辽宁大学学报 JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
自然科学版 Natural Sciences Edition
第22卷 第4期 1995年 Vol.22 No 4 1995

几个谱问题及相关的发展方程族*

乔志军
(数 学 系)

摘 要 在这篇文章中，我们给出几个谱问题及相应的保谱发展方程族.

关键词 谱问题；发展方程族 保谱发展方程，非线性.

大家知道，依反散射方法[1]，从一个适当给定的谱问题出发，我们可以获得一保谱可积发展方程族. 1989年，Tu Guizhang[2]提出了一种所谓Loop代数格式，以此来产生Liouville可积的保谱发展方程族、的确，根据Tu的方法，许多保谱可积发展方程族被导出[3,4]、

本文打算利用由Fuchssteiner[5]，Fokas and Anderson[6]发明的谱梯度法，提供几个新的谱问题及相应的非线性发展方程族.

1 考虑谱问题

$$y_x = \begin{pmatrix} \alpha_1 v & \alpha_2 u + \alpha_3\lambda \\ \alpha_4 u - \alpha_5\lambda & -\alpha_1 v \end{pmatrix} y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

这里λ是谱参数，u和v是两个位势，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$是一些常数，且满足关系$\alpha_3\alpha_4 = \varepsilon\alpha_2\alpha_5$($\varepsilon = \pm 1$)及$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \neq 0$. 不难算得谱参数$\lambda$关于位势u，$v$的谱梯度$\nabla\lambda$：

$$\nabla\lambda \triangleq \begin{pmatrix} \delta\lambda/\delta u \\ \delta\lambda/\delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 y_2^2 - \alpha_4 y_1^2 \\ 2\alpha_1 y_1 y_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

从(2)和(1)，我们有

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\delta\lambda}{\delta u}\right)_x = -2\lambda(\alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4)y_1y_2 - 2\alpha_1 v(\alpha_2 y_2^2 + \alpha_4 y_1^2) \\ &\left(\frac{\delta\lambda}{\delta v}\right)_x = 2\alpha_1 u(\alpha_2 y_2^2 + \alpha_4 y_1^2) + 2\lambda\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_3(\alpha_2 y_2^2 - \varepsilon\alpha_4 y_1^2) \\ &(\alpha_2 y_2^2 + \alpha_4 y_1^2)_x = 4\alpha_2\alpha_4 u y_1 y_2 + 2\lambda(\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2\alpha_5)y_1y_2 - 2\alpha_1 v(\alpha_2 y_2^2 - \alpha_4 y_1^2) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

本文1995年2月20日收到
*辽宁省教委自然科学基金及辽大青年科学基金资助课题

下面，我们对 $\varepsilon=-1$ 和 $\varepsilon=1$ 两种情况分别讨论.

(i) 对 $\varepsilon=-1$，那么 $\alpha_3\alpha_4=-\alpha_2\alpha_5$ 成立. 此时，我们只要选取下列二算子($\partial=\partial/\partial x$)

$$K=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(\alpha_3\alpha_4)^{-1}\partial\frac{1}{v}\partial\frac{1}{v}\partial+(\alpha_3\alpha_4)^{-1}\alpha_1^2\partial & -\alpha_3^{-1}\alpha_2\partial\frac{u}{v} \\ -\alpha_3^{-1}\alpha_2\frac{u}{v}\partial & -\alpha_3^{-1}\alpha_2\partial \end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix} 0 & \partial\frac{1}{v} \\ \frac{1}{v}\partial & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

作为(1)的 Lenard 算子对，则由(3)我们肯定获得

$$K\nabla\lambda=\lambda\cdot J\nabla\lambda \tag{5}$$

现在，由 K, J 的表达式(4)，递推定义 Lenard 梯度序列 $\{G_j\}$ 如下：

$$\begin{cases} G_0=\alpha(1,v)^T\in KerJ \\ G_j=J^{-1}KG_{j-1}=(J^{-1}K)^jG_0, \quad j=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{6}$$

这里 α 是一个任意的常数. 由 Lenards 梯度序列(6)产生的非线性发展方程族

$$(u,v)_t^T=KG_{j-1}=J(J^{-1}K)^jG_0, \quad j=1,2,\cdots, \tag{7}$$

称为(1)的一族演化方程($\varepsilon=-1$). 前几个为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t=KG_0=-\alpha\alpha_3^{-1}\alpha_2\begin{bmatrix} u_x \\ v_x \end{bmatrix} \quad (\text{平凡情况}) \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t=KG_1=\alpha\alpha_3^{-2}\alpha_2^2\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\alpha_2\alpha_4)^{-1}(\frac{v_{xx}}{v})_x-(\alpha_2\alpha_4)^{-1}\alpha_1^2vv_x+2uu_x \\ 2uv_x+vu_x \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t=KG_2=-\alpha\alpha_3^{-3}\alpha_2^3\begin{bmatrix} \frac{3}{4}(\alpha_2\alpha_4)^{-1}(\frac{(uv_x)_x}{v})_x+\frac{1}{4}(\alpha_2\alpha_4)^{-1}u_{xxx} \\ \qquad -\frac{3}{2}(\alpha_2\alpha_4)^{-1}\alpha_1^2(uv^2)_x+3u^2u_x \\ \frac{1}{4}(\alpha_2\alpha_4)^{-1}u_{xxx}-\frac{3}{2}(\alpha_2\alpha_4)^{-1}\alpha_1^2v^2v_x+3u(uv)_x \end{bmatrix} \tag{10}$$

很明显地，当 u=0 时，最后一个方程可化约至著名的 Mkdv 型方程 $v_t=-\alpha\alpha_3^{-3}\alpha_4^{-1}\alpha_2^2(\frac{1}{4}v_{xxx}-\frac{3}{2}\alpha_1^2v^2v_x)$.

(ii) 对 $\varepsilon=1$，那么 $\alpha_3\alpha_4=\alpha_2\alpha_5$ 成立. 在这种情形下，只要选择 Lenard 算子对 K, J 为

$$K=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\alpha_3\alpha_4')^{-1}\alpha_1\partial-2(\alpha_3\alpha_4)^{-1}\alpha_1^3v\partial^{-1}v & 2\alpha_3^{-1}\alpha_1\alpha_2v\partial^{-1}u\\ 2\alpha_3^{-1}\alpha_1\alpha_2u\partial^{-1}v & \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_3)^{-1}\alpha_2\partial-2(\alpha_1\alpha_3)^{-1}\alpha_2^2\alpha_4u\partial^{-1}u\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \tag{11}$$

我们便获得

$$K\nabla\lambda=\lambda\cdot J\nabla\lambda. \tag{12}$$

显然，如不计常数因子，(11)即是著名的 AKNS 方程族的 Lenard 算子对，因而对 $\varepsilon=1$ 的情形，(1)的演化方程族应为 AKNS 族.

2　考虑谱问题

$$y_x=\begin{pmatrix}\lambda+w & u\\ \lambda v & -\lambda-w\end{pmatrix}y,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}, \tag{13}$$

则：

$$\nabla\lambda\triangleq\begin{pmatrix}\frac{\delta\lambda}{\delta u}\\ \frac{\delta\lambda}{\delta v}\\ \frac{\delta\lambda}{\delta w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2^2\\ -\lambda y_1^2\\ 2y_1y_2\end{pmatrix}. \tag{14}$$

选取下述

$$K=\begin{pmatrix}0&\partial-2w&0\\ \partial+2w&0&0\\ \frac{1}{2}u\partial&\frac{1}{2}v\partial&\frac{1}{2}w\partial\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&2&-u\\-2&0&v\\u&-v&-\partial\end{pmatrix}, \tag{15}$$

为(13)的 Lenard 算子对，那么

$$K\nabla\lambda=\lambda\cdot J\nabla\lambda. \tag{16}$$

(13)的 Lenard 递推序列 $\{G_j\}$ 由下式给出：

$$\begin{cases}G_0=\alpha(v,u,2)\in KerJ, & \alpha=const.\\ KG_{j-1}=JG_j, & j=1,2,\cdots,\end{cases} \tag{17}$$

(17)产生(13)的保谱发展方程族：

$$(u,v,w)_t^T=KG_j=K(J^{-1}K)^jG_0,\quad j=0,1,2,\cdots. \tag{18}$$

其代表方程为

$$u_t=\alpha(u_x-2uw),\ v_t=\alpha(v_x+2vw),\ w_t=\frac{1}{2}\alpha(uv)_x. \tag{19}$$

在(13)中，如果取 $w=-\frac{1}{2}uv$，那么(13)便是文献〔7〕中所研究的谱问题，其保谱演化方程族，Lax 表示及非线性化后所产生的完全可积系统与对合解详见文〔7〕.

参 考 文 献

1 M. J. Ablowitz and H. Segur, Soliton and inverse scattering transform (SIAM, Philadelphia, 1981)

2 Tu Guizhang, Sci. China A, 1989;32:142～152

3 Tu Guizhang and Meng Dazhi, Acta Math. Appl Sin. 1989;5:89～96

4 Tu Guizhang, J. Phys. A: Math. Gen. 1989;22:2375～2382

5 B. Fuchssteiner, Applications of spectral gradient methods to nonlinear evolution equations, preprint, 1979

6 A. S. Fokas and R. L. Anderson, J. Math. Phys, 1982;23:1066～1076

7 Qiao Zhijun, Phys. Lett. A, 1994;192:316～326

Several Spectral Problems and Corresponding Evolution Equation Hierarchies

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

ABSTRACT In this paper, we have presented several spectral problems and the corresponding hierarchies of isospectral evdution equations.

KEY WORDS Spectral problem, Evolution equations.