辽宁大学学报
自然科学版
第19卷 第4期 1992年

JOURNAL OF LIAONING UNIVERSITY
Natural Sciences Edition
Vol.19 №4 1992

Yang族方程的换位表示

乔志军

（数 学 系）

摘 要 本文求得了Yang族的特征值梯度与Lenard算子对，并由此找到了Yang族方程的换位表示；文末还讨论了换位表示与定态Yang系统之间的关系.

关键词 Yang族；Lenard算子对；泛函梯度；换位表示.

1 特征值的泛函梯度与Lenard算子对

与Yang族发展方程相联系的保谱问题是[1]：

$$L\varphi=\lambda\varphi,\quad L=L(u)=\begin{pmatrix} r-q & -\partial-S \\ \partial-S & -q-r \end{pmatrix} \tag{1}$$

或

$$\varphi_x=U\varphi,\quad U=U(u)=\begin{pmatrix} s & \lambda+r+q \\ -\lambda+r-q & -s \end{pmatrix} \tag{2}$$

在（1）、（2）中，λ 为特征参数，$\varphi=(\varphi_1,\ \varphi_2)^T$，$\partial=\partial/\partial x$，$\varphi_x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$，向量值函数 $u\triangleq(q(x),\ r(x),\ s(x))^T$ 称为位势. 自变量 x 在依赖区间 Ω（一般来说 $\Omega=(-\infty,+\infty)$ 或 $\Omega=(0,\ T)$）内变化. $u(x)$ 在无穷远处衰减为零或以 T 为周期，让 $u\to u+\varepsilon\delta u$，定义 $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ 为“·”.

命题1 （1）式的特征值 λ 的泛函梯度为：

$$\nabla_u\lambda\triangleq\begin{pmatrix}\delta\lambda/\delta q\\ \delta\lambda/\delta r\\ \delta\lambda/\delta s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\\ \varphi_1^2-\varphi_2^2\\ -2\varphi_1\varphi_2\end{pmatrix}\cdot\left(\int_\Omega(\varphi_1^2+\varphi_2^2)dx\right)^{-1} \tag{3}$$

其中 φ_1，φ_2 为相应于特征值 λ 的特征函数：

$$\begin{cases}\varphi_{1x}=s\varphi_1+(\lambda+r+q)\varphi_2\\ \varphi_{2x}=(-\lambda+r-q)\varphi_1-s\varphi_2\end{cases} \tag{4}$$

证明 在文〔2〕节II里，我们选择：$m_{12}=\lambda+q+r$，$m_{21}=-\lambda-q+r$,

本文1990年10月22日收到

$m_{11}=s$．稍加整理就有

$$\int_\Omega \left[(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\dot{q}+(\varphi_2^2-\varphi_1^2)\dot{r}+2\varphi_1\varphi_2\dot{s}\right]dx=\left[-\int_\Omega(\varphi_1^2+\varphi_2^2)dx\right]\cdot\dot{\lambda}$$

故（3）式成立.

命题2　若λ是（1）式的一个特征值，那么$\nabla_u\lambda$满足线性微分关系式

$$K\nabla_u\lambda=\lambda\cdot J\nabla_u\lambda \tag{5}$$

这里微分算子K、J为

$$K=\begin{pmatrix}0 & 2qs-r\partial & -2qr-s\partial\\ -\partial r-2qs & -q\partial-\partial q & -2q^2+\partial^2/2\\ 2qr-\partial s & 2q^2-\partial^2/2 & -q\partial-\partial q\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}\partial & 0 & 0\\ 0 & \partial & 2q\\ 0 & -2q & \partial\end{pmatrix} \tag{6}$$

K、J均反称，且J为辛算子；K、J称为Yang族的Lenard算子对.

证明　将（6）和（3）分别代入（5），并利用（4）通过计算不难发现（5）式的左右两端是一样的.

注记：微分积分算子

$$J^{-1}K=\begin{pmatrix}0 & \partial^{-1}(2qs-r\partial) & \partial^{-1}(-2qr-s\partial)\\ -r & -q & \frac{1}{2}\partial\\ -s & -\frac{1}{2}\partial & -q\end{pmatrix}$$

就是文献〔3〕中的递推算子L.

2　Yang向量场的换位表示

设L：$u_1\to L(u)$是位势到微分算子的映射.

定义[4]映射L的微分定义为：

$$L_{*u}(\xi)=\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}L(u+\varepsilon\xi).$$

引理　对于Yang族，$L(u)$如（1）所示，L的微分映射是：

$$L_{*u}(\xi)=\begin{pmatrix}\xi_2-\xi_1 & -\xi_3\\ -\xi_3 & -\xi_2-\xi_1\end{pmatrix},\quad \xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

且L_{*u}为单同态．为简便起见，以下L_{*u}简记为L_*.

证明　直接利用L_*之定义，注意$u+\varepsilon\xi=(q+\varepsilon\xi_1,\ r+\varepsilon\xi_2,\ s+\varepsilon\xi_3)^{\mathrm{T}}$便知本引理成立.

考虑$V=\begin{pmatrix}A+E\partial & B\\ C & D+E\partial\end{pmatrix}$与$L=L(u)=\begin{pmatrix}r-q & -\partial-s\\ \partial-s & -q-r\end{pmatrix}$的换位子

（其中A、B、C、D、E均为待定的函数）〔V, L〕，经一些计算，我们有

$$[V,\ L] \triangleq VL-LV$$
$$=\begin{pmatrix} 2sC+(q-r)(A-D)+(C+(r-q)E)_x & -2rB+(q+r)(B+C)+(D-sE)_x \\ 2rC-(A+sE)_x+(q-r)(B+C) & 2sB-(q+r)(A-D)-(B+(q+r)E)_x \end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix} -A+D+E_x & -B-C \\ -B-C & -D+A+E_x \end{pmatrix} L \qquad (8)$$

按曹策问教授关于保谱方程换位表示的框架[4]，我们希望

$$[V,\ L]=L_*(KG)-L_*(JG)L \qquad (9)$$

这里，K、J为Lenard算子对（6）；$G=(G^{(1)},\ G^{(2)},\ G^{(3)})^T$，$G^{(1)}=G^{(1)}(x)$，$G^{(2)}=G^{(2)}(x)$，$G^{(3)}=G^{(3)}(x)$ 是Ω上任意的光滑函数.

为此，我们选取

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\partial\ G^{(2)}-qG^{(3)} \\ B &= qG^{(1)}+\frac{1}{2}\partial\ G^{(3)}-qG^{(2)} \\ C &= -qG^{(2)}-qG^{(1)}+\frac{1}{2}\partial\ G^{(3)} \\ D &= \frac{1}{2}\partial\ G^{(2)}+qG^{(3)} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$
$$E=-G^{(1)}$$

因而，我们得到

定理1　设$G^{(1)}(x)$、$G^{(2)}(x)$、$G^{(3)}(x)$ 是Ω上任意的光滑函数；$G\triangleq(G^{(1)},\ G^{(2)},\ G^{(3)})^T$，令

$$V=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial\ G^{(2)}-qG^{(3)}-G^{(1)}\partial & qG^{(1)}-qG^{(2)}+\frac{1}{2}\partial\ G^{(3)} \\ -qG^{(2)}-qG^{(1)}+\frac{1}{2}\partial\ G^{(3)} & \frac{1}{2}\partial\ G^{(2)}+qG^{(3)}-G^{(1)}\partial \end{pmatrix} \qquad (11)$$

那么　$[V,\ L]=L_*(KG)-L_*(JG)L$

证明　将A、B、C、D、E的表达式（10）依次代入（8）式的右端，通过仔细计算并整理，就可发现其计算结果与将K、J的表达式（6）代入（9）式右端所得结果是完全一致的．在上述算过程中用到下边二式：

$$KG=\begin{pmatrix} 2qsG^{(2)}-r\partial G^{(2)}-2qrG^{(3)}-s\partial G^{(3)} \\ -\partial\, rG^{(1)}-2qsG^{(1)}-q\partial G^{(2)}-\partial\, qG^{(2)}-2q^2G^{(3)}+\frac{1}{2}\partial^2G^{(3)} \\ 2qrG^{(1)}-\partial\, sG^{(1)}+2q^2G^{(2)}-\frac{1}{2}\partial^2G^{(2)}-q\partial G^{(2)}-\partial\, qG^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$JG=\begin{pmatrix} \partial\, G^{(1)} \\ \partial\, G^{(2)}+2\,qG^{(3)} \\ -2\,qG^{(2)}+\partial\, G^{(3)} \end{pmatrix} .$$

定义Lenard递推叙列 $\{G_j\}$：$G_{-1}=(-2,0,0)^T$，$KG_{j-1}=JG_j$（$j=0,1,2,\cdots$），诸 $G_j(x)$ 是 $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ 及其导数的多项式，并且当常数项为零时是唯一的. $X_m \triangleq JG_m$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 称为Yang向量场，前两个计算结果是：

$$G_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 2r \\ 2s \end{pmatrix} . \quad X_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 2r_x+4qs \\ 2s_x-4qr \end{pmatrix}$$

$$G_1=\begin{pmatrix} -(s^2+r^2) \\ s_x-2qr \\ -r_x-2qs \end{pmatrix} , \quad X_1=\begin{pmatrix} -(s^2+r^2)_x \\ s_{xx}-4qr_x-2q_xr-4q^2s \\ -r_{xx}-4qs_x-2q_xs+4q^2r \end{pmatrix}$$

Yang族方程由Yang向量场 X_m 产生，即 $u_t=X_m$. 其中 $u=(q, r, s)^T$.

定理2　假设 $G_j=(G_j^{(1)}, G_j^{(2)}, G_j^{(3)})^T$ 是Lenard递推叙列，让

$$V_j=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial\, G_j^{(2)}-qG_j^{(3)}-G_j^{(1)}\partial & qG_j^{(1)}+\frac{1}{2}\partial\, G_j^{(3)}-qG_j^{(2)} \\ -qG_j^{(2)}-qG_j^{(1)}+\frac{1}{2}\partial\, G_j^{(3)} & \frac{1}{2}\partial\, G_j^{(2)}+qG_j^{(3)}-G_j^{(1)}\partial \end{pmatrix} ,$$

$$j=-1,0,1,\cdots$$

则　$$[W_m, L]=L_*(X_m) \qquad m=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

此处，微分算子　$W_m=\sum_{j=0}^{m} V_{j-1}L^{m-j}$

证明　由定理1及 $[V_{j-1}L^{m-j}, L]=[V_{j-1}, L]L^{m-j}$，我们有

$$[W_{1n}, L]=\sum_{j=0}^{m} L_*(KG_{j-1})L^{m-j}-L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1}$$

$$=\sum_{j=0}^{m} L_*(JG_j)L^{m-j}-L_*(JG_{j-1})L^{m-j+1}$$

$$=L_*(X_m)$$

推论 1　Yang族方程 $u_t \equiv (q,\ r,\ s)_t^T = X_m$ 具有换位表示

$$L_t = [W_m,\ L].\qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

证明

$$L_t = \begin{pmatrix} r_t - q_t & -s_t \\ -s_t & -q_t - r_t \end{pmatrix} = L_*(u_t)$$

$$L_t - [W_m,\ L] = L_*(u_t) - L_*(X_m) = L_*(u_t - X_m).$$

又 L_* 为单射，所以

$$u_t = X_m \iff L_t = [W_m,\ L]\qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

推论 2　Yang族方程 $u_t = X_m$ 是 $L\varphi = \lambda\varphi$ 与 $\varphi_t = W_m\varphi$ 的自然相容性条件. $m = 0, 1, 2, \cdots$

证明　$L_t\varphi + L\varphi_t = \lambda\varphi_t = \lambda W_m\varphi = W_m L\varphi$

即　$(L_t - [W_m,\ L])\varphi = 0$

故　$L_t = [W_m,\ L]$

由推论 1 立知本推论正确.

推论 3　位势函数 $u(x) = (q(x),\ r(x),\ s(x))^T$ 满足定态的Yang系统

$$X_N + a_1 X_{N-1} + \cdots + a_N X_0 = 0 \tag{13}$$

的充要条件是：

$$[W_N + a_1 W_{N-1} + \cdots + a_N W_0,\ L] = 0 \tag{14}$$

这里诸 a_R $(R = 1, \cdots, N)$ 为常数.

证明　$[W_N + \sum_{i=1}^{N} a_i W_{N-i},\ L]$

$$= L_*(X_N) + \sum_{i=1}^{N} a_i L_*(X_{N-i})$$

$$= L_*(X_N + \sum_{i=1}^{N} a_i X_{N-i})$$

又 L_* 是单射，故此推论成立.

参 考 文 献

1　Yang C. N., Commun. Math. Phys., 1987; 112: 205～216
2　曹策问. 中国科学A辑. 1989: 7: 701～707
3　Tu G. Z., J. Phys. A: Math. Gen., 1989; 22: 2375～2392
4　曹策问. 科学通报. 1989; 34（10）: 723～724

（下接33页）

The Consistancy of Heisenberg's Equations with Euler—Lagrange's Equations

Xin Zongzheng

Department of Physics, Liaoning University

Wu Wei

Department of Physics, Liaoning Education Institute

ABSTRACT It was generally verified in this paper, that Hamiltonian canonical equations and poisson bracket relations are consistent with Euler-Lagrange's equations, in classical mechanics system. And Heisenberg's equations and commutation relations are consistent with Euler—Lagrange's equations. in quantum mechanics system.

KEY WORDS Heisenberg's equations, Euler—Lagrange's equations, Consistancy.

（上接28页）

Commutator Representation of the Yang Hierarchy

Qiao Zhijun

Department of Mathematics, Liaoning University

ABSTRACT In this paper, we obtain the eigenvaluable functional gradient and the pair of lenard's operators of the Yang hierarchy. Hence the commutator representations of Yang hierarchy equations are found out. Finally, the relation bebetween commutator representation and stationary system of the Yang hierarchy is discussed.

KEY WORDS: Yang hierarchy, the pair of lenard's operators, Eigenvaluable functional gradient, Commutator representation.