辽宁大学学报
自然科学版
第20卷 第1期 1993年

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.20 №1 1993

一种获得AKNS方程族的换位表示之新途径

25-28　　O411.1

乔志军
（数 学 系）

摘　要　本文利用谱梯度法引出AKNS族的Lenard算子对，进而给出AKNS方程族的换位表示.

关键词　AKNS族；Lenard算子对；换位表示；谱梯度法.　AKNS方程族

考虑广义Zakharov—Shabat谱问题

$$\psi_x = U\psi,\quad U=\begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ r & i\zeta \end{pmatrix},\quad i=\sqrt{-1}. \tag{1}$$

这里，$\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$；ζ为谱参数；向量值函数$u(x)\triangleq(q(x),r(x))^T$称为位势. 自变量$x$在依赖区间$\Omega$（$\Omega=(-\infty,+\infty)$或$(0,T)$）内变化，$u(x)$在无穷远处衰减为零或以$T$为周期.

本文约定：$\partial/\partial x$；∂^{-1}表示∂的逆算子.

1973年、1974年Ablowitz、Kaup、Newell、Segur(AKNS)四人[1,2]通过研究（1）的辅助谱问题

$$\psi_t = S\psi,\quad S=\begin{pmatrix} A(x,t,\zeta) & B(x,t,\zeta) \\ C(x,t,\zeta) & -A(x,t,\zeta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

其中　$A=\sum_{j=0}^{N} A_j(x,t)\zeta^{N-j}$，$B=\sum_{j=1}^{N} B_j(x,t)\zeta^{N-j}$，$C=\sum_{j=1}^{N} C_j(x,t)\zeta^{N-j}$，确定出$A_j(x,t)$、$B_j(x,t)$和$C_j(x,t)$，进而给出（1）的位势$q(x,t)$、$r(x,t)$所满足的发展方程族(AKNS族)：

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} = 2i\sum_{j=0}^{N}\alpha_{N-j}\mathscr{L}^j\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix},\quad \mathscr{L}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} \partial-2r\partial^{-1}q & 2r\partial^{-1}r \\ -2q\partial^{-1}q & -\partial+2q\partial^{-1}r \end{pmatrix}. \tag{3}$$

和AKNS族（3）的Lax表示 $\psi_x=U\psi$，$\psi_t=S\psi$.

本文将从另一角度出发，通过引入（1）的所谓谱梯度、Lenard算子对及向量场，给出与谱问题（1）相联系的非线性保谱演化方程族及其换位表示. 下边我们可以看到该族方程不是别的，就是AKNS族；同时我们也看到按此种方法（不妨称为谱梯度

本文1991年1月16日收到

法）获得（1）的保谱演化方程族及其换位表示无论在形式上还是在计算过程上均比文〔1，2〕简洁些.

命题1[3]：设ζ为ZS谱问题（1）的一个谱值，那么ζ对位势$u=(q,r)^T$的谱梯度$\nabla\lambda$是：

$$\nabla\zeta \triangleq \begin{pmatrix} \delta\zeta/\delta q \\ \delta\zeta/\delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^2(x) \\ -\psi_1^2(x) \end{pmatrix} \cdot \left(\int_\Omega 2i\psi_1(x)\psi_2(x)dx \right)^{-1}. \quad (4)$$

其中，$\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$为对应于谱ζ的谱函数：

$$\begin{aligned} \psi_{1x} &= -i\zeta\psi_1 + q(x)\psi_2 \\ \psi_{2x} &= r(x)\psi_1 + i\zeta\psi_2 \end{aligned} \quad (5)$$

由于 $(\psi_1\psi_2)_x = q\psi_2^2 + r\psi_1^2$，$(\psi_2^2)_x = 2r\psi_1\psi_2 + 2i\zeta\psi_2^2$，$(\psi_1^2)_x = -2i\zeta\psi_1^2 + 2q\psi_1\psi_2$

所以 $(\psi_2^2)_x - 2r\partial^{-1}(q\psi_2^2 + r\psi_1^2) = 2i\zeta\psi_2^2$，$-(\psi_1^2)_x + 2q\partial^{-1}(q\psi_2^2 + r\psi_1^2) = 2i\zeta\psi_1^2$.

即 $$\begin{pmatrix} 2q\partial^{-1}q & \partial - 2q\partial^{-1}r \\ \partial - 2r\partial^{-1}q & 2r\partial^{-1}r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2^2 \\ -\psi_1^2 \end{pmatrix} = 2i\zeta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2^2 \\ -\psi_1^2 \end{pmatrix}$$

因此我们只要选取微分积分算子K、J为：

$$K = \begin{pmatrix} 2q\partial^{-1}q & \partial - 2q\partial^{-1}r \\ \partial - 2r\partial^{-1}q & 2r\partial^{-1}r \end{pmatrix}, \quad J = 2i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

就有 $$K\nabla\lambda = \zeta \cdot J\nabla\lambda \quad (6)$$

定义1 使（6）式成立的算子K、J称为ZS谱（1）的Lenard算子对. 这里K、J均反称且J为辛算子.

注：$J^{-1}K$给出（3）中的递归算子$\mathscr{L}$. 不过这里纯粹是靠谱（1）本身而导出，与其它因素无关.

定义（1）的Lenard梯度递推叙列$\{G_j\}_{j=-1}^{\infty}$如下：

$G_{-1}=(0,0)^T \in \mathrm{Ker}J$，令$(\partial^{-1}r-\partial^{-1}q)0=i$，$KG_{j-1}=JG_j$，$j=0,1,2,\cdots$.

前几个计算结果为：

$$G_0 = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}, \quad G_1 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} r_x \\ -q_x \end{pmatrix}, \quad G_2 = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} r_{xx} - 2r^2q \\ q_{xx} - 2q^2r \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \frac{1}{8i}\begin{pmatrix} 6qrr_x - r_{xxx} \\ -6qrq_x + q_{xxx} \end{pmatrix}.$$

不难证明诸G_j的分量是q，r及其导数的多项式. $X_m \triangleq JG_m$ $(m=0,1,2,\cdots)$称为（1）的向量场. 由向量场X_m产生的非线性发展方程族$u_t=X_m(u)$称为（1）的保

谱演化方程族．特别 $u_t=X_2(u)\equiv\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}-q_{xx}+2q^2r\\ r_{xx}-2r^2q\end{pmatrix}$ 和 $u_t=X_3(u)\equiv\frac{1}{4}$ $\equiv\frac{1}{4}\begin{pmatrix}6qrq_x-q_{xxx}\\ \cdot 6qrr_x-r_{xxx}\end{pmatrix}$ 分别给出耦合的非线性Schrodinger方程与耦合的Mkdv方程，由此可知 $u_t=X_m(u)$ $m=0,1,2,\cdots$．就是AKNS方程族．

谱（1）与

$$L(u)\psi=\zeta\psi,\quad L(u)=\begin{pmatrix}i\partial & -iq\\ ir & -i\partial\end{pmatrix}\tag{7}$$

等价．让 $L: u\mapsto L(u)$ 是位势到微分算子的映射，按映射 L 的微分之定义[4]，我们有

引理 1　映射 $L: u\mapsto L(u)$ 的微分为

$$L_{*u}(\xi)\triangleq\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\xi)=\begin{pmatrix}0 & -i\xi_1\\ i\xi_2 & 0\end{pmatrix}\tag{8}$$

且 L_{*u}（以下简写为 L_*）是单同态．$\xi=(\xi_1,\ \xi_2)$．

引理 2　设 $B(x)$, $C(x)$ 是 Ω 上的任二光滑函数，$G(x)\triangleq(C(x),\ B(x))^T$，让

$$V=V(G)=\begin{pmatrix}-\partial^{-1}(rB-qC) & B\\ C & \partial^{-1}(rB-qC)\end{pmatrix}\tag{9}$$

那么 V 与 $L\triangleq L(u)$ 的换位子为

$$[V,\ L]\triangleq VL-LV=L_*(KG)-L_*(JG)L\tag{10}$$

其中K, J是（1）的Lenard算子对．

证明　$L\triangleq L(u)=L_1+L_2\partial$，$L_1=\begin{pmatrix}0 & -iq\\ ir & 0\end{pmatrix}$，$L_2=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$．

$$\begin{aligned}[V,\ L]&=[V,\ L_1]+[V,\ L_2\partial]\\ &=([V,\ L_1]-L_2V_x-[V,\ L_2]L_2^{-1}L_1)+[V,\ L_2]L_2^{-1}L\end{aligned}\tag{11}$$

上述运算中利用了关系 $\partial=L_2^{-1}(L-L_1)$．将L_1，L_2及 V 的表示式（9）分别代入到（11）式，然后进行计算整理，不难发现其结果等于（10）的右端．

定理 1　设 $G_j(x)=(C_j(x),\ B_j(x))^T$ 是（1）的Lenard梯度递推叙列，令 $V_j=V(G_j)$, $j=-1,0,1,\cdots$．其中 $V_{-1}\triangleq\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$；$W_m=\sum_{j=0}^{m}V_{j-1}L^{m-j}$，$m=0,1,2,\cdots$．则

$$[W_m,\ L]=L_*(X_m),\quad m=0,1,2,\cdots\tag{12}$$

证明　由引理 2，我们有

$$[W_m,\ L]=\sum_{j=0}^{m}[V_{j-1},\ L]L^{m-j}=\sum_{j=0}^{m}L_*(KG_{j-1})L^{m-j}-L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1}$$

$$=L_*(JG_m)=L_*(X_m)$$

定理 2 高阶AKNS方程 $u_t\equiv(q,r)_t^T=X_m(u)$ $m=0,1,2,\cdots$ 具有换位表示

$$L_t=[W_m, L] \quad m=0,1,2,\cdots. \tag{13}$$

$$W_m=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix} -\partial^{-1}(rB_{j-1}-qC_{j-1}) & B_{j-1} \\ C_{j-1} & \partial^{-1}(rB_{j-1}-qC_{j-1}) \end{pmatrix} L^{m-j} \tag{14}$$

其中算子L如（7）中所示，$G_{j-1}\triangleq(C_{j-1},B_{j-1})^T$ 是Lenard递推叙列.

证明 $L_t=\dfrac{\partial L}{\partial t}=L_*(u_t)$

$$L_t-[W_m, L]=L_*(u_t)-L_*(X_m)=L_*(u_t-X_m)$$

又L_*为单射，故本定理成立.

推论 1 AKNS方程 $u_t=X_m(u)$ 是$L\psi=\zeta\psi$与$\psi_t=W_m\psi$ 的自然相容性条件.

推论 2 位势 $u(x)=(q(x),r(x))^T$ 满足定态的AKNS系统$X_N+\alpha_1X_{N-1}+\cdots+\alpha_NX_0=0$的充要条件为

$$[W_N+\alpha_1W_{N-1}+\cdots+\alpha_NW_0, L]=0 \tag{15}$$

这里 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 皆是常数.

注记：本文的一些结果虽然能用文〔1，2〕中的结果推出，但这里我们是从另一角度出发获得的，换句话说，本文注重的是这种获得演化方程族的新方法—谱梯度法，并由此想到对于其它一些谱问题使用该法所获得的孤子方程族及其换位表示．谱梯度法的特点在于：形式整齐，计算简洁.

参 考 文 献

1 Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C. and Segur H., Phys. Rev. Lett., 1973: 31: 125

2 Author equal〔1〕Studies in Appl. Math., 1974:53:249~315

3 Cao Cewen, Sci. China A, 1990: 33: 5: 528~536

4 曹策问．科学通报．1989: 34（10）: 723~724

A New Approach to the Commutator Representation of AKNS Hierarchy

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

ABSTRACT By the method of spectral gradient the pair of lenard's operators of AKNS hierarchy is introduced and the commutator representation of AKNS equation hierarchy is further presnted.

KEY WORDS AKNS hierarchy, The pair of lenard's oprators, Commutator rerepresentation, The method of spectral gradient.