两类新的 Liouville 完全可积的 Hamilton 系统及 Heisenberg 铁磁链族与 WKI 族

乔志军

(辽宁大学数学系 110036)

摘要 本文利用谱问题的非线性化方法，将 Heisenberg 谱问题与 WKI 谱问题非线性化为两类新的 Liouville 完全可积的 Hamilton 系统。最后我们由可换流的对合解给出 Heisenberg 铁磁链方程族与 WKI 方程族的解的表示。

众所周知，许多力学运动方程均可以表示成一种定义在辛流形上的 Hamilton 系统[1,2]。因而研究 Hamilton 系统的完全可积性在非线性动力学中一直是一项十分重要的课题。本文打算引入一个有限维对合系，并以此说明 Heisenberg 谱问题(与 Heisenberg 铁磁链方程族相联系的谱问题)和 WKI 谱问题(与 WKI 方程族相联系的谱问题)的非线性化[3,4]系统是两个 Liouville 完全可积的 Hamilton 系统。最后我们由可换流的对合解给出 Heisenberg 铁磁链方程族与 WKI 方程族的解的表示。

让 $(E,F)=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial E}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial p_j}-\frac{\partial E}{\partial p_j}\frac{\partial F}{\partial q_j}\right)$ 表示辛流形 $(R^{2N}, dp\wedge dq)$ 上的标准 Poisson 括号[5]，那么它是斜对称的、双线性的并且满足 Jacobi 恒等式及 Leibniz 规则：

$$(EF,H)=E(F,H)+F(E,H).$$

设， $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_N$，令

$$\Gamma_k=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\frac{\lambda_k\lambda_j B_{kj}^2}{\lambda_k-\lambda_j},\quad B_{kj}=p_kq_j-q_kp_j \tag{1}$$

则易算得：

$$(\Gamma_k,\Gamma_l)=0,\quad (p_kq_k,p_lq_l)=((\Lambda p,q),p_kq_k)=0$$
$$((\Lambda q,q),p_kq_k)=2\lambda_kq_k^2,\quad ((\Lambda p,p),p_kq_k)=-2\lambda_kp_k^2$$
$$(\Gamma_k,p_lq_l)=\frac{2\lambda_k\lambda_l}{\lambda_k-\lambda_l}(p_kq_l+p_lq_k)B_{kl}$$
$$(\Gamma_k,(\Lambda q,q))=4\lambda_k(\Lambda q,p)q_k^2-4\lambda_k(\Lambda p,p)p_kq_k$$
$$(\Gamma_k,(\Lambda p,p))=-4\lambda_k(\Lambda q,p)p_k^2+4\lambda_k(\Lambda p,p)p_kq_k$$
$$(\Gamma_k,(\Lambda p,q))=2\lambda_k(\Lambda p,p)q_k^2-2\lambda_k(\Lambda q,q)p_k^2$$

这里 $q=(q_1,\cdots,q_N)^T, p=(p_1,\cdots,p_N)^T$， $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots,\lambda_N)$， $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 R^N 中的标准内积。

使用上述公式及 Poisson 括号的性质，经一系列详细计算，我们有：

命题 1 如下定义的函数系 $E_1,E_2,\cdots,E_N$ 构成一个有限维对合系：

$$E_k=-\langle\Lambda p,q\rangle p_kq_k+\sqrt{1+\langle\Lambda p,p\rangle\langle\Lambda q,q\rangle}\,p_kq_k+\frac{1}{2}\Gamma_k,\quad k=1,2,\cdots N \tag{2}$$

定义 R^N 上的一个双线性函数[6]如下：

$$Q_Z(\xi,\eta) \triangleq \langle (Z-\Lambda)^{-1}\xi,\eta\rangle = \sum_{k=1}^{N}(Z-\lambda_k)^{-1}\xi_k\eta_k \tag{3}$$

则对合系 $\{E_k\}$ 的发生函数是

$$-\langle \Lambda p,q\rangle Q_Z(p,q) + \sqrt{1+\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle}\,Q_Z(p,q) + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} Q_Z(\Lambda q,q) & Q_Z(\Lambda q,p) \\ Q_Z(\Lambda q,p) & Q_Z(\Lambda p,p)\end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{N}\frac{E_k}{Z-\lambda_k} \tag{4}$$

命题 2 令 $F_m = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k^m E_k$，$m=0,1,2,\cdots$，那么

$$F_0 = -\langle \Lambda p,q\rangle\langle p,q\rangle + \sqrt{1+\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle}\,\langle p,q\rangle \tag{5}$$

$$F_m = -\langle \Lambda p,q\rangle\langle \Lambda^m p,q\rangle + \sqrt{1+\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle}\,\langle \Lambda^m p,q\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\begin{vmatrix} \langle \Lambda^{j+1} q,q\rangle & \langle \Lambda^{j+1} q,p\rangle \\ \langle \Lambda^{m-j} q,p\rangle & \langle \Lambda^{m-j} p,p\rangle\end{vmatrix} \tag{6}$$

且　$(F_l,F_m)=0$，$\forall\, l,m\in Z^+$

证明　由命题 1，显然有　$(F_l,F_m)=0$. 当

$$|Z| > \max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_N|\}$$

时，我们得到

$$(Z-\lambda_k)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}Z^{-m-1}\lambda_k^m,\qquad Q_Z(\xi,\eta) = \sum_{m=0}^{\infty}\langle \Lambda^m\xi,\eta\rangle Z^{-m-1}$$

将上面二幂级数展式代入(4)式的两端，进行计算整理，比较 Z 的同次幂系数后，我们就得到(5)和(6)。

定理 1 Hamilton 系统

$$(F_m)\qquad q_{x_m} = \frac{\partial F_m}{\partial p},\qquad p_{x_m} = -\frac{\partial F_m}{\partial q},\qquad m=0,1,2,\cdots. \tag{7}$$

在 Liouville 意义下是完全可积的。

1. 设 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,N)$ 是 Heisenberg 谱问题[7]

$$y_x = \begin{pmatrix} -i\lambda w & -i\lambda u \\ -i\lambda v & i\lambda w\end{pmatrix}y,\qquad w=\sqrt{1-uv},\quad i^2=-1 \tag{8}$$

的 N 个互异的谱参数，$y=(q_j,p_j)^T$ 为相应于 λ_j 的特征函数。令 $A_j=(-\lambda_j q_j^2,\lambda_j p_j^2)^T$，则 A_j 满足线性关系式

$$KA_j = \lambda_j J A_j$$

其中，K、J 为两个微分算子（$\partial=\partial/\partial x$，$\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1$）：

$$K = i\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0\end{pmatrix},\qquad J = \begin{pmatrix} v\partial^{-1}\frac{v}{w}\partial & v\partial^{-1}\frac{u}{w}\partial+2w \\ u\partial^{-1}\frac{v}{w}\partial+2w & u\partial^{-1}\frac{u}{w}\partial\end{pmatrix}$$

它们称为谱问题(8)的 Lenard 算子对。

取 $G_0=(u,v)^T\in \mathrm{Ker}J$，可递推定义(8)的 Lenard 梯度序列 $\{G_j\}$：$KG_j=JG_{j+1}$　$(j=0,1,2,\cdots)$。Heisenberg 铁磁链方程族由 Heisenberg 向量场 $X_m=JG_m$ 产生，即

$$(v,u)_t^T = X_m(v,u),\qquad m=1,2,\cdots, \tag{9}$$

其中，当　$m=2$ 时，(9)为 Heisenberg 铁磁链方程：

$$v_t=\frac{1}{2}(vw_{xx}-wv_{xx}),\qquad u_t=\frac{1}{2}(u_{xx}w-uw_{xx})$$

文[8]已求得(9)的 Lax 表示。下边我们考虑(8)的非线性化，为此我们引入 Bargmann 约束[4]：

$$G_0=\sum_{j=1}^{N}A_j \tag{10}$$

亦即：　$u=-\langle\Lambda q,q\rangle,\quad v=\langle\Lambda p,p\rangle,\quad w=\sqrt{1+\langle\Lambda p,p\rangle\langle\Lambda q,q\rangle}$　(11)

在约束(11)下，Heisenberg 谱问题(8)被非线性化为

$$\begin{cases} q_x=-i\sqrt{1+\langle\Lambda p,p\rangle\langle\Lambda q,q\rangle}\,\Lambda q+i\langle\Lambda q,q\rangle\Lambda p \\ p_x=-i\langle\Lambda p,p\rangle\Lambda q+i\sqrt{1+\langle\Lambda p,p\rangle\langle\Lambda q,q\rangle}\,\Lambda p \end{cases} \tag{12}$$

引入 $2N-2$ 维 Poisson 流形

$$M_{2N-2}=\{(p,q)\in R^{2N}\,|\,F\equiv\langle\Lambda p,q\rangle=0,\quad G\equiv(p,q)=0\}$$

注意：dF、dG 线性无关，但 $(F,G)=0$。前者保证 M_{2N-2} 为 $2N-2$ 维流形(见文献[9])，但后者不能保证 M_{2N-2} 是辛流形。

在 M_{2N-2} 上，系统(12)可表示为 Hamilton 结构：

$$(H^{(1)}):\qquad q_x=\frac{\partial H^{(1)}}{\partial p},\quad p_x=-\frac{\partial H^{(1)}}{\partial q} \tag{13}$$

其中，$H^{(1)}=\frac{1}{2}i\langle\Lambda q,q\rangle\langle\Lambda p,p\rangle-i\sqrt{1+\langle\Lambda p,p\rangle\langle\Lambda q,q\rangle}\langle\Lambda p,q\rangle$

定理 2　$(H^{(1)},F_m)|_{M_{2N-2}}=0,\quad\forall\, m\in Z^+$，又 $(F_k,F_l)=0$，因而 M_{2N-2} 上的 Hamilton 系统(13)是 Liouville 完全可积的。

证明　将 $H^{(1)}$ 的表达式与 F_m 的表达式(6)代入 Poisson 括号 $(H^{(1)},F_m)=\langle\frac{\partial H^{(1)}}{\partial q},\frac{\partial F_m}{\partial p}\rangle-\langle\frac{\partial H^{(1)}}{\partial p},\frac{\partial F_m}{\partial q}\rangle$，直接计算并注意上述运算是在 M_{2N-2} 上进行的，即可证得

$$(H^{(1)},F_m)|_{M_{2N-2}}=0$$

既然 Poisson 括号 $(H^{(1)},F_m)|_{M_{2N-2}}=0$，那么在 M_{2N-2} 中 Hamilton 系统 $(H^{(1)})$ 与 (F_m) 是相容的，记 g_H^x、$g_F^{t_m}$ 分别是 $(H^{(1)})$、(F_m) 初值问题在 M_{2N-2} 上的解算子，则流 g_H^x、$g_F^{t_m}$ 在 M_{2N-2} 上可换(见文[5])，因而相容方程组 $(H^{(1)})$、(F_m) 在 M_{2N-2} 上的对合解

$$\begin{pmatrix} q(x,t_m) \\ p(x,t_m) \end{pmatrix}=g_H^x g_F^{t_m}\begin{pmatrix} q(0,0) \\ p(0,0) \end{pmatrix} \tag{14}$$

是 (x,t_m) 的二元光滑函数。

定理 3　设 $(q(x,t_m),p(x,t_m))^T$ 是相容系统 $(H^{(1)})$ 与 (F_m) 在 M_{2N-2} 上的一个对合解，那么

$$u(x,t_m)=-\langle\Lambda q,q\rangle,\ v(x,t_m)=\langle\Lambda p,p\rangle,\quad w(x,t_m)=\sqrt{1+\langle\Lambda p,p\rangle\langle\Lambda q,q\rangle} \tag{15}$$

满足高阶 Heisenberg 方程

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_{t_m}=J\mathscr{L}^m G_0\qquad m=1,2,\cdots \tag{16}$$

其中，递推算子

$$\mathscr{L}=J^{-1}K=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}\frac{1}{w}\partial-\frac{1}{2}u\partial^{-1}v\partial\frac{1}{w}\partial & \frac{1}{2}u\partial^{-1}u\partial\frac{1}{w}\partial\\ -\frac{1}{2}v\partial^{-1}v\partial\frac{1}{w}\partial & -\frac{1}{w}\partial+\frac{1}{2}v\partial^{-1}u\partial\frac{1}{w}\partial\end{pmatrix},\quad G_0=(u,v)^T$$

证明　将(15)中的 u,v 对 t_m 求导，并利用 $q_{t_m}=\frac{\partial F_m}{\partial p}$，$p_{t_m}=-\frac{\partial F_m}{\partial q}$ 及关系式 $\mathscr{L}^m G_0=\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_j^m A_j$，经一系列详细计算，不难得到(16)。

由定理3，当 m 取2时，便可求得 Heisenberg 铁磁链方程

$$v_{t_2}=\frac{1}{2}(vw_{xx}-wv_{xx}),\qquad u_{t_2}=\frac{1}{2}(u_{xx}w-wu_{xx})$$

的解的对合表示

$$v(x,t_2)=\langle\Lambda p,p\rangle,\quad u(x,t_2)=-\langle\Lambda q,q\rangle$$

其中，$(q(x,t_2),p(x,t_2))^T$ 是相容系统 $(H^{(1)})$ 与 (F_2) 在 M_{2N-2} 上的对合解。

2. 考虑 WKI 谱问题[10]：

$$y_x=\begin{pmatrix}-i\lambda & \lambda u\\ \lambda v & i\lambda\end{pmatrix}y,\quad i^2=-1 \tag{17}$$

命

$$u=\frac{i\langle\Lambda q,q\rangle}{\sqrt{1+\langle\Lambda q,q\rangle\langle\Lambda p,p\rangle}},\quad v=\frac{-i\langle\Lambda p,p\rangle}{\sqrt{1+\langle\Lambda q,q\rangle\langle\Lambda p,p\rangle}} \tag{18}$$

其中　$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$，$q=(q_1,\cdots,q_N)^T$，$p=(p_1,\cdots,p_N)^T$；$\lambda_1,\cdots,\lambda_N$ 是(17)的 N 个互不相同的特征值，$y=(q_k,p_k)^T$ 是相应于 $\lambda_k(k=1,\cdots N)$ 的特征函数。

在 Bargmann 约束(18)下，(17)浓缩后被非线性化为一个 Hamilton 系统

$$(H^{(2)}):\begin{cases}q_x=-i\Lambda q+\dfrac{i\langle\Lambda q,q\rangle}{\sqrt{1+\langle\Lambda q,q\rangle\langle\Lambda p,p\rangle}}\Lambda p=\dfrac{\partial H^{(2)}}{\partial p}\\[2ex] p_x=i\Lambda p-\dfrac{i\langle\Lambda p,p\rangle}{\sqrt{1+\langle\Lambda q,q\rangle\langle\Lambda p,p\rangle}}\Lambda q=-\dfrac{\partial H^{(2)}}{\partial q}\end{cases} \tag{19}$$

其中，Hamilton 函数　$H^{(2)}=-i\langle\Lambda p,q\rangle+i\sqrt{1+\langle\Lambda q,q\rangle\langle\Lambda p,p\rangle}$

定理4　(19)的 Hamilton 函数 $H^{(2)}$ 与 F_m 对合，即

$$(H^{(2)},F_m)=0,\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{20}$$

又 $(F_k,F_l)=0$，因而 Hamilton 系统(19)在 Liouville 意义下是完全可积的。

证明　通过直接计算 Poisson 括号：

$$(H^{(2)},F_m)=\left\langle\frac{\partial H^{(2)}}{\partial q},\frac{\partial F_m}{\partial p}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial H^{(2)}}{\partial p},\frac{\partial F_m}{\partial q}\right\rangle$$

便知(20)式成立。

记 g_x^{x}、$g_{t_m}^{t_m}$ 分别是 $(H^{(2)})$、(F_m) 初值问题的解算子，定义相容方程组 $(H^{(2)})$、(F_m) 的对合解

$$\begin{pmatrix}q(x,t_m)\\ p(x,t_m)\end{pmatrix}=g_x^{x}g_{t_m}^{t_m}\begin{pmatrix}q(0,0)\\ p(0,0)\end{pmatrix} \tag{21}$$

(21)是 x,t_m 的二元光滑函数，且 g_1 与 g_m 可换.

定理 5 设 $(q(x,t_m),p(x,t_m))^T$ 是相容系统 $(H^{(2)})$、(F_m) 的一个对合解，那么

$$u(x,t_m)=\frac{i\langle \Lambda q,q\rangle}{\sqrt{1+\langle \Lambda q,q\rangle\langle \Lambda p,p\rangle}},\quad v(x,t_m)=\frac{-i\langle \Lambda p,p\rangle}{\sqrt{1+\langle \Lambda q,q\rangle\langle \Lambda p,p\rangle}} \tag{22}$$

满足高阶非线性 WKI 发展方程

$$4i\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_{t_{m+1}}=J\mathscr{L}^mG_1,\qquad m=0,1,2,\cdots. \tag{23}$$

其中，递推算子 $\mathscr{L}=J^{-1}K$，$G_0=\left(i\frac{v}{w},i\frac{u}{w}\right)^T$，$w=\sqrt{1-uv}$；微分算子 J、K、$\mathscr{L}$ 分别为 $(\partial=\partial/\partial x,\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1)$：

$$J=\begin{pmatrix}0&-\partial\\ \partial&0\end{pmatrix},\quad K=\frac{1}{2i}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\partial\frac{u}{w}\partial^{-1}\frac{u}{w}\partial & \partial+\frac{1}{2}\partial\frac{u}{w}\partial^{-1}\frac{v}{w}\partial\\ \partial+\frac{1}{2}\partial\frac{v}{w}\partial^{-1}\frac{u}{w}\partial & -\frac{1}{2}\partial\frac{v}{w}\partial^{-1}\frac{v}{w}\partial\end{bmatrix}$$

$$\mathscr{L}=J^{-1}K=\frac{1}{2i}\begin{bmatrix}\partial+\frac{1}{2}\frac{v}{w}\partial^{-1}\frac{u}{w}\partial & -\frac{1}{2}\frac{v}{w}\partial^{-1}\frac{v}{w}\partial\\ \frac{1}{2}\frac{u}{w}\partial^{-1}\frac{u}{w}\partial & -\partial-\frac{1}{2}\frac{u}{w}\partial^{-1}\frac{v}{w}\partial\end{bmatrix}$$

证明 设 $Q=\sqrt{1+\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle}$. 由(19)式，我们有

$$\partial Q^{-1}=iQ^{-3}(\langle \Lambda^2q,q\rangle\langle \Lambda p,p\rangle-\langle \Lambda^2p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle) \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\partial\langle \Lambda^{m+1}q,q\rangle=&-4\langle \Lambda^{m+2}q,q\rangle+4Q^{-1}\langle \Lambda q,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle\\&+4Q^{-1}\langle \Lambda^2q,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle-4Q^{-2}\langle \Lambda q,q\rangle\langle \Lambda^2p,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle\\&-2Q^{-2}\langle \Lambda q,q\rangle^2\langle \Lambda^{m+2}p,p\rangle+2Q^{-2}\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}q,q\rangle\\&-2Q^{-3}\langle \Lambda q,q\rangle\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda^2q,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle\\&+2Q^{-3}\langle \Lambda q,q\rangle^2\langle \Lambda^2q,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\partial\langle \Lambda^{m+1}p,p\rangle=&-4\langle \Lambda^{m+1}p,p\rangle+4Q^{-1}\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle\\&+4Q^{-1}\langle \Lambda^2p,p\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle-4Q^{-2}\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda^2p,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle\\&-2Q^{-2}\langle \Lambda p,p\rangle^2\langle \Lambda^{m+2}p,p\rangle+2Q^{-2}\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,p\rangle\\&-2Q^{-3}\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle\langle \Lambda^2p,p\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle\\&+2Q^{-3}\langle \Lambda p,p\rangle^2\langle \Lambda^2q,q\rangle\langle \Lambda^{m+2}p,q\rangle\end{aligned} \tag{26}$$

从(22)式，可以计算出

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}_{t_{m+1}}=&\,iQ^{-3}\langle \Lambda q,q_{t_{m+1}}\rangle\begin{pmatrix}2+\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle\\ \langle \Lambda p,p\rangle^2\end{pmatrix}\\&-iQ^{-3}\langle \Lambda p,p_{t_{m+1}}\rangle\begin{pmatrix}\langle \Lambda q,q\rangle^2\\ 2+\langle \Lambda p,p\rangle\langle \Lambda q,q\rangle\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{27}$$

另一方面，令 $\nabla\lambda_j=(\lambda_jp_j^2,-\lambda_jq_j^2)^T$，则(注意 $w=\sqrt{1-uv}$) (18)式等价于

$$G_1=\sum_{j=1}^{N}\nabla\lambda_j \tag{28}$$

又由文[11]可知 $K\nabla\lambda_j=\lambda_jJ\nabla\lambda_j$. 因而让算子 $\mathscr{L}$ 作用(28)的两端后得到

$$\mathscr{L}^{l} G_0 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{l} \nabla \lambda_j \quad \forall\, l \in Z^+ \tag{29}$$

将(7)式代入(27)，并注意到(25)、(26)和(29)，我们有

$$4i\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_{m+2}} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle \Lambda^{m+1} p, p \rangle \\ -\langle \Lambda^{m+1} q, q \rangle \end{pmatrix} = J \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{m} \quad \nabla \lambda_k = J \mathscr{L}^{m} G_0$$

参 考 文 献

[1] Lax, P. D., Nonlinear Evolution Equation, Ed. M. G. Crandall, Academic Press, New York(1978), 207－224.

[2] Tu G. Z., J. Phys. A, Math. Gen., 15(1982), 277－285.

[3] 曹策问，中国科学，A 辑，7(1989)，701－707.

[4] Cao Cewen and Geng Xianguo, Nonlinear Physics, (Research Reports in Physics), Speinger-Verlag, Berlin(1988), 68－78.

[5] Arnold, V. I., Mathematical method of classical mechanics, Speinger-Verlag, Berlin, 1978.

[6] 曹策问，河南科学，5(1987)，1，1－10.

[7] Taktajan, L. A., Phys. Lett., 64A(1977), 235.

[8] 许太喜，顾祝全，科学通报，34(1989)，18，1438.

[9] 谷超豪等著，孤立子理论与应用，浙江科学技术出版社，1990，第四章，175－215.

[10] Boiti, M., Pempinell, F. and Tu Guizhang, Prog. of Theoretical Phys., 69(1983), 1, 48－64.

[11] 乔志军，科学通报，37(1992)，8，763－764.