(2)

辽宁大学学报
自然科学版
第21卷 第1期 1994

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.21 №1 1994

8—17

一族非线性发展方程解的对合表示及所对应的对合守恒积分系 *

乔志军
（数 学 系）

摘 要 本文针对线性谱问题

$$y_x=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda u\\ v & \lambda\end{pmatrix}y \qquad (*)$$

利用“非线性化”方法给出与之相应的一族非线性发展方程解的对合表示；并证明了文献〔1〕中节4中4）里的对合守恒积分系 F_m：

$$F_m=\frac{1}{2}\langle p,p\rangle\langle\Lambda^m q,q\rangle-\langle\Lambda^m q,p\rangle-\langle q,p\rangle\langle\Lambda^m q,p\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}\begin{vmatrix}\langle\Lambda^j q,q\rangle & \langle\Lambda^j p,q\rangle\\ \langle\Lambda^{m-j}p,q\rangle & \langle\Lambda^{m-j}p,p\rangle\end{vmatrix},\quad m=0,1,2,\cdots$$

实际上是由该族方程Lax表示的时间部分之非线性化而导致；另外，顺便还给出了一个驻定的非线性系统.

关键词 非线性发展方程；对合系；解的对合表示. 对合守恒

O175.26

0 引 言

寻求新的有限维完全可积系统一直是孤子理论中一项十分重要的课题．近年来，越来越多的人们致力于这方面的研究．曹策问在文〔2〕中首次提出“Lax组非线性化”的新思想，并成功地找到许多Liouville完全可积的Hamilton系统[1,3-5]，进而利用可换流的对合解给出孤子方程解的对合表示[6-7]．随后，曾云波、李翊神等人在此基础上，发展了曹的方法，获得了一些非常有趣的有限维完全可积系统[8-10]．耿献国、顾祝全等人也利用此法研究了不少新的或著名的孤子方程所对应的有限维对合系[11-14]．

本文打算利用“非线性化”方法及可换流的对合解给出与谱问题[15]

$$y_x=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda u\\ v & \lambda\end{pmatrix}y \qquad (1)$$

本文1992年10月3日收到
* 本文得到辽宁省教委自然科学基金的资助.

相应的一族非线性发展方程解的对合表示；并进一步证明文献〔1〕节4中4）里的对合守恒积分系 F_m ：

$$F_m=\frac{1}{2}<p,p><\wedge^m q,q>-<\wedge^m q,p>-<q,p><\wedge^m q,p>$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}\begin{vmatrix}<\wedge^j q,q> & <\wedge^j p,q>\\ <\wedge^{m-j}p,q> & <\wedge^{m-j}p,p>\end{vmatrix},\quad m=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

实际上是由该族发展方程 Lax 表示中的时间部分的非线性化所导致．在这篇文章中，我们用较简单的办法还附带证明了（2）的对合性：$(F_k,F_l)=0$，$\forall k,l\in Z^+$．关于（2）的对合性之证明，一般常采用所谓“母函数方法[1,6]”去推得．下文可知本文对于（2）的对合性之证明，所采用的方法直接了当．

另外，在节3中还给出了位势函数：$u=-<q,q>$，$v=<\wedge p,p>$所满足的一个驻定非线性系统．

1　与（1）相应的发展方程族及其换位表示

设 λ 是（1）的特征值，$u=u(x,t)$、$v=v(x,t)$ 为与（1）相联系的位势函数；让 $\nabla\lambda\triangleq(\lambda y_2^2,-y_1^2)^T$，其中 y_1，y_2 是（1）的相应于 λ 的特征函数：

$$\begin{cases}y_{1x}=-\lambda y_1+\lambda u y_2\\ y_{2x}=v y_1+\lambda y_2\end{cases}$$

那么 $\nabla\lambda$ 满足线性关系式

$$K\nabla\lambda=\lambda\cdot J\nabla\lambda \tag{3}$$

这里，K、J 是两个斜称的微分积分算子（$\partial=\partial/\partial x$，$\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1$）：

$$K=\begin{pmatrix}0 & \partial\\ \partial & 0\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}-2u\partial^{-1}u & -2+2u\partial^{-1}v\\ 2+2v\partial^{-1}u & -2v\partial^{-1}v\end{pmatrix} \tag{4}$$

它们称为（1）的Lenard算子对．

取 $G_{-1}=(v,u)^T\in Ker\,J=\{\widetilde{G}\in C^\infty(\Omega)\mid J\widetilde{G}=0\}$，其中 $\Omega=(-\infty,+\infty)$ 或 $\Omega=(0,T)$；u，v 在无穷远处衰减为零或以 T 为周期．现递推定义（1）的Lenard梯度叙列 $\{G_j\}$：$KG_{j-1}=JG_j$，$j=0,1,2,\cdots$．$X_m\triangleq JG_m$，$m=0,1,2,\cdots$ 称为（1）的第 m 个向量场；由上述向量场 $X_m(u,v)$ 所产生的一族非线性发展方程：

$$(u,v)^T_{t_{m+1}}=X_m(u,v),\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{5}$$

称为与（1）相应的保谱孤子方程族．作为（5）的代表方程有：

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}_{t_1}=\begin{pmatrix}u_x\\ v_x\end{pmatrix},\quad m=0,\text{平凡方程}.$$

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}_{t_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}u_{xx}-uvu_x-\frac{1}{2}u^2v_x\\ \frac{1}{2}v_{xx}-uvv_x-\frac{1}{2}v^2u_x\end{pmatrix},\quad m=1.$$

命题1.1　谱问题（1）与

$$Ly\equiv\begin{pmatrix} -\partial-uv & u\partial \\ -v & \partial \end{pmatrix}y=\lambda y \tag{6}$$

等价.

令 $L_*(\zeta_1,\zeta_2)\triangleq\frac{d}{d\epsilon}\big|_{\epsilon=0}L(u+\epsilon\zeta_1,v+\epsilon\zeta_2)$ 为（6）中算子 L 的微分映射，则易算得：

命题1.2　$L_*(\zeta_1,\zeta_2)=\begin{pmatrix} -\zeta_1 v-\zeta_2 u & \zeta_1\partial \\ -\zeta_2 & 0 \end{pmatrix}$，$\forall\zeta_1,\zeta_2$，且$L_*$为单态映射. 其中，$\partial=\partial/\partial x$.

定理1.3　设 $G_1(x,t)$, $G_2(x,t)$ 为二任意的光滑函数，$G=(G_1,G_2)^T$；K、J 是Lenard算子对（4）；L 如（6）中所示，那么算子方程

$$[V,L]=L_*(KG)-L_*(JG)L \tag{7}$$

有算子解：

$$V=V(G)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \partial^{-1}(uG_1-vG_2) & G_2 \\ 0 & -\partial^{-1}(uG_1-vG_2) \end{pmatrix}L \tag{8}$$

证明　将（8）代入 $[V,L]$ 中，经仔细计算可知

$$[V,L]=\begin{pmatrix} -uG_{1x} & 0 \\ -G_{1x} & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2uG_1+2uv\partial^{-1}(uG_1-vG_2) & G_2 \\ 2G_1+2v\partial^{-1}(uG_1-vG_2) & 0 \end{pmatrix}L$$
$$+\begin{pmatrix} 0 & 2G_2+2u\partial^{-1}(uG_1-vG_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}L^2$$

利用命题1.2立知上式右端即是 $L_*(KG)-L_*(JG)L$. 注意在上述运算过程中用到下述二关系式：

$$\begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}L+\begin{pmatrix} uv & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_*(\zeta_1,\zeta_2)=\begin{pmatrix} -\zeta_2 u & 0 \\ -\zeta_2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}L.$$

定理1.4　设 G_j $(j=-1,0,1,\cdots)$ 为（1）的Lenard梯度递推叙列，$G_j\triangleq(G_j^{(1)},G_j^{(2)})^T$；令 $V_{j-1}=V(G_{j-1})$，微分算子 $W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}L^{m-j}$，那么与（1）相应的非线性发展方程族 $(u,v)^T_{t_{m+1}}=X_m(u,v)$ 具有换位表示

$$L_{t_{m+1}}=[W_m,L],\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{9}$$

证明　一方面，$L_{t_{m+1}}=L_*(u_{t_{m+1}},v_{t_{m+1}})$.

另一方面，$[W_m, L]=\sum_{j=0}^{m}[V_{j-1}, L]L^{m-j}=\sum_{j=0}^{m}(L_*(KG_{j-1})L^{m-j}$

$-L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1})=\sum_{j=0}^{m}(L_*(JG_j)L^{m-j}-L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1})=L_*(JG_m)$

$=L_*(X_m(u, v))$.

故 $L_{t_{m+1}}=[W_m, L]\Longleftrightarrow L_*((u, v)^T_{t_{m+1}}-X_m(u, v))=0$.

又 L_* 为单态，所以本定理成立.

2 非线性发展方程族 $(u, v)^T_{t_{m+1}}=X_m(u, v)$ 解的对合表示及一个驻定系统

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 为（1）的 N 个互异的特征值，$y=(q_j(x), p_j(x))^T$ 为与 λ_j 相应的特征函数，$\nabla\lambda_j=(\lambda_j p_j^2, -q_j^2)^T$，则在Bargmann约束[1]：

$$G_{-1}=\sum_{j=1}^{N}\nabla\lambda_j,\ \text{即}\quad u=-<q, q>,\ v=<\wedge p, p> \tag{10}$$

下谱问题（1）被非线性化为一个Liouville完全可积的Hamilton系统（R^{2N}，$dp\wedge dq, H$）：

$$(H)=(F_1):\ \begin{cases} q_x=-\wedge q-<q, q>\wedge p=\dfrac{\partial H}{\partial p} \\ p_x=\wedge p+<\wedge p, p>q=-\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \tag{11}$$

$F_1=H=-<\wedge q, p>-\dfrac{1}{2}<q, q><\wedge p, p>$，其对合系统就是（2）式给出的 F_m .

关于这一论断已在文献〔1〕中阐明．但〔1〕并没给出（2）的对合性之证明．关于 F_m 的对合性之证明一般常采用"母函数方法"[1 6]．下边我们从另一角度证明（2）的对合性.

引理2.1 设 F_m 以（2）式定义，则内积 $<\dfrac{\partial F_m}{\partial q}, \dfrac{\partial F_n}{\partial p}>$ 关于任二 $m, n\in Z^+$ 对称，即

$$<\frac{\partial F_m}{\partial q}, \frac{\partial F_n}{\partial p}>=<\frac{\partial F_n}{\partial q}, \frac{\partial F_m}{\partial p}>,\ \forall m, n\in Z^+ .$$

其中 $<\cdot, \cdot>$ 表示 R^N 中之标准内积，$\wedge=diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$.

证明 将（2）式分别对 q, p 求导有：

$$\frac{\partial F_m}{\partial q}=<p, p>\wedge^m q-\wedge^m p-<\wedge^m p, q>p-<p, q>\wedge^m p$$

$$-\sum_{j=0}^{m}(<\Lambda^{m-j}p,\ p>\Lambda^{j}q-<\Lambda^{m-j}p,\ q>\Lambda^{j}p)$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial p}=<\Lambda^n q,\ q>p-\Lambda^n q-<\Lambda^n p,\ q>q-<p,\ q>\Lambda^n q$$

$$-\sum_{j=0}^{n}(<\Lambda^{n-j}q,\ q>\Lambda^{j}p-<\Lambda^{n-j}p,\ q>\Lambda^{j}q)$$

作内积$<\frac{\partial F_m}{\partial q},\ \frac{\partial F_n}{\partial p}>$，经一系列计算我们必得：

$$<\frac{\partial F_m}{\partial q},\ \frac{\partial F_n}{\partial p}>=<p,\ p><\Lambda^n q,\ q><\Lambda^m p,\ q>$$

$$-<p,\ p>\sum_{j=0}^{n}(<\Lambda^{n-j}q,\ q><\Lambda^{m+j}p,\ q>-<\Lambda^{n-j}p,\ q><\Lambda^{m+j}q,q>)$$

$$-<\Lambda^n q,\ q><\Lambda^m p,\ p>+\sum_{j=0}^{n}(<\Lambda^{n-j}q,\ q><\Lambda^{m+j}p,\ p>$$

$$-<\Lambda^{n-j}p,\ q><\Lambda^{m+j}p,\ q>)$$

$$-<p,\ q><\Lambda^n q,\ q><\Lambda^m p,\ p>+\sum_{j=0}^{n}<p,\ q>(<\Lambda^{n-j}q,q><\Lambda^{m+j}p,p>$$

$$-<\Lambda^{n-j}p,\ q><\Lambda^{m+j}p,\ q>)+\sum_{j=0}^{m}(<\Lambda^{m-j}p,\ p><\Lambda^{n+j}q,\ q>$$

$$-<\Lambda^{m-j}p,\ q><\Lambda^{n+j}p,\ q>)+<p,\ q>\sum_{j=0}^{m}(<\Lambda^{m-j}p,\ p><\Lambda^{n+j}q,\ q>$$

$$-<\Lambda^{m-j}p,\ q><\Lambda^{n+j}p,\ q>)+\text{若干关于}\ m、n\ \text{对称的项}.$$

上式中，我们只要注意到

$$\sum_{j=0}^{n}<\Lambda^{n-j}q,\ q><\Lambda^{m+j}p,\ q>=\sum_{j=0}^{m+n}<\Lambda^{j}q,\ q><\Lambda^{m+n-j}p,\ q>$$

$$-\sum_{j=1}^{m}<\Lambda^{m-j}p,\ q><\Lambda^{n+j}q,\ q>$$

$$\sum_{j=1}^{n}<\Lambda^{n-j}q,\ q><\Lambda^{m+j}p,\ p>+\sum_{j=0}^{m}<\Lambda^{m-j}p,\ p><\Lambda^{n+j}q,\ q>$$

$$=\sum_{j=0}^{m+n}<\Lambda^{j}q,\ q><\Lambda^{m+n-j}p,\ p>$$

即知$<\frac{\partial F_m}{\partial q},\frac{\partial F_n}{\partial p}>$关于 m，n 对称.

定理2.2 $(F_m, F_n)=0$，$\forall m, n\in Z^+$。因而Hamilton系统（R^{2N}，$dp\wedge dq$，F_m）：

$$q_{t_m}=\frac{\partial F_m}{\partial p},\qquad p_{t_m}=-\frac{\partial F_m}{\partial q}$$

在Liouville意义下完全可积，特别，系统 $(H)=(F_1)$ Liouville完全可积.

证明 $(F_m, F_n)=<\frac{\partial F_m}{\partial q}, \frac{\partial F_n}{\partial p}>-<\frac{\partial F_m}{\partial p}, \frac{\partial F_n}{\partial q}>=0$.

定理2.3 设 p, q 是系统 (H) 的一个解，则 $u=-<q, q>$，$v=<\wedge p, p>$ 必满足一个驻定的非线性发展方程：

$$X_N+\alpha_1 X_{N-1}+\cdots+\alpha_N X_0=0 \tag{12}$$

其中，$\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 为不依赖于 x 的常数；$X_k(k=1, \cdots, N)$ 为（1）的向量场.

证明 $u=-<q, q>$，$v=<\wedge p, p>$，即是

$$G_{-1}=\sum_{j=1}^{N}\nabla\lambda_j \tag{13}$$

让算子 $J^{-1}K$ 作用（13）l 次，并注意到（3）式及 $KG_{j-1}=JG_j$，有

$$G_{l-1}+\beta_1 G_{l-2}+\cdots+\beta_{l-1}G_0+\beta_l G_{-1}=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^l\cdot\nabla\lambda_j \tag{14}$$

其中，$\beta_1, \cdots, \beta_l$ 为任意常数. 现造多项式

$$P(\lambda)=\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\lambda_j)=\sum_{l=0}^{N}p_{N-l}\lambda^l,\quad p_0=1,$$

用算子 $J\sum_{l=0}^{N}p_{N-l}$ 作用（14）式的两端后，整理即得（12）. 其中，$\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 由 $\beta_1, \cdots, \beta_l$；$p_1, \cdots, p_N$ 决定.

3　发展方程解的对合表示及对合系 F_m 的由来

既然Poisson括号 $(H, F_m)=0$，那么Hamilton系统 (H) 与 (F_m) 是相容的，因而它们相应的初值问题的解算子 g_1^x，$g_m^{t_m}$ 必可换（见文〔17〕）. 现定义相容方程组 (H)、(F_m) 的对合解如下：

$$\begin{pmatrix} q(x, t_m) \\ p(x, t_m) \end{pmatrix}=g_1^x g_m^{t_m}\begin{pmatrix} q(0, 0) \\ p(0, 0) \end{pmatrix} \tag{15}$$

则 $q(x, t_m)$，$p(x, t_m)$ 是 x, t_m 的光滑函数.

定理3.1 设 $(q(x, t_m), p(x, t_m))^T$ 是相容系统 $(H)=(F_1)$ 与 (F_m) 的一个对合解，那么

$$u(x, t_m)=-<q(x, t_m), q(x, t_m)>,\quad v(x, t_m)=<\wedge p(x, t_m), p(x, t_m)> \tag{16}$$

满足与（1）相应的保谱发展方程

$$\binom{u}{v}_{t_m}=K(J^{-1}K)^{m-1}G_{-1},\quad m=1,\ 2,\cdots. \tag{17}$$

其中，K，J 为Lenard算子对（4）式.

由（16）给出的 $u(x,t_m)$，$v(x,t_m)$ 称为发展方程（17）解的对合表示.

证明　$u(x,t_m)=-\langle q,q\rangle$，$v(x,t_m)=\langle\Lambda p,p\rangle$

$$u_{t_m}=-2\langle q,q_{t_m}\rangle=-2\langle q,\frac{\partial F_m}{\partial p}\rangle$$

$$v_{t_m}=2\langle\Lambda p,p_{t_m}\rangle=-2\langle\Lambda p,\frac{\partial F_m}{\partial q}\rangle$$

将 $\frac{\partial F_m}{\partial p}$、$\frac{\partial F_m}{\partial q}$ 的表达式分别代入上述二式，经计算即有

$$\begin{aligned}u_{t_m}&=2(\langle\Lambda^m q,q\rangle+\langle q,q\rangle\langle\Lambda^m p,q\rangle)=-2\langle\Lambda^{m-1}q,q_x\rangle\\&=\partial(-\langle\Lambda^{m-1}q,q\rangle)\\v_{t_m}&=2(\langle\Lambda^m p,p\rangle+\langle\Lambda p,p\rangle\langle\Lambda^m p,q\rangle)=2\langle\Lambda^m p,p_x\rangle\\&=\partial(\langle\Lambda^m p,p_x\rangle)\end{aligned}$$

故

$$\binom{u}{v}_{t_m}=\begin{pmatrix}0&\partial\\\partial&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle\Lambda^m p,p\rangle\\-\langle\Lambda^{m-1}q,q\rangle\end{pmatrix}=K(J^{-1}K)^{m-1}\begin{pmatrix}\langle\Lambda p,p\rangle\\-\langle q,q\rangle\end{pmatrix}$$

$$=K(J^{-1}K)^{m-1}\binom{v}{u}=K(J^{-1}K)^{m-1}G_{-1}.$$

上述运算中用到等式（3）的变形：$J^{-1}K\nabla\lambda_j=\lambda_j\cdot\nabla\lambda_j$.

前边已经知道发展方程 $(u,v)^T_{t_{m+1}}=X_m(u,v)$，$m=0$，$1,\cdots$. 具有换位表示（或Lax表示）：$L_{t_{m+1}}=[W_m,L]$，$m=0$，$1$，$2,\cdots$. 并且在Bargmann约束（10）下其空间部分 $Ly=\lambda y$（即（1）式）被非线性化为一个Liouville完全可积的Hamilton系统（11），其对合系 F_m 由（2）给出. 下边我们可以看到 F_m 不是别的，恰好由Lax表示的时间部分 $y_{t_m}=W_{m-1}y$　$m=1$，$2,\cdots$. 在约束（10）下的非线性化[18,19]所导致.

定理3.2　设 $y=(q_j,p_j)^T$ 为（1）的相应于特征值 λ_j 的特征函数，$j=1$，2，$\cdots$，N；$q=(q_1,\cdots,q_N)^T$，$p=(p_1,\cdots,p_N)^T$，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$. 那么在Bargmann约束 $u=-\langle q,q\rangle$，$v=\langle\Lambda p,p\rangle$ 下，发展方程　$(u,v)^T_{t_m}=X_{m-1}(u,v)$，$m=1$，$2,\cdots$. 的Lax对：

$$Ly=\lambda y\quad\text{（或（1）式）}\qquad\text{空间部分} \tag{18}$$

$$y_{t_m}=W_{m-1}y=\sum_{j=0}^{m-1}\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ G^{(1)}_{j-1} & 0\end{pmatrix}L^{m-1-j}+\begin{pmatrix}\partial^{-1}(uG^{(1)}_{j-1}-vG^{(2)}_{j-1}) & G^{(2)}_{j-1}\\ 0 & -\partial^{-1}(uG^{(1)}_{j-1}-vG^{(2)}_{j-1})\end{pmatrix}L^{m-j}\right\}y \quad \text{时间部分} \tag{19}$$

分别被非线性化为Hamilton系统 $(H)=(F_1)$ 及

$$(F_m):\ q_{t_m}=\frac{\partial F_m}{\partial p},\quad p_{t_m}=-\frac{\partial F_m}{\partial q},\quad m=1,\ 2,\cdots. \tag{20}$$

证明　在Bargmann约束 $u=-\langle q,q\rangle$，$v=\langle\Lambda p,p\rangle$ 下，(18) 或 (1) 被非线性化为 $(H)=(F_1)$ 是显然的.

(19) 等价于

$$q_{k,t_m}=\sum_{j=0}^{m-1}\{\partial^{-1}(uG^{(1)}_{j-1}-vG^{(2)}_{j-1})\lambda_k^{m-j}q_k+G^{(2)}_{j-1}\lambda_k^{m-j}p_k\} \tag{21}$$

$$p_{k,t_m}=\sum_{j=0}^{m-1}\{G^{(1)}_{j-1}\lambda_k^{m-1-j}q_k-\partial^{-1}(uG^{(1)}_{j-1}-vG^{(2)}_{j-1})\lambda_k^{m-j}p_k\} \tag{22}$$

$$k=1,\ 2,\cdots,\ N.$$

因　$G_{-1}=\begin{pmatrix}v\\ u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle\Lambda p,p\rangle\\ -\langle q,q\rangle\end{pmatrix}$，又算子 $J^{-1}K$ 具有性质：

$$G_{j-1}=J^{-1}KG_{j-2},\quad J^{-1}K\nabla\lambda_j=\lambda_j\cdot\nabla\lambda_j,\quad j=1,\ 2,\cdots,\ N.$$

故　$$G_{j-1}=(J^{-1}K)^jG_{-1}=(J^{-1}K)^j\left(\sum_{k=1}^{N}\nabla\lambda_k\right)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^j\nabla\lambda_k=\begin{pmatrix}\langle\Lambda^{j+1}p,p\rangle\\ -\langle\Lambda^j q,q\rangle\end{pmatrix}. \tag{23}$$

因而

$$uG^{(1)}_{j-1}-vG^{(2)}_{j-1}=-\langle q,q\rangle\langle\Lambda^{j+1}p,p\rangle+\langle\Lambda p,p\rangle\langle\Lambda^j q,q\rangle$$
$$=\langle\Lambda^j p,q_x\rangle+\langle\Lambda^j q,p_x\rangle=\partial\langle\Lambda^j p,q\rangle.$$

即　$$\partial^{-1}(uG^{(1)}_{j-1}-vG^{(2)}_{j-1})=\langle\Lambda^j p,q\rangle,\quad j=1,\ 2,\cdots. \tag{24}$$

浓缩 (21)、(22) 两式为向量形式，并取 $\partial^{-1}(uG^{(1)}_{-1}-vG^{(2)}_{-1})=-1$，则得到：

$$\begin{cases} q_{t_m}=-\Lambda^m q-\langle q,q\rangle\Lambda^m p+\sum_{j=1}^{m-1}(\langle\Lambda^j p,q\rangle\Lambda^{m-j}q-\langle\Lambda^j q,q\rangle\Lambda^{m-j}p) & (25)\\ p_{t_m}=\langle\Lambda p,p\rangle\Lambda^{m-1}q+\Lambda^m p+\sum_{j=1}^{m+1}(\langle\Lambda^{j+1}p,p\rangle\Lambda^{m-1-j}q-\langle\Lambda^j p,q\rangle\Lambda^{m-j}p) & (26)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} q_{t_m} = <\Lambda^m q,q>p-\Lambda^m q-<\Lambda^m p,q>q-<p,q>\Lambda^m q+ \\ \quad +\sum_{j=0}^{m}(<\Lambda^j p,q>\Lambda^{m-j}q-<\Lambda^j q,q>\Lambda^{m-j}p) \qquad (27) \\ p_{t_m} = -<p,p>\Lambda^m q+\Lambda^m p+<\Lambda^m p,q>p+<p,q>\Lambda^m p \\ \quad +\sum_{j=0}^{m}(<\Lambda^j p,p>\Lambda^{m-j}q-<\Lambda^j p,q>\Lambda^{m-j}p) \qquad (28) \end{cases}$$

将（27）、（28）两式化为Hamilton结构后，立知其Hamilton函数不是别的，刚好就是F_m．从而本定理证完．

参 考 文 献

1 Cao Cewen and Geng Xianguo, Research Reports in Physics, Nonlinear Physics, ed. Gu Chaohao etc. Springer—Verlag, 1990：68

2 曹策问．中国科学A辑，1989；7：701

3 Cao Cewen, Acta Math. Sin., New Series, 1990；6（1）：35

4 Cao Cewen and Geng Xianguo, J. Math. Phys., 1991；32（9）：2323

5 Cao Cewen and Geng Xianguo, J. Phys. A, 1990；23：4117

6 Cao Cewen, Acta Math. Sin., New Series, 1991；7（3）：216

7 曹策问，耿献国．数学学报，1992；35（3）：314

8 Zeng Yunbo and Li Yishen, J. Math. Phys., 1989；30：1679

9 Zeng Yunbo and Li Yishen, J. Phys. A, 1990；23：L 89

10 Zeng Yunbo and Li Yishen, Acta Math. Appl. Sin., 1992；2：1

11 Geng Xianguo, Phys. Lett. A, 1992；162：375

12 Gu Zhuquan, Ke Xue Tong Bao, 1991；36（20）：1683

13 Qiao Zhijun, J. Math. Phys., 1993；4（7）：3110

14 乔志军．一个新的Liouville完全可积系统及Levi方程族解的对合表示．郑州大学硕士论文，1989

15 Li Yishen and Zhuang Dawei, Sci. Sin. A, 1983；2：107

16 曹策问．河南科学，1987；5（1）：1

17 V. I. Arnol'd, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer—Verlag, Berlin, 1978

18 乔志军．中国科协首届青年学术年会卫星会议—辽宁省首届青年学术年会论文集，理科分册，1992：11

19 Qiao Zhijin, Phys lett. A, 1993；172（4）：224

The Involutive Representation of Solutions of a Hierarchy of Nonlinear Evolution Equations and Their Corresponding Involutive Systems of Conserved Integrals

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

ABSTRACT For the linear spectral problem:

$$y_x = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda u \\ v & \lambda \end{pmatrix} y \qquad (*)$$

by the method of so-called " nonlinearization ", the involutive representation of solutions of a hierarchy of nonlinear evolution equations associated with (*) is presented in this paper. It is proved that the involutive systems of conserved integrals F_m in 4) of section 4 in ref. [1]:

$$F_m = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle\langle \Lambda^m q, q\rangle - \langle \Lambda^m q, p\rangle - \langle q, p\rangle\langle \Lambda^m q, p\rangle$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m}\begin{vmatrix} \langle \Lambda^j q, q\rangle & \langle \Lambda^j p, q\rangle \\ \langle \Lambda^{m-j} q, p\rangle & \langle \Lambda^{m-j} p, p\rangle \end{vmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots,$$

is actually produced by the nonlinearization of the time part of the Lax representation for this hierarchy of equations. The involutity of F_m is shown by a simpler method and a stationary nonlinear system which is satisfied with the Bargmann constraint: $u = -\langle q, q\rangle$, $v = \langle \Lambda p, p\rangle$ is given incidentally.

KEY WORDS Nonlinear evolution equation, Involutive system, Involutive representation of solutions.