研究通讯

Levi 族的 Lax 表示*

本文研究特征值问题（Levi 特征值问题）

$$L\varphi = \frac{\lambda}{2}\varphi. \tag{1}$$

$$L(u) = \begin{pmatrix} \partial + \frac{q-r}{2} & q \\ -r & \partial + \frac{q-r}{2} \end{pmatrix};$$

$u = (q, r)^T$，$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$，$\partial = \partial/\partial x$.

L：$u \longmapsto L(u)$ 是位势到微分算子的映射.

定义[1] 映射 L 的微分定义为

$$L_{*u}[\xi] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} L(u + \varepsilon\xi). \tag{2}$$

引理 对于 Levi 族，L 的微分

$$L_*[\xi] = \begin{pmatrix} (\xi' - \xi^2)/2 & \xi' \\ -\xi^2 & (\xi' - \xi^2)/2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

且 L_* 是单同态. $\xi = (\xi^1, \xi^2)^T$

命题 1 (1)式的特征值 λ 的泛函梯度

$$\nabla\lambda = \mathrm{grad}\lambda \triangleq \begin{pmatrix} \delta\lambda/\delta q \\ \delta\lambda/\delta r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_2 \\ -(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\int_\Omega \varphi_1\varphi_2 dx\right)^{-1}. \tag{4}$$

(φ_1, φ_2) 是对应于 λ 的特征函数，Ω 是所论区间.

命题 2 若 λ 是(1)式的一个特征值，那么 $\nabla\lambda$ 满足 $K\Delta\lambda = \lambda \cdot J\nabla\lambda$，(5)

$$K = \begin{pmatrix} -q\partial - \partial q & -\partial^2 + \partial q - r\partial \\ \partial^2 - \partial r + q\partial & r\partial + \partial r \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}.$$

K、J 均反称；K、J 称为 Lenard 算子对.

定理 1 设 $G^{(1)}(x)$ 与 $G^{(2)}(x)$ 是任意的光滑函数，$G = (G^{(1)}, G^{(2)})^T$，让

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial(G^{(2)} + G^{(1)}) + (G^{(2)} - G^{(1)})\partial & \partial G^{(1)} \\ -\partial G^{(2)} & \frac{1}{2}\partial(G^{(1)} + G^{(2)}) + (G^{(2)} - G^{(1)})\partial \end{pmatrix},$$

那么：

$$[V, L] \triangleq VL - LV = L_*(KG) - L_*(\delta G)\cdot(2L), \tag{6}$$

其中 K、J 为 Lenard 算子对.

定义 Lenard 递推序列

$$\{G_j\}:\ G_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$KG_j = JG_{j+1}(j = -1, 0, 1, \cdots),$$

$G_j(x)$ 是 $q(x)$，$r(x)$ 及其导数的多项式[2].

Levi 向量场：$X_m = JG_m(m = 0, 1, \cdots)$.

定理 2 假设 $G_j = (G_j^{(1)}, G_j^{(2)})^T$ 是 Lenard 序列，让

$$V_j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial(G_j^{(1)} + G_j^{(2)}) + (G_j^{(2)} - G_j^{(1)})\partial & \partial G_j^{(1)} \\ -\partial G_j^{(2)} & \frac{1}{2}\partial(G_j^{(1)} + G_j^{(2)}) + (G_j^{(2)} - G_j^{(1)})\partial \end{pmatrix},$$

$j = -1, 0, 1, \cdots$

则 $$[W_m, L] = L_*(X_m), \tag{7}$$

这里 $$W_m = \sum_{j=0}^{m} V_{j-1}(2L)^{m-j}.$$

* 辽宁省青年科研基金资助课题.

推论 1 Levi 方程 $u_t=\begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix}_t=X_m$ 的充分必要条件是

$$L_t=[W_m,L](m=0,1,\cdots).$$

推论 2 位势函数 $u(x)=\begin{pmatrix}q(x)\\r(x)\end{pmatrix}$满足定态的 Levi 系统：$X_N+a_1X_{N-1}+\cdots+a_NX_0=0$ 的充要条件是

$$[W_N+a_1W_{N-1}+\cdots+a_NW_0,L]=0, \tag{8}$$

$a_k(k=1,\cdots N)$ 为常数。

致谢：感谢曹策问教授对本文的指点。

参 考 文 献

[1] 曹策问，科学通报，34(1989)，10:723—724.
[2] Lax, P.D., SIAM Rev., 18(1976), 351—375.

乔志军
（辽宁大学数学系，沈阳 110036）

图与补图的 n-全色数*

定义 1 对图 $G(V,E)$ 和自然数 n，对其长度不大于 n 的路上所有点（或所有边、或所有点和所有边）均染为不同色，其所用颜色的最少数目称为 G 的 n-色数（或 n-边色数、或 n-全色数），简记作 $\chi_n(G)$（或 $\chi'_n(G)$、或 $\chi^T_n(G)$）。

定义 2 对图 $G(V,E)$ 和自然数 n，$D_n\subseteq V$（或 $D'_n\subseteq E$、或 $D^T_n\subseteq V\cup E$），D_n（或 D'_n、或 D^T_n）中任意两点（或任意两边、或任意两个元素）均在 G 的某一条长不大于 n 的路上，则称 D_n（或 D'_n，或 D^T_n）为 G 的 n-完全集（或 n-边完全集、或 n-全完全集）。

引理 1 $\chi^T_n(G)\geqslant\max\{|D^T_n|\,|D^T_n$ 为 G 的 n-全完全集$\}$。

引理 2 $\chi'_4(G)\geqslant\left\lceil\frac{(2q+p)q}{p^2}\right\rceil$，且界不可改进，其中 $p=|V|$，$q=|E|$，$\lceil x\rceil$ 为不小于 x 的最小整数。

引理3 $\chi^T_4(G)\geqslant\left\lceil\frac{(2q+p)q}{p^2}\right\rceil+\frac{2q}{p}+1$，且界不可改进。

定理 1 记 $\bar{G}$ 为 G 的补图，则

$$\left\lceil\frac{p^2+4p+3}{4}\right\rceil\leqslant\chi^T_4(G)+\chi^T_4(\bar{G})\leqslant\frac{p(p+3)}{2}.$$

定理 2 对 $n\geqslant5$，有

$$\left\lceil\frac{3p^2+10p-1}{8}\right\rceil\leqslant\chi^T_n(G)+\chi^T_n(\bar{G})\leqslant\frac{p(p+3)}{2},$$

且上界不可改进，下界当 p 为偶数时不可改进。

问题 1 确定 $n=3$、4 时，$\chi^T_n(G)+\chi^T_n(\bar{G})$ 的可达下界。

张忠辅
（兰州铁道学院，兰州 730070）

孙 良
（北京理工大学，北京 100081）

* 国家自然科学基金和甘肃省自然科学基金资助项目。

Square-full 整数的分布

设 $\varepsilon>0$。令 $A(x)$ 表示$\leqslant x$ 的Square-full 整数之个数。