有，本文是首次涉及带 ∂ 的矩阵 Gateaux 导数算子 L_*，故而换位表示的计算量必然增大．

作者由衷地感谢审稿人提出的宝贵意见．

参 考 文 献

1 屠规彰．一族新的可积系及其 Hamilton 结构．中国科学 A 辑，1988，12：1243～1252.

2 Cao Cewen. Nonlinearization of the Lax system for the AKNS hierarchy. Science in China, Series A, 1990, 33 (5): 528～536

3 曹策问．保谱方程的换位表示．科学通报，1989，34(10)：723～724.

乔志军，男，1964 年生，副教授，研究方向：孤立子与可积动力系统．

Commutator Representations for the Tu Hierarchy of Evolution Equations

Qiao Zhijun

(*Department of Math.*, *Liaoning University*, *Shenyang*, 110036)

Abstract

In this article, by making use of the eigenvaluable functional gradient method, we first give the Lenard's operators pair for the Tu spectral problem, then through resolving a key operator equation obtain the commutator representations of evolution equations for the Tu spectral problem.

Keywords: Tu spectral problem; Pair of Lenard's operators; Commutator representations

AMS(1991)Subject classifications: 35Q53, 58F07