

哈密顿系统, 黎曼约束, WKI 孤子族  
诺伊

① 一类具有 C. Neumann 约束的 Hamilton 系统及 WKI 孤子族\*  
377-382

乔志军  
(辽宁大学数学系, 沈阳 110036)

0175.2

摘要

本文首先求出 WKI 孤子向量场的换位表示, 尔后应用特征值的泛函梯度, 得到一种 C. Neumann 约束, 在该约束下, 与 WKI 发展方程族相联系的保谱问题(WKI 谱问题)被非线性化为一个 Hamilton 系统, 最后, 我们讨论了 C. Neumann 约束与定态 WKI 孤子系统之间的关系.

§ 1 WKI 向量场的换位表示

自从曹策问<sup>[1]</sup>阐明关于保谱发展方程的换位表示理论以来, 这方面的研究工作已有不少([2-6]). WKI 族是一族较困难、较复杂的非线性偏微分方程, 以具有孤子解而著称, 受到广泛重视. 下边我们先解答 WKI 孤子族的换位表示, 然后讨论其非线性化所产生的 Hamilton 系统.

与 WKI 孤子族相关联的谱问题是<sup>[7]</sup>(以称为 WKI 谱问题):

$$\psi_x = U\psi, \quad U = \begin{pmatrix} -i\lambda & \lambda q \\ \lambda r & i\lambda \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

其中  $\lambda$  是谱参数,  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ ,  $\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ; 向量值函数  $u(x) = (q(x), r(x))^T$  称为(1.1)的位势; 自变量  $x$  在依赖区间  $\Omega$  内变化( $\Omega = (0, T)$  或  $(-\infty, +\infty)$ ); 位势  $u(x)$  在无穷远处衰减为零或以  $T$  为周期.

命题 1.1 (1.1)的特征值  $\lambda$  关于位势  $u$  的泛函梯度为:

$$\nabla_{*}\lambda \triangleq \begin{pmatrix} \delta\lambda/\delta q \\ \delta\lambda/\delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\psi_2^2 \\ -\lambda\psi_1^2 \end{pmatrix} \cdot \left( \int_{\Omega} (r\psi_1^2 + 2i\psi_1\psi_2 - q\psi_2^2) dx \right)^{-1}, \quad (1.2)$$

这里  $\psi_1, \psi_2$  是相应于  $\lambda$  的特征函数.

证明 在文[8]第 III 节里, 我们选择:  $m_{11} = -i\lambda, m_{12} = \lambda q, m_{21} = \lambda r$ , 稍加整理就有

$$\int_{\Omega} (\lambda\psi_2^2 \cdot \delta q - \lambda\psi_1^2 \cdot \delta r) dx = \delta\lambda \cdot \left( \int_{\Omega} (r\psi_1^2 + 2i\psi_1\psi_2 - q\psi_2^2) dx \right)^{-1}.$$

故(1.2)式成立.

\* 1991 年 5 月 13 日收到. 1993 年 3 月 10 日收到修改稿. 辽宁省教委青年自然科学基金资助项目.

命题 1.2 若  $\lambda$  是 WKI 谱(1.1)的一个特征值,则以(1.2)定义的  $\nabla, \lambda$  满足方程

$$K \nabla, \lambda = \lambda \cdot J \nabla, \lambda \quad (1.3)$$

特别有

$$K \begin{pmatrix} \psi_2^2 \\ -\psi_1^2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot J \begin{pmatrix} \psi_2^2 \\ -\psi_1^2 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

其中  $K, J$  是两个斜称的微分积分算子 ( $\partial = d/\partial x, \partial^{-1} = \int dx$ ):

$$K = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \partial^2 \frac{q}{p} \partial^{-1} \frac{q}{p} \partial^2 & \partial^2 + \frac{1}{2} \partial^2 \frac{q}{p} \partial^{-1} \frac{r}{p} \partial^2 \\ \partial^2 + \frac{1}{2} \partial^2 \frac{r}{p} \partial^{-1} \frac{q}{p} \partial^2 & -\frac{1}{2} \partial^2 \frac{r}{p} \partial^{-1} \frac{r}{p} \partial^2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -\partial^2 \\ \partial^2 & 0 \end{pmatrix}, p = \sqrt{1-qr}. \quad (1.5)$$

算子  $K, J$  称为 WKI 谱问题(1.1)的 Lenard 算子对.

证明 只须证明

$$J^{-1} K \nabla, \lambda = \lambda \cdot \nabla, \lambda, \quad (1.6)$$

这里

$$J^{-1} K = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \partial + \frac{1}{2} \frac{r}{p} \partial^{-1} \frac{q}{p} \partial^2 & -\frac{1}{2} \frac{r}{p} \partial^{-1} \frac{r}{p} \partial^2 \\ \frac{1}{2} \frac{q}{p} \partial^{-1} \frac{q}{p} \partial^2 & -\partial - \frac{1}{2} \frac{q}{p} \partial^{-1} \frac{r}{p} \partial^2 \end{pmatrix}.$$

利用等式  $(\psi_1^2)_x = -2i\lambda\psi_1^2 + 2\lambda q\psi_1\psi_2, (\psi_2^2)_x = 2i\lambda\psi_2^2 + 2\lambda r\psi_1\psi_2, (\psi_1\psi_2)_x = \lambda q\psi_2^2 + \lambda r\psi_1^2, (\frac{r}{p})_x \cdot q + (\frac{q}{p})_x \cdot r = 2 \cdot (\frac{1}{p})_x$ , 及分部积分知识,经详细计算不难验证(1.6)式的正确性.

注 上述算子  $J^{-1}K$  就是文[9]中的递归算子  $G$ .

命题 1.3 WKI 谱问题(1.1)等价于

$$L(u)\psi = \lambda\psi, L(u) = \frac{1}{1-qr} \begin{pmatrix} i & -q \\ -r & -i \end{pmatrix} \partial, \partial = d/\partial x. \quad (1.7)$$

引理 1.4 对于(1.7)中的谱算子  $L=L(u)$ ,其 Gateaux 微分映射为

$$L_{,s}(\xi) \triangleq \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(u + s\xi) = \frac{1}{1-qr} \begin{pmatrix} q\xi_2 & -i\xi_1 \\ i\xi_2 & r\xi_1 \end{pmatrix} L, \forall \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

且  $L_{,s}$  (以下简记为  $L_{,s}$ ) 是单态.

证明 按  $L_{,s}(\xi)$  的定义并注意  $\partial = \begin{pmatrix} -i & q \\ r & i \end{pmatrix} L$ , 经计算必得(1.8)式.

$L_{,s}(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ . 是明显的.

令  $V = \begin{pmatrix} -i & q \\ r & i \end{pmatrix}$ , 那么  $V^{-1} = \frac{1}{1-qr} \begin{pmatrix} i & -q \\ -r & -i \end{pmatrix}$  且  $L$  可写为  $L = V^{-1}\partial$ . 设  $A, B, C, E, F$  为待定的函数, 令  $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ E & 0 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$ . 以下我们做二算子  $W = W_1 + W_2L, L = V^{-1}\partial$  的换位子

$[W, L] \triangleq WL - LW$  (注意  $\partial = VL$ ):

$$\begin{aligned} (*) \quad [W, L] &= [W_1, L] + [W_2, L]L \\ &= -V^{-1}W_{1x} + ([W_1, V^{-1}]V - V^{-1}W_{2x})L + [W_2, V^{-1}]VL^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1-q\tau} \begin{pmatrix} qE_s & -iF_s \\ iE_s & \tau F_s \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{1}{1-q\tau} \begin{pmatrix} -iA_s + qC_s - i(qE + \tau F) & -iB_s - qA_s + 2F + q(qE - \tau F) \\ \tau A_s + iC_s + 2E + \tau(\tau F - qE) & \tau B_s - iA_s + i(qE + \tau F) \end{pmatrix} L \\
 &+ \frac{1}{1-q\tau} \begin{pmatrix} -2q\tau A - i(B\tau + qC) & 2B - 2iqA + q(qC - \tau B) \\ 2C + \tau(\tau B - qC) - 2i\tau A & 2q\tau A + i(B\tau + qC) \end{pmatrix} L^2.
 \end{aligned}$$

我们希望

$$[W, L] = L_*(KG)L^{-1} - L_*(JG). \tag{1.9}$$

即

$$[W, L] = \frac{1}{1-q\tau} \begin{pmatrix} q(KG)^{(2)} & -i(KG)^{(1)} \\ i(KG)^{(2)} & \tau(KG)^{(1)} \end{pmatrix} - \frac{1}{1-q\tau} \begin{pmatrix} q(JG)^{(2)} & -i(JG)^{(1)} \\ i(JG)^{(2)} & \tau(JG)^{(1)} \end{pmatrix} L, \tag{1.10}$$

其中  $K, J$  是 Lenard 算子对 (1.5);  $G(x) = (G^{(1)}(x), G^{(2)}(x))^T, G^{(1)}(x), G^{(2)}(x)$  是  $\Omega$  上的任二光滑函数,  $(\cdot)^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ) 表示  $(\cdot)$  的第  $i$  个分量.

为此, 我们应选  $A, B, C, E, F$  为:

$$\begin{aligned}
 A(G) &= \frac{1}{2i} \frac{1}{p} \mathcal{J}^{-1} \left( \frac{q}{p} G_x^{(1)} - \frac{\tau}{p} G_x^{(2)} \right), & B(G) &= \frac{q}{2p} \mathcal{J}^{-1} \left( \frac{q}{p} G_x^{(1)} - \frac{\tau}{p} G_x^{(2)} \right), \\
 C(G) &= \frac{\tau}{2p} \mathcal{J}^{-1} \left( \frac{q}{p} G_x^{(1)} - \frac{\tau}{p} G_x^{(2)} \right), & E(G) &= \frac{1}{2i} (G_x^{(1)} + \frac{1}{2} \partial \frac{\tau}{p} \mathcal{J}^{-1} \left( \frac{q}{p} G_x^{(1)} - \frac{\tau}{p} G_x^{(2)} \right)), \\
 F(G) &= \frac{1}{2i} (G_x^{(2)} - \frac{1}{2} \partial \frac{q}{p} \mathcal{J}^{-1} \left( \frac{q}{p} G_x^{(1)} - \frac{\tau}{p} G_x^{(2)} \right)).
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

从而我们得到

定理 1.5 设  $G^{(1)}(x), G^{(2)}(x)$  为  $\Omega$  上的两个任意光滑函数,  $G = (G^{(1)}, G^{(2)})^T$ . 令算子

$$W = W(G) = \begin{pmatrix} 0 & F(G) \\ E(G) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(G) & B(G) \\ C(G) & -A(G) \end{pmatrix} L, \tag{1.12}$$

其中  $A(G), B(G), C(G), E(G), F(G)$  如 (1.11) 中所述, 谱算子  $L$  如 (1.7) 中所示. 那么  $W$  必满足由 Lenard 算子对  $K, J$  生成的算子方程

$$[W, L] = L_*(KG)L^{-1} - L_*(JG), \tag{1.13}$$

证明 将  $A(G), B(G), C(G), E(G), F(G)$  的表达式 (1.11) 依次代入 (\*) 式的右端, 并注意  $\tau B = qC, C = i\tau A, B = iqA, E = \frac{1}{2i} G_x^{(1)} + \frac{1}{2} (\tau A)_x, F = \frac{1}{2i} G_x^{(2)} - \frac{1}{2} (qA)_x, A_x(1-q\tau) - \frac{1}{2} (q\tau)_x A = p(Ap)_x, p = \sqrt{1-q\tau}$ , 就不难算得其结果等于 (1.10) 的右端.

现递推定义 (1.1) 的 Lenard 梯度叙列  $\{G_j\}$ :

$$\begin{aligned}
 G_{-1} &= (1, -1)^T, & G_0 &= J^{-1}KG_{-1} = (i\frac{\tau}{p}, i\frac{q}{p})^T, & p &= \sqrt{1-q\tau}. \\
 G_j &= J^{-1}KG_{j-1}, & j &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

$X_m \triangleq JG_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) 称为 WKI 向量场, 前两个计算结果为:  $X_0 = (-i(\frac{q}{p})_x, i(\frac{\tau}{p})_x)^T, X_1 = \frac{1}{2} ((\frac{q_x}{p})_x, (\frac{\tau_x}{p})_x)^T$ . WKI 孤子族由向量场  $X_m$  产生, 即

$$u_x = (q, \tau)_x^T = X_m(q, \tau), \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{1.15}$$

特别指出, 当  $\tau = -1$  时, 令  $1+q=s$ , 那么  $u_x = X_1(q, -1)$  便化为著名的 Harry-Dym 方程

$$s_i = - \left( \frac{1}{\sqrt{s}} \right)_{x_i}$$

**定理 1.6** 设  $G_j = G_j^{(1)}, G_j^{(2)}$  为 (1.1) 的 Lenard 叙列, 令  $W_j = W(G_j), V_m = \sum_{j=0}^m W_{j-1} \cdot L^{m+1-j}, (m = 0, 1, 2, \dots)$ , 则  $[V_m, L] = L_*(X_m), m = 0, 1, 2, \dots$ .

**证明**  $[V_m, L] = \sum_{j=0}^m [W_{j-1}, L] L^{m+1-j} = \sum_{j=0}^m L_*(KG_{j-1}) L^{m-j} - L_*(JG_{j-1}) L^{m-j+1} = \sum_{j=0}^m L_*(JG_j) L^{m-j} - L_*(JG_{j-1}) L^{m-j+1} = L_*(JG_m) - L_*(JG_{-1}) L^{m+1} = L_*(X_m).$

**推论 1.7** WKI 孤子族 (1.15) 具有换位表示  $L_t = [V_m, L], m = 0, 1, 2, \dots$ .

**证明**

$$L_t = \frac{1}{(1 - qr)^2} \begin{pmatrix} i(\tau q_t + qr_t) & - (q_t + q^2 \tau_t) \\ - (\tau_t + \tau^2 q_t) & - i(\tau q_t + qr_t) \end{pmatrix} \partial = L_*(u_t), u = (q, \tau)^T.$$

$$L_t - [V_m, L] = L_*(u_t) - L_*(X_m) = L_*(u_t - X_m)$$

又  $L_*$  是单态, 故推论 1.7 正确.

**推论 1.8** 位势  $u = (q, \tau)^T$  是定态非线性 WKI 系统  $X_N + a_1 X_{N-1} + \dots + a_N X_0 = 0$  的一个有限带之充要条件是算子  $V_N + a_1 V_{N-1} + \dots + a_N V_0$  与  $L$  可换. 这里  $a_1, \dots, a_N$  是一些常数.

## § 2 Hamilton 系统与一个定态 WKI 方程

设  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  为 (1.1) 的  $N$  个互不相同的特征值, 那么我们有

$$\begin{cases} \psi_{1x} = -iA\psi_1 + qA\psi_2 \\ \psi_{2x} = rA\psi_1 + iA\psi_2 \end{cases}, \quad (2.1)$$

其中,  $\psi_k = (\psi_{k1}, \dots, \psi_{kN})^T (k=1, 2); A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N); \psi_{1j}, \psi_{2j}$  为相应于  $\lambda_j (j=1, 2, \dots, N)$  的特征函数.

作 C. Neumann 约束<sup>[10]</sup>

$$G_{-1} = \sum_{j=1}^N \gamma_j \cdot \nabla_x \lambda_j, \quad \gamma_j \triangleq \int_D (\gamma \psi_{1j}^2 + 2i\psi_{1j}\psi_{2j} - q\psi_{2j}^2) dx. \quad (2.2)$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_{2j}^2 \\ - \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_{1j}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A\psi_2, \psi_2 \rangle \\ - \langle A\psi_1, \psi_1 \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

这里  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  代表  $R^N$  中的标准内积.

将 (2.3) 中两式对  $x$  求微分, 并利用 (2.1), 则位势  $q, r$  必然满足约束条件:

$$q = \frac{i \langle A^2 \psi_1, \psi_1 \rangle}{\langle A^2 \psi_1, \psi_2 \rangle}, \quad r = \frac{-i \langle A^2 \psi_2, \psi_2 \rangle}{\langle A^2 \psi_1, \psi_2 \rangle}. \quad (2.4)$$

因而, 在 C. Neumann 约束 (2.4) 下, (2.1) 被非线性化为:

4

$$\begin{cases} \psi_{1x} = -i\Lambda\psi_1 + i\frac{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_1 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}\Lambda\psi_2 \\ \psi_{2x} = i\Lambda\psi_2 - i\frac{\langle \Lambda^2\psi_2, \psi_2 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}\Lambda\psi_1 \end{cases} \quad (2.5)$$

考虑  $C^{2N}$  上一个光滑流形:

$$M = \{(\psi_1, \psi_2) \in C^{2N} | F_1 = \frac{1}{2}(\langle \Lambda\psi_1, \psi_1 \rangle - 1) = 0, F_2 = \frac{1}{2}(\langle \Lambda\psi_2, \psi_2 \rangle - 1) = 0\}$$

那么  $M$  为  $2N-2$  维辛流形(见文[11]). 如下讨论  $M$  上的 C. Neumann 约束.

令  $H = -i\langle \Lambda\psi_1, \psi_2 \rangle$ , 显然 Hamilton 系统  $(C^{2N}, d\psi_2\Lambda d\psi_1, H)$  是完全可积的. 计算辛空间  $(C^{2N}, d\psi_2\Lambda d\psi_1)$  中的 Poisson 括号<sup>[11]</sup>:  $(F_1, F_2) = \langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle$ ,  $(H, F_1) = i\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_1 \rangle$ ,  $(H, F_2) = -i\langle \Lambda^2\psi_2, \psi_2 \rangle$ . 命  $H^* = H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2$ , 由  $H^*$  的 Hamilton 向量场与  $M$  相切的条件  $(H^*, F_1) = 0$ ,  $(H^*, F_2) = 0$ , 可确定 Lagrange 乘子  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\lambda_2 = \frac{(H, F_1)}{(F_2, F_1)} = \frac{-i\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_1 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}, \quad \lambda_1 = \frac{(H, F_2)}{(F_1, F_2)} = \frac{-i\langle \Lambda^2\psi_2, \psi_2 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}. \quad (2.6)$$

注意到在  $M$  上  $F_1 = 0, F_2 = 0$ , 故  $H^* = H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2$  在辛流形  $M$  上的正则方程为

$$(H^*): \begin{cases} \psi_{1x} = \frac{\partial H^*}{\partial \psi_2} = \frac{\partial H}{\partial \psi_2} - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \psi_2} - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial \psi_2} = -i\Lambda\psi_1 + i\frac{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_1 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}\Lambda\psi_2 \\ \psi_{2x} = -\frac{\partial H^*}{\partial \psi_1} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \psi_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial \psi_1} = i\Lambda\psi_2 - i\frac{\langle \Lambda^2\psi_2, \psi_2 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}\Lambda\psi_1 \end{cases} \quad (2.7)$$

这恰为 C. Neumann 约束(2.3), (2.4)下的非线性化系统(2.5), 因此我们得到

**定理 2.1** (2.1)在  $M$  上的非线性化方程组(2.5)可表为辛流形  $M$  上的一个 Hamilton 系统  $(M, d\psi_2\Lambda d\psi_1|_M, H^*)$ , 其中  $H^* = H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  由(2.6)给出.

**定理 2.2** 设  $(\psi_1, \psi_2)$  是辛流形  $M$  上 Hamilton 系统(2.7)的一个解析解. 那么

$$q = \frac{i\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_1 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}, \quad r = \frac{-i\langle \Lambda^2\psi_2, \psi_2 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle} \quad (2.8)$$

是一个定态 WKI 孤子方程  $X_N + \alpha_1 X_{N-1} + \dots + \alpha_N X_0 = 0, N = 1, 2, \dots$  的解. 其中,  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  是适当选取的常数.

**证明** 用算子  $J^{-1}K$  作用(2.3)的两端, 我们有

$$G_0 = \begin{pmatrix} i\frac{r}{p} \\ i\frac{q}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \Lambda^2\psi_2, \psi_2 \rangle \\ -\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_1 \rangle \end{pmatrix}, \quad p = \sqrt{1 - qr}. \quad (2.9)$$

又  $q = \frac{i\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_1 \rangle}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}$ , 于是  $p = \frac{1}{\langle \Lambda^2\psi_1, \psi_2 \rangle}$ .

进一步, 让算子  $J^{-1}K$  作用(2.9) $k$  次, 并利用 Lenard 算子对  $K, J$  的性质(1.3)及(1.14), 不难得到

$$G_k + \beta_2 G_{k-2} + \dots + \beta_k G_0 + \beta_{k+1} G_{-1} = \begin{pmatrix} \langle \Lambda^{k+2}\psi_2, \psi_2 \rangle \\ -\langle \Lambda^{k+2}\psi_1, \psi_1 \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

其中  $\beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}$  是常数,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ .

考察由特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  生成的  $N+2$  次( $N \geq 1$ )多项式

$$P(z) \triangleq \prod_{j=1}^N z^2(z - \lambda_j) = \sum_{k=0}^N p_{N-k} z^{k+2}, \quad (2.11)$$

这里  $p_0=1, p_1, \dots, p_N$  由  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  确定. 用算子  $J \sum_{k=0}^N p_{N-k}$  作用 (2.10) 的两端, 并注意 (2.11), 我们立即得到

$$J \sum_{k=0}^N p_{N-k} (G_k + \beta_2 G_{k-2} + \dots + \beta_k G_0 + \beta_{k+1} G_{-1}) = J \begin{pmatrix} \langle \psi_2, P(\lambda) \psi_2 \rangle \\ - \langle \psi_1, P(\lambda) \psi_1 \rangle \end{pmatrix} = 0.$$

利用向量场的定义  $X_j = JG_j$ , 整理上式, 即有  $X_N + a_1 X_{N-1} + \dots + a_N X_0 = 0$ , 其中,  $a_1, \dots, a_N$  是由  $p_1, \dots, p_N$  与  $\beta_2, \dots, \beta_N$  所确定的常数. 证毕.

## 参 考 文 献

- [1] 曹策问, 科学通报, 34(1989), 10, 723.
- [2] 许太喜, 顾祝全, 科学通报, 34(1989), 18, 1437.
- [3] 马文秀, 科学通报, 35(1990), 24, 1843.
- [4] 乔志军, 科学通报, 35(1990), 17, 1353.
- [5] 乔志军, 应用数学, 4(1991), 4, 64.
- [6] 周汝光, 与一个四阶特征值问题相联系的 Lax 组非线性化, 郑州大学硕士论文, 1989.
- [7] M. Boiti, F. Pempinell and G. Tu, Prog. of Theoretical Phys., 69(1983), 1, 48.
- [8] 曹策问, 中国科学 A 辑, 1989, 7, 701.
- [9] Li Yishen, Chen Dengyuan and Zeng Yunbo, Proc. 1983 Beijing Symp. on Diff. Geom. and Diff. Equ's, Sci. Press, Beijing, 1986, 359.
- [10] Cao C. W. and Geng X. G., in: Research Reports in Physics, Nonlinear Physics, eds. C. Gu et al. (Springer, Berlin, 1990), 68.
- [11] 谷超豪等著, 孤立子理论与应用, 第四章, 195, 浙江科学技术出版社, 杭州, 1990.

## A Kind of Hamiltonian System with C. Neumann Constraint and WKI Hierarchy

Qiao Zhijun

(Dept. of Math., Liaoning University, Shenyang)

### Abstract

In this paper, the commutator representations of the WKI vector fields are first presented. Then using the functional gradient of eigenvalue, we obtain a kind of C. Neumann constraint under which the isospectral problem (WKI eigenvalue problem) related to the WKI hierarchy of evolution equations is nonlinearized as a Hamiltonian system. Finally, we discuss the relation between the C. Neumann constraint and a stationary soliton system.