由屠谱产生的一种新型的 C. Neumann 约束与 C. Neumann 可积系统

乔志军

（辽宁大学数学系）

摘要 本文利用屠谱的谱梯度及 Lenard 算子对 K. J 中 J 的核元素 $G_{-2}\in \ker J$，首先得到一种新型的位势与特征函数之间的 C. Neumann 约束，尔后我们证明屠谱在该种约束下被非线性化为一个 Liouville 完全可积的 C. Neumann 系统。文末，我们给出此种约束下屠族孤子方程解的对合表示。

0 引言

近年来随着人们对孤子系统的不断深入研究，给经典可积系统的理论注入了新的活力，曹策问教授在文献[1]中首次提出孤子方程 Lax 组的非线性化方法，并成功地用来寻找新的 Liouville 完全可积系统[2-4]十分有趣地是，在位势与特征函数所确定的约束下，Kdv 方程 Lax 对的空间部分化为一个有限维完全可积的 Hamilton 系统，而它的时间部分恰为 N 个对合守恒积分[5]

文〔2〕使用屠谱的谱梯度$\nabla\lambda_j$ 及 Lenard 算子对 K. J 中 J 的核元素 $G_{-1}\in \mathrm{Ker}J$，曾给出一种 C. Neumann 约束

$$G_{-1}=\sum_{j=1}^{N}\nabla\lambda_j \qquad (*)$$

并证明了在该约束下屠谱被非线性化为椭园切丛

$$TQ^{N-1}=\{(p,q)\in R^{2N}\,|\,F\equiv\frac{1}{2}(<\Lambda^{-1}q,q>-1)=0,G\equiv<\Lambda^{-1}p,q>=0\}$$

上的一个 Liouville 完全可积系统，随后文[6]研究了在约束（＊）下屠族方程的对合解，本文利用谱梯度$\nabla\lambda_j$ 及 J 的另一核元素 $G_{-2}\in \mathrm{Ker}J$，将给出一种新型的 C. Neumann 约束

$$G_{-2}=\sum_{j=1}^{N}\nabla\lambda_j \qquad (**)$$

并证明屠谱在此约束下被非线性化为 2N－4 维辛流形 $M^{2N-4}=\{(p,q)\in R^{2N}|F_1=\frac{1}{2}(<q,q>-1)=0,F_2=\frac{1}{2}<\Lambda^{-1}q,q>=0,G_1=<p,q>=0,G_2=<\Lambda^{-1}p,q>=0\}$ 上的一个新的 Liouville 完全可积的 C. Neumann 系统，最后，由可换流的对合解给出在约束（＊＊）下屠族方程解的表示

1 一种新型的 C. Neumann 约束与 C. Neumann 系统

考虑屠规彰谱问题[7]：

$$L(u,v,\lambda)y\equiv y_{xx}+(\lambda-u-\lambda^{-1}v)y=0 \tag{1.1}$$

其中，位势 u，v 是 x，t 的充分光滑函数；λ 是谱参数；$y_{xx}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 设 λ 是(1.1)的一个谱参数，y 是与 λ 相对应的谱函数，则屠谱(1.1)的谱梯度为[2]：

$$\nabla\lambda\triangleq(\delta\lambda/\delta u,\delta\lambda/\delta v)^T=(y^2,\lambda^{-1}y^2)^T \tag{1.2}$$

经直接验证，我们有

命题 1.1： 以(1.2)定义的▽λ 满足

$$K\nabla\lambda=\lambda\cdot J\nabla\lambda \tag{1.3}$$

其中，K，J 是两个斜称的微分算子(∂＝∂/∂x)：

$$K=\begin{pmatrix}2\partial & 0\\ 0 & v\partial+\partial v\end{pmatrix},\ J=\begin{bmatrix}0 & 2\partial\\ 2\partial & \frac{1}{2}\partial^3-(u\partial+\partial u)\end{bmatrix}$$

K、J 称为(1.1)的 Lenard 算子对

取 $G_{-2}=(i,0)^T$，$G_{-1}=(\frac{1}{2}u,1)^T$，则 G_{-2}，G_{-1} 张成 J 的核 KerJ，现递推定义 Lenard 梯度叙列 G_j：

$$KG_{j-1}=JG_j,j=-1,0,1\ldots \tag{1.4}$$

$X_j=JG_j$ 称为 j 阶屠向量场，屠族方程由屠向量场产生，即

$$(u,v)_t^T=X_m+c_1X_{m-1}+\ldots+c_mX_0,\ m=0,1,2,\ldots \tag{1,5}$$

这里 $c_1,\ldots,c_m$ 为常数，按(2.4)和 $X_j=JG_j$，不难算出

$$X_{-1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad X_0=\begin{pmatrix}u_x\\v_x\end{pmatrix},\quad X_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{2}uu_x+2v_x\\ vu_x+\frac{1}{2}uv_x\end{bmatrix}$$

选定(1.1)的N个互异的特征参数，相应于(1.1)的解y分别记为$q_1,\ldots,q_N$，考虑(1.1)的位势与谱函数之间的约束

$$G_{-2}=\sum_{j=1}^{N}\nabla\lambda_j=\begin{pmatrix}<q,q>\\<\Lambda^{-1}q,q>\end{pmatrix},\text{即}\begin{pmatrix}<q,q>\\<\Lambda^{-1}q,q>\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\tag{1.6}$$

经两次微分(1.6)并利用(1.1)，可知(1.6)产生一种新型的C. Neumann约束

$$<q,q>=1,<\Lambda^{-1}q,q>=0,u=<\Lambda q,q>-<p,p>,v=\frac{1-<\Lambda^{-1}p,p>}{<\Lambda^{-2}q,q>},(p=q_x)\tag{1.7}$$

其中，$q=(q_1,\ldots,q_N)^T$，$\Lambda=\mathrm{ding}(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$，$<\cdot,\cdot>$表示$R^N$中的标准内积。

将(1.1)写成向量形式并把(1.7)代入得到C. Neumann系统

$$(C)\qquad q_{xx}=-\Lambda q+(<\Lambda q,q>-<p,p>)q+\frac{1-<\Lambda^{-1}p,p>}{<\Lambda^{-2}q,q>}\Lambda^{-1}q\tag{1.8}$$

在辛空间$(R^{2N},dp\wedge dq)$中，两个函数的Posson括号定义为[8]：

$$(F,G)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}=<F_q,G_p>-<F_p,G_q>$$

它是斜称的、双线性的且满足Jacobi恒等式和Leibnitz规则：$(FG,H)=F(G,H)+G(F,H)$

F,G称为对合，如果$(F,G)=0$

令

$$\Gamma_k=\sum_{j=1,j\neq k}^{N}\frac{B_k^2j}{\lambda_k-\lambda_j},\quad B_{kj}=p_kq_j-p_jq_k\tag{1.9}$$

则易算得下述结论：

$$(q_i,q_j)=(p_i,p_j)=0,(q_ip_j)=\delta_{ij}$$

$$(q_k^2, p_l^2) = 4q_kp_l\delta_{kl}, \quad (p_k^2, <q,q>) = -4p_kq_k$$

$$(\Gamma_k, \Gamma_l) = (\Gamma_k, <q,q>) = 0, (\Gamma_k, p_l^2) = \frac{4B_{kl}}{\lambda_k - \lambda_l}p_kp_l$$

$$(\Gamma_k, q_l^2) = \frac{4B_{kl}}{\lambda_k - \lambda_l}q_kq_l$$

从上述公式及 Poisson 括号的性质，不难验证下面的定理：

定理 1.2　如下定义的 $E_1, \ldots, E_N$ 构成 N 对合系：

$$E_k = \frac{1}{2}p_k^2 + \frac{1}{2}\lambda_k q_k^2 - \frac{1}{2}<q,q>q_k^2 + \frac{1}{2}\Gamma_k \tag{1.1}$$

定义 R^N 上的一个双线性函数[9] $Q_z(\xi,\eta)$

$$Q_z(\xi,\eta) \triangleq <(z-\Lambda)^{-1}\xi,\eta> = \sum_{K=1}^{N}(z-\lambda_k)^{-1}\xi_k\eta_k \tag{1.1}$$

那么 E_k 的发生函数为

$$\frac{1}{2}Q_z(p,p) + \frac{1}{2}Q_z(\Lambda q,q) - \frac{1}{2}<q,q>Q_z(q,q) + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} Q_z(q,q) & Q_z(p,q) \\ Q_z(p,q) & Q_z(p,p) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{N}\frac{E_k}{z-\lambda_k} \tag{1.12}$$

定理 1.3　设 $F_m = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k^m E_k, m=0,1,2,\ldots$，那么

$$H = F_0 = \frac{1}{2}<p,p> + \frac{1}{2}<\Lambda q,q> - \frac{1}{2}<q,q>^2 \tag{1.13}$$

$$F_m = \frac{1}{2}<\Lambda^m p,p> + \frac{1}{2}<\Lambda^{m+1}q,q> - \frac{1}{2}<q,q><\Lambda^m q,q> + \frac{1}{2}\sum_{i+j=m-1}\begin{vmatrix} <\Lambda^i q,q> & <\Lambda^j q,q> \\ <\Lambda^i q,p> & <\Lambda^j p,p> \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

且 $(F_l, F_m) = 0, \forall\, l,m \in Z$

证明　显然 $(F_l, F_m) = 0$，当 $|z| > \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_N|\}$

$(z-\lambda_k)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}z^{-m-1}\lambda_k^m$ 且 $Q_z(\xi,\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}<\Lambda^m\xi,\eta>z^{-m-1}$。将上述二式代到(1. 12)的两边并比较 Z 的同次幂的系数，我们就有(1. 13)与(1. 14)

定理 1. 14 Hamilton 系统

$$(F_m):\qquad q_{tm}=\frac{\partial F_m}{\partial p},p_{tm}=-\frac{\partial F_m}{\partial q},\quad m=0,1,2\ldots \tag{1.15}$$

在 Lionville 意义下完全可积。特别(H)完全可积，其守恒积分的 N 对合系是$\{F_m\}_{m=1}^{N}$

今考察 2N－4 维辛流形

$$M^{2N-4}=\{(p,q)\in R^{2N}|\tilde{F}_1\equiv$$

$$\frac{1}{2}(<q,q>-1)=0,G_1\equiv<p,p>=0,\tilde{F}_2\equiv\frac{1}{2}<\Lambda^{-1}q,q>=0,G_2\equiv<\Lambda^{-1}p,q>=0\}$$

上的 Moser 约束[10]修改 H 为：

$$H^*=H-\lambda_1\tilde{F}_1-\lambda_2\tilde{F}_2 \tag{1.16}$$

其中，

$$\lambda_1=\frac{(H,G_1)}{(\tilde{F}_1,G_1)}\bigg|_{M^{2N-4}}=<\Lambda q,q>-<p,p>-2,$$

$$\lambda_2=\frac{(H,G_2)}{(\tilde{F}_2,G_2)}\bigg|_{M^{2N-4}}=\frac{1-<\Lambda^{-1}p,p>}{<\Lambda^{-2}q,q>}$$

注意到在 M^{2N-4}上，$\tilde{F}_1=\tilde{F}_2=0$，故(1. 16)在辛流形 M^{2N-4}上的正则方程为

$$(H^*):\begin{cases}q_x=\dfrac{\partial H^*}{\partial p}=\dfrac{\partial^H}{\partial p}-\lambda_1\dfrac{\partial\tilde{F}_1}{\partial p}-\lambda_2\dfrac{\partial\tilde{F}_2}{\partial p}=p\\ P_X=-\dfrac{\partial H^*}{\partial q}=\dfrac{\partial H}{\partial q}+\lambda_1\dfrac{\partial\tilde{F}^1}{\partial q}+\lambda_2\dfrac{\partial\tilde{F}_2}{\partial q}=-\Lambda q+(<\Lambda q,q>-<p,p>)q+\\ \qquad\dfrac{1-<\Lambda^{-1}p,p>}{<\Lambda^{-2}q,q>}\Lambda^{-1}q\end{cases} \tag{1.17}$$

将(1. 17)的第一式代到第二式，立知(1. 17)恰为 C. Neumann 系统(1. 8)

定理 1. 5 由(1. 8)定义的 C. Neumann 系统(M^{2N-4})$dp\wedge dq|_{M^{2N-4}}$，H^*)在 Liouviue 意义下是完全可积的。

证明 令 $F_0^*=H^*$，$F_m^*=\tilde{F}_m-\lambda_m\tilde{F}_1-u_m\tilde{F}_2$，$m=1,\ldots,N-2$，其中 Lagrange 乘子 λ_m、u_m 为：

$$\lambda_m=\left.\frac{(F_m,G_1)}{(\hat{F}_1,G_1)}\right|_{M^{2N-4}}=<\Lambda^{m+1}q,q>-2<\Lambda^m q,q>-<\Lambda^m p,p> \tag{1.18}$$

$$u_m=\left.\frac{(F_m,G_2)}{(\hat{F}_2,G_2)}\right|_{m^{2N-4}}=\frac{<\Lambda^m q,q>-<\Lambda^{m-1}q,q>-<\Lambda^{m-1}p,p>}{<\Lambda^{-2}q,q>} \tag{1.19}$$

注意到$(F_m,\hat{F}_1)=(F_m,\hat{F}_2)=0$，易验证在$M^{2N-4}$上

$$(F_m^*,F_l^*)=0,\quad (F_0^*,F_m^*)=0,\forall\, m,l=1,\ldots,N-2$$

故$\{F_M^*\}$给出 C. Neumann 系统$(M^{2N-4},dp\wedge dq|_{M^{2N-4}},H^*)$的 N－2 对合守恒积分系。

3. 屠族发展方程的对合解

既然$(H^*,F_m)|_{M^{2N-4}}=0$，那么M^{2N-4}上的二 Hamilton 系统(H^*)与(f_m^*)是相容的。以g_0^x、$g_m^{t_m}$，分别表示(H^*)、(F_m^*)初值问题在M^{2N-4}上的解算子，则g_0^x与$g_m^{t_m}$可换[8]。那么M^{2N-4}上相容方程组(H^x)、(F_m^*)的对合解。

$$\begin{pmatrix} q(x,t_m)\\ p(x,t_m)\end{pmatrix}=g_0^x g_m^{t_m}\begin{pmatrix} q(0,0)\\ p(0,0)\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

是(x,t_m)的一个光滑函数。

定理 2.1 设$(q(x,t_m),p(x,t_m))$是M^{2N-4}上相容系统(H^*)、(F_m^*)的对合解，则

$$u(x,t_m)=<\Lambda q,q>-<p,p>,v(x,t_m)=\frac{1-<\Lambda^{-1}p,p>}{<\Lambda^{-2}q,q>},(p=q_x) \tag{2.2}$$

满足屠族非线性发展方程

$$(u,v)T_{t_{m-1}}=J\mathscr{L}^{m+1}G_{-2},m=1,2\ldots \tag{2.3}$$

其中递归算子$\mathscr{L}=J^{-1}k$，J，K 是(1.1)的 Lenard 算子对。

证明 因$(q(x,t_m),p(x,t_m))$是M^{2N-4}上相容系统(H^*)、(F_m^*)的对合解，故下述一切运算均在M^{2N-4}上进行。把(2.2)的前一式对t_{m-1}求导得：

$$\frac{\partial u}{\partial t_{m-1}}=2(<\Lambda q,q_{t_{m-1}}>-<p,p_{t_{m-1}}>)=2(<\Lambda q,\frac{\partial F_{m-1}^*}{\partial_p}>)<p,\frac{\partial F_{m-1}^*}{\partial q}>)$$
$$=2(<\Lambda q,\frac{\partial F_{m-1}}{\partial p}>+<p,\frac{\partial F_{m-1}}{\partial q}-\lambda_{m-1}\frac{\partial F_1}{\partial q}-u_{m-1}\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial q}>)$$

$$= 2(<\wedge q, \frac{\partial F_{m-1}}{\partial p}> + <p, \frac{\partial F_{m-1}}{\partial q}>) \tag{2.4}$$

将(1.14)分别对 p,q 求偏导后代入(2.4)式经仔细计算并注意运算在 M^{2N-4} 上进行,我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial t_{m-1}} = 4 <\wedge^m p, q> = 2\partial <\wedge^m q, q> \tag{2.5}$$

用同样的方法不难计算出

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t_{m-1}} &= \frac{4(1-<\wedge^{-1}p,p).>}{<\wedge^{-2}p,q)} <\wedge^{m-1}p,q> - \frac{4(1-<\wedge^{-1}p,p>)}{<\wedge^{-2}p,q>^2} <^{-2}p,q><\wedge^{m-1}p,q> \\ &= 4V<\wedge_{m-1}p,q> + v_x <\wedge_{m-1}p,q> \\ &= (v\partial + \partial v) <\wedge^{m-1}q,p>\end{aligned} \tag{2.6}$$

在(2.6)的运算过程中还用到(1.17)的第二式。

另一方面,让$\mathscr{L}^m = (J^{-1}K)^m$ 作用(1.6)的前一式并注意(1.3),即有

$$\leq \mathscr{L}^m G_{-2} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_j^m \nabla \lambda_j = \begin{pmatrix} <\wedge^m q, q> \\ <\wedge^{m-1} q, q> \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

综合(2.5)和(2.6),并结合(2.7),即得

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_{m-1}} &= \begin{pmatrix} 2\partial & 0 \\ 0 & v\partial + \partial v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} <\wedge^m q, q> \\ <\wedge^{m-1} q, q> \end{pmatrix} \\ &= K\mathscr{L}^m G_{-2} = J\mathscr{L}^{m+1} G_{-2}\end{aligned}$$

注:由(1.6)还可考虑由 $G_0 = \sum_{j=i}^{N} \nabla \lambda j$ 产生的 Bargmann 约束及其 相应的 Bargmann 系统之可积性,关于这一点,限于篇幅,我们将另文报道。

参 考 文 献

1 曹策问 AKNS方程族的Lax组的非线性化，中国科学，A辑，1989，7：701～707

2 Cao Cewen and Geng Xianguo, Classical integrable systems generated through nonlinearization of eigenvalue problems, Nonlinear physics, Research reports in physics, eds. C, Gu etal, (Springer, Berlin, 1990)P. 68～78。

3 Geng Xianguo, A new hierarchy of nonlinear evolution equations and corresponding finite—dimensional completely integrable systems, physics letters A, 162(1992), 375—380

4 乔志军，一个Liouville完全可积系统及Levi方程族的对合解，郑州大学硕士论文，1989。

5 Cao Cewen, A classical integrable system and the involutive reprsentation of solution of the Kdv equation, Acta Math, Sin. 7(1991) 261～271。

6 Qiao Zhijun, The C. Neumann constriant and involutive solution of the Tu hierarchy, preprint

7 Tu Guizhang, A simple approach to Hamiltonian structure of soliton equations (I), Nuovo Cimento 73B, 15(1983), 15～26

8 V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Springer, Berlin, 1978

9 曹策问，一类共焦对合系与完全可积系统，河南科学，5(1987)，1：1—10。

10 谷超豪等著，孤立子理论与应用，浙江科学技术出版社，第四章：经典可积系统，176～215。

作者简介 乔志军，男，1964年8月18日出生。1980年9月—1984年7月，在通辽市内蒙古民族师范学院数学系就读数学专业，获学士学位；1984年7月—1986年7月，在内蒙古民族师院数学系工作；1986年8月—1989年7月，在郑州大学数学系就读应用数学专业，获硕士学位，导师系郑州大学校长曹策问教授；1989年8月至现在，在沈阳市辽宁大学数学系工作，1990年被评为讲师。现研究领域：孤子理论与可积动力系统。从1990年起，先后在J. Math. Phys.、Phys. Lett. A.、科学通报、应用数学、数学年刊、应用数学学报、辽宁大学学报、内蒙古民族师院学报等国内外杂志上发表和即将发表论文20篇。