①

辽宁大学学报
自然科学版
第21卷 第3期 1994年

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.21 №3 1994

MkdV方程族的换位表示及其相应的Liouville完全可积系统 *

94,21(3)
1-11

乔志军 单昭祥
（数学系） （财会系）

摘 要 本文给出了MkdV方程族的换位表示及一个有限维对合系，并讨论了Bargmann约束和C. Neumann约束及其相应的定态MkdV系统. 最后，我们得到MkdV方程族的对合解.

关键词 MkdV方程族；换位表示；对合系；对合解；Bargmann约束；C. Neumann约束.

MKdv方程 O175.29

0 引 言

自从曹策问[1]教授阐明保谱方程之换位表示和Lax组非线性化[2]的理论以来，其研究得到迅速发展[3-10]. 顾祝全[11]对胡星标提出的一个谱问题[12]

$\varphi_x=\begin{pmatrix} u & \lambda+v \\ -1-\lambda^{-1}v & -u \end{pmatrix}\varphi$ 进行了研究，在约化条件$v\equiv 0$下，给出MkdV方程族的换位表示及一个Liouville完全可积系统. 本文通过研究谱问题（Zakharov—Shabat谱问题的特款）：

$$\varphi_x=\begin{pmatrix} -i\lambda & u \\ u & i\lambda \end{pmatrix}\psi \tag{1}$$

导出MkdV方程族的换位表示及一个有限维对合系（不同与文〔11〕，但与文〔11〕的结果是等价的，见注2及注3），并讨论Bargmann约束和C. Neumann约束及其相应的定态MkdV系统，最后，由可换流的对合解给出MkdV方程族的解的表示.

在（1）中，$\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$；$u=u(x,t)$是位势函数且在无穷远处衰减为零或以T为周期；λ为谱参数；$i=\sqrt{-1}$，$\psi_x=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$，$x\in\Omega$，$\Omega=(-\infty,+\infty)$或$(0,T)$.

1 谱梯度法与MkdV族的生成

本文1993年3月11日收到
* 辽宁省教委青年自然科学基金资助项目.

众所周知，谱（1）若按通常的关于谱参数λ的幂级数展开方法[13]，那么（1）不可能产生保谱演化方程族. 然而，有趣的是若按谱梯度法，则（1）产生的演化方程族恰好是MkdV族，从而为MkdV族的求解找到另一途径.

引理1 设λ是（1）的一个特征值，那么λ对位势u的泛函梯度$\nabla\lambda$为

$$\nabla\lambda \triangleq \delta\lambda/\delta u=(\psi_2^2-\psi_1^2)\cdot\left(\int_\Omega 2i\psi_1\psi_2\,dx\right)^{-1} \tag{2}$$

其中，$\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$ 是相应于λ 的特征函数：

$$\begin{cases}\psi_{1x}=-i\lambda\psi_1+u\psi_2\\ \psi_{2x}=u\psi_1+i\lambda\psi_2\end{cases}$$

命题1 设λ为（1）的一个特征值，取算子$K=-\frac{1}{4}\partial^3+\partial u\partial^{-1}u\partial$，$J=\partial$，那么$\nabla\lambda$满足线性关系式：

$$K\nabla\lambda=\lambda^2 J\nabla\lambda \tag{3}$$

其中，$\partial=\partial/\partial x$, $\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1$，以下雷同.

证明 直接验证并结合（1），即知（3）成立.

使（3）成立的算子对K、J，仅与位势u，∂及∂^{-1}有关，它们称为（1）的Lenard算子对. 一般来讲，使（3）成立的K、J并不唯一，但当要求J为Hamilton算子且其阶数（出现在J中∂的最高次数）为最低时，K、J是唯一的.

令 $\mathscr{L}=J^{-1}K=-\frac{1}{4}\partial^2+u\partial^{-1}u\partial$，现递推定义（1）的Lenard梯度序列$\{G_{2j}\}$：$G_2=\alpha=$const. $G_{2j}=\mathscr{L}G_{2(j-1)}$ $(j=0,1,2,\cdots)$. 可以证明G_{2j}为u及其导数的多项式. $X_{2j}(u)\triangleq JG_{2j}=KG_{2(j-1)}$称为（1）的向量场. 前几个计算结果为：

$$G_0=\alpha u,\quad X_0=\alpha u_x;\quad G_2=-\frac{1}{4}\alpha u_{xx}+\frac{1}{2}\alpha u^3,\quad X_2=-\frac{1}{4}\alpha u_{xxx}+\frac{3}{2}\alpha u^2u_x \tag{4}$$

由向量场$X_{2j}(u)$产生的非线性发展方程$u_t=X_{2j}(u)$称为（1）的演化方程族. 从（4）可看出，取$\alpha=4$时，$u_t=X_2(u)$便是著名的MkdV方程$u_t-6u^2u_x+u_{xxx}=0$. 因此，（1）的演化方程族$u_t=X_{2j}(u)$ 给出MkdV族.

注1 这里得到的MkdV方程族纯粹是靠使（3）成立的算子对K、J（它们仅与u、∂及∂^{-1}有关，而与其它因素无关）通过计算向量场X_{2j}而获得的. 由于（3）中含谱梯度$\nabla\lambda$，所以此种获得孤子方程的方法就是所谓的谱梯度法[14]. 一般地说，如果用谱参数λ的幂级数展开法能获得演化方程族的话，那么用"谱梯度法"必然也获得，反之不然，比如本文中的MkdV族. 因而，就产生保谱方程族而言，谱梯度法比幂级数展开法更广一些. 谱梯度法的特点在于：计算简洁、形式整齐而且不需考虑辅助谱问题. 但Lenard算子对K、J的获得主要依靠其本身的性质、$\nabla\lambda$的具体形式

以及一些计算技巧．关于该法产生孤子方程的一般理论以及换位表示的新结构，我们已得到一定结果，将在另一文中阐述．

2　MkdV族的换位表示

改写（1）为

$$L(u)\psi \equiv \begin{pmatrix} i\partial & -iu \\ iu & -i\partial \end{pmatrix} \psi = \lambda\psi \tag{5}$$

引理2　对于以（5）定义的谱算子$L=L(u)$，其微分映射为

$$L_*(\zeta) \triangleq \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} L(u+\varepsilon\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & -i\zeta \\ i\zeta & 0 \end{pmatrix},\quad \forall \zeta \tag{6}$$

且L_*为单态．

证明　显然．

设$G(x)$是Ω上任意给定的光滑函数，考察由Lenard算子对K、J生成的关于微分算子$V=V(G)$的算子方程

$$[V,\ L] = L_*(KG) - L_*(JG)L^2 \tag{7}$$

其中，$[\cdot,\cdot]$为Lie括号；$L=L(u)$，特别注意，（7）中有L^2项，而不是通常所考虑的L．

定理1　设$G(x)$为Ω上任意给定的光滑函数，则算子方程（7）有算子解

$$V=V(G)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4}G_{xx}+u\partial^{-1}uG_x \\ -\frac{1}{4}G_{xx}+u\partial^{-1}uG_x & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} -i\partial^{-1}uG_x & \frac{1}{2}iG_x \\ -\frac{1}{2}iG_x & i\partial^{-1}uG_x \end{pmatrix} L \tag{8}$$

证明　令 $V=V_1+V_2L$；$V_1=\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$，$V_2=\begin{pmatrix} B & C \\ -C & -B \end{pmatrix}$，其中 $A=A(G)$, $B=B(G)$, $C=C(G)$ 皆为待定的函数．

L 可写为 $L=L_1+L_2\partial$

$$L_1=\begin{pmatrix} 0 & -iu \\ iu & 0 \end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};\ \partial = L_2^{-1}(L-L_1)$$

做V与L的Lie括号$[V,\ L]$，经计算我们有

$$[V,L] = -L_1V_1 - L_2V_{1x} + L_2V_1L_2^{-1}L_1 + (-L_1V_2 - L_2V_{2x} + L_2V_2L_2^{-1}L_1)L +$$

$$+(V_2-L_2V_2L_2^{-1})L^2$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -iA_x\\ iA_x & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-iB_x-2iuC & -iC_x-2iuB+2A\\ -iC_x-2iuB+2A & -iB_x-2iuC\end{pmatrix}L+$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 2C\\ -2C & 0\end{pmatrix}L^2$$

因此，要使（7）式成立，我们只须选取

$$A(G)=-\frac{1}{4}G_{xx}+u\partial^{-1}uG_x,\ B(G)=-iu\partial^{-1}G_x,\ C(G)=\frac{1}{2}iG_x\ .$$

定理2　设$\{G_{2j}\}$为（1）的Lenard梯度序列，让$V_{2j}=V(G_{2j})$，$W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{2(j-1)}L^{2(m-j)}$，那么

$$[W_m,\ L]=L_*(X_{2m})\qquad m=0,1,2,\cdots\tag{9}$$

证明　$[W_m,\ L]=\sum_{j=0}^{m}[V_{2(j-1)},\ L]L^{2(m-j)}$

$$=\sum_{j=0}^{m}\{L_*(KG_{2(j-1)})-L_*(JG_{2(j-1)})L^2\}L^{2(m-j)}$$

$$=L_*(X_{2m})\ .$$

推论1　MkdV方程族$u_t=X_{2m}(u)$具有换位表示$L_t=[W_m,\ L]$，$m=0,1,2,\cdots$. 亦即$u_t=X_{2m}(u)$是$L\psi=\lambda\psi$与$\psi_t=W_m\psi$的自然相容性条件. 这里的算子L、W_m与文[11]不同.

推论2　$u(x)$为定态MkdV系统

$$X_{2N}+c_1X_{2N-2}+\cdots+c_NX_0=0\tag{10}$$

的解的充要条件是

$$[W_N+c_1W_{N-1}+\cdots+c_NW_0,\ L]=0\tag{11}$$

其中，$c_1,\cdots,c_N$为常数.

注2　对于谱问题（1），我们作规范变换

$$\psi=T\varphi\equiv\begin{pmatrix}1 & i\lambda\\ 1 & -i\lambda\end{pmatrix}\varphi\tag{12}$$

则（1）恰变为文[11]研究过的谱问题

$$\varphi_x=\begin{pmatrix}u & \widetilde{\lambda}\\ -1 & -u\end{pmatrix}\varphi,\ \widetilde{\lambda}=\lambda^2\ .\tag{13}$$

反之，（13）通过（12）的逆变换变为（1）. 因此（1）与（13）是规范等价的.

从而本文的推论1与文〔11〕中的定理2应是等价的.

3　一个有限维对合系

在辛空间$(R^{2N},\ dp\wedge dq)$中，二函数$F,\ G$的标准Poisson括号定义为[15]

$$(F,\ G)=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right)=<F_q,\ G_p>-<F_p,\ G_q>.$$

F、G称为对合，如果$(F,\ G)=0$.

现构造函数系$\{F_m\}_0^\infty$：

$$F_m=i<\wedge^{2m+1}p,\ q>-\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{m}(<\wedge^{2j}p,\ p>-<\wedge^{2j}q,\ q>).$$
$$(<\wedge^{2(m-j)}p,\ p>-<\wedge^{2(m-j)}q,\ q>)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\begin{vmatrix}<\wedge^{2j-1}p,\ p>+<\wedge^{2j-1}q,\ q> & 2<\wedge^{2(m-j)+1}p,\ q>\\ 2<\wedge^{2j-1}p,\ q> & <\wedge^{2(m-j)+1}p,\ p>+<\wedge^{2(m-j)+1}q,q>\end{vmatrix}\tag{14}$$

其中，$\wedge=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$是$N$个互不相同的常数；$p=(p_1,\cdots,p_N)^T$，$q=(q_1,\cdots,q_N)^T$；$<\bullet,\bullet>$表示$R^N$中标准内积.

引理3　$<\dfrac{\partial F_k}{\partial q},\ \dfrac{\partial F_l}{\partial p}>=<\dfrac{\partial F_l}{\partial q},\ \dfrac{\partial F_k}{\partial p}>$，$\forall k,\ l\in Z^+$.

证明

$$\frac{\partial F_k}{\partial q}=i\wedge^{2k+1}p+\sum_{j=0}^{k}(<\wedge^{2j}p,p>-<\wedge^{2j}q,q>)\wedge^{2(k-j)}q$$
$$+\sum_{j=1}^{k}(<\wedge^{2j-1}p,p>+<\wedge^{2j-1}q,q>)\wedge^{2(k-j)+1}q$$
$$-2<\wedge^{2j-1}p,q>\wedge^{2(k-j)+1}p\tag{15}$$

$$\frac{\partial F_l}{\partial p}=i\wedge^{2l+1}q-\sum_{s=0}^{l}(<\wedge^{2s}p,p>-<\wedge^{2s}q,q>)\wedge^{2(l-s)}p$$
$$+\sum_{s=1}^{l}(<\wedge^{2s-1}p,p>+<\wedge^{2s-1}q,q>)\wedge^{2(l-s)+1}p$$
$$-2<\wedge^{2s-1}p,q>\wedge^{2(l-s)+1}q\tag{16}$$

将上边二式左右两端分别做内积，经详细计算并整理，便知内积$<\dfrac{\partial F_k}{\partial q},\ \dfrac{\partial F_l}{\partial p}>$可表为若干个关于$k$、$l$对称的项之和．从而$<\dfrac{\partial F_k}{\partial q},\ \dfrac{\partial F_l}{\partial p}>$关于$k$、$l$对称.

定理3　以（14）定义的Hamilton系统$(R^{2N},\ dp\wedge dq,\ F_m)$在Liouville意义下完全可积.

证明　$(F_k,\ F_l)=<\frac{\partial F_k}{\partial q},\ \frac{\partial F_l}{\partial p}>-<\frac{\partial F_l}{\partial q},\ \frac{\partial F_k}{\partial p}>=0.$

又$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$互不相同，故由它们构成的Vandemondre行列式不为零，于是存在区域$\widetilde{\Omega}\subseteqq R^{2N}$，使得$N$个1一形式$dF_0$，$dF_1$，…，$dF_{N-1}$在$\widetilde{\Omega}$上到处线性无关. 从而Hamilton系统$(F_m)$在Liouville意义下完全可积（严格地说，在$\widetilde{\Omega}\subseteqq R^{2N}$上完全可积）.

4　谱（1）的Bargmann约束与其非线性化

设$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$是（1）的$N$个特征值，则（1）可浓缩地写成

$$\begin{cases} q_x=-i\wedge q+up \\ p_x=uq+i\wedge p \end{cases}\tag{17}$$

其中，$q=(q_1,\cdots,q_N)^T$，$p=(p_1,\cdots,p_N)^T$；$(q_j,\ p_j)^T$是相应于λ_j的特征函数；$\wedge=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$.

取$\alpha=1$，今考察约束条件

$$G_0=\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\cdot\nabla\lambda_j,\quad \gamma_j\triangleq\int_\Omega 2ip_jq_j\,dx\tag{18}$$

则（18）产生Bargmann约束[3]：

$$u=<p,\ p>-<q,\ q>\tag{19}$$

这里$<\bullet,\bullet>$代表R^N中之标准内积.

在Bargmann约束（19）下，（17）被非线性为一个三次的Hamilton系统

$$(H):\ \begin{cases} q_x=-i\wedge q+(<p,\ p>-<q,\ q>)p=-\frac{\partial H}{\partial p} \\ p_x=(<p,\ p>-<q,\ q>)q+i\wedge p=\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}\tag{20}$$

其中，Hamilton函数H为

$$H=i<\wedge p,\ q>-\frac{1}{4}(<p,\ p>-<q,\ q>)^2.\tag{21}$$

定理4　Hamilton系统（20）Liouville完全可积.

证明　注意$F_0\equiv H$，再由定理3可知（20）具有对合系$\{F_m\}$，故（20）在Liouville意义下完全可积.

定理5　设$(q,\ p)^T$是Hamilton系统（20）的一个解，那么$u=<p,\ p>-$

$-<q,q>$满足一个定态的**MkdV**方程

$$X_{2N}+\alpha_1 X_{2N-2}+\cdots+\alpha_N X_0=0 \tag{22}$$

其中，$\alpha_1,\cdots,\alpha_N$是适当选取的运动常数.

证明 用算子$(J^{-1}K)^k=\mathscr{L}^k$作用（19）式的两端，我们得到

$$G_{2k}+\beta_2 G_{2(k-2)}+\cdots+\beta_k G_0+\beta_{k+1}G_{-2}=<\wedge^{2k}p,p>-<\wedge^{2k}q,q> \tag{23}$$

这里，$\beta_2,\cdots,\beta_{k+1}$皆为运动常数.

考察多项式

$$P(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\lambda_j^2)\equiv p_0\lambda^N+\cdots+p_{N-1}\lambda+p_N,\quad p_0=1 \tag{24}$$

让算子$J\sum_{k=0}^{N}p_{N-k}\cdot$作用（23）的两端，经整理我们就有（22），其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_N$由$\beta_2,\cdots,\beta_{N+1}$及$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$确定.

注3 由于谱问题（1）与谱问题（13）存在着规范变换（12），所以二者在各自的**Bargmann**约束下的非线性化系统应是等价的. 从而本文中的**Hamilton**系统(F_m)（包括$(F_0)\equiv(H)$）应与文〔11〕中的H_m存在规范等价变换.

5 C.Neumann约束与一个定态MkdV系统

取$\alpha=1$，我们考虑**C. Neumann**约束[3]

$$G_{-2}=\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\cdot\nabla\lambda_j,\quad \gamma_j\triangleq\int_\Omega 2ip_jq_j\,dx\,. \tag{25}$$

即 $$1=<p,p>-<q,q> \tag{26}$$

用逆归算子$\mathscr{L}$作用（26），得到

$$u=<\wedge^2 p,p>-<\wedge^2 q,q>. \tag{27}$$

于是在**C. Neumann**约束（26）和（27）下，（17）被非线性化为一个**C. Neumann**系统

$$(C):\ \begin{cases} q_x=-i\wedge q+(<\wedge^2p,p>-<\wedge^2q,q>)p \\ p_x=(<\wedge^2p,p>-<\wedge^2q,q>)q+i\wedge p\end{cases} \tag{28}$$

定理6 设$(q,p)^T$是**C. Neumann**系统（28）的一个解，那么$u=<\wedge^2p,p>-<\wedge^2q,q>$满足一个定态的**MkdV**方程

$$X_{2N}+\alpha_1 X_{2N-2}+\cdots+\alpha_N X_0=0. \tag{29}$$

证明 用算子$\mathscr{L}$作用（27）k次后，我们有

$$G_{2k}+\beta_2 G_{2(k-2)}+\cdots+\beta_k G_0+\beta_{k+1}G_{-2}=<\wedge^{2(k+1)}p,p>$$

$$-\langle \wedge^{2(k+1)}q,\ q\rangle \tag{30}$$

其中，$\beta_2, \cdots, \beta_{k+1}$ 均为任选的运动常数.

引入多项式

$$P(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}\lambda(\lambda-\lambda_j^2)\equiv p_0\lambda^{N+1}+\cdots+p_{N-1}\lambda^2+p_N\lambda,\ p_0=1 \tag{31}$$

以算子 $J\sum_{k=0}^{N}p_{N-k}\cdot$ 作用（30）的两端，即可获得（29）. 证毕.

6 F_m 的生成与MkdV方程族的对合解

考虑F_m 一流的正则方程：

$$(F_m):\begin{pmatrix} q\\ p\end{pmatrix}_{t_m}=\begin{pmatrix} 0 & -I_N\\ I_N & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial F_m/\partial q\\ \partial F_m/\partial p\end{pmatrix},\ (m=0,1,2,\cdots,\ t_0=x) \tag{32}$$

其中I_N 是$N\times N$ 单位矩阵. 设(F_m)的初值问题的解算子为$g_m^{t_m}$，由定理3，(F_m)与$(F_0)\equiv(H)$相容，即流g_0^x 与流$g_m^{t_m}$可换. 故定义

$$\begin{pmatrix} q(x,t_m)\\ p(x,t_m)\end{pmatrix}\triangleq g_m^{t_m}g_0^x\begin{pmatrix} q(0,0)\\ p(0,0)\end{pmatrix} \tag{33}$$

为相容系统(F_0)与(F_m)的对合解.

定理7 设$(q(x,t_m),\ p(x,t_m))^T$ 是可换流(F_0)与(F_m)的对合解，那么

1）在Bargmann约束$u=\langle p,p\rangle-\langle q,q\rangle$下，$(F_0)$、$(F_m)$ 可以分别被化至为高阶MkdV方程（36）的Lax表示的空间部分（34）与时间部分（35）（u作为它们的位势，c_j为相互独立的运动常数）：

$$\begin{pmatrix} q\\ p\end{pmatrix}_x=\begin{pmatrix} -i\wedge q+up\\ uq+i\wedge p\end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} q\\ p\end{pmatrix}_{t_m}=(W_m+c_1W_{m-1}+\cdots+c_mW_0)\begin{pmatrix} q\\ p\end{pmatrix} \tag{35}$$

其中，诸$W_j(j=0,1,\cdots,m)$如定理2中所述.

2）$u(x,t_m)=\langle p(x,t_m),\ p(x,t_m)\rangle-\langle q(x,t_m),\ q(x,t_m)\rangle$满足高阶MkdV方程

$$u_{t_m}=X_{2m}+c_1X_{2(m-1)}+\cdots+c_mX_0,\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{36}$$

证明 $(F_0)\equiv(H)$ 为（34）是显然的.

令$A_k=\langle\wedge^{2k}p,\ p\rangle-\langle\wedge^{2k}q,\ q\rangle$，由（23）得

$$A_k=\sum_{s=0}^{k+1}c_sG_{2(k-s)},\quad c_0=1,\ c_1=0,\ c_j=\mathrm{const}. \tag{37}$$

经一系列详细计算，我们不难算得（注意$A_{-1}\triangleq G_{-2}=1$，$\partial^{-1}0\triangleq 1$）：

$$\sum_{j=0}^{m}(-\frac{1}{4}A_{j-1,xx}+u\partial^{-1}uA_{j-1,x})\Lambda^{2(m-j)}p-i\partial^{-1}uA_{j-1,x}\Lambda^{2(m-j)+1}q$$
$$+\frac{1}{2}iA_{j-1,x}\Lambda^{2(m-j)+1}p$$
$$=-i\Lambda^{2m+1}q+\sum_{s=0}^{m}(<\Lambda^{2s}p,p>-<\Lambda^{2s}q,q>)\ \Lambda^{2(m-s)}p$$
$$+\sum_{s=1}^{m}2<\Lambda^{2s-1}p,q>\Lambda^{2(m-s)+1}q-(<\Lambda^{2s-1}p,p>$$
$$+<\Lambda^{2s-1}q,q>)\ \Lambda^{2(m-s)+1}p$$
$$=-\frac{\partial F_m}{\partial p} \tag{38}$$

$$\sum_{j=0}^{m}(-\frac{1}{4}A_{j-1,xx}+u\partial^{-1}uA_{j-1,x})\Lambda^{2(m-j)}q-\frac{1}{2}iA_{j-1,x}\Lambda^{2(m-j)+1}q$$
$$+i\partial^{-1}uA_{j-1,x}\Lambda^{2(m-j)+1}p$$
$$=i\Lambda^{2m+1}p+\sum_{j=0}^{m}(<\Lambda^{2j}p,p>-<\Lambda^{2j}q,q>)\ \Lambda^{2(m-j)}q$$
$$+\sum_{j=1}^{m}(<\Lambda^{2j-1}p,p>+<\Lambda^{2j-1}q,q>)\Lambda^{2(m-j)+1}q$$
$$-2<\Lambda^{2j-1}p,q>\Lambda^{2(m-j)+1}p$$
$$=\frac{\partial F_m}{\partial q} \tag{39}$$

在上述计算过程中用到（34）、$\mathscr{L}A_{j-1}=A_j$、$-i\partial^{-1}uA_{j-1,x}=2<\Lambda^{2j-1}p,q>$及 $-\frac{1}{2}iA_{j-1,x}=<\Lambda^{2j-1}p,p>+<\Lambda^{2j-1}q,q>$.

将（37）代入（38）、（39）两式有

$$q_{t_m}=-\frac{\partial F_m}{\partial p}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{s=0}^{j}c_s\{(-\frac{1}{4}G_{2(j-1-s),xx}+u\partial^{-1}uG_{2(j-1-s),x})\Lambda^{2(m-j)}p$$
$$-i\partial^{-1}uG_{2(j-1-s),x}\Lambda^{2(m-j)+1}q+\frac{1}{2}iG_{2(j-1-s),x}\Lambda^{2(m-j)+1}p\}$$
$$=\sum_{s=0}^{m}c_s\sum_{k=0}^{m-s}\{(-\frac{1}{4}G_{2(k-1),xx}+u\partial^{-1}uG_{2(k-1),x})\Lambda^{2(m-s-k)}p$$

$$-i\partial^{-1}uG_{2(k-1),x}\Lambda^{2(m-s-k)+1}q+\frac{1}{2}iG_{2(k-1),x}\Lambda^{2(m-s-k)+1}p\}\tag{40}$$

$$p_{t_m}=\frac{\partial F_m}{\partial q}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{s=0}^{j}c_s\{(-\frac{1}{4}G_{2(j-1-s),xx}+u\partial^{-1}uG_{2(j-1-s),x})\Lambda^{2(m-j)}q$$

$$-\frac{1}{2}iG_{2(j-1-s),x}\Lambda^{2(m-j)+1}q+i\partial^{-1}uG_{2(j-1-s),x}\Lambda^{2(m-j)+1}p\}$$

$$=\sum_{s=0}^{m}c_s\sum_{k=0}^{m-s}\{(-\frac{1}{4}G_{2(k-1),xx}+u\partial^{-1}uG_{2(k-1),x})\Lambda^{2(m-s-k)}q$$

$$-\frac{1}{2}iG_{2(k-1),x}\Lambda^{2(m-k-s)+1}q+i\partial^{-1}uG_{2(k-1),x}\Lambda^{2(m-s-k)+1}p\}\tag{41}$$

综合（40）、（41）两式立得：

$$\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}_{t_m}=\sum_{s=0}^{m}c_s\sum_{k=0}^{m-s}V_{2(k-1)}L^{2(m-s-k)}\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}=\sum_{s=0}^{m}c_sW_{m-s}\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}$$

$$=(W_m+c_1W_{m-1}+\cdots+c_mW_0)\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_m}=2<p,\frac{\partial p}{\partial t_m}>-2<q,\frac{\partial q}{\partial t_m}>=2(<p,\frac{\partial F_m}{\partial q}>+<q,\frac{\partial F_m}{\partial p}>)$$

$$=2i(<\Lambda^{2m+1}p,p>+<\Lambda^{2m+1}q,q>)=A_{m,x}=J(\sum_{s=0}^{m+1}c_sG_{2(m-s)})$$

$$=X_{2m}+c_1X_{2(m-1)}+\cdots+c_mX_0\,.$$

定理 7 证完.

注 4 本文最初想法来源于1989年5月第一作者在郑州大学硕士论文答辩时田畴先生提出的一个问题，至此得以回答. 在此，谨向田畴教授表示衷心的感谢，同时也非常感谢审稿人对本文提出的许多宝贵意见.

参 考 文 献

1 曹策问. 科学通报，1989：34（10）；723～724

2 曹策问. 中国科学A辑，1989：7；701～707

3 Cao Cewen and Geng Xianguo, Research Reports in Physics, Springer—Verlag Berlin，1990：pp.68～78

4 Cao Cewen and Geng Xianguo, J. Phys. A: Math. Gen. 1990：23：4117～4125

5 乔志军. 科学通报，1990：35（17）：1353～1354

6 乔志军. 应用数学, 1991; 4（4）: 64～70
7 乔志军. 科学通报, 1992; 37（8）: 763～764
8 乔志军. 数学年刊, 1993; 14A（1）: 31～38
9 Qiao Zhijun, Phys. Lett. A., 1993; 172（4）: 224～228
10 Qiao Zhijun, J. Math. Phys., 1993; 34（7）: 3110～3120
11 顾祝全. 科学通报, 1990; 35（23）: 1776～1779
12 Hu Xingbiao, Northeastern Math. J., 1990; 6（2）: 187～194
13 Tu Guizhang and Meng Dazhi, Acta Math. Appl. Sinica (English Series), 1989; 5（1）: 89～97
14 乔志军. 辽宁大学学报, 1993; 20（1）: 25～28
15 V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics (Springer—Verlag, Berlin, 1978)

Commutator Representations of MkdV Hierarchy and its Corresponding Completely Integrable Liouville's System

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

Shan Zhaoxiang

Department of Finance and Account, Liaoning University

ABSTRACT In this paper, a finite—dimensional involutive system and the commutator representations of MkdV hierarchy are presented and the Bargmann, C.Neumann constraints and their corresponding stationary MkdV systems are discussed. Finally, the involutive solutions of MkdV hierarchy are obtained.

KEY WORDS MkdV hierarchy, Commutator representation, Involutive system, Involutive solutions, Bargmann constraint, C. Neumann constraint.