辽宁大学学报
自然科学版
第20卷 第2期 1993年

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.20 №2 1993

L－C－Z族孤子方程所对应的完全可积的Bargmann系统*

乔志军
（数学系）

摘　要　本文获得一个新的有限维对合系，并由此证明L－C－Z谱问题（2.1）在Bargmann约束：$q=<\varphi_1,\varphi_1>-<\varphi_2,\varphi_2>$，$r=<\varphi_1,\varphi_1>+<\varphi_2,\varphi_2>$下被非线性化为一个Liouville完全可积的新的Hamilton系统．最后，我们给出L－C－Z族方程解的对合表示．

关键词　L－C－Z族；Bargmann约束；对合系；对合解；Hamilton系统；Liouville完全可积．

0　引　　言

在孤子理论中，扩充Liouville完全可积的有限维Hamilton系统是一项十分重要的课题．其关键在于寻求对合的函数系，常用的方法是通过发展方程的谱技巧等去求得，进而产生新的完全可积系统[1,2]．最近，曹策问教授提出了Lax组非线性化产生有限维完全可积系统的思想[3]，并且成功地找到了许多有限维完全可积系统[4]．本文在文〔5〕的基础上，利用"非线性化技术"将L－C－Z族方程的Lax组非线性化：尔后证明Lax组空间部分的非线性化是一个Liouville完全可积系统（R^{2N}，$d\varphi_1\wedge d\varphi_2$，$H$），$H=-iF$，

$$H=<i\Lambda\varphi_1,\varphi_2>-<\varphi_1+\varphi_2,\varphi_1+\varphi_2><\varphi_1,\varphi_2>-<\varphi_1,\varphi_1><\varphi_2,\varphi_2>+<\varphi_1,\varphi_2>^2.$$

同时其时间部分的非线性化将产生N－对合系$\{F_m\}$．相容组(F_0)，(F_m)的对合解由Bargmann约束所决定的映射f映到高阶L－C－Z方程的解，从而说明所有的L－C－Z方程的解均有对合表示．

1　L－C－Z族方程的Lax组非线性化

与L－C－Z族方程相联系的保谱问题为：

$$L\varphi=\zeta\varphi,\ L=L(u)=\frac{1}{i}\begin{pmatrix} r-\partial & q+r \\ r-q & r+\partial \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

本文1992年5月27日收到
* 辽宁省教育委员会青年自然科学基金资助项目

$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^T$；$\partial=\partial/\partial x$；$\zeta$为（1.1）的谱参数；$i=\sqrt{-1}$；自变量$x$在所论区间$\Omega$（$\Omega=(-\infty,+\infty)$ 或（0，T））内变化；$u(x)\triangleq(q(x),r(x))$ 是（1.1）的势函数，且$u(x)$在无穷远处衰减为零或以T为周期.

由〔5〕，我们已经知道：

命题1.1[5] L－C－Z族的Lenard算子对：

$$K=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial^2+2\partial q\partial^{-1}q & \partial r-2\partial q\partial^{-1}r \\ \partial r+r\partial+2\partial r\partial^{-1}q+2qr & -\frac{1}{2}\partial^2-2\partial r\partial^{-1}r-q\partial-2r^2 \end{pmatrix},$$

$$J=2i\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\partial \\ \frac{1}{2}\partial+q & -r \end{pmatrix}$$

$$\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1,\ 即\ \partial^{-1}=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x}\cdot-\int_{x}^{+\infty}\cdot\right)\ or\ \partial^{-1}=\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{x}\cdot-\int_{x}^{T}\cdot\right).$$

具有下述两条性质

1）若{G_j}为Lenard递推叙列，则

$$KG_j=JG_{j+1},\ (j=0,\ 1,\ 2,\cdots),\ G_0=(r,q)^T. \tag{1.2}$$

2）若ζ_j是（1.1）式的 特征值，让$\widetilde{A}_j=\begin{pmatrix}\varphi_{2j}^2+\varphi_{1j}^2\\ \varphi_{1j}^2-\varphi_{2j}^2\end{pmatrix}$，那么$\widetilde{A}_j$满足线性关系式

$$K\widetilde{A}_j=\zeta_j\cdot J\widetilde{A}_j \tag{1.3}$$

其中，φ_{1j}、φ_{2j}为相应于ζ_j的特征函数.

命题1.2[5] 若$G_j=(G_j^{(1)},G_j^{(2)})^T$ 是Lenard递推叙列，让

$$V_j=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial G_j^{(2)}+(G_j^{(1)}+2\partial^{-1}(qG_j^{(1)}-rG_j^{(2)}))\partial & -\frac{1}{2}\partial(G_j^{(1)}+G_j^{(2)})-qG_j^{(1)}+rG_j^{(2)} \\ -\frac{1}{2}\partial(G_j^{(1)}-G_j^{(2)})-qG_j^{(1)}+rG_j^{(2)} & \frac{1}{2}\partial G_j^{(2)}+(G_j^{(1)}+2\partial^{-1}(qG_j^{(1)}-rG_j^{(2)}))\partial \end{pmatrix},$$

$$j=-1,\ 0,\ 1,\cdots$$

则
$$[W_m,L]=L_*(X_m),\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{1.4}$$

此处，$W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}L^{m-j}$；$V_{-1}\triangleq\begin{pmatrix} i\partial & 0\\ 0 & i\partial\end{pmatrix}$，$G_{-1}\triangleq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. (1.5)

L_*表示L的微分映射.

设$\zeta_1,\cdots,\zeta_N$为（1.1）的N个互不相同的特征值，那么

$$L\varphi_j=\zeta_j\varphi_j \qquad j=1,\cdots,N \tag{1.6}$$

浓缩（1.6）为向量形式：

$$\begin{cases}\varphi_1'=-i\wedge\varphi_1+r\varphi_1+(q+r)\varphi_2\\ \varphi_2'=(q-r)\varphi_1-r\varphi_2+i\wedge\varphi_2\end{cases} \tag{1.7}$$

其中，$\varphi_k=(\varphi_{k1},\cdots,\varphi_{kN})^T$ $k=1,2$；$\wedge=\mathrm{diag}(\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$；$(\varphi_{1j},\varphi_{2j})^T$是相应于特征值$\zeta_j$的特征函数，$j=1,2,\cdots,N$.

令

$$G_0=\sum_{j=1}^{N}\widetilde{A}_j=\begin{pmatrix}<\varphi_2,\varphi_2>+<\varphi_1,\varphi_1>\\ -<\varphi_2,\varphi_2>+<\varphi_1,\varphi_1>\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

则（1.8）产生Bargmann约束（$<\cdot,\cdot>$表示R^N中之标准内积）：

$$q=<\varphi_1,\varphi_1>-<\varphi_2,\varphi_2>,\quad r=<\varphi_1,\varphi_1>+<\varphi_2,\varphi_2> \tag{1.9}$$

或（1.9）记为 $f:(\varphi_1,\varphi_2)^T=\varphi\mapsto u=(q,r)^T$ （1.10）

在Bargmann约束（1.9）下，（1.7）被非线性化为一个三次的Bargmann系统

(B)
$$\begin{cases}\varphi_1'=-i\wedge\varphi_1+(<\varphi_1,\varphi_1>+<\varphi_2,\varphi_2>)\varphi_1+2<\varphi_1,\varphi_1>\varphi_2\\ \varphi_2'=i\wedge\varphi_2-(<\varphi_1,\varphi_1>+<\varphi_2,\varphi_2>)\varphi_2-2<\varphi_2,\varphi_2>\varphi_1\end{cases} \tag{1.11}$$

引理1.3 若φ_1，φ_2满足（1.11），则$\dfrac{\partial}{\partial x}<\varphi_1,\varphi_2>=0$，即内积$<\varphi_1,\varphi_2>$是依赖于$\varphi_1$、$\varphi_2$的运动常数，而与自变量$x$无关.

证明 $\partial<\varphi_1,\varphi_2>=<\varphi_1',\varphi_2>+<\varphi_1,\varphi_2'>=0$.

鉴于引理 .3，现引入一个约束关系

$$<\varphi_1,\varphi_2>=0 \tag{1.12}$$

因而，我们有

定理1.4 在Bargmann约束（1.9）及（1.12）下，（1.7）的非线性化（1.11）可表为Hamilton结构：

(H)
$$\begin{cases}\varphi_1'=-\dfrac{\partial H}{\partial\varphi_2}\\ \varphi_2'=\dfrac{\partial H}{\partial\varphi_1}\end{cases} \tag{1.13}$$

其中，
$$H=<i\wedge\varphi_1,\varphi_2>-<\varphi_1+\varphi_2,\varphi_1+\varphi_2><\varphi_1,\varphi_2>-<\varphi_1,\varphi_1><\varphi_2,\varphi_2>+<\varphi_1,\varphi_2>^2 \tag{1.14}$$

称为（1.13）的Hamilton函数.

证明 将H的表达式分别对φ_1，φ_2求导，然后利用（1.12）式即知本定理成立.

定理1.4告诉我们，Hamilton系统（1.13）在约束（1.12）下恰为Bargmann系统（1.11）. 但约束关系式（1.12）是本质的（由引理1.3）.

定理1.5 设$(\varphi_1, \varphi_2)^T$是（1.11）的一个解，那么 $q=\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle-\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle$，$r=\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle+\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle$满足一个定态的L－C－Z 方程：

$$X_N+\alpha_1 X_{N-1}+\cdots+\alpha_N X_0=0 \qquad (1.15)$$

其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_N$是适当选取的、依赖于φ_1，φ_2的运动常数.

证明 让算子$J^{-1}K$作用（1.8）式的两端，由命题1.1，我们有

$$G_1+\beta_2 G_{-1}=\sum_{j=1}^{N}\zeta_j\cdot\widetilde{A}_j=\begin{pmatrix}\langle\varphi_1,\wedge\varphi_1\rangle+\langle\varphi_2,\wedge\varphi_2\rangle\\ \langle\varphi_1,\wedge\varphi_1\rangle-\langle\varphi_2,\wedge\varphi_2\rangle\end{pmatrix} \qquad (1.16)$$

$J^{-1}K$作用（1.8）式k次后，得到：

$$G_k+\beta_2 G_{k-2}+\cdots+\beta_k G_0+\beta_{k+1}G_{-1}=\sum_{j=1}^{N}\zeta_j^k\cdot\widetilde{A}_j$$

$$=\begin{pmatrix}\langle\varphi_2,\wedge^k\varphi_2\rangle+\langle\wedge^k\varphi_1,\varphi_1\rangle\\ \langle\varphi_1,\wedge^k\varphi_1\rangle-\langle\wedge^k\varphi_2,\varphi_2\rangle\end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

在（1.17）中，$\beta_2,\cdots,\beta_{k+1}$皆为依赖于$\varphi_1$，$\varphi_2$的运动常数；$G_0,\cdots,G_k$为Lenarcl递推叙列，特别指出：$G_{-1}=(0, 0)^T$，$J^{-1}KG_{-1}=G_0$.

考察多项式：$P(z)\triangleq(z-\zeta_1)\cdots(z-\zeta_N)=\sum_{k=0}^{N}p_{N-k}z^k \quad p_0=1$，$p_1,\cdots,p_N$

由特征值$\zeta_1,\cdots,\zeta_N$确定.

让算子$J\sum_{k=0}^{N}p_{N-k}$. 作用（1.17）式的两端，经整理即得（注意$p_0=1$）.

$$X_N+\alpha_1 X_{N-1}+\cdots+\alpha_N X_0=0 \qquad (1.18)$$

其中，$\alpha_1,\cdots,\alpha_N$为由p_1，$p_2,\cdots,p_N$与$\beta_2,\cdots,\beta_N$所决定的且依赖于φ_1，φ_2的运动常数.

此外，由上述证明，我们还得到

引理1.6 设$(\varphi_1, \varphi_2)^T$是（1.11）的一个解：$\{G_j\}$为Lenard递推叙列. 那么存在常数$c_2,\cdots,c_m$，使得：

$$A_m=\begin{pmatrix}A_m^{(1)}\\ A_m^{(2)}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}\langle\varphi_1,\wedge^m\varphi_1\rangle+\langle\varphi_2,\wedge^m\varphi_2\rangle\\ \langle\varphi_1,\wedge^m\varphi_1\rangle-\langle\varphi_2,\wedge^m\varphi_2\rangle\end{pmatrix}=G_m+\sum_{s=2}^{m}c_s G_{m-s} \qquad (1.19)$$

或 $$A_m=\sum_{s=0}^{m}c_s G_{m-s}, \quad c_0=1, \quad c_1=0. \qquad (1.20)$$

2 一个有限维对合系

在辛空间（R^{2N}，$d\varphi_1\wedge d\varphi_2$）中，两个函数 F、G 的Poisson括号定义为：

$$(F,G)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial\varphi_{2j}}\cdot\frac{\partial G}{\partial\varphi_{1j}}-\frac{\partial F}{\partial\varphi_{1j}}\cdot\frac{\partial G}{\partial\varphi_{2j}}$$

$$=<\frac{\partial F}{\partial\varphi_2},\frac{\partial G}{\partial\varphi_1}>-<\frac{\partial F}{\partial\varphi_1},\frac{\partial G}{\partial\varphi_2}> \qquad (2.1)$$

其中，$\varphi_k=(\varphi_{k1},\cdots,\varphi_{kN})^T$ $(k=1,2)$.

F、G 称为对合，如果 $(F,G)=0$.

现在，我们考虑函数（m为非负正数）：

$$F_m=-<\wedge^{m+1}\varphi_1,\varphi_2>-i<\wedge^m(\varphi_1+\varphi_2),\varphi_1+\varphi_2><\varphi_1,\varphi_2>$$

$$-i\sum_{j=0}^{m}\begin{vmatrix}<\varphi_1,\wedge^j\varphi_1> & <\varphi_1,\wedge^j\varphi_2>\\ <\varphi_1,\wedge^{m-j}\varphi_2> & <\varphi_2,\wedge^{m-j}\varphi_2>\end{vmatrix} \qquad (2.2)$$

特别指出：$-iF_0=H$. 在（2.2）中，$\wedge=\mathrm{diag}(\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$.

引理2.1 在约束（1.12）下，内积$<\frac{\partial F_m}{\partial\varphi_2},\frac{\partial F_n}{\partial\varphi_1}>$关于$m$、$n$ 对称，即

$$<\frac{\partial F_m}{\partial\varphi_2},\frac{\partial F_n}{\partial\varphi_1}>=<\frac{\partial F_n}{\partial\varphi_2},\frac{\partial F_m}{\partial\varphi_1}>,\ \forall m,n \qquad (2.3)$$

证明 在约束（1.12）式下，我们有：

$$-\frac{\partial F_m}{\partial\varphi_2}=\wedge^{m+1}\varphi_1+i<\wedge^m(\varphi_1+\varphi_2),\varphi_1+\varphi_2>\varphi_1$$

$$+2i\sum_{j=0}^{m}(<\varphi_1,\wedge^j\varphi_1>\wedge^{m-j}\varphi_2-<\varphi_1,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{m-j}\varphi_1)$$

$$-\frac{\partial F_n}{\partial\varphi_1}=\wedge^{n+1}\varphi_2+i<\wedge^n(\varphi_1+\varphi_2),\varphi_1+\varphi_2>\varphi_2$$

$$+2i\sum_{j=0}^{m}(<\varphi_2,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{n-j}\varphi_1-<\varphi_1,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{n-j}\varphi_2)$$

把上二式右端作 R^N 中的标准内积，只要仔细计算，就不难发现该内积是若干项关于m、n 对称的内积之和，因而本引理成立.

定理2.2 在约束（1.12）下，以（2.2）定义的函数 F_m 是两两对合的，即

$$(F_k,F_l)=0,\ \forall k,l. \qquad (2.4)$$

证明 $(F_k,F_l)=<\frac{\partial F_k}{\partial\varphi_2},\frac{\partial F_l}{\partial\varphi_1}>-<\frac{\partial F_l}{\partial\varphi_2},\frac{\partial F_k}{\partial\varphi_1}>=0$.

定理2.3 在约束（1.12）下，由（2.2）定义的Hamilton系统（R^{2N}，$d\varphi_1\wedge d\varphi_2$，$F_m$）在Liouville意义下完全可积．特别，在约束（1.12）下，Hamilton系统（R^{2N}，$d\varphi_1\wedge d\varphi_2$，$H=-iF_0$）在Liouville意义下完全可积．

至此，已说明Bargmann系统（1.11）的完全可积性，且其对合系为｛F_m｝（对合是指在（1.12）下成立）

3 L－C－Z族方程的对合解

考虑F_m一流的正则方程（在（1.12）下）：

$$(F_m):\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_m}=-\dfrac{\partial F_m}{\partial\varphi_2}=\wedge^{m+1}\varphi_1+i<\wedge^m(\varphi_1+\varphi_2),\varphi_1+\varphi_2>\varphi_1+\\ \quad 2i\sum_{j=0}^{m}(<\varphi_1,\wedge^j\varphi_1>\wedge^{m-j}\varphi_2-<\varphi_1,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{m-j}\varphi_1)\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_m}=\dfrac{\partial F_m}{\partial\varphi_1}=-\wedge^{m+1}\varphi_2-i<\wedge^m(\varphi_1+\varphi_2),\varphi_1+\varphi_2>\varphi_2-\\ \quad 2i\sum_{j=0}^{m}(<\varphi_2,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{m-j}\varphi_1-<\varphi_1,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{m-j}\varphi_2)\end{cases}\tag{3.1}$$

当$m=0$时，令$t_0=x$，那么$(-iF_0)$就是（1.11）

（3.1）简记为

$$(F_m):\frac{\partial}{\partial t_m}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\partial F_m/\partial\varphi_2\\ \partial F_m/\partial\varphi_1\end{pmatrix}=I\nabla F_m,\quad I=\begin{pmatrix}0&-I_N\\ I_N&0\end{pmatrix}\tag{3.2}$$

$\nabla F_m=(\partial F_m/\partial\varphi_1,\partial F_m/\partial\varphi_2)^T$，$I_N$为$R^N$上的N×N单位矩阵．以$g_m^{t_m}$表示（3.2）初值问题的解算子，那么（3.2）的解可以表为：

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(t_m)\\ \varphi_2(t_m)\end{pmatrix}=g_m^{t_m}\begin{pmatrix}\varphi_1(0)\\ \varphi_2(0)\end{pmatrix}\tag{3.3}$$

既然任二F_k、F_l在（1.12）下对合，$(F_k,F_l)=0$，因此我们有：

命题3.1[6] 1）任二正则系统(F_k)、(F_l)相容；2）Hamilton相流$g_k^{t_k}$、$g_l^{t_l}$可换．上述两条均在（1.12）下成立．

以$x=t_0$，t_m分别表示系统$(-iF_0)=(H)$，(F_m)的流变量，定义：

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(x,t_m)\\ \varphi_2(x,t_m)\end{pmatrix}=g_0^x\,g_m^{t_m}\begin{pmatrix}\varphi_1(0,0)\\ \varphi_2(0,0)\end{pmatrix}\tag{3.4}$$

由于流g_0^x、$g_m^{t_m}$在（1.12）下可换，所以$\varphi_1(x,t_m)$，$\varphi_2(x,t_m)$是(x,t_m)的二元光滑函数．$(\varphi_1(x,t_m),\varphi_2(x,t_m))^T$称为在（1.12）下的相容系统$(F_0)$、$(F_m)$的对合解．

定理3.2　设 $(\varphi_1(x,t_m),\varphi_2(x,t_m))^T$ 是在（1.12）下的相容系统 $(H)=(-iF_0)$、(F_m) 的一个对合解，那么

1）流方程 $(-iF_0)=(H)$、(F_m) 在Bargmann约束（1.9）及约束（1.12）下、可以分别被约化为高阶L－C－Z 方程Lax组的空间部分和时间部分 $(u=(q,r)^T$ 作为它们的位势）：

$$L(u)\varphi=\wedge_0\varphi \qquad \text{（空间部分）} \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_m}=(W_m+c_1W_{m-1}+\cdots+c_mW_0)\varphi \qquad \text{（时间部分）} \qquad (3.6)$$

其中，$\wedge_0=\begin{pmatrix}\wedge & 0\\ 0 & \wedge\end{pmatrix}_{2N\times 2N}$；$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^T$，$\varphi_k=(\varphi_{k1},\cdots,\varphi_{kN})^T$，$k=1$

2；$L(u)=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}(r-\partial)I_N & (q+r)I_N\\ (r-q)I_N & (r+\partial)I_N\end{pmatrix}$；$c_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为依赖于 φ_1、φ_2 的运动常数（与自变量 x 无关）；W_k $(k=0,\cdots,m)$ 如（1.5）所示.

2）$u(x,t_m)=\begin{pmatrix}q(x,t_m)\\ r(x,t_m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<\varphi_1,\varphi_1>-<\varphi_2,\varphi_2>\\ <\varphi_1,\varphi_1>+<\varphi_2,\varphi_2>\end{pmatrix}$ 满足 $m+1$ 阶的

$$\text{L－C－Z 方程：}\frac{\partial u}{\partial t_m}=X_m+c_1X_{m-1}+\cdots+c_mX_0 \qquad (3.7)$$

这里，$c_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为不依赖于 x 的常数，其意义同（3.6）中的一样；X_k $(k=0,\cdots,m)$ 为L－C－Z 向量场[5].

证明　在 $q(x,t_m)=<\varphi_1,\varphi_1>-<\varphi_2,\varphi_2>$，$r(x,t_m)=<\varphi_1,\varphi_1>+<\varphi_2,\varphi_2>$ 及 $<\varphi_1,\varphi_2>=0$ 下，流方程 (H) 为（3.5）是显然的.

由引理1.6，存在常数 $c_2,\cdots,c_m$，使得：

$$A_m=\begin{pmatrix}A_m^{(1)}\\ A_m^{(2)}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}<\varphi_1,\wedge^m\varphi_1>+<\varphi_2,\wedge^m\varphi_2>\\ <\varphi_1,\wedge^m\varphi_1>-<\varphi_2,\wedge^m\varphi_2>\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{s=0}^{m}c_sG_{m-s},\qquad c_0=1,\ c_1=0,\ \forall m \qquad (3.8)$$

规定 $A_{-1}=0$，$\partial^{-1}(q\cdot 0-r\cdot 0)=\frac{i}{2}$，经一系列仔细计算、我们发现

$$\sum_{j=0}^{m}\Big\{-\frac{1}{2}A_{j-1,x}^{(2)}\wedge^{m-j}\varphi_1+\big(A_{j-1}^{(1)}+2\partial^{-1}(qA_{j-1}^{(1)}-rA_{j-1}^{(2)})\big)\wedge^{m-j}\varphi_{1,x}$$

$$+\big(-\frac{1}{2}(A_{j-1}^{(1)}+A_{j-1}^{(2)})_x-qA_{j-1}^{(1)}+rA_{j-1}^{(2)}\big)\wedge^{m-j}\varphi_2\Big\}$$

$$=\wedge^{m+1}\varphi_1+i<\wedge^m(\varphi_1+\varphi_2),\varphi_1+\varphi_2>\varphi_1$$

$$+2i\sum_{j=0}^{m}(<\varphi_1,\wedge^j\varphi_1>\wedge^{m-j}\varphi_2-<\varphi_1,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{m-j}\varphi_1)$$

$$= -\frac{\partial F_m}{\partial \varphi_2}.$$

$$\sum_{j=0}^{m} \left(-\frac{1}{2}(A_{j-1}^{(1)} - A_{j-1}^{(2)})_x - qA_{j-1}^{(1)} + \quad\right)\wedge^{m-j}\varphi_1 + \frac{1}{2}A_{j-1,x}^{(2)}\wedge^{m-j}\varphi_2$$
$$+\left(A_{j-1}^{(1)} + 2\partial^{-1}(qA_{j-1}^{(1)} - rA_{j-1}^{(2)})\right)\wedge^{m-j}\varphi_{2,x}$$
$$= -\wedge^{m+1}\varphi_2 - i<\wedge^m(\varphi_1+\varphi_2), \varphi_1+\varphi_2>\varphi_2 - 2i\sum_{j=1}^{m}(<\varphi_2,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{m-j}\varphi_1 -$$
$$-<\varphi_1,\wedge^j\varphi_2>\wedge^{m-j}\varphi_2)$$
$$= \frac{\partial F_m}{\partial \varphi_1}.$$

在上述运算过程中，用到等式：$\partial<\varphi_1,\wedge^{j-1}\varphi_2> = qA_{j-1}^{(1)} - rA_{j-1}^{(2)}$.

将（3.8）代入上二式，得到

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} = -\frac{\partial F_m}{\partial \varphi_2}$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\sum_{s=0}^{j} c_s \left\{-\frac{1}{2}G_{j-1-s,x}^{(2)}\wedge^{m-j}\varphi_1 + \left(G_{j-1-s}^{(1)} + 2\partial^{-1}(qG_{j-1-s}^{(1)}\right.\right.$$
$$\left.-rG_{j-1-s}^{(2)})\right)\wedge^{m-j}\varphi_{1,x} + \left(-\frac{1}{2}(G_{j-1-s}^{(1)} + G_{j-1-s}^{(2)})_x\right.$$
$$\left.\left. - qG_{j-1-s}^{(1)} + rG_{j-1-s}^{(2)}\right)\wedge^{m-j}\varphi_2\right\}$$
$$= \sum_{s=0}^{m} c_s \sum_{k=0}^{m-s}\left\{-\frac{1}{2}G_{k-1,x}^{(2)}\cdot\wedge^{m-s-k}\varphi_1 + \left(G_{k-1}^{(1)} + 2\partial^{-1}(qG_{k-1}^{(1)} -\right.\right.$$
$$\left.-rG_{k-1}^{(2)})\right)\wedge^{m-s-k}\varphi_{1,x} + \left(-\frac{1}{2}(G_{k-1}^{(1)} + G_{k-1}^{(2)})_x -\right.$$
$$\left.\left.-qG_{k-1}^{(1)} + rG_{k-1}^{(2)}\right)\wedge^{m-s-k}\varphi_2\right\} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_m} = \frac{\partial F_m}{\partial \varphi_1}$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\sum_{s=0}^{j} c_s\left\{\left(-\frac{1}{2}(G_{j-1-s}^{(1)} - G_{j-1-s}^{(2)})_x - qG_{j-1-s}^{(1)} + rG_{j-1-s}^{(2)}\right)\wedge^{m-j}\varphi_1\right.$$
$$+\frac{1}{2}G_{j-1-s,x}^{(2)}\wedge^{m-j}\varphi_2 + \left(G_{j-1-s}^{(1)} + 2\partial^{-1}(qG_{j-1-s}^{(1)}\right.$$
$$\left.\left.-rG_{j-1-s}^{(2)})\right)\cdot\wedge^{m-j}\varphi_{2,x}\right\}$$
$$= \sum_{s=0}^{m} c_s\sum_{k=0}^{m-s}\left\{\left(-\frac{1}{2}(G_{k-1}^{(1)} - G_{k-1}^{(2)})_x - qG_{k-1}^{(1)} + rG_{k-1}^{(2)}\right)\wedge^{m-s-k}\varphi_1\right.$$

$$+\frac{1}{2}G^{(2)}_{k-1,x}\wedge^{m-s-k}\varphi_2+(G^{(1)}_{k-1}+2\partial^{-1}(qG^{(1)}_{k-1}-rG^{(2)}_{k-1}))\wedge^{m-s-k}\varphi_{2,x})$$

(3.10)

综合（3.9）与（3.10）两式，并结合（1.5）式，立得：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_m}=\sum_{s=0}^{m}c_s\sum_{k=0}^{m-s}V_{k-1}\cdot\wedge_0^{m-s-k}\varphi$$

$$=\sum_{s=0}^{m}c_s\sum_{k=0}^{m-s}V_{k-1}\cdot L^{m-s-k}\varphi$$

$$=\sum_{s=0}^{m}c_s\,W_{m-s}\varphi=(W_m+c_1W_{m-1}+\cdots+c_mW_0)\,\varphi$$

其中，$W_{m-s}=\sum_{k=0}^{m-s}V_{k-1}\cdot L^{m-s-k}$；$L=L(u)=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}(r-\partial)I_N & (q+r)I_N\\ (r-q)I_N & (r-q)I_N\end{pmatrix}$，$V_{k-1}$

由下式给出：

$$V_{k-1}=\begin{pmatrix}(-\frac{1}{2}G^{(2)}_{k-1,x}+(G^{(1)}_{k-1}+2\partial^{-1}(qG^{(1)}_{k-1}-rG^{(2)}_{k-1}))\partial)I_N & (-\frac{1}{2}(G^{(1)}_{k-1}+G^{(2)}_{k-1})_x-qG^{(1)}_{k-1}+rG^{(2)}_{k-1})I_N\\ (-\frac{1}{2}(G^{(1)}_{k-1}-G^{(2)}_{k-1})_x-qG^{(1)}_{k-1}+rG^{(2)}_{k-1})I_N & (-\frac{1}{2}G^{(2)}_{k-1,x}+(G^{(1)}_{k-1}+2\partial^{-1}(qG^{(1)}_{k-1}-rG^{(2)}_{k-1}))\partial)I_N\end{pmatrix}$$

$K=0,\ 1,\cdots,\ m-s$

$G_{k-1}=(G^{(1)}_{k-1},\ G^{(2)}_{k-1})^T$ 是Lenard递推叙列.

$$\frac{\partial q}{\partial t_m}=2<\varphi_1,\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m}>-2<\varphi_2,\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_m}>=-2<\varphi_1,\frac{\partial F_m}{\partial\varphi_2}>-2<\varphi_2,\frac{\partial F_m}{\partial\varphi_1}>$$

$$=2<\varphi_1,\wedge^{m+1}\varphi_1>+2i<\wedge^m(\varphi_1+\varphi_2),\ \varphi_1+\varphi_2>(<\varphi_1,\ \varphi_1>+<\varphi_2,\ \varphi_2>)+2<\varphi_2,\wedge^{m+1}\varphi_2>$$

$$=i(<\varphi_1,\wedge^m\varphi_1>-<\varphi_2,\wedge^m\varphi_2>)_x=iA^{(2)}_{m,x}=2i\cdot\frac{1}{2}A^{(2)}_{m,x}\qquad(3.11)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t_m}=2<\varphi_1,\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m}>+2<\varphi_2,\frac{\partial\varphi_2}{\partial t_m}>=-2<\varphi_1,\frac{\partial F_m}{\partial\varphi_2}>+2<\varphi_2,\frac{\partial F_m}{\partial\varphi_1}>$$

$$=2<\varphi_1,\wedge^{m+1}\varphi_1>+2i<\wedge^m(\varphi_1+\varphi_2),\ \varphi_1+\varphi_2>(<\varphi_1,\ \varphi_1>-<\varphi_2,\ \varphi_2>)-2<\varphi_2,\wedge^{m+1}\varphi_2>$$

$$= i(<\varphi_1+\varphi_2, \wedge^m(\varphi_1+\varphi_2)>)_x = 2i\left(\frac{1}{2}A^{(1)}_{m,x}+qA^{(1)}_m - rA^{(2)}_m\right) \quad (3.12)$$

由（3.8）、（3.11）、（3.12）及L－C－Z向量场 $X_k = JG_k$，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial}{\partial t_m}\begin{pmatrix} q(x,t_m) \\ r(x,t_m)\end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\partial \\ \frac{1}{2}\partial + q & -r\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{(1)}_m \\ A^{(2)}_m\end{pmatrix}$$

$$= JA_m = J\left(\sum_{s=0}^{m} c_s G_{m-s}\right)$$

$$= X_m + c_1 X_{m-1} + \cdots + c_m X_0$$

附注3.3 L－C－Z 向量场

$$X_0 = i\begin{pmatrix} q_x \\ r_x \end{pmatrix};\quad X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r_{xx} + r_x q + q_x r \\ -\frac{1}{2}q_{xx} - qq_x + 3rr_x \end{pmatrix}.$$

当 $m=1$ 时，按定理3.2，我们可求得二阶非线性L－C－Z方程：$q_t = -\frac{1}{2}r_{xx} + r_x q + q_x r$，$r_t = -\frac{1}{2}q_{xx} - qq_x + 3rr_x$ 的对合解：$q = <\varphi_1, \varphi_1> - <\varphi_2, \varphi_2>$，$r = <\varphi_1, \varphi_1> + <\varphi_2, \varphi_2>$，其中，$(\varphi_1, \varphi_2)^T$ 是在（1.12）下的相容系统 (H)、(F_1) 的对合解.

参 考 文 献

1 Moser, J., Advances in Math., 1975; 16: 197

2 Adler, M., Commun. Math. Phys., 1977: 55: 195

3 曹策问. 中国科学A辑. 1989; 7: 701

4 Cao Cewen and Geng Xianguo. Research Reports in Physics Nonlinear Physics, 1990; 68－78

5 乔志军. L－C－Z族方程的换位表示. 应用数学. 1993

6 Arnold, V. I., Mathematical Mechanics Methods of Classical Mechanics, Springer－Verlag, 1978

Completely Integrable Bargmann System Associated With the L－C－Z Soliton Hierarchy

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

ABSTRACT In this paper, a new involutive system is obtained and under the Bargmann constriant: $q=\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle-\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle$, $r=\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle+\langle\varphi_2,\varphi_2\rangle$, the L－C－Z spectral problem (2.1) is nonlinearized as a new completely integrable Hamiltonian system in Liouville's sense. Finally, we present the involutive solutions of L－C－Z hierarchy of soliton equations.

KEY WORDS L－C－Z hierarchy, Bargmann constriant, Involutive system, Involutive solution, Hamiltonian system, Complete integrability in Liouville's sense.