辽宁大学学报 自然科学版 第20卷 第4期 1993年
JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY Natural Sciences Edition Vol.20 No.4 1993

③ 8-13

Geng族可积发展方程的Lax表示*

乔志军
（数学系）

O175.2

摘　要　基于曹的思想，我们提供一族由耿献国(Geng Xianguo)研究的可积发展方程的Lax表示.

关键词　Geng族；Lenard算子对；Lax表示. ，发展方程

大家知道，可积发展方程族的Lax组的非线性化是一条获得有限维完全可积系统及发展方程对合解极有效的途径[1-3]. 近年来，越来越多的人们致力于这方面的研究. 要对可积发展方程族的Lax组进行非线性化，首先要获得可积发展方程的Lax表示. 曹策问在文〔4〕里首次提出关于保谱发展方程换位表示（或Lax表示）的新框架并阐述了换位表示的各种用途，到目前为止，关于保谱发展方程的换位表示已有不少研究[5-8]. 本文打算针对由Geng Xianguo提出的一个谱问题[9]：

$$\psi_x = M\psi, \quad M=\begin{pmatrix} \lambda u & v-1 \\ \lambda(v+1) & -\lambda u \end{pmatrix} \tag{1}$$

应用曹的方法，给出与（1）相联系的可积发展方程族（以下称为Geng族可积发展方程，简称Geng族）的Lax表示.

由文〔9〕，我们已有下述结果：

设 $\psi=(\psi_1, \psi_2)^T$ 满足（1），令 $\nabla\lambda=(2\lambda\psi_1\psi_2, \psi_2^2-\lambda\psi_1^2)^T$.
则

$$K\nabla\lambda=\lambda J\nabla\lambda \tag{2}$$

其中，K，J 是（1）的Lenard算子对：

$$K=\begin{pmatrix} 2\partial & -\partial^2 \\ \partial^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J=\begin{pmatrix} 2\partial u\partial^{-1}u\partial & 2\partial u\partial^{-1}v\partial \\ 2\partial v\partial^{-1}u\partial & -2\partial+2\partial v\partial^{-1}v\partial \end{pmatrix} \tag{3}$$

且K、J均反称. $\partial=\partial/\partial x$, $\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1$. λ与$\psi=(\psi_1, \psi_2)^T$分别为（1）的特征值与相应的特征函数.

现如下定义（1）的Lenard梯度递推序列$\{G_j\}$：

$$KG_{j-1}=JG_j, \quad j=1, 2, \cdots \tag{4}$$

本文1992年9月17日收到
*辽宁省教委青年自然科学基金资助项目

$$G_0=\frac{1}{2}\left(\frac{1-v^2}{u^2},\ \frac{2v}{u}\right)^T. \tag{5}$$

易看出 $G_0\in\mathrm{Ker}\,J$，且 $G_j=(G_j^{(1)},G_j^{(2)})^T$ 可由（4）递推求得，因为递归算子 $\mathscr{L}$ 为：

$$\mathscr{L}=J^{-1}K=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial^{-1}\frac{1}{u}(2\partial\frac{1}{u}-2v\partial\frac{v}{u}+v\partial^2) & \partial^{-1}\frac{1}{u}(v\partial\frac{v}{u}\partial-\partial\frac{1}{u}\partial) \\ 2\frac{v}{u}-\partial & -\frac{v}{u}\partial\end{pmatrix} \tag{6}$$

$X_m\triangleq KG_m=K\mathscr{L}^m G_0$，$m=0,1,2,\cdots$　称为（1）的向量场；与（1）相联系的可积发展方程族(Geng族)由向量场 X_m 产生，即

$$\begin{pmatrix}u_t\\ v_t\end{pmatrix}=X_m(u,v),\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{7}$$

（7）中第一个非线性方程是：

$$\begin{cases}u_t=-(\frac{v}{u})_{xx}+(\frac{1}{u^2})_x-(\frac{v^2}{u^2})_x\\ v_t=\frac{1}{2}(\frac{1}{u^2})_{xx}-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{u^2})_{xx}.\end{cases} \tag{8}$$

当 $v=1$ 时，（8）便可化至为非线性扩散方程[10,11]

$$u_t=(u^{-2}u_x)_x \tag{9}$$

命题1　Geng谱（1）等价于特征值问题

$$L(w)\psi\equiv\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix}u\partial & -u(v-1)\\ (v+1)\partial & -(v^2-1)-u\partial\end{pmatrix}\psi=\lambda\psi \tag{10}$$

其中，$W=(u,v)^T$，$\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$，$\partial=\partial/\partial x$．

证明：

$$M=\begin{pmatrix}\lambda u & v-1\\ \lambda(v+1) & -\lambda u\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}u & 0\\ v+1 & -u\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & v-1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

注意到

$$\begin{pmatrix}u & 0\\ v+1 & -u\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}u^{-1} & 0\\ (v+1)u^{-2} & -u^{-1}\end{pmatrix}$$

由（1）立即得到（10）的形式．反之亦然．

命题2　对于以（10）定义的谱算子L(w)，我们有：

$$L_{*w}(\zeta)\triangleq\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}L(w+\epsilon\zeta)=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}-\zeta_1 & 0\\ \zeta_2-\frac{v+1}{u}\zeta_1 & -\zeta_1\end{pmatrix}L+\frac{1}{u}\begin{pmatrix}0 & -\zeta_2\\ 0 & -\frac{v+1}{u}\zeta_2\end{pmatrix} \tag{11}$$

这里，$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)^T$，$\forall\zeta_1,\zeta_2$：$L=L(w)$. 以下$L_{*w}$简记为$L_*$. （11）中的$L_*$为单同态.

证明 对$\forall\zeta=(\zeta_1;\zeta_2)^T$，有

$$L_{*w}(\zeta)=-\frac{2\zeta_1}{u}L+\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix}\zeta_1\partial & -\zeta_1 v-\zeta_2 u+\zeta_1\\ \zeta_2\partial & -2v\zeta_2-\zeta_1\partial\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{2\zeta_1}{u}L+\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix}0 & -\zeta_1 v-\zeta_2 u+\zeta_1\\ 0 & -2v\zeta_1\end{pmatrix}+\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix}\zeta_1 & 0\\ \zeta_2 & -\zeta_1\end{pmatrix}\partial \tag{12}$$

另一方面，写$L=L(w)$为如下形式

$$L=L_0+L_1\partial；\ L_0=\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix}0 & -u(v-1)\\ 0 & -(v^2-1)\end{pmatrix},\ L_1=\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix}u & 0\\ v+1 & -u\end{pmatrix} \tag{13}$$

那么算子 $\partial=L_1^{-1}(L-L_0)$，其中 $L_1^{-1}=\begin{pmatrix}u & 0\\ v+1 & -u\end{pmatrix}$.

将算子$\partial=L_1^{-1}(L-L_0)$代入（12）式，经一系列计算并整理即证得（11）$L_{*w}(\zeta)=0\Longleftrightarrow\zeta=0$，因而$L_*$为单同态. 证完.

令 $V=V_0+V_1L+V_2L^2$，其中$V_i=\begin{pmatrix}A_i & B_i\\ C_i & D_i\end{pmatrix}$，$i=0,1,2$.

A_i，B_i，C_i，D_i $(i=0,1,2)$ 均为待定的函数. 下边我们作算子V与（13）中L的换位子：

$$[V,L]=\sum_{i=1}^{2}[V_i,L]L^i=\sum_{i=0}^{2}[V_i,L_0+L_1\partial]L^i$$

$$=\sum_{i=0}^{2}\{[V_i,L_0]-L_1V_{ix}+[V_i,L_1]\partial\}L^i$$

$$=\sum_{i=0}^{2}([V_i,L_0]-L_1V_{ix}-[V_i,L_1]L_1^{-1}L_0)L^i+[V_i,L_1]L_1^{-1}L^{i+1} \tag{14}$$

经计算可知

$$(*)\quad [V_i,L_0]-L_1V_{ix}-[V_i,L_1]L_1^{-1}L_0=\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix}-uA_{ix}+u(v-1)C_i, & -uB_{ix}+u(v-1)(D_i-A_i)\\ -(v+1)A_{ix}+uC_{ix}+(v^2-1)C_i, & -(v+1)B_{ix}+uD_{ix}+u(v-1)C_i-(v^2-1)(A_i-D_i)\end{pmatrix}$$

$$(**)\quad [V_i,L_1]L_1^{-1}=\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix}-u(v+1)B_i & 2u^2B_i\\ -(v+1)^2B_i+2u^2C_i-u(v+1)(A_i-D_i) & u(v+1)B_i\end{pmatrix}$$

（14）即是

$$[V, L]=[V_0, L_0]-L_1 V_{0x}-[V_0, L_1]L_1^{-1}L_0+([V_0, L_1]L_1^{-1}+[V_1, L_0]-L_1 V_{1x}-[V_1, L_1]L_1^{-1}L_0)L+([V_1, L_1]L_1^{-1}+[V_2, L_0]-L_1 V_{2x}-[V_2, L_1]L_1^{-1}L_0)L^2+[V_2, L_1]L_1^{-1}L^3 \tag{15}$$

我们希望得到

$$[V, L]=L_*(K\widetilde{G})-L_*(J\widetilde{G})L \tag{16}$$

其中，K, J是Lenard算子对（3）式：$\widetilde{G}\triangleq(\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2)^T$，$\widetilde{G}_1,\widetilde{G}_2$是任二光滑函数.

利用（11）式，将（16）式打开可得

$$[V, L]=\frac{1}{u}\begin{pmatrix}0 & -(K\widetilde{G})_2\\ 0 & -\frac{v+1}{u}(K\widetilde{G})_2\end{pmatrix}+\frac{1}{u}\begin{pmatrix}-(K\widetilde{G})_1 & (J\widetilde{G})_2\\ (K\widetilde{G})_2-\frac{v+1}{u}(K\widetilde{G})_1 & -(K\widetilde{G})_1+\frac{v+1}{u}(J\widetilde{G})_2\end{pmatrix}L-\frac{1}{u}\begin{pmatrix}-(J\widetilde{G})_1 & 0\\ (J\widetilde{G})_2-\frac{v+1}{u}(J\widetilde{G})_1 & -(J\widetilde{G})_1\end{pmatrix}L^2 \tag{17}$$

这里$(\cdot)_i$，$i=1$，2表示$\cdot$的第i个分量：$K\widetilde{G}$与$J\widetilde{G}$分别为

$$K\widetilde{G}=\begin{pmatrix}2\widetilde{G}_{1x}-\widetilde{G}_{2xx}\\ \widetilde{G}_{1xx}\end{pmatrix},\quad J\widetilde{G}=\begin{pmatrix}2\partial u\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x})\\ 2\partial v\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x})-\widetilde{G}_{2x}\end{pmatrix} \tag{18}$$

要使（16）式成立，必须让（15）与（17）中的L各同次幂的系数矩阵相等. 为此，我们选取

$$\begin{aligned}&A_0=C_0=D_0=0,\quad B_0=\widetilde{G}_{1x},\\ &A_1=-D_1=-\widetilde{G}_{2x},\quad C_1=\widetilde{G}_{1x},\quad B_1=-2(v-1)\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x}),\\ &A_2=-D_2=-2u\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x}),\quad B_2=0,\quad C_2=-2(v+1)\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x})\end{aligned} \tag{19}$$

那么，我们得到

定理1 设$\widetilde{G}_1(x)$, $\widetilde{G}_2(x)$是任二充分光滑的函数，$\widetilde{G}\triangleq(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2)^T$；令算子

$$V=V(\widetilde{G})=\begin{pmatrix}0 & \widetilde{G}_{1x}\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\widetilde{G}_{2x} & -2(v-1)\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x})\\ \widetilde{G}_{1x} & \widetilde{G}_{2x}\end{pmatrix}L$$

$$+\begin{pmatrix} -2u\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x}) & 0 \\ -2(v+1)\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x}) & 2u\partial^{-1}(u\widetilde{G}_{1x}+v\widetilde{G}_{2x}) \end{pmatrix}L^2 \qquad (20)$$

则　$[V, L] = L\cdot(K\widetilde{G}) - L\cdot(J\widetilde{G})L$

其中，K, J为（1）的Lenard算子对，L 如（10）中所述.

证明，先将（19）式代入（＊）、（＊＊）两式，再将该两式的计算结果按 $i=0$，1，2 的次序逐一代入到（15）式的右端，通过一系列较繁琐的计算，不难发现（15）式中算子L各次幂的二阶系数矩阵与（17）式中L对应次幂的二阶系数矩阵之计算结果是完全一致的.

定理 2　设 $G_j=(G_j^{(1)}, G_j^{(2)})^T$ 是（1）的Lenard梯度递推叙列，令 $V_j=V(G_j)$, $W_m=\sum_{j=0}^{m} V_j L^{m-j}$，那么

$$[W_m, L] = L\cdot(X_m), \quad m=0, 1, 2, \cdots \qquad (21)$$

证明　由定理 1 及 $KG_{j-1}=JG_j$, $JG_0=0$ 得到

$$[W_m, L] = \sum_{j=0}^{m}[V(G_j), L]L^{m-j} = \sum_{j=0}^{m}\{L\cdot(KG_j)L^{m-j} - L\cdot(JG_j)L^{m-j+1}\}$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\{L\cdot(KG_j)L^{m-j} - L\cdot(KG_{j-1})L^{m-j+1}\}$$

$$= L\cdot(KG_m) = L\cdot(X_m).$$

定理 3　$m+1$ 阶Geng族可积发展方程 $(u, v)_t^T = X_m(u, v)$, $m=0, 1, 2, \cdots$ 具有换位表示结构：

$$L_t = [W_m, L], \quad m=0, 1, 2, \cdots. \qquad (22)$$

即　方程 $(u, v)_t^T = X_m(u, v)$, $m=0, 1, 2, \cdots$　具有Lax表示形式（22）. 其中，算子 W_m 如定理 2 中所述，L 如（10）中所示.

证明　$$L_t = \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{2u_t}{u}\cdot L + \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} u_t\partial & -u_t v - v_t u + u_t \\ v_t\partial & -2vv_t - u_t\partial \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{u}\begin{pmatrix} -u_t & 0 \\ v_t - \frac{v+1}{u}u_t & -u_t \end{pmatrix}L + \frac{1}{u}\begin{pmatrix} 0 & -v_t \\ 0 & -\frac{v+1}{u}v_t \end{pmatrix}$$

$$\doteq L\cdot(u_t, v_t)$$

由定理 2 立知

$$L_t - [W_m, L] = L\cdot(u_t, v_t) - L\cdot(X_m) = L\cdot((u_t, v_t)^T - X_m(u, v))$$

又 $L\cdot$ 为单态，故

$L_t=[W_m, L] \Longleftrightarrow (u, v)_t^T=X_m(u, v)$

推论 1　Geng族方程 $(u, v)_t^T=X_m(u, v)$是$L\psi=\lambda\psi$与$\psi_t=W_m\psi$的自然相容性条件.

推论 2　位势$u(x, t)$, $v(x, t)$满足定态的非线性Geng系统

$$X_N+a_1X_{N-1}+\cdots+a_NX_0=0 \tag{23}$$

的充要条件是

$$[W_N+a_1W_{N-1}+\cdots+a_NW_0, L]=0 \tag{24}$$

其中, $a_1,\cdots, a_N$ 为常数.

证明　利用定理2及L_t为单同态. 立知本推论的正确性.

参 考 文 献

1 曹策问. 中国科学A辑. 1989; 7: 701～707
2 Cao Cewen and Geng Xianguo, J. Phys. A. 1990; 23: 4117～4125
3 Cao Cewen, Acta Math. Sin. 1991; 7: 216～225
4 曹策问. 科学通报. 1989; 34(10): 723～724
5 许太喜, 顾祝全. 科学通报. 1989; 34(18): 1437
6 乔志军. 科学通报. 1990; 35(17): 1353～1354
7 乔志军. 应用数学. 1991; 4(4): 64～70
8 乔志军. 科学通报. 1992; 37(8): 763～764
9 Geng Xianguo, Phys. Lett. A, 1992; 162: 375～380
10 G. Blumann and S. Kumei, J. Math. Phys., 1980; 21: 1019
11 Geng Xianguo, Phys. Lett. A, 1990; 147: 491～494

The Lax Representation for the Geng Hierarchy of Integrable Evolution Equations

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

ABSTRACT　Based on Cao's thought, we present the Lax representation of a hierarchy of integrable evolution equations which is studied by Geng Xianguo.

KEY WORDS　Geng hierarchy, The pair of Lenard's operators, Lax representation.