1.4 The Matrix-Vector Product

Note: The <u>columns</u> of a matrix are vectors

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \end{bmatrix} \qquad \vec{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{V_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{V_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

<u>Definition</u> Suppose A is an $m \times n$ matrix with columns $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ...\vec{a_n}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} & ... & \vec{a_n} \end{bmatrix}$$

If $\vec{X}$ is a vector in $\Re^n$ (n rows) then:

$$A\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{a_1} & \vec{a_2} & ... & \vec{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$= X_1\vec{a_1} + X_2\vec{a_2} + ... + X_n\vec{a_n}$$

Ex:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$A\vec{X} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

(b) $y_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

(c)

System of Equations:

$$\begin{array}{rcrcl} X_1 & + & 2X_2 & = & 3 \\ 4X_1 & + & 5X_2 & = & 6 \end{array}$$

vector Equation:

$$X_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Matrix Equation $A\vec{X} = \vec{b}$:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} \underset{\vec{X}}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}} = \underset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

Algebra Properties of Matrix-Vector multiplication

(a)

$$
\begin{aligned}
A(\vec{U}+\vec{V}) \; &= \; \begin{bmatrix} \vec{a_1} & ... & \vec{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 + V_1 \\ \vdots \\ U_n + V_n \end{bmatrix} \\
&= \; (U_1+V_1)\vec{a_1} \; + \; ... \; + \; (U_n+V_n)\vec{a_n} \\
&= \; U_1\vec{a_1} \; + \; V_1\vec{a_1} \; + \; ... \; + \; U_n\vec{a_n} \; + \; V_n\vec{a_n} \\
&= \; (U_1\vec{a_1} + ... + U_n\vec{a_n}) \; + \; (V_1\vec{a_1} + ... + V_n\vec{a_n}) \\
&= \; \begin{bmatrix} \vec{a_1} & ... & \vec{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \; + \; \begin{bmatrix} \vec{a_1} & ... & \vec{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \\
&= \; A\vec{U} \; + \; A\vec{V}
\end{aligned}
$$

(b)

$A(C\vec{U}) = ...C(A\vec{U})$

Row-Column Rule for Multiplying $A\vec{X}$

Another way to compute $A\vec{X}$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} &= 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \times 1 + (-1) \times 2 \\ 5 \times 3 + (-1) \times 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$